

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

Випуск 8

2001

Зміст

Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. ДО ПИТАННЯ ПРО МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ РОСТУ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ЛАГАМИ.....	4
Бомба А.Я., Каштан С.С. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ТА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ.....	9
Булавацький В.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НЕРІВНОВАЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ НА ОСНОВІ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ.....	23
Бурак Я.Й., Кондрат В.Ф. РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ПОВІЛЬНО РУХОМИХ ПОРИСТИХ НАСИЧЕНИХ ТІЛ.....	27
Буренко В.І. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ВИРІЗАНИМИ СЕГМЕНТАМИ БІЛЯ ПОЛЮСІВ ПІД ЗОВНІШНІМ ТИСКОМ.....	33
Возняк О.Г. ПРО ОДНОЗНАЧНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ТА ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ.....	37
Дейнека В.С., Баран І.О. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ.....	48
Демиденко О.М., Быченко О.В., Максимей І.В., Агеєнко І.В. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В ЛОКАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ БАЗОЙ ДАННЫХ.....	54
Дяконюк Л.М. АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ІЄРАРХІЧНОЇ МОДЕЛІ ПОНИЖЕНОЇ ВИМІРНОСТІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ.....	61
Комбель С.М. НЕНАПРУЖЕНА ПОСАДКА ЖОРСТКОГО ДИСКА В ЕЛІПТИЧНИЙ ОТВІР НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ.....	65
Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ ТА РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	71
Кундрат М.М. ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КОМПОЗИЦІЇ З ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ.....	78
Кухарський В.М., Савула Я.Г., Копитко М.Ф. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ У СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ ВКЛЮЧЕНИМИ ТОНКИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ ШАРАМИ.....	86
Сяський А.О., Комбель С.М. ГРАНИЧНІ УМОВИ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА.....	93
Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. ПРО ВРАХУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ХІМІЧНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ І КОНЦЕНТРАЦІЯМИ В ЗАДАЧАХ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ.....	98
Яджак М.С. ПРО МОДЕЛЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ З ОБМЕЖЕНИМ ПАРАЛЕЛІЗМОМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	105

УДК 519.632.4.001.57+517.54

Бомба А.Я., Каштан С.С.

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ТА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Розроблено новий алгоритм чисельного розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, з побудовою динамічної сітки.

1. Крайові задачі в ізотропних середовищах. Розглянемо модельну нелінійну задачу на знаходження квазігармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в однозв'язній чотирикутній криволінійній області (пористому пласті) $G_z = ABCD$, обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z = x + iy : f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$, ортогональними між собою в точках їх перетину:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0; \varphi|_{AB} = \varphi_*, \varphi|_{CD} = \varphi^*, \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0, \quad (1)$$

де $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\kappa(x, y, \varphi, \psi)$ – обмежена неперервно диференційована функція, що характеризує провідність середовища та схильність його до деформацій, $\psi = \psi(x, y)$ – відповідна функція течії. Замінивши останні дві із граничних умов (1) на відповідні умови для функції $\psi(x, y)$, квазікомплексно спряженої до функції $\varphi(x, y)$ (див., напр., [1 – 6]), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне (конформне при $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \text{const}$) відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ даної області G_z на відповідну область квазікомплексного (комплексного, якщо $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \text{const}$) потенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ (див. рис. 1):

$$\kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \varphi|_{AB} = \varphi_*, \varphi|_{CD} = \varphi^*, \psi|_{AD} = 0, \psi|_{BC} = Q, \quad (2)$$

де стала Q – повна витрата (невідомий параметр). Відповідна їй обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \kappa(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{\kappa(x, y, \varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (3)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases} \quad (4)$$

Зауважимо, що тут, на відміну від часткового випадку, коли $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \kappa(\varphi, \psi)$, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ є взаємно залежними, а саме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_x(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \kappa'_\varphi(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\kappa(x, y, \varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \\ & + \kappa(x, y, \varphi, \psi) \left(\kappa'_x(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} + \kappa'_\psi(x, y, \varphi, \psi) \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_x(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \kappa'_\varphi(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \kappa(x, y, \varphi, \psi) \left(\kappa'_x(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} + \kappa'_\psi(x, y, \varphi, \psi) \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0.$$

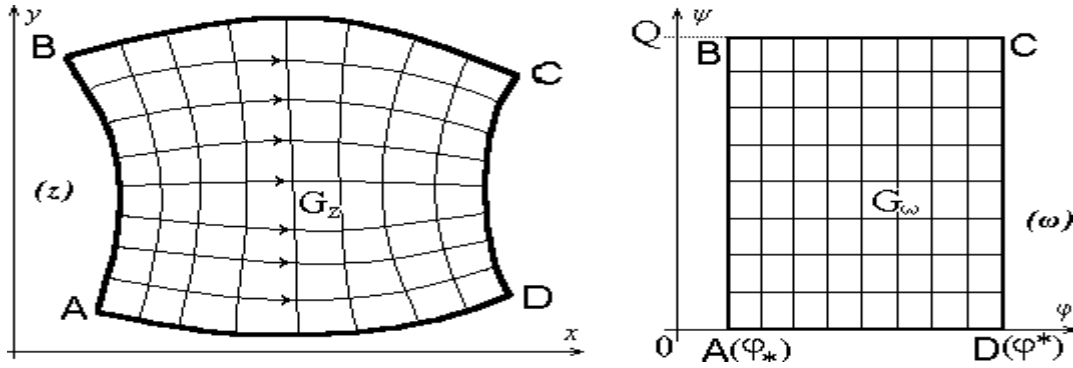


Рис. 1. Фізична область G_z та відповідна їй область квазіконформного потенціалу G_ω .

1.1. Якщо $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \kappa(\varphi, \psi)$, то, замість вище одержаних рівностей, матимемо:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa(\varphi, \psi) \kappa'_\psi(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi}}{\kappa(\varphi, \psi)} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \kappa(\varphi, \psi) \kappa'_\psi(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi}}{\kappa(\varphi, \psi)} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов "квазіконформної подібності в малому" відповідних чотирикутників [1 – 5], у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = \overline{0, n+1};$

$\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, m, n \in \mathbb{N}$ } запишемо у вигляді [16]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2) x_{i,j} + \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\gamma \kappa_{i,j} \kappa'_{\psi,i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) - \frac{\kappa'_{\varphi,i,j}}{\kappa_{i,j}} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \right) + \\ + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2 (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \quad y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2) y_{i,j} + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2 (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) + \\ + \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\gamma \kappa_{i,j} \kappa'_{\psi,i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \frac{\kappa'_{\varphi,i,j}}{\kappa_{i,j}} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \quad f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \\ f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, \\ f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})^2}} \quad (9)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\kappa_{i,j} = \kappa(\varphi_i, \psi_j)$.

Тоді алгоритм розв'язання відповідної (3), (4) різницевої задачі у цьому випадку побудуємо наступним чином. Початкові наближення граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$ задаємо так, щоб виконувалися умови

$$(7): \quad f_1(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})=0, \quad f_2(x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)})=0, \quad f_3(x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)})=0, \quad f_4(x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)})=0,$$

$i = \overline{0, m+1}$, $j = \overline{0, n+1}$. Початкові наближення внутрішніх вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$ вибираємо, наприклад, як середні арифметичні чотирьох координат відповідних граничних вузлів:

$$x_{i,j}^{(0)} = \frac{1}{4} (x_{i,0}^{(0)} + x_{i,n+1}^{(0)} + x_{m+1,j}^{(0)} + x_{0,j}^{(0)}), \quad y_{i,j}^{(0)} = \frac{1}{4} (y_{i,0}^{(0)} + y_{i,n+1}^{(0)} + y_{m+1,j}^{(0)} + y_{0,j}^{(0)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Для задання початкового наближення $\gamma^{(0)}$ невідомої величини γ використаємо формулу (9):

$$\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)}).$$

Далі ітераційно знаходимо послідовні наближення відповідних значень: внутрішніх вузлів (згідно з формулами (6)) –

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \left(x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 (x_{i,j-1}^{(k+1)} + x_{i,j+1}^{(k)}) + \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\gamma^{(k)} \kappa_{i,j} \kappa'_{\psi_{i,j}} (x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)}) - \frac{\kappa'_{\varphi_{i,j}}}{\kappa_{i,j}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)}) \right) \right) / 2 \left(1 + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \right), \quad y_{i,j}^{(k+1)} = \left(y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 (y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i,j+1}^{(k)}) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\gamma^{(k)} \kappa_{i,j} \kappa'_{\psi_{i,j}} (y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)}) - \frac{\kappa'_{\varphi_{i,j}}}{\kappa_{i,j}} (y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)}) \right) \right) / 2 \left(1 + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n};$$

величини γ за формулою (9) – $\gamma^{(k+1)} = \gamma(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ (при цьому наближення витрати Q

знаходимо за формулою $Q = \Delta\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}$);

граничних вузлів за формулами (7), (8) –

$$\begin{cases} f_{1x}'(x_{0,j}^{(k)}, y_{0,j}^{(k)}) (y_{1,j}^{(k+1)} - y_{0,j}^{(k)}) - f_{1y}'(x_{0,j}^{(k)}, y_{0,j}^{(k)}) (x_{1,j}^{(k+1)} - x_{0,j}^{(k)}) = 0, \\ f_{3x}'(x_{m+1,j}^{(k)}, y_{m+1,j}^{(k)}) (y_{m,j}^{(k+1)} - y_{m+1,j}^{(k)}) - f_{3y}'(x_{m+1,j}^{(k)}, y_{m+1,j}^{(k)}) (x_{m,j}^{(k+1)} - x_{m+1,j}^{(k)}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f_{2x}'(x_{i,n+1}^{(k)}, y_{i,n+1}^{(k)}) (y_{i,n+1}^{(k+1)} - y_{i,n+1}^{(k)}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}^{(k)}, y_{i,n+1}^{(k)}) (x_{i,n}^{(k+1)} - x_{i,n+1}^{(k)}) = 0, \\ f_{4x}'(x_{i,0}^{(k)}, y_{i,0}^{(k)}) (y_{i,1}^{(k+1)} - y_{i,0}^{(k)}) - f_{4y}'(x_{i,0}^{(k)}, y_{i,0}^{(k)}) (x_{i,1}^{(k+1)} - x_{i,0}^{(k)}) = 0, & i = \overline{0, m+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}^{(k+1)}, y_{0,j}^{(k+1)}) = 0, \quad f_3(x_{m+1,j}^{(k+1)}, y_{m+1,j}^{(k+1)}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}^{(k+1)}, y_{i,n+1}^{(k+1)}) = 0, \quad f_4(x_{i,0}^{(k+1)}, y_{i,0}^{(k+1)}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \end{cases}$$

де $k = 0, 1, \dots$ – крок ітерації, і перевіряємо виконання умов:

$$\left| D^{(k+1)} - 1 \right| < \varepsilon_*, \quad \left| D_{i,j}^{(k+1)} - D_{i,j}^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad (10)$$

де $D_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i+1,j})^2}}$ – відношення довжин діагоналей відповідного

криволінійного чотирикутника, $D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} D_{i,j}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_* > 0$.

Умовами закінчення процесу, окрім (10), є:

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(|x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)}|, |y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)}| \right) < \varepsilon, \quad |Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon. \quad (11)$$

У випадку невиконання умов закінчення процесу (10) – (11) знову переходимо до уточнення внутрішніх вузлів і т.д. [15]. Якщо не виконується лише перша із умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m, n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх).

1.2. Особливістю такого підходу побудови алгоритму при $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = \kappa(x, y)$ є те, що лінійна вихідна задача переходить у суттєво нелінійну обернену до неї задачу (у попередньому випадку ми мали перехід суттєвої нелінійності вихідної задачі до локалізованої нелінійності оберненої задачі). Дійсно, тут замість формул (5) матимемо:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(x, y) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\kappa(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa(x, y) \left(\kappa'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \kappa^2(x, y) \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \frac{\kappa'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \kappa'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\kappa(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \kappa(x, y) \left(\kappa'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial \psi} + \kappa'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0.$$

І все ж, процес побудови наближень розв'язку даної задачі збігатиметься і в цьому випадку, якщо внести наступні видозміни до побудованого алгоритму: 1) послідовні наближення коефіцієнта провідності $\kappa(x, y)$ на даному кроці у (i, j) -вузлах сітки G_{ω}^{γ} знаходимо тепер після наближень відповідних значень $x_{i,j}, y_{i,j}$, а саме $\kappa_{i,j}^{(k)} = \kappa(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$; 2) послідовні наближення внутрішніх вузлів отримуються на основі різницевого аналогу формул (12):

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \left(x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \left(x_{i,j-1}^{(k+1)} + x_{i,j+1}^{(k)} \right) + \frac{1}{4} \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j} \left(\kappa'_{x_{i,j}} \left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa'_{y_{i,j}} \left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \right) \left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) - \frac{1}{4 \kappa_{i,j}} \left(\kappa'_{x_{i,j}} \left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa'_{y_{i,j}} \left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \right) \left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \right) / 2 \left(1 + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \right),$$

$$y_{i,j}^{(k+1)} = \left(y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \left(y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i,j+1}^{(k)} \right) + \frac{1}{4} \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j} \left(\kappa'_{x_{i,j}} \left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa'_{y_{i,j}} \left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \right) \left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) - \frac{1}{4 \kappa_{i,j}} \left(\kappa'_{x_{i,j}} \left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa'_{y_{i,j}} \left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \right) \left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \right) / 2 \left(1 + \gamma^{(k)^2} \kappa_{i,j}^2 \right),$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

2. Крайові задачі в анізотропних середовищах. Як відомо [14, 17], стаціонарний процес

фільтрації в неоднорідному анізотропному середовищі описується за допомогою рівняння руху (закон Дарсі) та рівняння нерозривності:

$$\vec{v} = -\chi \text{grad} h = \kappa \text{grad} \varphi, \quad \text{div} \vec{v} = 0. \quad (13)$$

Тут $h = h(x, y)$ – напір, $\kappa = \chi_*^{-1} \chi = (\kappa_{i,j})_{i,j=1,2}$, $\chi = (\chi_{i,j})_{i,j=1,2}$ – тензор фільтрації (χ_* – його характерний розмір), $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість фільтрації, а $\varphi = -\chi_* h$ – її потенціал. Дані рівняння забезпечують існування функції течії $\psi = \psi(x, y)$:

$$\kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14)$$

Як і раніше, вихідну задачу (у диференціальній формі), аналогічно до (1) – (2), зводимо до розв'язання в області G_z системи диференціальних рівнянь (14) при граничних умовах (2)

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (15)$$

з допомогою відповідного квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на область G_ω . З метою забезпечення гладкості даного відображення у кутових точках A, B, C, D на функції $f_i(x, y) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, накладаємо наступні умови:

$$\Theta_M + \tilde{\Theta}_M = \frac{\pi}{2}, \quad \text{де} \quad \cos \Theta_M = \frac{f_{i-1x}'(M)f_{ix}'(M) + f_{i-1y}'(M)f_{iy}'(M)}{\sqrt{f_{i-1x}'^2(M) + f_{i-1y}'^2(M)} \sqrt{f_{ix}'^2(M) + f_{iy}'^2(M)}},$$

$$\cos \tilde{\Theta}_M = \frac{\kappa_{11}f_{jx}'^2(M) + (\kappa_{12} + \kappa_{21})f_{jx}'(M)f_{jy}'(M) + \kappa_{22}f_{jy}'^2(M)}{\sqrt{f_{jx}'^2(M) + f_{jy}'^2(M)} \sqrt{(\kappa_{11}f_{jx}'(M) + \kappa_{12}f_{jy}'(M))^2 + (\kappa_{21}f_{jx}'(M) + \kappa_{22}f_{jy}'(M))^2}},$$

$$M = A, B, C, D, \quad f_0(M) = f_4(M), \quad j = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, \\ 3, & i = 3, 4. \end{cases}$$

Ці умови означають, що у даних точках M дотичні до відповідних ліній течії повинні на стільки відхилятися від нормалей до відповідних еквіпотенціальних ліній, на скільки анізотропія відхиляє вектор швидкості від даних нормалей. Є й інший варіант позбутися особливості у кутових точках: кути вважати прямими, а в даних точках покласти $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$, $\kappa_{11} = \kappa_{22}$.

Аналоги умов ортогональності (8) в околах граничних ділянок при цьому приймуть вигляд:

$$-f_{kx}'(x, y)y_\varphi + f_{ky}'(x, y)x_\varphi = \sqrt{f_{kx}'^2(x, y) + f_{ky}'^2(x, y)} \sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_k}, \quad k = 1, 3,$$

$$\cos \Theta_k = \frac{\kappa_{11}f_{kx}'^2(x, y) + (\kappa_{12} + \kappa_{21})f_{kx}'(x, y)f_{ky}'(x, y) + \kappa_{22}f_{ky}'^2(x, y)}{\sqrt{f_{kx}'^2(x, y) + f_{ky}'^2(x, y)} \sqrt{(\kappa_{11}f_{kx}'(x, y) + \kappa_{12}f_{ky}'(x, y))^2 + (\kappa_{21}f_{kx}'(x, y) + \kappa_{22}f_{ky}'(x, y))^2}},$$

$$f_{lx}'(x, y)y_\psi - f_{ly}'(x, y)x_\psi = \sqrt{f_{lx}'^2(x, y) + f_{ly}'^2(x, y)} \sqrt{x_\psi^2 + y_\psi^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_l}, \quad l = 2, 4,$$

$$\cos \Theta_l = \frac{\kappa_{11} f_{l_x}'^2(x,y) + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) f_{l_x}'(x,y) f_{l_y}'(x,y) + \kappa_{22} f_{l_y}'^2(x,y)}{\sqrt{f_{l_x}'^2(x,y) + f_{l_y}'^2(x,y)} \sqrt{(\kappa_{11} f_{l_x}'(x,y) + \kappa_{12} f_{l_y}'(x,y))^2 + (\kappa_{21} f_{l_x}'(x,y) + \kappa_{22} f_{l_y}'(x,y))^2}}$$

Зауважимо при цьому, що косинус кута відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнта напору $\text{grad} \varphi$ в довільній внутрішній точці $z = x + iy$ обчислюється за формулою

$$\cos \tilde{\Theta} = \frac{\kappa_{11} \varphi_x'^2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) \varphi_x' \varphi_y' + \kappa_{22} \varphi_y'^2}{\sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2} \sqrt{(\kappa_{11} \varphi_x' + \kappa_{12} \varphi_y')^2 + (\kappa_{21} \varphi_x' + \kappa_{22} \varphi_y')^2}}$$

2.1. У випадку, коли $\kappa_{ij} = \kappa_{ij}(\varphi, \psi)$ (нелінійна пряма задача), обернена задача до (14) – (15) на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q запишеться у вигляді:

$$\kappa_{11}(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12}(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa_{21}(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22}(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{cases} \quad (17)$$

де $Q = \int_{AB} v_n dl$, dl – елемент довжини дуги. При цьому відповідні рівняння другого порядку

для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + A(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} + B(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} + C(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + D(\varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + A(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} + B(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} + E(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F(\varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} = 0, \end{cases}$$

де $A = \kappa_{12} - \kappa_{21}$, $B = \kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{21} \kappa_{12}$, $C = \frac{\kappa_{11} \psi \kappa_{21} - \kappa_{11} \varphi}{\kappa_{11}} - \kappa_{21} \psi$, $E = \kappa_{12} \psi - \frac{\kappa_{22} \psi \kappa_{12} + \kappa_{22} \varphi}{\kappa_{22}}$,

$$D = \kappa_{22} \psi \kappa_{11} + \kappa_{12} \varphi - \kappa_{21} \psi \kappa_{12} - \kappa_{12} \psi \kappa_{21} + \frac{\kappa_{11} \psi \kappa_{21} \kappa_{12} - \kappa_{12} \kappa_{11} \varphi}{\kappa_{11}},$$

$$F = \kappa_{11} \psi \kappa_{22} - \kappa_{21} \varphi - \kappa_{21} \psi \kappa_{12} - \kappa_{12} \psi \kappa_{21} + \frac{\kappa_{22} \psi \kappa_{21} \kappa_{12} + \kappa_{21} \kappa_{22} \varphi}{\kappa_{22}}.$$

Відповідні різницеві аналоги в області G_ω^γ запишемо, наприклад, у вигляді [16]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 B_{i,j}) x_{i,j} + \gamma^2 B_{i,j} (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) + \frac{\gamma}{4} A_{i,j} (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - \\ - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}) + \frac{\Delta \varphi}{2} (\gamma D_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + C_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})) = 0, \\ y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 B_{i,j}) y_{i,j} + \gamma^2 B_{i,j} (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) + \frac{\gamma}{4} A_{i,j} (y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - \\ - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}) + \frac{\Delta \varphi}{2} (\gamma F_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + E_{i,j} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j})=0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})=0, & j=\overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})=0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0})=0, & i=\overline{0, m+1}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & -f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j}-y_{0,j})+f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j}-x_{0,j})= \\ & =\sqrt{f_{1x}'^2(x_{0,j}, y_{0,j})+f_{1y}'^2(x_{0,j}, y_{0,j})}\sqrt{(x_{1,j}-x_{0,j})^2+(y_{1,j}-y_{0,j})^2}\sqrt{1-\cos^2\Theta_{10,j}}, \\ & -f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j}-y_{m+1,j})+f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j}-x_{m+1,j})= \\ & =\sqrt{f_{3x}'^2(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})+f_{3y}'^2(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})}\sqrt{(x_{m+1,j}-x_{m,j})^2+(y_{m+1,j}-y_{m,j})^2}\sqrt{1-\cos^2\Theta_{3m+1,j}}, \\ & f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n}-y_{i,n+1})-f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n}-x_{i,n+1})= \\ & =\sqrt{f_{2x}'^2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})+f_{2y}'^2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})}\sqrt{(x_{i,n}-x_{i,n+1})^2+(y_{i,n}-y_{i,n+1})^2}\sqrt{1-\cos^2\Theta_{2i,n+1}}, \\ & f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1}-y_{i,0})-f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1}-x_{i,0})= \\ & =\sqrt{f_{4x}'^2(x_{i,0}, y_{i,0})+f_{4y}'^2(x_{i,0}, y_{i,0})}\sqrt{(x_{i,1}-x_{i,0})^2+(y_{i,1}-y_{i,0})^2}\sqrt{1-\cos^2\Theta_{4i,0}}, \\ & \qquad \qquad \qquad i=\overline{0, m+1}, \quad j=\overline{0, n+1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \gamma & =\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i,j=0}^{m,n}\frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2+(y_{i+1,j}-y_{i,j})^2}+\sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2+(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{a1+a2}, \\ a1 & =\sqrt{(\kappa_{11}(y_{i,j+1}-y_{i,j})-\kappa_{12}(x_{i,j+1}-x_{i,j}))^2+(\kappa_{21}(y_{i,j+1}-y_{i,j})-\kappa_{22}(x_{i,j+1}-x_{i,j}))^2}, \\ a2 & =\sqrt{(\kappa_{11}(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})-\kappa_{12}(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}))^2+(\kappa_{21}(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})-\kappa_{22}(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}))^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

де $A_{i,j}=A(\varphi_i, \psi_j)$, $B_{i,j}=B(\varphi_i, \psi_j)$, $C_{i,j}=C(\varphi_i, \psi_j)$, $D_{i,j}=D(\varphi_i, \psi_j)$, $E_{i,j}=E(\varphi_i, \psi_j)$, $F_{i,j}=F(\varphi_i, \psi_j)$.

Відповідний алгоритм наближення розв'язку цієї задачі будується аналогічно до п.1.1. При цьому відзначимо, що замість раніше утворених прямокутників в малому в області G_z тепер фігуруватимуть відповідні паралелограми.

2.2. Якщо $\kappa_{ij}=\kappa_{ij}(x, y)$, то, як і в п.1.2, обернена задача є суттєво нелінійною, а саме рівняння другого порядку для знаходження функцій $x=x(\varphi, \psi)$ та $y=y(\varphi, \psi)$ в дивергентній формі матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{11}(x, y)\kappa_{22}(x, y)-\kappa_{21}(x, y)\kappa_{12}(x, y)}{\kappa_{11}(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\kappa_{21}(x, y)}{\kappa_{11}(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{11}(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\kappa_{12}(x, y)}{\kappa_{11}(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\kappa_{11}(x, y)\kappa_{22}(x, y)-\kappa_{21}(x, y)\kappa_{12}(x, y)}{\kappa_{22}(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\kappa_{12}(x, y)}{\kappa_{22}(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_{22}(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\kappa_{21}(x, y)}{\kappa_{22}(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \end{cases}$$

Формули (18) – (21), відповідно при цьому, запишуться так:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 B_{i,j})x_{i,j} + \gamma^2 B_{i,j}(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) + \frac{\gamma}{4} A_{i,j}(x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - \\ - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}) + \gamma D_{i,j}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + C_{i,j}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) = 0, \\ y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 B_{i,j})y_{i,j} + \gamma^2 B_{i,j}(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) + \frac{\gamma}{4} A_{i,j}(y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j-1} - \\ - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}) + \gamma F_{i,j}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + E_{i,j}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \quad f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) + f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = \\ & = \sqrt{f_{1x}''^2(x_{0,j}, y_{0,j}) + f_{1y}''^2(x_{0,j}, y_{0,j})} \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{10,j}}, \\ & -f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) + f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = \\ & = \sqrt{f_{3x}''^2(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) + f_{3y}''^2(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})} \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{3m+1,j}}, \\ & f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = \\ & = \sqrt{f_{2x}''^2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) + f_{2y}''^2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})} \sqrt{(x_{i,n} - x_{i,n+1})^2 + (y_{i,n} - y_{i,n+1})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{2i,n+1}}, \\ & f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = \\ & = \sqrt{f_{4x}''^2(x_{i,0}, y_{i,0}) + f_{4y}''^2(x_{i,0}, y_{i,0})} \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,0})^2 + (y_{i,1} - y_{i,0})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{4i,0}}, \\ & \quad i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{a_1 + a_2}, \\ a_1 &= \sqrt{(\kappa_{11}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{12}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2 + (\kappa_{21}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{22}(x_{i,j+1} - x_{i,j}))^2}, \\ a_2 &= \sqrt{(\kappa_{11}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}) - \kappa_{12}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}))^2 + (\kappa_{21}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}) - \kappa_{22}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}))^2}, \end{aligned}$$

де $A_{i,j} = \kappa_{12} - \kappa_{21}$, $B_{i,j} = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}$,

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \frac{\gamma}{4} \left(\left(\frac{\kappa_{21}\kappa_{11x} - \kappa_{21x}}{\kappa_{11}} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \left(\frac{\kappa_{21}\kappa_{11y} - \kappa_{21y}}{\kappa_{11}} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) - \\ & \quad - \frac{1}{4\kappa_{11}} (\kappa_{11x}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \kappa_{11y}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})), \\ E_{i,j} &= \frac{\gamma}{4} \left(\left(\kappa_{12x} - \frac{\kappa_{12}\kappa_{22x}}{\kappa_{22}} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \left(\kappa_{12y} - \frac{\kappa_{12}\kappa_{22y}}{\kappa_{22}} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) - \\ & \quad - \frac{1}{4\kappa_{22}} (\kappa_{22x}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \kappa_{22y}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})), \end{aligned}$$

$$D_{i,j} = \frac{\gamma}{4} \left(\left(\kappa_{11} \kappa_{22x} - \kappa_{12} \kappa_{21x} - \kappa_{21} \kappa_{12x} + \frac{\kappa_{21} \kappa_{12} \kappa_{11x}}{\kappa_{11}} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \right. \\ \left. + \left(\kappa_{11} \kappa_{22y} - \kappa_{12} \kappa_{21y} - \kappa_{21} \kappa_{12y} + \frac{\kappa_{21} \kappa_{12} \kappa_{11y}}{\kappa_{11}} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) + \\ + \frac{1}{4} \left(\left(\kappa_{12x} - \frac{\kappa_{12} \kappa_{11x}}{\kappa_{11}} \right) (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \left(\kappa_{12y} - \frac{\kappa_{12} \kappa_{11y}}{\kappa_{11}} \right) (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right),$$

$$F_{i,j} = \frac{\gamma}{4} \left(\left(\kappa_{22} \kappa_{11x} - \kappa_{12} \kappa_{21x} - \kappa_{21} \kappa_{12x} + \frac{\kappa_{21} \kappa_{12} \kappa_{22x}}{\kappa_{22}} \right) (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \right. \\ \left. + \left(\kappa_{22} \kappa_{11y} - \kappa_{12} \kappa_{21y} - \kappa_{21} \kappa_{12y} + \frac{\kappa_{21} \kappa_{12} \kappa_{22y}}{\kappa_{22}} \right) (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) + \\ + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\kappa_{21} \kappa_{22x}}{\kappa_{22}} - \kappa_{21x} \right) (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \left(\frac{\kappa_{21} \kappa_{22y}}{\kappa_{22}} - \kappa_{21y} \right) (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right),$$

$$\kappa_{11} = \kappa_{11}(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad \kappa_{12} = \kappa_{12}(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad \kappa_{21} = \kappa_{21}(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad \kappa_{22} = \kappa_{22}(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

3. Чисельна реалізація методу. Зауважимо, що на даний час є деякі інші варіанти чисельної реалізації ідеї конформного та квазіконформного обернення конкретних типів крайових задач (див., напр., [7 – 13]). Так у роботах [7, 8] у випадку $\kappa=1$ кроки розбиття $\Delta\varphi$ та $\Delta\psi$ задавалися однаковими, а у процесі розв'язку задачі уточнювались параметри m та n .

Описані вище алгоритми чисельного розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення реалізовані у вигляді пакетів програм для персональних комп'ютерів.

На рисунках 2 – 5 подані результати таких розрахунків у випадку $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = 1$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon = 10^{-8}$. У відповідних таблицях, окрім заданих параметрів розбиття $m \times n$ та шуканої витрати Q фігурують необхідна кількість кроків ітерації kD , kM , kQ для виконання відповідних умов типу (10) – (11) та величина ε_* , що характеризує похибку конформності. Зазначимо при цьому, що величина ε_* різко погіршується при наявності особливих точок на границі області, де порушується конформність (див.: рис.3 – точки A, B, C, D ; рис.4 – точка C ; рис.5 – точки A і B). На графіках справа зображені, відповідно, залежності стабілізації витрати, відношення діагоналей та максимальної похибки наближень граничних вузлів від кроку ітерації.

Зауважимо, що аналогічні результати можна отримати, як розв'язуючи безпосередньо систему Коші-Рімана (відповідно рівняння Лапласа), так і розв'язуючи частковий випадок – задачу п.1, коли $\kappa(\varphi, \psi) = 1$ або $\kappa(x, y) = 1$, а також – задачу п.2 при $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$. Тоді відповідне відображення є конформним (функції $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ задовольнятимуть систему Коші-Рімана, а кожна з них – рівняння Лапласа).

На рис.6,7 та рис.8,9 (відповідно до рис.2,4) зображені результати розрахунків при $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\varphi\psi}$ та при $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\frac{xy}{10}}$ / $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{xy}$ відповідно.

№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q	ε_*
1	10×10	238	79	177	1.354236	4.4E-05
2	17×17	551	179	368	1.356746	1.6E-05
3	24×24	1006	296	577	1.357470	7.8E-06

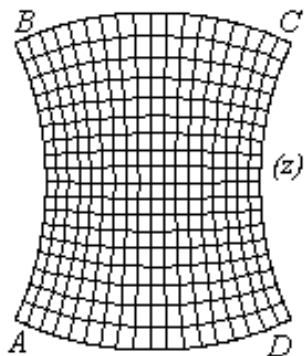
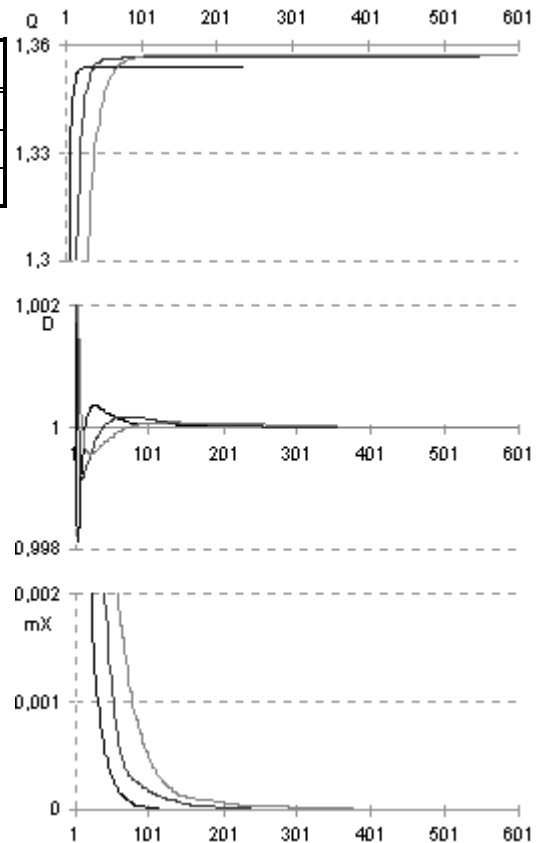


Рис.2. $f_1 = \frac{(x+2\sqrt{2})^2}{3} + \frac{y^2}{6} - 1$, $f_2 = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1$,
 $f_3 = \frac{(x-2\sqrt{2})^2}{3} + \frac{y^2}{6} - 1$, $f_4 = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1$.



№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q	ε_*
1	10×10	419	346	339	0.721580	1.2E-01
2	17×17	892	626	606	0.742006	8.2E-02
3	24×24	1768	1192	334	0.749643	5.8E-02

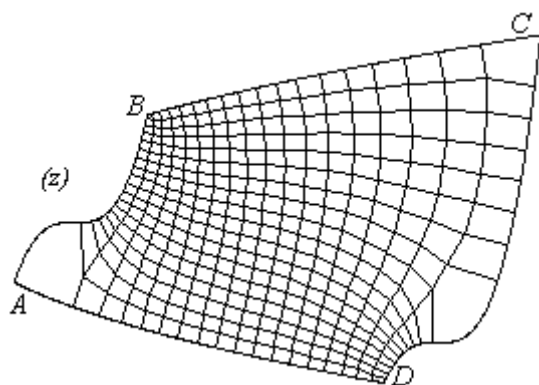
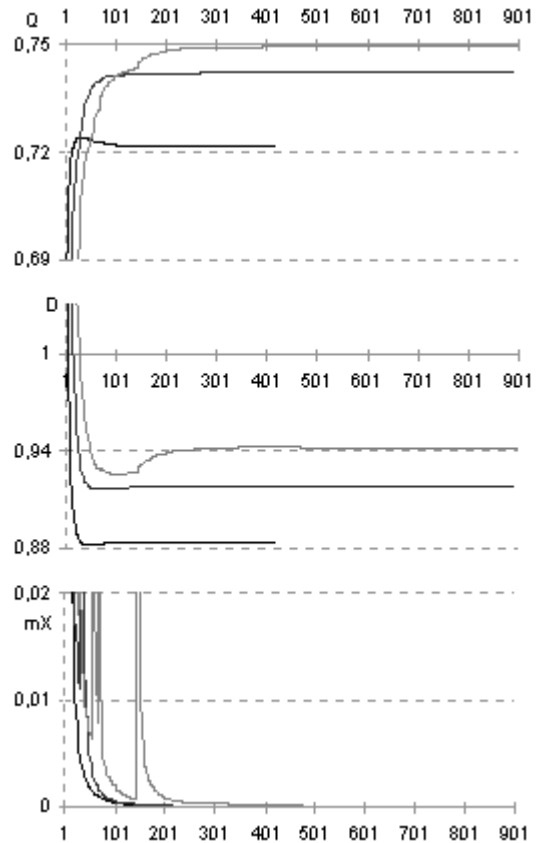


Рис.3. $f_1 = y - (x-2)^3 - 5$,
 $f_2 = y - 5 - \sqrt{x}$,
 $f_3 = y - (x-8)^3 - 3$,
 $f_4 = y - 5 + \sqrt{x}$.



№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q	ε_*
1	10×10	341	118	194	1.164625	9.7E-03
2	17×17	796	238	568	1.164265	1.3E-02
3	24×24	1499	435	1051	1.164164	1.3E-02

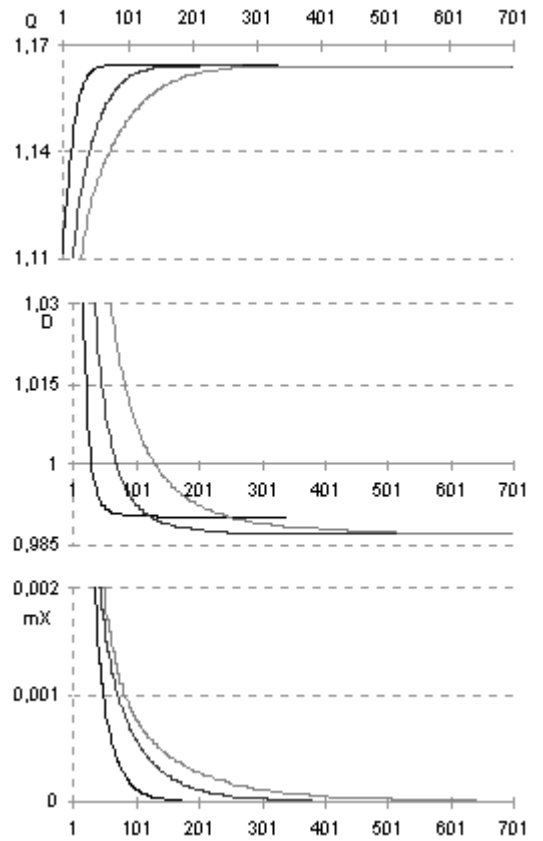
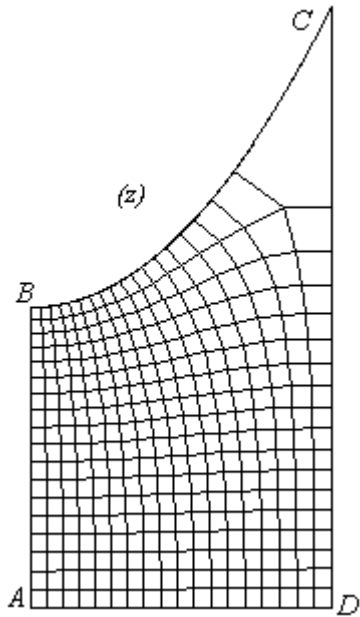


Рис.4. $f_1 = x$, $f_2 = y - x^2 - 1$,
 $f_3 = x - 1$, $f_4 = y$.

№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q	ε_*
1	7×14	17194	182	15142	1.752219	2.8E-02
2	12×24	20132	6120	11711	1.755933	6.4E-03
3	16×32	16911	1012	530	1.755212	3.6E-03

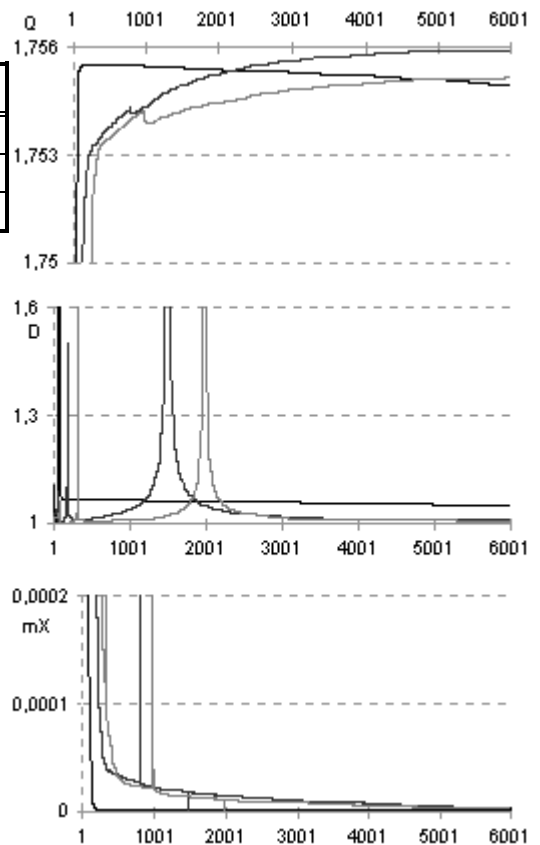
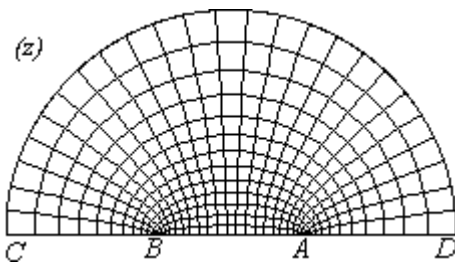


Рис.5. $f_1 = y - 1$, $-1 \leq x \leq 1$,
 $f_2 = y - 1$, $-3 \leq x < -1$,
 $f_3 = x^2 + (y - 1)^2 - 9$, $y > 0$,
 $f_4 = y - 1$, $1 < x \leq 3$.

№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q	ε_*
1	10×10	281	267	267	2.453394	$2.1E-03$
2	17×17	771	652	658	2.466361	$1.0E-03$
3	24×24	906	696	757	2.470002	$4.8E-04$

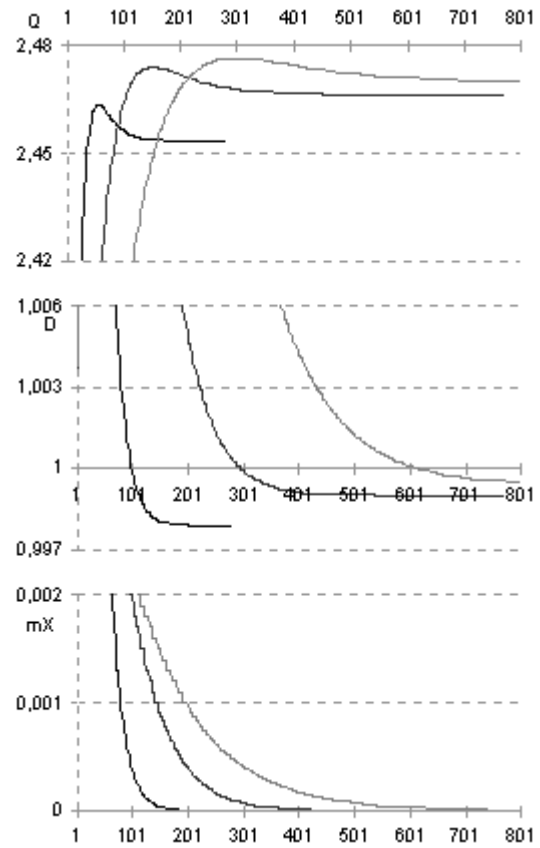
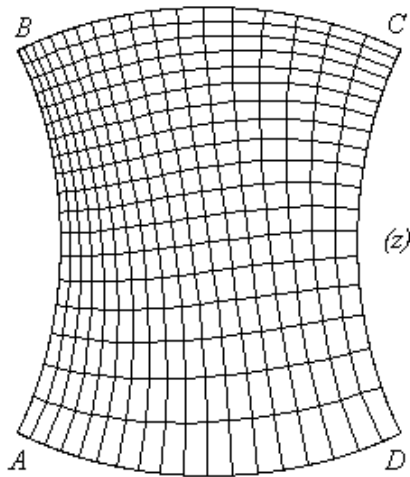


Рис.6. $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\varphi\psi}$.

№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q	ε_*
1	10×10	247	235	169	1.775070	$1.8E-02$
2	17×17	633	592	443	1.800786	$6.8E-03$
3	24×24	1180	1081	840	1.810148	$2.9E-03$

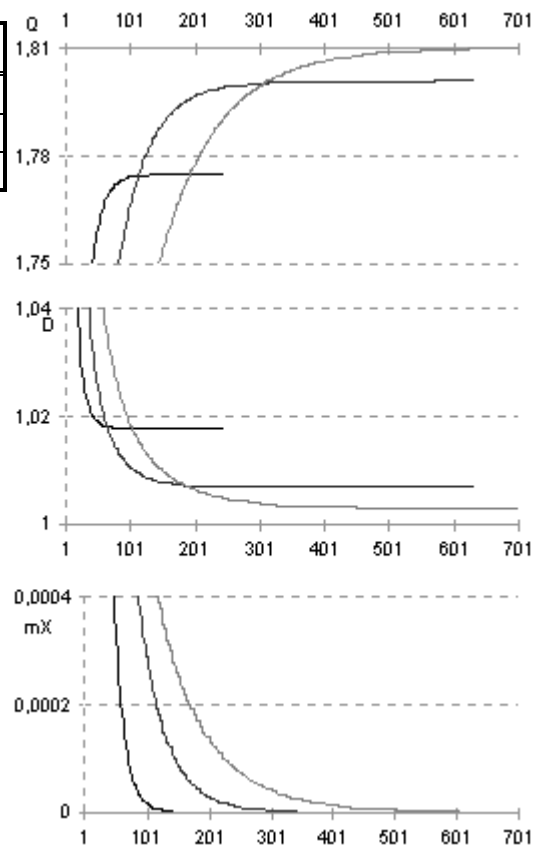
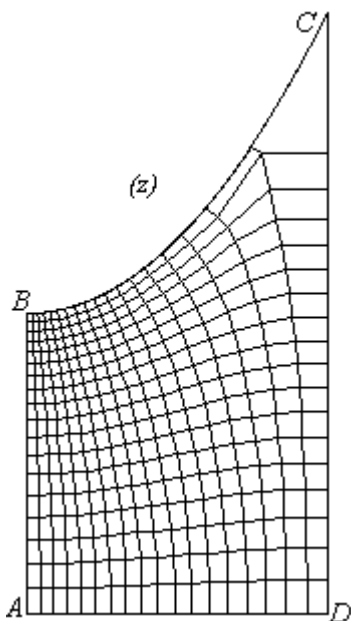


Рис.7. $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\varphi\psi}$.

№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q	ε_*
1	10×10	282	88	238	2.029356	$1.5E-04$
2	17×17	653	238	572	2.032525	$4.9E-04$
3	24×24	1241	447	1033	2.033442	$5.0E-04$

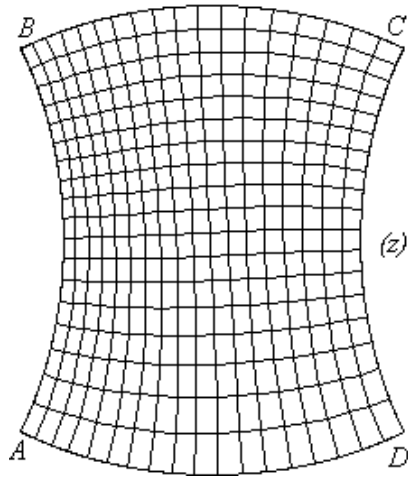
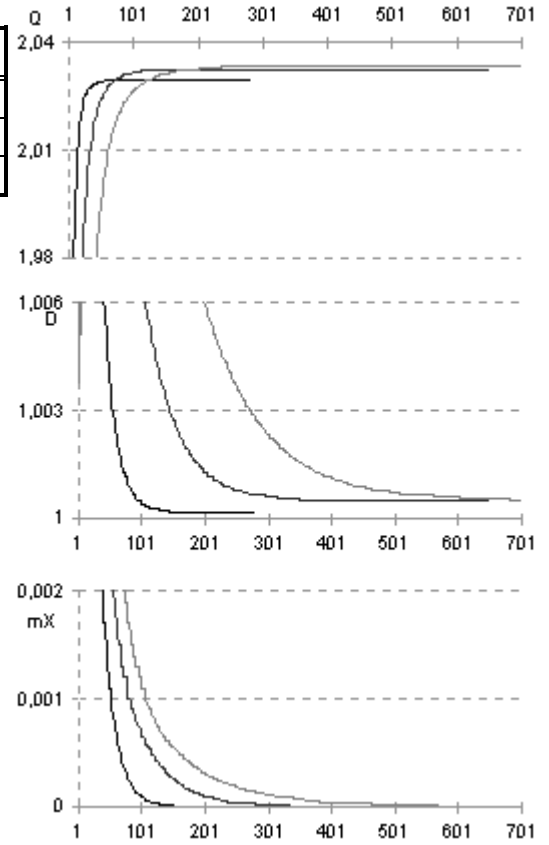


Рис.8. $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{\frac{xy}{10}}$.



№	$m \times n$	kM	kQ	kD	Q	ε_*
1	10×10	316	269	276	1.493329	$4.0E-02$
2	17×17	839	618	642	1.501277	$2.3E-02$
3	24×24	1570	1055	1195	1.503683	$1.6E-02$

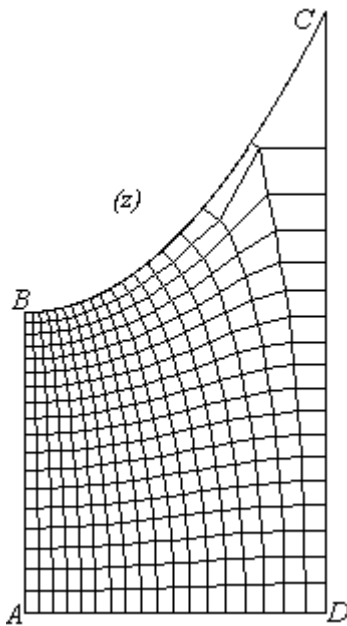
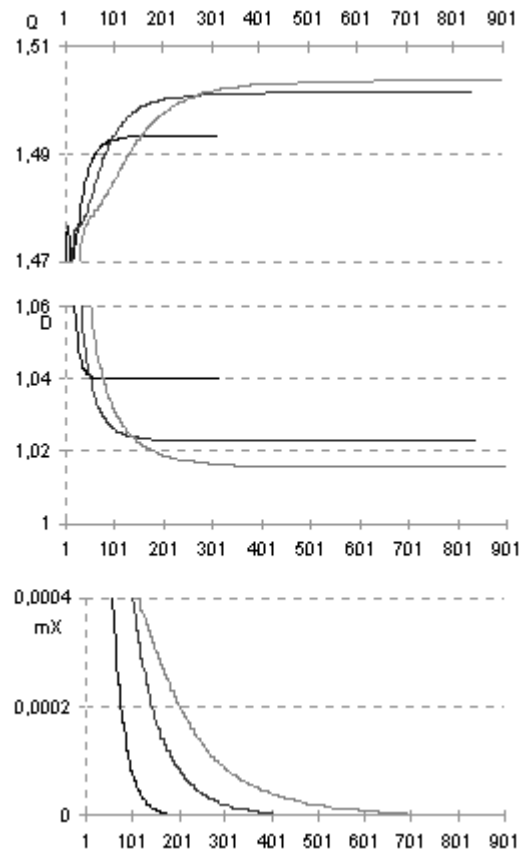


Рис.9. $\kappa(x, y, \varphi, \psi) = e^{xy}$.



1. Бомба А.Я., Каштан С.С., Михальчук В.В. Про приближенный метод конформных отображений розв'язання одного класу крайових задач // Волинський математичний вісник.- 1995.- Вип. 2.- С.18-21.
2. Бомба А.Я., Кузьменко А.П. Про метод сумарних зображень розв'язування крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1996.- Вип. 3.- С.23-25.
3. Бомба А.Я., Каштан С.С., Кузьменко А.П. Про застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1998.- Вип. 5.- С.16-25.
4. Бомба А.Я., Каштан С.С. Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1999.- Вип.6.- С.25-36.
5. Бомба А.Я., Каштан С.С. Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях // Вісник Львівського національного університету. Серія: Прикладна математика.- 2000.- Вип. 2.- С.3-14.
6. Бомба А.Я. Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних крайових задач на конформні відображення в шаруватих середовищах // Волинський математичний вісник.- 2000.- Вип. 7.- С.17-21.
7. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с "плавающими" узлами.- Киев, 1989.- 55с.- (Препринт АН УССР. Ин-т математики, 89.79).
8. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей.- Киев, 1991.- 56с.- (Препринт АН Украины. Ин-т математики; 91.57).
9. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики.- М.: Наука, 1976.- 400с.
10. Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 1967.- 7, №5. -С.1031-1059.
11. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 1972.- 12, №2.- С.429-440.
12. Numerical Conformal Mapping // J. Comput. and Applied. Math.- 1986.- 14.- P.1-369.
13. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical Grid Generation: Foundation and Applications.- New York: Elsevier, 1985.- 931p.
14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.- Москва: Наука, 1973.- 736с.
15. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- Киев: Наукова думка, 1980.- 334с.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем.- Москва: Наука, 1977.- 656с.
17. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967) / Под ред. Полубариновой-Кочиной П.Я.- Москва: Наука, 1969.- 546с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
Рівненський державний технічний університет, Рівне

Надійшла 27.01.2001

Бомба А.Я., Каштан С.С. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ // *Разработано новый алгоритм численного решения обратных нелинейных краевых задач на конформные и квазиконформные отображения в четырехугольных областях, ограниченных линиями течения и эквипотенциальными линиями, с построением динамической сетки.*

Bomba A.Ya., Kashtan S.S. NUMERICAL DECISION OF INVERSE NONLINEAR MARGINAL PROBLEMS ON CONFORMAL AND AS-CONFORMAL DISPLAYING // *Is designed new algorithm numerical deciding the inverse nonlinear marginal problems on conformal and as-conformal displaying in tetragonal areas limited by current lines and equal potential lines with building of dynamic net.*

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the mathematics, informatics and mechanics. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

У цьому випуску переважають роботи з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Редакційна колегія :

Барановський С.В. (*секретар*)
Бейко І. В.
Боднар Д. І.
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)
Бурак Я. Й.
Войтович М. М.
Гаращенко Ф. Г.
Горбачук М.Л.
Дейнека В.С.
Задерей П. В.
Каштан С. С. (*технічний секретар*)
Ковтунець В. В.
Кратко М. І.
Ляшко І.І.
Мельник В. С.
Попов Б. О.
Прикарпатський А. К.
Пташник Б. Й.
Савула Я. Г.
Скопєцький В. В. (*головний редактор*)
Сяський А. О.
Чикрій А.О.
Шевчук І.О.
Шинкаренко Г. А.
Янчук П. С.
Ясній П. В.

Editorial board :

Baranovsky S.V. (*secretary*)
Beyko I. V.
Bodnar D. I.
Bomba A. Ya. (*editor*)
Burak Ya. Y.
Voytovych M. M.
Garashchenko F. G.
Gorbachuk M.L.
Deyneka V.S.
Zaderej P. V.
Kashtan S. S. (*secretary*)
Kovtunets V. V.
Kratko M. I.
Lyashko I.I.
Melnyk V. S.
Popov B. O.
Prykarpatsky A. K.
Ptashnyk B. Y.
Savula Ya. G.
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)
Syasky A. O.
Chikriy A.O.
Shevchuk I.O.
Shynkarenko G. A.
Yanchuk P. S.
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 .

Наукове видання
"Волинський математичний вісник"
Випуск 8, 2001

Відповідальний за випуск Бомба А.Я.

Здано до друку . .200 р. Підписано до друку . .200 р.
Формат 1/8 Папір друк. 30×21 Ум. друк. арк. 4,54
Наклад 300 прим. Замовлення № –

Віддруковано в інформаційно-видавничому відділі
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, 33028, м. Рівне, вул. Остафова, 31