Національна академія наук України
Інститут математики НАН України
Рівненський державний педагогічний інститут
Українське математичне товариство
Український фонд "Відродження"

National Academy of Sciences of Ukraine
Institute of Mathematic of NAS of Ukraine
Rivne State Pedagogical Institute
Ukrainian Mathematical Society
Ukrainian fond "Vidrodgennia"

Волинський математичний вісник

Випуск 3

(Матеріали міжнародної конференції "Теорія апроксимацій та чисельні методи", присвяченої 100-річчю з дня народження Е.Ремеза, Україна, Рівне, 19-21 червня 1996)

Volyn Mathematical Bulletin

ISSUE 3

(Proceedings International Conference "Approximation theory and numerical methods", dedicated to the 100-th Remez birthday unniversary, Ukraine, Rivne, June, 19-21, 1996)

Rivne 1996

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної та прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the rezults of investigation of the theoretical and applied mathematics in the form of the short repots, original articles, surveys, works of conferences and seminars. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Видається один раз у рік з 1994 року. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N 148 від 11.04.1995 р. Засновники : Бомба А.Я., Ковтунець В.В., Слюсарчук В.Ю..

It publishes one time a year beginning from 1994. The paper of State registration: series PB N 148, 11.04.1995 . Founders: Bomba A.Ya., Kovtunets V.V., Slusarchuk V.Yu.

Адреса редакції: 266000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 26, педінститут, кафедра інформатики та прикладної математики. Тел.: (8+036+2) 26-04-44. E-Mail: rspi@rspi.rovno.ua

При виданні матеріалів конференції редакція вирішила не брати на себе право істотнього редагування підготовлених авторами текстів.

The editorship desided not to make the material changes in the authors' original articles of the conferenses works.

ЗМІСТ

1. **Дзядик В.К.** До сторіччя з дня народження члена кореспондента Академії наук України, професора Євгена Яковича Ремеза та про його внесок у розвиток математики. 7

2. **Андриенко В.А.** О приближении почти всюду средними Рисса двойных ортогональных рядов. 9

3. **Антонова Т.М.** Про вигляд максиманти одного класу гіллястих ланцюгових дробів з комплексними компонентами.......... 14

4. **Боднар Д. І.** Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів з невід'ємними елементами.......... 19

5. **Бомба А.Я., Кузьменко А.П.** Про метод сумарних зображень розв'язування крайових задач на конформні відображення.......... 23

6. **Бунь П.А., Семикина А.В.** Числові методи розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків з використанням узагальнених формул диференціювання з різницями назад.......... 26

7. **Вартанян Г.М.** Об оценке одного интеграла на кривых.......... 31

8. **Галеев Э.М.** Дискретизация задачи о поперечниках 35

9. **Голубов Б.И.** Об ограниченности операторов Харди и Харди-Литтльвуда в пространствах Re H1 и BMO.......... 39

10. **Кириллов С.А.** О теореме Марцинкевича-Зигмунда.......... 43

11. **Колупаєв Б.С., Бордюк М.А., Сідлецький В.О.** Кореляційний взаємозв'язок мікро– та макроскопічних властивостей металонаповнених полімерних систем.......... 46

12. **Кореновский А.А.** Многомерный вариант леммы Рисса и некоторые его приложения. 50

13. **Крикова І.В., Литвин О.М.** Інтерлінація на границі п'ятикутника з криволінійною стороною. 56

14. **Кротов В.Г.** Весовые неравенства и теоремы о следах для функций из многомерных классов типа Харди-Соболева 61

15. **Крякин Ю.В.** О приближении чебышевскими сплайнами в метрике Lp1. 67

16. **Кучмінська Х.Й.** Аналог теореми Пейдона-Уолла для гіллястих ланцюгових дробів.......... 72

17. **Летичевський О.А., Біленко В.І., Волков В.А., Денисенко П.М.** Реалізація модифікованого методу Дзядика засобами алгебраїчного програмування. 76

18. **Литвин О.М., Литвин О.О.** Одна теорема про збіжність методу Качмажа при розв'язанні СЛАР.. 83

19. **Литвин О.М., Нечуйвітер О.П.** Кубатурна формула для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій F(X,Y) з використанням інтерлінації функцій 87

20. **Литвин О.М., Трофименко О.П.** Чисельна реалізація оптимального методу скінченних елементів задачі Діріхле для рівняння Пуассона........ 91

21. **Лотюк Ю.Г.** Побудова многочлена найкращого рівномірного наближення розв'язку рівняння Ріккаті методом продовження по параметру 96

22. **Олійник Т.М., Остудін Б.А.** Алгоритм наближеного розв'язування однієї задачі теплопровідності у випадку розімкнених граничних поверхонь складної геометрії. 99

23. **Піддубний О.М.** Застосування апроксимаційних методів до вивчення граничних влативостей розв'язків одного класу диференціальних рівнянь. 103

24. **Попов Б.А. Харе Д.Е.Дж.** Побудова ітераційних алгоритмів для обчислення обернених функцій. 106

25. **Прикарпатський А.К., Притула М.М., Єршенко О.О.** The Lie-algebraic discrete approximations in computing analysis.. 113

26. **Столярчук В.К., Мартинюк П.М.** Побудова дробово-раціональних поліномів, які здійснюють близьке до найкращого рівномірне наближення функцій Бесселя з цілим індексом, функції ймовірностей та деяких гіпергеометричних функцій.. 117

27. **Стороженко Э.А.** Об обратимости неравенства С.Н.Бернштейна для комплексних полиномов. 120

28. **Сяський А.О., Сяський В.А.** Метод колокації в плоских контактних задачах для пластин з підкріпленим криволінійним отвором..................... 124

29. **Тадеєв П.О.** Вплив педагогічних праць Є.Я.Ремеза на розвиток змісту сучасної математичної освіти в Україні.................................... 128

30. **Турбал Ю.В.** Оцінка інтенсивностей пуассонівських потоків моделі радіоактивного забруднення. 130

31. **Харкевич Ю.І.** Про наближення функцій класу С Н лінійними середніми їх рядів Фур'є. 135

32. **Янчук П.С.** Многочленно-сітковий спосіб наближеного розв'язування крайових задач. 139

УДК 539.3

А.О.Сяський, докт. техн. наук (Рівне, педінститут)
В.А.Сяський, аспірант (Рівне, педінститут)

МЕТОД КОЛОКАЦІЇ В ПЛОСКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПЛАСТИН З ПІДКРІПЛЕНИМ КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ

The plane contact problem for interminable plate with curvilinear fortified by thin elastic bar hole with presence of cut on line of division of material is considered.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною 2h з круговим отвором радіусом $\rho_0=1$, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану "на нескінченності". Контур отвору підкріплений тонким пружним стержнем постійного поперечного перерізу, причому на частині лінії розділу матеріалів пластинки і стержня відбулося розмикання лінії спаю. Серединна поверхня пластинки віднесена до полярної системи координат (ρ,λ) з полюсом в центрі отвору. Не порушуючи загальності, вважаємо, що лінія спаю симетрична відносно полярної осі, а зовнішні зусилля p і q діють в двох взаємно перпендикулярних напрямках. При цьому зусилля p направлені вздовж осі симетрії.

Деформації контура отвору в пластинці при заданому навантаженні визначаються співвідношеннями [6]

$$\varepsilon_\lambda=\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)T_\rho(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_\gamma T_\rho(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_\gamma S_{\rho\lambda}(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+(p+q)-2(p-q)\cos 2\lambda\right] \qquad (1);$$

$$V=\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_\gamma S_{\rho\lambda}(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_\gamma T_\rho(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+2(p-q)\sin 2\lambda\right],$$

де $\varepsilon_\lambda=u_\rho-\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda}$ - відносне видовження контура ; $V=u_\lambda-\dfrac{\partial u_\rho}{\partial\lambda}$ - кут повороту нормалі до контура внаслідок деформації ; γ - дуга на контурі ;
u_ρ , u_λ - компоненти вектора зміщення точок контура ; E , ν - модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ - нормальні і дотичні контактні зусилля на лінії спаю пластинки і стержня.

Підкріплюючий стержень моделюємо пружною лінією, яка наділена жорсткістю на розтяг g_4 і згин g_2. Його напружено-деформований стан описуємо теорією тонких криволінійних стержнів [4,6]

$$N(\lambda)=P_0\cos\lambda+\int_0^\lambda T_\rho(t)\sin(\lambda-t)dt-\int_0^\lambda S_{\rho\lambda}(t)\cos(\lambda-t)dt \quad ;$$

$$L_b(\lambda)=(L_0+P_0)-N(\lambda)-\int_0^\lambda S_{\rho\lambda}(t)dt \quad ; \quad \varepsilon_\lambda^{(c)}=\frac{N(\lambda)}{g_4} \quad ; \quad V^{(c)}=\frac{1}{g_2}\int_0^\lambda L_b(\lambda)d\lambda \, . \qquad (2)$$

Тут $N(\lambda)$, $L_b(\lambda)$- поздовжна сила і згинаючий момент в перерізі λ стержня; $L_0=L_b(0)$; $P_0=N(0)$; верхнім індексом $^{(c)}$ відзначені деформації стержня.
Використовуючи метод сил [4] для визначення P_0 і L_0 , знаходимо

$$\varepsilon_\lambda^{(c)} = \frac{1}{g_4}\left[P_0\cos\lambda + \int_0^\lambda T_\rho(t)\sin(\lambda - t)dt - \int_0^\lambda S_{\rho\lambda}(t)\cos(\lambda - t)dt\right] \; ;$$

$$V^{(c)} = \frac{1}{g_2}\left[(L_0+P_0)\lambda - P_0\sin\lambda + \int_0^\lambda T_\rho(t)\cos(\lambda - t)dt + \int_0^\lambda S_{\rho\lambda}(t)\sin(\lambda - t)dt - \int_0^\lambda T_\rho(t)dt + \int_0^\lambda (t-\lambda)S_{\rho\lambda}(t)dt\right] \; ; \tag{3}$$

$$L_0 + P_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha_0} T_\rho(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha_0}(t-\pi)S_{\rho\lambda}(t)dt \; ;$$

$$P_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}(t)\sin t dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha_0}(t-\pi)\left(T_\rho(t)\sin t + S_{\rho\lambda}(t)\cos t\right)dt \; ; \tag{4}$$

$\pm\alpha_0$ - кінцеві точки зони спаю.

При виведенні (3), (4) врахована умова рівноваги стержня

$$\int_0^{\alpha_0}\left(T_\rho(t)\cos t - S_{\rho\lambda}(t)\sin t\right)dt = 0 \tag{5}$$

Граничні умови на лінії розділу матеріалів приймаємо у вигляді

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda^{(c)} \; ; \; V = V^{(c)} \, , \; \lambda\in[-\alpha_0 \, ; \alpha_0] \; ; \; T_\rho = 0 \; ; \; S_{\rho\lambda} = 0 \, , \; \lambda\in[\alpha_0 \, ; 2\pi-\alpha_0] \tag{6}$$

Підставляючи (1), (3), (4) в граничні умови (6), приходимо до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних зусиль T_ρ і $S_{\rho\lambda}$

$$(1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho(t)ctg\frac{\lambda - t}{2}dt + 2(p+q) - 2(p-q)\cos 2\lambda =$$
$$= \frac{2Eh}{g_1}\left[(L_0+P_0)\lambda - P_0\sin\lambda + \int_0^\lambda T_\rho(t)\cos(\lambda - t)dt + \int_0^\lambda S_{\rho\lambda}(t)\sin(\lambda - t)dt - \int_0^\lambda T_\rho(t)dt + \int_0^\lambda (t-\lambda)S_{\rho\lambda}(t)dt\right] \tag{7}$$

$$(1-\nu)T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}(t)ctg\frac{\lambda - t}{2}dt + (p+q) - 2(p-q)\cos 2\lambda =$$
$$= \frac{2Eh}{g_4}\left[P_0\cos\lambda + \int_0^\lambda T_\rho(t)\sin(\lambda - t)dt - \int_0^\lambda S_{\rho\lambda}(t)\cos(\lambda - t)dt\right], \; \lambda\in[-\alpha_0;\alpha_0].$$

Крім системи (7) повинна виконуватися умова рівноваги (5).

Точне розв'язування системи (7) пов'язане із значними математич-ними труднощами. Для наближеного її розв'язку використаємо метод механічних квадратур. Суть цього методу полягає в тому, що розв'язок системи подається у вигляді добутку деякого множника, який характеризує поведінку розв'язку в околі особливих точок, і гладкої обмеженої функції. Вигляд цього множника визначається з умови несуперечності системи рівнянь в околі особливої точки.

Заміною змінних

$$\tau = tg\frac{\lambda}{2}\Big/a_0 \; ; \; s = tg\frac{t}{2}\Big/a_0 \; ; \; a_0 = tg\frac{\alpha_0}{2} \tag{8}$$

систему (7) зведемо до вигляду

$$(1-\nu)T_\rho(\tau) + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} S_{\rho\lambda}(s)\frac{ds}{s-\tau} + R_1(\tau) = 0 \; ;$$
$$(1-\nu)S_{\rho\lambda}(\tau) - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} T_\rho(s)\frac{ds}{s-\tau} + R_2(\tau) = 0 \; , \tag{9}$$

де $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$ - регулярні при $\tau=\pm1$ функції. Система (9) повинна бути несуперечною при $\tau\to\pm1$.

Допустимо, що $T_\rho(\tau)$ і $S_{\rho\lambda}(\tau)$ задовольняє на інтервалі (-1 ; 1) умову Гельдера [2], а в околі кінців $\tau=\pm1$ має місце подання

$$T_\rho(\tau)+iS_{\rho\lambda}(\tau)=(1-\tau)^{-\gamma_1}(1+\tau)^{-\gamma_2}\left[T_\rho^0(\tau)+iS_{\rho\lambda}^0(\tau)\right] , \tag{10}$$

де $T_\rho^0(\tau)$, $S_{\rho\lambda}^0(\tau)$ - функції, які задовольняють умову Гельдера на [-1 ; 1] ; $\mathrm{Re}\gamma_1>0$; $\mathrm{Re}\gamma_2>0$.

Використовуючи методику [1], визначаємо

$$T_\rho(\tau)+iS_{\rho\lambda}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}e^{i\beta_1\ln\left|\frac{1-\tau}{1+\tau}\right|}\left[T_\rho^0(\tau)+iS_{\rho\lambda}^0(\tau)\right] , \quad \beta_1=\frac{\ln\kappa}{2\pi} \tag{11}$$

Вираз (11) показує, що на торцях лінії спаю контактні напруження мають особливість типу квадратного кореня, на яку накладається локальна осциляція. В роботі [6] показано, що в задачах, які не вимагають визначення коефіцієнтів напружень в торцях лінії спаю, осцилюючий множник можна внести у вираз $T_\rho^0(\tau)+iS_{\rho\lambda}^0(\tau)$. Тому наближений розв'язок системи (7) може бути вибраний у вигляді [1]

$$T_\rho(\tau)+iS_{\rho\lambda}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left[\widetilde{T}_\rho(\tau)+i\widetilde{S}_{\rho\lambda}(\tau)\right] , \tag{12}$$

де $\widetilde{T}_\rho(\tau),\widetilde{S}_{\rho\lambda}(\tau)$ - обмежені на [-1 ; 1] , неперервні функції.

Згідно з ідеєю Мультоппа-Каландія [3], побудуємо інтерполяційні поліноми Лагранжа для функцій $\widetilde{T}_\rho(\tau),\widetilde{S}_{\rho\lambda}(\tau)$, вибравши за вузли інтерполяції корені поліномів Чебишева другого роду порядку N_0

$$\tau_m=\cos\varphi_m \quad ; \quad \varphi_m=\frac{2m-1}{2N_0}\pi \quad , \ (m=1,\ 2,\ \ldots,\ N_0) \tag{13}$$

Як відомо [3], такі поліноми мають вигляд

$$\left\{\widetilde{T}_\rho(\varphi),\widetilde{S}_{\rho\lambda}(\varphi)\right\}=\frac{1}{N_0}\sum_{n=1}^{N_0}\left\{A_n,B_n\right\}\frac{(-1)^{n+1}\cos N_0\varphi\sin\varphi_n}{\cos\varphi-\cos\varphi_n} , \tag{14}$$

$\lambda = 2\mathrm{arctg}(a_0\cos\varphi)$.

Підставляючи (12), (14) в систему (7) з врахуванням (5) і надаючи аргументу φ послідовно значення φ_1, φ_2, ..., φ_{N0} , одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення постійних A_n, B_n. Якщо розв'язок цієї системи, який задовольняє умові рівноваги (5), буде відомий, то контактні напруження в точках колокації визначатимуться за формулами

$$T_\rho(\lambda_m)=\frac{A_m}{\sin\varphi_m} \quad ; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda_m)=\frac{B_m}{\sin\varphi_m} \tag{15}$$

Чисельна реалізація задачі проведена для випадку p=1 ; q=0. Для підкріплюючого стержня прямокутного перерізу $2h^c\times b_0$ з параметрами $h^c/h = 1$; $b_0/\rho_0 = 0.1$; $\alpha_0 = 5\pi/6$ досліджений вплив жорсткості стержня E_0/E на розподіл контактних напружень по контуру отвору в пластинці. Результати розрахунку приведені в таблиці 1. Всі обчислення проводилися для різних значень N_0, до $N_0 = 64$ включно. Слід відмітити, що контактні напруження практично не змінюються починаючи з N_0= 32. Це свідчить про добру збіжність методу колокації. При обчисленні інтегралів із змінними верхніми границями кожен інтервал між сусідніми точками колокації розділявся на 20 частин. Для визначення інтегралів у лівій частині (7) використані квадратурні формули, які приведені в [5, 6].

Таблиця 1

	T_ρ			$S_{\rho\lambda}$		
λ(град)	E_0/E=10	100	1000	10	100	1000
0	-0.004	0.066	0.643	0	0	0
10.46	-0.021	0.219	0.796	-0.320	-0.449	-0.410
30.70	-0.128	0.658	1.159	-0.860	-0.941	-0.802
49.11	0.488	0.727	0.959	-0.962	-1.026	-0.804
65.08	0.677	1.002	0.960	-0.780	-0.760	-0.524
78.54	0.865	1.036	0.820	-0.444	-0.310	-0.080
89.73	0.879	1.129	0.820	-0.118	0.124	0.339
99.00	0.907	1.081	0.725	0.157	0.514	0.725
113.05	0.813	1.058	0.629	0.482	1.041	1.257
122.94	0.728	1.020	0.505	0.585	1.361	1.581
132.93	0.775	0.914	0.287	0.529	1.665	1.865
139.39	1.131	0.583	-0.068	0.431	1.964	2.143
142.45	1.441	0.273	-0.342	0.396	2.172	2.343
145.77	1.915	-0.355	-0.853	0.419	2.525	2.712
148.48	2.773	-1.978	-2.244	0.699	3.432	3.776
149.28	3.610	-3.711	-3.858	1.151	4.345	4.906
149.92	9.921	-15.64	-15.76	5.167	10.431	12.556

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. -М.:Наука,1983.-488с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. -М.:Наука,1977.-640с.
3. Каланлия Ф.И. Математические методы двумерной упругости. -М.:Наука,1973.-304с.
4. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. -Киев:Вища школа,1986,-775с.
5. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкреплённым криволинейным отверстием. //Прикл. математика и механика.-1986.-50,N2.-с.247-254.
6. Сяський А.А., СяськийВ.А. Напряжённое состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением. //Прикл. механика.-1983.-19,N5.-с.94-99.