Національна академія наук України
Інститут математики НАН України
Рівненський державний педагогічний інститут
Українське математичне товариство
Український фонд "Відродження"

National Academy of Sciences of Ukraine
Institute of Mathematic of NAS of Ukraine
Rivne State Pedagogical Institute
Ukrainian Mathematical Society
Ukrainian fond "Vidrodgennia"

Волинський математичний вісник

Випуск 3

(Матеріали міжнародної конференції "Теорія апроксимацій та чисельні методи", присвяченої 100-річчю з дня народження Е.Ремеза, Україна, Рівне, 19-21 червня 1996)

Volyn Mathematical Bulletin

ISSUE 3

(Proceedings International Conference "Approximation theory and numerical methods", dedicated to the 100-th Remez birthday unniversary, Ukraine, Rivne, June, 19-21, 1996)

Rivne 1996

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної та прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the rezults of investigation of the theoretical and applied mathematics in the form of the short repots, original articles, surveys, works of cônferences and seminars. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Видається один раз у рік з 1994 року. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N 148 від 11.04.1995 р. Засновники : Бомба А.Я., Ковтунець В.В., Слюсарчук В.Ю..

It publishes one time a year beginning from 1994. The paper of State registration: series PB N 148, 11.04.1995 . Founders: Bomba A.Ya., Kovtunets V.V., Slusarchuk V.Yu.

Адреса редакції: 266000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 26, педінститут, кафедра інформатики та прикладної математики. Тел.: (8+036+2) 26-04-44. E-Mail: rspi@rspi.rovno.ua

При виданні матеріалів конференції редакція вирішила не брати на себе право істотнього редагування підготовлених авторами текстів.

The editorship desided not to make the material changes in the authors' original articles of the conferenses works.

ЗМІСТ

УДК 518:517.944 947

А.Я.Бомба, кандидат фіз.-мат. наук (Рівне, РДПІ)
А.П.Кузьменко, кандидат фіз.-мат. наук (Рівне, УДАВГ)

ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Known advantages of H.M.Poloji's P-transformation method (explicit look of solution formulae, possibility of selective computing, etc.) are effectively used for solving boundary value problems of conform reflections.

Розглянемо модельну задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціал) в однозв'язній області $G_z=A_1A_2A_3A_4$ ($z=x+iy$), обмеженій чотирма кривими A_1A_2 ($f_1(x,y)=0$), A_2A_3 ($f_2(x,y)=0$), A_3A_4 ($f_3(x,y)=0$), A_4A_1 ($f_4(x,y)=0$), які в точках A_i, $i=\overline{1,n}$, перетинаються під прямим кутом, при умовах: $\varphi\big|_{A_1A_2} = \varphi_*$, $\varphi\big|_{A_3A_4} = \varphi^*$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{A_2A_3} = 0$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{A_4A_1} = 0$, де n - зовнішня нормаль до відповідної кривої. Ввівши гармонічну функцію $\psi = \psi(x,y)$ (функція течії), комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ і замінивши останні дві граничні умови на умови $\psi\big|_{A_1A_4} = 0$, $\psi\big|_{A_1A_3} = Q$, де стала Q - повна витрата (невідомий параметр) через довільну криву MN ($M \in A_1A_4, N \in A_2A_3$), зведемо дану задачу до задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z)$ області G_z на прямокутник (область комплексного потенціалу) $G_\omega = \left\{\omega = \varphi + i\psi: \varphi_* < \varphi < \varphi^*; 0 < \psi < Q\right\}$ при відповідності кутових точок.

Обернена крайова задача (на конформне відображення області G_ω на G_z при невідомому Q), що має вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial y}{\partial\psi}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial\psi} = -\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}, & (\varphi,\psi) \in G_\omega, \\ f_1(x(\varphi_*,\psi), y(\varphi_*,\psi)) = 0, \quad f_3(x(\varphi^*,\psi), y(\varphi^*,\psi)) = 0, & 0 \le \psi \le Q, \\ f_2(x(\varphi,0), y(\varphi,0)) = 0, \quad f_4(x(\varphi,Q), y(\varphi,Q)) = 0, & \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*, \end{cases} \tag{1}$$

зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ при заданих крайових умовах і умовах Коші-Рімана на границі цієї області.

Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j): \varphi_i = \varphi_* + h_0 i$, $i = 0,1,\ldots,m+1$; $\psi_j = h_* j$, $j=0,1,\ldots,n+1$; $h_0 = (\varphi^* - \varphi_*)/(m+1)$, $h_* = Q/(n+1)$, $\gamma = h_0/h_*\}$ запишемо у вигляді :

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0 , \\ y_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0 , \\ \qquad i = \overline{1,m} , \quad j = \overline{1,n} ; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{o,j}) = 0, \qquad f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0,n+1} , \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \quad f_4(x_{i,0}, y_{i,o}) = 0, \qquad i = \overline{0,m+1} ; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_{i+1,0} - x_{i,0} = \gamma(y_{i,1} - y_{i,0}), \quad \gamma(x_{i,1} - x_{i,0}) = y_{i,0} - y_{i+1,0}, \quad i = \overline{1,m} , \\ x_{1,j} - x_{0,j} = \gamma(y_{0,j+1} - y_{0,j}), \quad \gamma(x_{0,j+1} - x_{0,j}) = y_{0,j} - y_{1,j}, \quad j = \overline{1,n} ; \end{cases} \tag{4}$$

$$(x_{1,1} - x_{0,0})^2 + (y_{1,1} - y_{0,0})^2 = (x_{1,0} - x_{0,1})^2 + (y_{1,0} - y_{0,1})^2 , \tag{5}$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \; y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

Ефектифність запропонованої нижче методики полягає в тому, що формули сумарних зображень забезпечують розв'язність локалізованнї лінійної (основної) частини даної системи, а невідомі коефіцієнти знаходяться шляхом розв'язання нелінійних систем невисоких порядків, породжених лише граничними умовами та умовами (4), (5).

Загальний розв'язок рівнянь (2) згідно з [2] має вид:

$$\begin{cases} x_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,j} (\mu_k^i A_k + \nu_k^i B_k - \gamma^2 \sum_{t=1}^{i-1} \frac{\mu_k^{i-t} - \nu_k^{i-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1})), \\ y_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,j} (\mu_k^i C_k + \nu_k^i D_k - \gamma^2 \sum_{t=1}^{i-1} \frac{\mu_k^{i-t} - \nu_k^{i-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1})), \\ \qquad i = \overline{0,m+1}, \quad j = \overline{1,n} , \end{cases} \tag{6}$$

де $p_{i,k} = \sqrt{\dfrac{2}{n+1}} \cdot \sin\dfrac{ik\pi}{n+1}, \qquad \eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos\dfrac{k\pi}{n+1}$,

$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\qquad \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$.

Невідомі A_k , B_k , C_k , D_k, $x_{t,0}$, $y_{t,0}$, $x_{t,n+1}$, $y_{t,n+1}$, γ визначаються в результаті розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (3) - (5), де x_{0j} , y_{0j} , x_{m+1j} , y_{m+1j}, $x_{i,1}$, $y_{i,1}$, x_{1j} , y_{1j} представлені за формулами (6) (умова (6*)).

Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином. Задаємо нульове наближення невідомої витрати $Q^{(0)}$ ($Q^{(0)}<Q$). Розв'язуємо систему(3), (4), (6*), наприклад, за методом Ньютона [4] та перевіряємо виконання умови (5). В залежності від одержаної нев'язки вибираємо наступне наближення - $Q^{(1)}$ і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність: $|Q^{(\kappa+1)}-Q^{(\kappa)}| < \varepsilon$.

У випадку, якщо, на приклад, крива A_2A_3 (з фіксованою точкою A_2), на якій задається додаткова умова $\varphi=g(y)$, де $g(y)$ - достатньо гладка функція, є вільною кривою, то розв′язок відповідної задачі також може бути отриманий за формулами (6), де невідомі параметри знаходяться в результаті розв′язку системи , яка отримується із (3) - (5), (6^*) шляхом заміни рівнянь $f_2(x_{i,n+1},y_{i,n+1})=0$ на рівняння $\varphi_i=g(y_{i,n+1})$, $i=\overline{0,m+1}$

1. Бомба А.Я., Кузьменко А.П. Про чисельно-асимптотичний підхід до розв'язку крайових задач фільтрації та масопереносу в пористому середовищі. Деп. в Укр.ИНТЭИ, № 1471 - Ук92.- 12 с.
2. Положий Г.М. Численое решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. - Киев: Изд-во КГУ, 1982. - 161 с.
3. Ляшко И.И., Великоиваненко И.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. - Киев: Наукова думка, 1973.-264 с.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.:Наука, 1980.- 334с.