

Національна академія наук України  
Інститут математики НАН України  
Рівненський державний педагогічний інститут  
Українське математичне товариство  
Український фонд "Відродження"

National Academy of Sciences of Ukraine  
Institute of Mathematic of NAS of Ukraine  
Rivne State Pedagogical Institute  
Ukrainian Mathematical Society  
Ukrainian fond "Vidrodgenia"

# **Волинський математичний вісник**

## **Випуск 3**

(Матеріали міжнародної конференції "Теорія апроксимацій та чисельні методи", присвяченої 100-річчю з дня народження Е.Ремеза, Україна, Рівне, 19-21 червня 1996)

## **Volyn**

## **Mathematical Bulletin**

### **ISSUE 3**

(Proceedings International Conference "Approximation theory and numerical methods", dedicated to the 100-th Remez birthday anniversary, Ukraine, Rivne, June, 19-21, 1996)

Rivne 1996

“Волинський математичний вісник” публікує результати досліджень в області теоретичної та прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The “Volyn Mathematical Bulletin” publishes the results of investigation of the theoretical and applied mathematics in the form of the short reports, original articles, surveys, works of conferences and seminars. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

**Редакційна колегія :**

Скрипник І.В.(головний редактор),  
Дзядик В.К.(голова програмного  
комітету конференції),  
Бомба А.Я.(редактор),  
Боднар Д.І., Ковтунець В.В.,  
Коновалов В.Н., Попов Б.О.,  
Шевчук І.О., Янчук П.С.

**Editorial board:**

Skrypnyk I.V.(Editor-in-Chief),  
Dziadyk V.K.(Program Committee  
Conference Header),  
Bomba A.Ya.(editor),  
Bodnar D.I., Kovtunets V.V.,  
Kononov V.N., Popov B.O.,  
Shevchuk I.O., Yanchuk P.S.

Видається один раз у рік з 1994 року. Свідцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N 148 від 11.04.1995 р. Засновники : Бомба А.Я., Ковтунець В.В., Слюсарчук В.Ю..

It publishes one time a year beginning from 1994. The paper of State registration: series РВ N 148, 11.04.1995 . Founders: Bomba A.Ya., Kovtunets V.V., Slusarchuk V.Yu.

Адреса редакції: 266000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 26, педінститут, кафедра інформатики та прикладної математики. Тел.: ( 8+036+2) 26-04-44. E-Mail: [rspi@rspi.govno.ua](mailto:rspi@rspi.govno.ua)

При виданні матеріалів конференції редакція вирішила не брати на себе право істотного редагування підготовлених авторами текстів.

The editorship decided not to make the material changes in the authors' original articles of the conferences works.

## ЗМІСТ

1. Дзядик В.К. До сторіччя з дня народження члена кореспондента Академії наук України, професора Євгена Яковича Ремеза та про його внесок у розвиток математики.....	7
2. Андриенко В.А. О приближении почти всюду средними Рисса двойных ортогональных рядов.....	9
3. Антонова Т.М. Про вигляд максиманти одного класу гіллястих ланцюгових дробів з комплексними компонентами.....	14
4. Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів з невід'ємними елементами.....	19
5. Бомба А.Я., Кузьменко А.П. Про метод сумарних зображень розв'язування крайових задач на конформні відображення.....	23
6. Бунь П.А., Семикина А.В. Числові методи розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків з використанням узагальнених формул диференціювання з різницями назад.....	26
7. Вартамян Г.М. Об оценке одного интеграла на кривых.....	31
8. Галеев Э.М. Дискретизация задачи о поперечниках.....	35
9. Голубов Б.И. Об ограниченности операторов Харди и Харди-Литтльвуда в пространствах $Re H^1$ и $BMO$ .....	39
10. Кириллов С.А. О теореме Марцинкевича-Зигмунда.....	43
11. Колупаев Б.С., Бордюк М.А., Сідлецький В.О. Кореляційний взаємозв'язок мікро- та макроскопічних властивостей металонаповнених полімерних систем.....	46
12. Кореновский А.А. Многомерный вариант леммы Рисса и некоторые его приложения.....	50
13. Крикова І.В., Литвин О.М. Інтерлінація на границі п'ятикутника з криволінійною стороною.....	56
14. Кротов В.Г. Весовые неравенства и теоремы о следах для функций из многомерных классов типа Харди-Соболева.....	61
15. Крякин Ю.В. О приближении чебышевскими сплайнами в метрике $Lp_1$ .....	67
16. Кучмінська Х.Й. Аналог теорема Пейдона-Уолла для гіллястих ланцюгових дробів.....	72
17. Летичевський О.А., Біленко В.І., Волков В.А., Денисенко П.М. Реалізація модифікованого методу Дзядика засобами алгебраїчного програмування.....	76

18.	Литвин О.М., Литвин О.О. Одна теорема про збіжність методу Качмажа при розв'язанні СЛАР.....	83
19.	Литвин О.М., Нечуйвігер О.П. Кубатурна формула для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $F(X, Y)$ з використанням інтерлінації функцій	87
20.	Литвин О.М., Трофименко О.П. Чисельна реалізація оптимального методу скінченних елементів задачі Діріхле для рівняння Пуассона.....	91
21.	Лотюк Ю.Г. Побудова многочлена найкращого рівномірного наближення розв'язку рівняння Ріккати методом продовження по параметру.....	96
22.	Олійник Т.М., Остудін Б.А. Алгоритм наближеного розв'язування однієї задачі теплопровідності у випадку розімкнених граничних поверхонь скланої геометрії.....	99
23.	Піддубний О.М. Застосування апроксимаційних методів до вивчення граничних властивостей розв'язків одного класу диференціальних рівнянь.	103
24.	Попов Б.А. Харе Д.Е.Дж. Побудова ітераційних алгоритмів для обчислення обернених функцій.....	106
25.	Прикарпатський А.К., Притула М.М., Єршенко О.О. The Lie-algebraic discrete approximations in computing analysis.....	113
26.	Столярчук В.К., Мартинюк П.М. Побудова дробово-раціональних поліномів, які здійснюють близьке до найкращого рівномірне наближення функцій Бесселя з цілим індексом, функції ймовірностей та деяких гіпергеометричних функцій.....	117
27.	Стороженко Э.А. Об обратимости неравенства С.Н.Бернштейна для комплексних полиномов.....	120
28.	Сяський А.О., Сяський В.А. Метод колокації в плоских контактних задачах для пластин з підкріпленням криволінійним отвором.....	124
29.	Тадєєв П.О. Вплив педагогічних праць Є.Я.Ремеза на розвиток змісту сучасної математичної освіти в Україні.....	128
30.	Турбал Ю.В. Оцінка інтенсивностей пуассонівських потоків моделі радіоактивного забруднення.....	130
31.	Харкевич Ю.І. Про наближення функцій класу $C^N$ лінійними середніми їх рядів Фур'є.....	135
32.	Янчук П.С. Многочленно-сітковий спосіб наближеного розв'язування крайових задач.....	139

Ю.Г. Лопок, пошукач (Рівне, педінститут)

**ПОБУДОВА МНОГОЧЛЕНА НАЙКРАЩОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІККАТІ МЕТОДОМ ПРОДОВЖЕННЯ ПО ПАРАМЕТРУ.**

**Parametric continuation method as applied for solving of Cauchy problem for nonlinear ordinary differential equation. The solution is approximated by algebraic polynomial close to polynomial of best niform approximation.**

Метод параметричного продовження для диференціальних рівнянь в загальних рисах описано в [1-3]

В основному цей метод застосовують для розв'язку диференціальних рівнянь з параметром, який входить в граничні умови [2]. Даний метод застосовано до одного диференціального рівняння (задачі Коші) див. [4]. Перевага методу: отримання розв'язку в аналітичній формі. Недолік - дещо вища складність реалізації порівняно з сітковими методами.

Розглянемо задачу Коші для спеціального рівняння Ріккати [1]:

$$y' = bx^{\alpha} - ay^2, y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Виберемо стартову функцію  $U(x)$  [4].

Розглянемо параметричне рівняння, вважаючи  $y(x,0) = U(x)$ .

$$\frac{dy(x,t)}{dx} = bx^{\alpha} - ay^2(x,t) + (1-t)(U'(x) - bx^{\alpha} + ay^2(x,t)), \quad t \in [0,1] \quad (2)$$

Продиференціюємо рівняння (2) по параметру  $t$ , одержимо:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} = -2a\varphi(x,t) - U'(x) + bx^{\alpha} - ay^2(x,t) + (1-t)(2a\varphi(x,t)y(x,t)) \quad (3)$$

Ввівши функцію  $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \varphi(x,t)$  рівняння (3) запишемо у вигляді:

$$\frac{d\varphi(x,t)}{dx} = -2a\varphi(x,t)y(x,t) - U'(x) + bx^{\alpha} - ay^2(x,t) + 2a\varphi(x,t)y(x,t) - 2a\varphi(x,t)y(x,t) \quad (4)$$

Спростивши рівняння (4) отримаємо:

$$\frac{d\varphi(x,t)}{dx} = bx^{\alpha} - U'(x) - ay^2(x,t) - 2at\varphi(x,t)y(x,t), \quad (5)$$

$$\frac{d\varphi(x,t)}{dx} - \varphi(x,t)P(y(x,t),t) = Q(x,y(x,t)) \quad (6)$$

Де  $P(y(x,t),t) = -2aty(x,t)$ ,  $Q(x,y(x,t)) = bx^\alpha - U(x) - ay^2(x,t)$

Рівняння (6) лінійне відносно функції  $\varphi$ , тому

$$\varphi(x,t) = \left[ \int Q(x,y(x,t)) E^{-\int P(y(x,t),t) dx} dx \right] E^{\int P(y(x,t),t) dx} \quad (7)$$

Ітерації виконуємо за формулою  $Y_{n+1} = Y_n + \varphi_{n+1} \Delta t$

Починаючи з  $Y_0 = Y(x,0) = U(x)$  - початкового наближення.

Розглянемо частковий випадок рівняння Ріккати.

Якщо  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $\alpha = 2$  то рівняння (1)

набуває вигляду  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4y^2$ ,  $y(0) = 1$ .

За початкове наближення природно взяти функцію  $y(x) = e^{-x}$ , тому що, поперше, на проміжку  $[0, 0.5]$  розв'язком рівняння є спадна функція, а подруге, функція  $y(x) = e^{-x}$  задовольняє початкові умови (1).

Нижче наведені результати двох чисельних експериментів, де проводилося порівняння розв'язку, одержаного методом продовження по параметру, з розв'язком, одержаним методом Рунге-Кутта з такими ж чисельними затратами, та розв'язку, одержаного методом продовження по параметру, з точним розв'язком.

У таблиці 2 порівнюється розв'язок, апроксимований многочленом найкращого рівномірного наближення (НРН) з коефіцієнтами, приведеними у таблиці 1, з розв'язком, отриманим методом Рунге-Кутта (Р-К) четвертого порядку точності з кроком 0.0001 на проміжку  $[0,1]$ . Точним розв'язком будемо вважати значення, отримані методом Рунге-Кутта з досить малим кроком  $10^{-9}$ .

Таблиця 1

Y[0]	1.0024180584E+00
Y[1]	-3.5639536731E+00
Y[2]	8.9742803493E+00
Y[3]	-1.2742342615E+01
Y[4]	1.0575341272E+01
Y[5]	-3.5301282898E+00

Таблиця 2

X	Метод Рунге-Кутта	Многочлен РНР P5(x)	Точний розв'язок	Відхилення мног. РНР від точного розв'язку [ % ]	Відхилення методу Р-К від точного розв'язку [ % ]
0.000000000E+00	1.0005223708E-03	1.002418058E+00	1.000000708E+00	0.0024	0.00052
1.000000000E-01	7.1517590477E-01	7.2404538481E-01	7.1717700623E-01	0.9577	0.2790
2.000000000E-01	5.6202014519E-01	5.6245070181E-01	5.6316557573E-01	0.1269	0.2034
3.000000000E-01	4.7510522566E-01	4.7395598986E-01	4.7573842022E-01	0.3747	0.1331
4.000000000E-01	4.3121833566E-01	4.3179174056E-01	4.3147873223E-01	0.0725	0.0603
5.000000000E-01	4.2076325971E-01	4.2186080274E-01	4.2072026660E-01	0.0271	0.0102
6.000000000E-01	4.3893947370E-01	4.3850222848E-01	4.3863089490E-01	0.0293	0.0070
7.000000000E-01	4.8213823967E-01	4.8025511918E-01	4.8160033499E-01	0.2793	0.1117
8.000000000E-01	5.4631766963E-01	5.4562247159E-01	5.4559480874E-01	0.5070	0.1325
9.000000000E-01	6.2656994430E-01	6.2883502392E-01	6.2571406392E-01	0.4988	0.1368
1.000000000E+00	7.1755923466E-01	7.1561510180E-01	7.1662252749E-01	0.1405	0.1307

При застосуванні методу Р-К ми обчислюємо значення функції в кожній наступній точці, виходячи із значення у попередній точці. Тому, по-перше, ми використовуємо початкову умову  $y(x_0) = y_0$  лише один раз, а далі відходячи від цього значення з кожним кроком збільшується похибка машинних обчислень. По-друге, отримуються значення шуканої функції лише в окремих точках, і навіть при дуже малому кроці по X залишається невідомою поведінка шуканої функції між цими точками. Всіх цих вад позбавлений метод диференціювання по параметру. На кожному кроці ми використовуємо початкову умову, і отримуємо розв'язок диференціального рівняння в аналітичному вигляді.

2. Порівнюється розв'язок, одержаний методом продовження по параметру, з точним розв'язком.

На кожному кроці по t, обчислюючи наступне  $Y_n$  за ітераційною формулою  $Y_{n+1} = Y_n + \varphi_{n+1} * \Delta t$ , ми рухаємося в функціональному просторі від стартової функції U(x) до шуканого розв'язку y(x) [3]. Для ілюстрування цього процесу розглянемо рівняння з відомим точним

розв'язком  $y' = (e^{x^2} + \sqrt{x})^2 - y^2 + 2xe^{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $y(0) = 1$ . Точним розв'язком

рівняння є функція  $y(x) = e^{x^2} + \sqrt{x}$ . На кожному кроці будемо графічно контролювати таку функцію  $F(x) = y(x) - y_n(x, t)$ , де  $y(x)$  - точний розв'язок, а  $y_n(x, t)$  - значення функції на n-му кроці. З кожним кроком функція  $y_n(x, t)$  наближається до многочлена найкращого рівномірного наближення точного розв'язку. При t=1 отримуємо многочлен найкращого рівномірного наближення точного розв'язку.

1. Я.М.Григоренко, А.П.Мукоєд. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонь на ЕОМ. - К.:Либідь, 1992. - 148 с.
2. Ц.На. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. - М.:Мир, 1982. - 294 с.
3. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ. - М.:Наука, 1984. - 750 с.
4. Ковтунець В.В., Лотюк Ю.Г. Побудова многочлена найкращого рівномірного наближення розв'язку одного диференціального рівняння // Волинський математичний вісник, вип.2, 1996. - С. 90-92.