Національна академія наук України
Інститут математики НАН України
Рівненський державний педагогічний інститут
Українське математичне товариство
Український фонд "Відродження"

National Academy of Sciences of Ukraine
Institute of Mathematic of NAS of Ukraine
Rivne State Pedagogical Institute
Ukrainian Mathematical Society
Ukrainian fond "Vidrodgennia"

Волинський математичний вісник

Випуск 3

(Матеріали міжнародної конференції "Теорія апроксимацій та чисельні методи", присвяченої 100-річчю з дня народження Е.Ремеза, Україна, Рівне, 19-21 червня 1996)

Volyn Mathematical Bulletin

ISSUE 3

(Proceedings International Conference "Approximation theory and numerical methods", dedicated to the 100-th Remez birthday unniversary, Ukraine, Rivne, June, 19-21, 1996)

Rivne 1996

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної та прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the rezults of investigation of the theoretical and applied mathematics in the form of the short repots, original articles, surveys, works of conferences and seminars. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Видається один раз у рік з 1994 року. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N 148 від 11.04.1995 р. Засновники : Бомба А.Я., Ковтунець В.В., Слюсарчук В.Ю..

It publishes one time a year beginning from 1994. The paper of State registration: series PB N 148, 11.04.1995 . Founders: Bomba A.Ya., Kovtunets V.V., Slusarchuk V.Yu.

Адреса редакції: 266000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 26, педінститут, кафедра інформатики та прикладної математики. Тел.: (8+036+2) 26-04-44. E-Mail: rspi@rspi.rovno.ua

При виданні матеріалів конференції редакція вирішила не брати на себе право істотного редагування підготовлених авторами текстів.

The editorship desided not to make the material changes in the authors' original articles of the conferenses works.

ЗМІСТ

УДК 517.5

Ю.Г.Лотюк, пошукач (Рівне, педінститут)

ПОБУДОВА МНОГОЧЛЕНА НАЙКРАЩОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІККАТІ МЕТОДОМ ПРОДОВЖЕННЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Parametric continuation method as applied for solving of Cauchy problem for nonlincar ordinary differential equation. The solution is approximated by algebraic polynomial close to polynomial of best niform approximation.

Метод параметричного продовження для диференціальних рівнянь в загальних рисах описано в [1-3]

В основному цей метод застосовують для розв'язку диференціальних рівнянь з параметром, який входить в граничні умови [2]. Даний метод застосовано до одного диференціального рівняння (задачі Коші) див. [4]. Перевага методу: отримання розв'язку в аналітичній формі. Недолік - дещо вища складність реалізації порівняно з сітковими методами.

Розглянемо задачу Коші для спеціального рівняння Ріккаті [1] :

$$y' = bx^{\alpha} - ay^{2},\ y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

Виберемо стартову функцію $U(x)$ [4].

Розглянемо параметричне рівняння, вважаючи $y(x,0) = U(x)$.

$$\frac{dy(x,t)}{dx} = bx^{\alpha} - ay^{2}(x,t) + (1-t)(U'(x) - bx^{\alpha} + ay^{2}(x,t)),\quad t \in [0,1] \tag{2}$$

Продиференціюємо рівняння (2) по параметру t , одержимо:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} = -2a\varphi y(x,t) - U(x) + bx^{\alpha} - ay^{2}(x,t) + (1-t)(2a\varphi(x,t)y(x,t)) \tag{3}$$

Ввівши функцію $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \varphi(x,t)$ рівняння (3) запишемо у вигляді :

$$\frac{d\varphi(x,t)}{dx} = -2a\varphi(x,t)y(x,t) - U(x) + bx^{\alpha} - ay^{2}(x,t) + 2a\varphi(x,t)y(x,t) - 2at\varphi(x,t)y(x,t) \tag{4}$$

Спростивши рівняння (4) отримаємо :

$$\frac{d\varphi(x,t)}{dx} = bx^{\alpha} - U'(x) - ay^{2}(x,t) - 2at\varphi(x,t)y(x,t), \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi(x,t)}{dx} - \varphi(x,t)P(y(x,t),t) = Q(x,y(x,t)) \tag{6}$$

Де $P(y(x,t),t) = -2aty(x,t)$, $Q(x,y(x,t)) = bx^{\alpha} - U(x) - ay^2(x,t)$

Рівняння (6) лінійне відносно функції φ, тому

$$\varphi(x,t) = \left[\int Q(x,y(x,t))E^{-\int P(y(x,t),t)dx}dx\right]E^{\int P(y(x,t),t)dx} \tag{7}$$

Ітерації виконуємо за формулою $y_{n+1} = y_n + \varphi_{n+1}\Delta t$.

Починаючи з $Y_0 = Y(x,0) = U(x)$ - початкового наближення.

Розглянемо частковий випадок рівняння Ріккаті.

Якщо $a = 4$ $b = 3$ $\alpha = 2$ то рівняння (1)

набуває вигляду $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4y^2 \quad y(0) = 1$.

За початкове наближення природно взяти функцію $y(x) = e^{-x}$, тому що, по-перше, на проміжку [0, 0.5] розв'язком рівняння є спадна функція, а по-друге, функція $y(x) = e^{-x}$ задовольняє початкові умови (1).

Нижче наведені результати двох чисельних експериментів, де проводилося порівняння розв'язку, одержаного методом продовження по параметру, з розв'язком, одержаним методом Рунге-Кутта з такими ж чисельними затратами, та розв'язку, одержаного методом продовження по параметру, з точним розв'язком.

У таблиці 2 порівнюється розв'язок, апроксимований многочленом найкращого рівномірного наближення (НРН) з коефіцієнтами, приведеними у таблиці 1, з розв'язком, отриманим методом Рунге-Кутта (Р-К) четвертого порядку точності з кроком 0.0001 на проміжку [0,1]. Точним розв'язком будемо вважати значення, отримані методом Рунге-Кутта з досить малим кроком 10^{-9}.

Таблиця 1

Y[0]	1.0024180584E+00
Y[1]	-3.5639536731E+00
Y[2]	8.9742803493E+00
Y[3]	-1.2742342615E+01
Y[4]	1.0575341272E+01
Y[5]	-3.5301282898E+00

Таблиця 2

X	Метод Рунге-Кутта	Многочлен НРН P5(x)	Точний розв'язок	Відхилення мног. НРН від точного розв'язку [%]	Відхилення методу Р-К від точного розв'язку [%]
0.000000000E+00	1.0005223708E-03	1.002418058E+00	1.000000708E+00	0.0024	0.00052
1.0000000000E-01	7.1517590477E-01	7.2404538481E-01	7.1717700623E-01	0.9577	0.2790
2.0000000000E-01	5.6202014519E-01	5.6245070181E-01	5.6316557573E-01	0.1269	0.2034
3.0000000000E-01	4.7510522566E-01	4.7395598986E-01	4.7573842022E-01	0.3747	0.1331
4.0000000000E-01	4.3121833566E-01	4.3179174056E-01	4.3147873223E-01	0.0725	0.0603
5.0000000000E-01	4.2076325971E-01	4.2186080274E-01	4.2072026660E-01	0.0271	0.0102
6.0000000000E-01	4.3893947370E-01	4.3850222848E-01	4.3863089490E-01	0.0293	0.0070
7.0000000000E-01	4.8213823967E-01	4.8025511918E-01	4.8160033499E-01	0.2793	0.1117
8.0000000000E-01	5.4631766963E-01	5.4562247159E-01	5.4559480874E-01	0.5070	0.1325
9.0000000000E-01	6.2656994430E-01	6.2883502392E-01	6.2571406392E-01	0.4988	0.1368
1.000000000E+00	7.1755923466E-01	7.1561510180E-01	7.1662252749E-01	0.1405	0.1307

При застосуванні методу Р-К ми обчислюємо значення функції в кожній наступній точці, виходячи із значення у попередній точці. Тому, по-перше, ми використовуємо початкову умову $y(x_0)=y_0$ лише один раз, а далі відходячи від цього значення з кожним кроком збільшується похибка машинних обчислень. По-друге, отримуються значення шуканої функції лише в окремих точках, і навіть при дуже малому кроці по X залишається невідомою поведінка шуканої функції між цими точками. Всіх цих вад позбавлений метод диференціювання по мараметру. На кожному кроці ми використовуємо початкову умову, і отримуємо розв'язок диференціального рівняння в аналітичному вигляді.

2. Порівнюється розв'язок, одержаний методом продовження по параметру, з точним розв'язком.

На кожному кроці по t, обчислюючи наступне Y_n за ітераційною формулою $Y_{n+1} = Y_n + \varphi_{n+1} * \Delta t$, ми рухаємося в функціональному просторі від стартової функції U(x) до шуканого розв'язку y(x) [3]. Для ілюстрування цього процесу розглянемо рівняння з відомим точним розв'язком $y' = (e^{x^2} + \sqrt{x})^2 - y^2 + 2xe^{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $y(0) = 1$. Точним розв'язком рівняння є функція $y(x) = e^{x^2} + \sqrt{x}$. На кожному кроці будемо графічно контролювати таку функцію $F(x) = y(x) - y_n(x,t)$, де $y(x)$ - точний розв'язок, а $y_n(x,t)$ - значення функції на n-му кроці. З кожним кроком функція $y_n(x,t)$ наближається до многочлена найкращого рівномірного наближення точного розв'язку. При t=1 отримуємо многочлен найкращого рівномірного наближення точного розв'язку.

1. Я.М.Григоренко, А.П.Мукоєд. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ.- К.:Либідь, 1992. - 148 с.
2. Ц.На. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. - М.:Мир, 1982. - 294 с.
3. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ. - М.:Наука,1984. - 750 с.
4. Ковтунець В.В., Лотюк Ю.Г. Побудова многочлена найкращого рівномірного наближення розв'язку одного диференціального рівняння // Волинський математичний вісник, вип.2, 1996. - С. 90-92.