

МО України  
Рівненський державний педагогічний інститут

Рівненське відділення АН ВШ України

Рівненська та Волинська регіональні організації  
Українського математичного товариства

# Волинський математичний вісник

(Матеріали школи-семінару “Прикладні проблеми  
математики та інформатики”,  
1-4 лютого 1996 р., м. Рівне)

ВИП. 2

Рівне 1995

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної і прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

Редакційна колегія:

В. Ю. Слюсарчук (головний редактор),  
А. Я. Бомба (відповідальний за випуск),  
В. О. Вальковський, М. М. Войтович,  
В. Й. Горбайчук, В. В. Ковтунець,  
І. В. Коробчук, А. О. Сяський, Г. П. Хома.

Видається один раз у рік з 1994р. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.95р. Засновники: А. Я. Бомба (голова Рівненського регіонального відділення Українського математичного товариства), В. В. Ковтунець (член правління Українського математичного товариства), В. Ю. Слюсарчук (головний редактор "Волинського математичного вісника").

При виданні матеріалів школи-семінару редакція вирішила не брати на себе право істотного редагування підготовлених авторами текстів.

Редакція приймає статті лише після оголошення математичним товариством чергового набору вісника. Контактні телефони:

26-04-44, 26-26-97.

с Українське математичне товариство (Рівненська регіональна організація).

Зміст

1. Антонова Т. М. Один одновимірний аналог теореми про рівномірну просту параболічну область збіжності ланцюгових дробів. ....	6
2. Бартіш М. Я., Чипурко А. І. Про один метод розв'язування задачі про найменші квадрати. ....	9
3. Бернакевич І. Є. Чисельне розв'язування початково-крайових задач акустики. ....	12
4. Боднар Д. І., Дубиняк О. С. Розвинення відношення функції Аппеля в гіллясті ланцюгові дроби. ....	15
5. Бомба А. Я., Каштан С. С., Михальчук В. В. Про наближений метод конформних відображень розв'язування одного класу крайових задач. ....	18
6. Бомба А. Я., Хлапук М. М., Сидорчук Б. П. Про моделювання і розв'язання одного класу локально збурених нелінійних задач. ....	22
7. Бомба А. Я., Щодро О. Є., Барановський С. В. Про моделювання і дослідження сингулярно збурених дифузійних процесів в контрастних середовищах. ....	25
8. Вагін П. П., Пука Є. О., Шинкаренко Г. А. Підсистема накопичення інформації для ведення моніторингу земельних ресурсів. ....	28
9. Вальковський В. О., Курбацький О. М., Фарід Т. М. Формалізація і оптимізація процесів документообігу засобами схем потоків даних. ....	31
10. Вальковський В. О., Зербіно Д. Д. Організація асинхронного управління процесом розподіленої обробки інформації. ....	34
11. Вальковський В. О. Аксиоматика і синтез програм для одного класу систем реального часу. ....	38
12. Вовк В. Д., Голуб В. М., Дубовик А. В., Копитко М. Ф. Інформаційна система "Землевласники і землекористувачі Львівщини". ....	40
13. Герасимик Т. М., Данько О. І., Малашнік О. П., Шинкаренко Г. А. Чисельне розв'язування варіаційних задач п'єзоелектрики. ....	43
14. Герасименко В. І., Сташенко М. О. Кінетична границя рівноважних станів. ....	46
15. Гоєнко Н. П. Алгоритм розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли в гіллястий ланцюговий дріб. ....	49
16. Горбайчук В. Я., Піддубний О. М. Теореми типу Харді-Літтлвуда при додаткових умовах на задані величини. Граничні властивості. ....	52
17. Городецький В. В., Готинчан Т. І. Властивість локалізації для лінійних методів сумування формальних рядів Фур'є-Ерміта та Фур'є-Лагерра. ....	55
18. Готинчан Г. І., Ясинський В. К. Теорема існування та єдиності розв'язку для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь. ....	58
19. Дейнека О. Ю. Обмежені розв'язки крайових задач для систем гіперболічних рівнянь. ....	61
20. Демчик І. І. Узагальнена математична модель процесів магнітного фільтрування та її розв'язки. ....	64
21. Дияк І. І., Головач Н. П. Застосування прямого методу граничних елементів для чисельного дослідження деяких прикладних задач. ....	67
22. Дияк І. І., Макар В. М. Чисельне дослідження динамічної за-	

дачі теорії пружності для анізотропних тіл. ....	70
23. Іванова Н. В. Дослідження пружної рівноваги пластинок складної форми методом довільних кривих. ....	73
24. Івасишєв С. Д., Дронь В. С. Деякі властивості фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. ....	76
25. Івасишин А. М. Про властивості класичних розв'язків одного класу загальних еліптичних систем рівнянь. ....	79
26. Іваськевич М. І. Розв'язування одного варіанту задачі нестационарних коливань. ....	82
27. Зербіно Д. Д. Ралізація двійкової арифметики засобами клітинних автоматів. ....	84
28. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Сохан П. А. Задача Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними безмежного порядку. ....	87
29. Ковтунець В. В., Лотюк Ю. Г. Побудова многочлена найкращого рівномірного наближення розв'язку одного диференціального рівняння. ....	90
30. Козаревська Ю. С., Шинкаренко Г. А. Скінченно-елементні апроксимації Ерміта для одновимірних задач міграції домішок. ....	93
31. Койфман Ч. Н. Математична модель взаємодії середовищ з тонкими прошарками. ....	96
32. Колупаєв Б. С., Борджік М. А., Гусаковський С. М. Математичне моделювання процесів перенесення теплової енергії в гетерогенних системах на основі лінійних аморфних полімерів. ....	99
33. Конєт І. М., Ленюк М. П. Нестационарні температурні поля в кусковооднорідних парашутних просторах. ....	104
34. Крайчук О. В. Групи з умовою мінімальності для підгруп нескінченного індексу. ....	107
35. Кузьменко А. П., Бомба А. Я., Савчук Я. Р., Ковальчук О. В. Про метод Р-трансформації розв'язання одного класу крайових задач з розривними коефіцієнтами. ....	110
36. Кузьменко А. П., Гладка О. М. Розв'язок крайових задач для рівняння дивергентного типу із розривними коефіцієнтами у кільці. ....	113
37. Кундрат М. М. Дослідження локального руйнування композиції з включенням. ....	116
38. Ленюк М. П. Підсумовування однієї групи функціональних рядів. ....	119
39. Олійник Т. М., Остудін Б. А. Чисельне розв'язування деяких початково-крайових задач теплопровідності методом інтегральних рівнянь. ....	122
40. Петрівський Я. Б., Ковальчук О. Р., Хома Г. П. Єдиність крайової періодичної задачі для інтегро-диференціального рівняння другого порядку гіперболічного типу. ....	125
41. Петрівський Я. Б. Гладкі розв'язки квазілінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку гіперболічного типу. ....	127
42. Петрик М. Р. Осесиметрична квазілінійна математична модель фільтрації та відтиску неоднорідних високодисперсних середовищ у гвинтових конічних фільтрувальних апаратах. ....	130
43. Пізир Я. В., Попов Б. О. Побудова многочленних ермітово-Чебишевських сплайнів третього степеня. ....	134
44. Савула Я. Г., Дяконюк Л. М. Чисельне моделювання тепло-масопереносу у середовищі з тонким покриттям. ....	137
45. Слосарчук В. Ю. Оборотність лінійних автономних диференці-	

ально-різнених операторів . . . . .	140
46. Слюсарчук В. Ю. Нелінійні диференціальні рівняння з асимптотично стійкими розв'язками. . . . .	143
47. Слюсарчук В. К., Мартинюк П. Н. Про асимптотичне найкраще рівномірне наближення дробово-раціональними функціями деяких спеціальних і елементарних функцій. . . . .	146
48. Сяський А. О. Контакт жорсткого штампа з криволінійним отвором нескінченної пластинки. . . . .	149
49. Сяський В. А., Мартинович Т. Л. Пружна рівновага пластинки з криволінійним отвором та включенням при частковому контактуванні границь. . . . .	152
50. Талесів П. О. Основна система диференціальних рівнянь точкової відповідності між гіперрозподілами просторів проєктивної зв'язності. . . . .	155
51. Тарангул О. В., Матіючук М. І. Про одну нелокальну параболічну крайову задачу. . . . .	159
52. Тарасюк Р. І. Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами. . . . .	162
53. Танія Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Нахолок Б. Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра. . . . .	165
54. Тополок Ю. П. Проблеми розв'язування задач синтезу за заданою амплітудною діаграмою напрямленості. . . . .	166
55. Турбал Ю. В. Оцінка параметрів моделі радіоактивного забруднення методом моментів. . . . .	171
56. Каркевич Ю. І. Про наближення функцій класу $C_n$ операторами, що породжуються прямокутними - методами підсумовування інтегралів. . . . .	174
57. Хома Г. П., Вотьок А. О., Цинайко П. В. Узагальнений розв'язок однієї мішаної задачі. . . . .	177
58. Хома А. Г., Хома Н. Г., Петрівський Я. Б. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі. . . . .	179
59. Шеремета М. М., Воднар Р. Д. Рациональна апроксимація на $[0, 1]$ аналітичних в крузі функцій. . . . .	181
60. Янчук П. С. Апроксимаційно-ітеративні схеми кусково-многочленного наближення. . . . .	184
61. Янчук П. С., Демчук О. В., Возняк П. В. Апроксимаційно-ітеративний метод на основі ортогональних многочленів Якобі. . . . .	188
62. Янчук П. С., Шпортько О. В. Кусково-многочленне наближення розв'язків задачі Дірікле в $L$ -подібних областях. . . . .	191
63. Ясинський В. К., Юрченко І. В. Теорема існування та єдиності для стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими функціоналами. . . . .	194
64. Ясинський І. В., Ясинський І. В. Властивості розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з нескінченною післядією. . . . .	197
Анотації . . . . .	200

УДК 519.6

П.С. Яніук, канд.фіз.-мат.наук (Рівне, педінститут)

## Апроксимаційно-ітеративні схеми кусково-многочленного наближення.

Пропонується економічна схема побудови кусково-многочленного наближення розв'язків рівняння Пуассона, яка дає оптимальне за порядком наближення. Схему можна використовувати для швидкого і якісного наближення розв'язку задачі Діріхле в  $L$ -подібних областях.

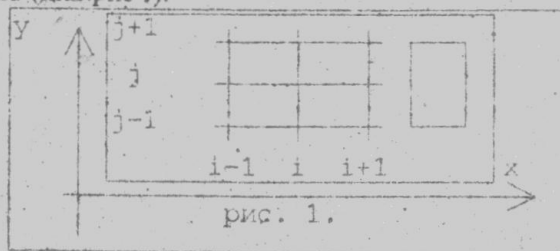
**1. Вступ.** Рівняння Пуассона є достатньо важливим для того, щоб спеціально для нього розробити ефективне наближення його розв'язків. В даній роботі буде представлено алгоритм кусково-многочленного наближення розв'язку задачі Діріхле. Для спрощення викладок ми обмежимося многочленами третього степеня.

Розглянемо задачу вигляду:

$$-\Delta U = f(x), \quad (1)$$

$$U|_{\partial\Omega} = g(x), \quad (2)$$

де  $U=U(x,y)$  невідома функція,  $f(x)$  і  $g(x)$  відомі функції,  $\Omega$  деяка  $L$ -подібна область (див.рис 1).



**2. Схема алгоритму.** Побудуємо в області  $\Omega$  сітку  $\bar{\omega} = \{(x_i, y_j) : (i,j) \in \bar{\Gamma}\}$  аналогічно, як і в класичному методі сіток. Для простоти крок сітки будемо вважати рівномірним, як по  $x$  так і по  $y$ , і рівним деякому  $0 < h \leq 1$ . Область  $\Omega$  може бути багатозв'язною, але її

межа повинна бути утворена ламаними з ланками, паралельними координатним осям, вершини яких знаходяться у вузлах сітки. Будемо розрізняти внутрішні:  $\omega = \{(x_i, y_j); (i, j) \in \Gamma\}$  і граничні вузли  $\partial\omega = \{(x_i, y_j); (i, j) \in \partial\Gamma\}$ . Перші мають належати внутрішності  $\text{int } \Omega$ , а інші - межі  $\partial\Omega$  області. Вимагаємо, щоб сітка була зв'язною, тобто будь-які два внутрішні вузли можна було з'єднати ламаною, яка належить  $\text{int } \Omega$  і перетинає лінії сітки лише у вузлах  $\omega$ .

Кожному вузлу  $(x_i, y_j)$  області  $\Omega$  поставимо у відповідність числа  $p_{ij}, r_{ij}, q_{ij}, s_{ij}$ . Для всіх внутрішніх вузлів визначимо ітеративно  $p_{ij}$  та  $r_{ij}$  за схемою:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{k+1} &= \frac{3}{16} (p_{i,j+1}^k + p_{i,j-1}^k) - \frac{5}{16} (r_{i+1,j}^k + r_{i-1,j}^k) - \frac{5}{8} h^2 F_{i,j}^{11}, \\ r_{i,j}^{k+1} &= \frac{3}{16} (r_{i+1,j}^k + r_{i-1,j}^k) - \frac{5}{16} (p_{i,j+1}^k + p_{i,j-1}^k) - \frac{5}{8} h^2 F_{i,j}^{11}, \\ &(i, j) \in \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

і після цього визначаємо числа  $q_{ij}$  та  $s_{ij}$  за схемою:

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{k+1} &= -\frac{1}{208} (q_{i,j+1}^k + q_{i,j-1}^k) - \frac{35}{108} (r_{i+1,j}^k - r_{i-1,j}^k) - \frac{105}{104} F_{i,j}^{21} h^2, \\ s_{i,j}^{k+1} &= -\frac{1}{208} (s_{i+1,j}^k + s_{i-1,j}^k) - \frac{35}{108} (p_{i,j+1}^k - p_{i,j-1}^k) - \frac{105}{104} F_{i,j}^{12} h^2, \\ &(i, j) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $k$  номер ітерації.

Значення невідомого розв'язку у вузлі  $(x_i, y_j)$  позначимо через  $a_{ij}$ , тобто  $a_{ij} = U(x_i, y_j)$ . Числа  $a_{ij}$  визначимо ітеративно за формулами:

$$a_{i,j}^{k+1} = (a_{i+1,j}^k + a_{i-1,j}^k + a_{i,j+1}^k + a_{i,j-1}^k) / 4 - (p_{i,j}^k + r_{i,j}^k) / 4, \quad (5)$$

де  $k$  номер ітерації.

Перед початком ітерацій обчислюються числа

$$F_{i,j}^{k,1} = (2 + k + 1) + (2 + l + 1) / 4 *$$

$$* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^x \int_{-1}^y f(x_1 + h x_2, y_1 + h y_2) dx_1 dy_1 \right) * P_k(x) * P_l(y) dx dy, \quad (6)$$

$$(i,j) \in \Gamma,$$

а також числа

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \frac{3}{2} \left( g_{i+1,j} + g_{i-1,j} - \int_{-1}^1 g(x_1 + h z, y_j) dz \right), \\ Q_{i,j} &= \frac{5}{2} \left( g_{i+1,j} - g_{i-1,j} - 3 \int_{-1}^1 z g(x_1 + h z, y_j) dz \right), \\ r_{i,j} &= \frac{3}{2} \left( g_{i,j+1} + g_{i,j-1} - \int_{-1}^1 g(x_1, y_j + h z) dz \right), \\ s_{i,j} &= \frac{5}{2} \left( g_{i,j+1} + g_{i,j-1} - 3 \int_{-1}^1 z g(x_1, y_j + h z) dz \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$(i,j) \in \partial \Gamma,$$

де  $(i,j)$  відповідає всім граничним вузлам, крім тих, які є вершинами ламаних, що утворюють нашу область.

**3. Формування наближеного розв'язку.** В околі вузла  $(x_i, y_j)$  розв'язок запишемо у вигляді:

$$U^{i,j} = \sum_{k,l=0}^3 C_{i,j}^{k,l} \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^k \left( \frac{y-y_j}{h} \right)^l, \quad (8)$$

$$x_i - h \leq x \leq x_i + h, \quad y_j - h \leq y \leq y_j + h,$$

$$C_{i,j}^{0,0} = a_{i,j},$$

$$C_{i,j}^{1,0} = \frac{a_{i+1,j} - a_{i-1,j}}{2}, \quad C_{i,j}^{0,1} = \frac{a_{i,j+1} - a_{i,j-1}}{2}, \quad C_{i,j}^{0,2} = \frac{s_{i,j}}{2},$$

$$C_{i,j}^{2,0} = \frac{P_{i,j}}{2}, \quad C_{i,j}^{0,2} = \frac{r_{i,j}}{2}, \quad C_{i,j}^{3,0} = \frac{Q_{i,j}}{2}, \quad C_{i,j}^{0,3} = \frac{S_{i,j}}{2},$$



$$\begin{aligned}
 C_{i,j}^{22} &= \frac{5}{8} (F_{i,j}^{11}) \frac{h^2}{2} + \frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1}}{4} + \frac{r_{i+1,j} + r_{i-1,j}}{4}, \\
 C_{i,j}^{22'} &= \frac{5}{8} \frac{(a_{i+1,j} + a_{i-1,j}) + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4} + \frac{q_{i,j+1} + q_{i,j-1}}{4} + \frac{s_{i+1,j} + s_{i-1,j}}{4}, \\
 C_{i,j}^{13} &= \frac{105}{52} (F_{i,j}^{11}) \frac{h^2}{4} + \frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1}}{12} + \frac{s_{i+1,j} + s_{i-1,j}}{8}, \\
 C_{i,j}^{32} &= \frac{510}{52} (F_{i,j}^{21}) \frac{h^2}{2} + \frac{q_{i,j+1} + q_{i,j-1}}{8} + \frac{r_{i+1,j} + r_{i-1,j}}{12}, \\
 C_{i,j}^{33} &= \frac{21}{4} (F_{i,j}^{22}) \frac{h^2}{4} + \frac{q_{i,j+1} + q_{i,j-1}}{12} + \frac{s_{i+1,j} + s_{i-1,j}}{12}, \\
 C_{i,j}^{12} &= -C_{i,j}^{32} + \frac{r_{i+1,j} - r_{i-1,j}}{4}, \quad C_{i,j}^{21} = -C_{i,j}^{33} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{4}, \\
 C_{i,j}^{13} &= -C_{i,j}^{33} + \frac{s_{i+1,j} - s_{i-1,j}}{4}, \quad C_{i,j}^{31} = -C_{i,j}^{33} + \frac{q_{i,j+1} - q_{i,j-1}}{4}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

**4.Збіжність.** Нехай  $U$  - точний розв'язок задачі (1),(2), а  $u^h(x,y)$  - наближення вигляду (8) в квадраті  $\Pi_h = [x-h, x+h] \times [y-h, y+h]$ . Тоді для довільного розв'язку  $U \in C^k(\Omega)$  задачі (1),(2) існує таке число  $K$ , не залежне від  $h, x, y$ , що має місце нерівність:

$$|D^\alpha (U - U^h(x, y))| \leq K h^{4-|\alpha|}, \quad (10)$$

$0 \leq |\alpha| \leq 3, (x,y) \in \Pi^h$ , де, як завжди,  $D^\alpha f = f$ , для будь-якої функції  $f$ . Зауважимо, що порядок в оцінці (9) не можна покращити в загальному випадку. Порядок цієї оцінки підтверджується проведеними практичними обчисленнями.

1.В.К.Дзяльк. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.-К.:Наукова думка,1986.

2.А. Самарский. Теория разностных схем.- М.: Наука, 1983.