

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

Випуск 8

2001

Зміст

Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. ДО ПИТАННЯ ПРО МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ РОСТУ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ЛАГАМИ.....	4
Бомба А.Я., Кацман С.С. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ТА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ.....	9
Булавацький В.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НЕРІВНОВАЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ НА ОСНОВІ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ.....	23
Бурак Я.Й., Кондрат В.Ф. РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ПОВІЛЬНО РУХОМИХ ПОРИСТИХ НАСИЧЕНИХ ТІЛ.....	27
Буренко В.І. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ВИРІЗАНИМИ СЕГМЕНТАМИ БІЛЯ ПОЛЮСІВ ПІД ЗОВНІШНІМ ТИСКОМ.....	33
Возняк О.Г. ПРО ОДНОЗНАЧНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ТА ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ.....	37
Дейнека В.С., Баран І.О. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ.....	48
Демиденко О.М., Быченко О.В., Максимей І.В., Агеєнко І.В. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В ЛОКАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ БАЗОЙ ДАННЫХ.....	54
Дяконюк Л.М. АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ІЄРАРХІЧНОЇ МОДЕЛІ ПОНИЖЕНОЇ ВИМІРНОСТІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ.....	61
Комбель С.М. НЕНАПРУЖЕНА ПОСАДКА ЖОРСТКОГО ДИСКА В ЕЛІПТИЧНИЙ ОТВІР НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ.....	65
Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ ТА РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	71
Кундрат М.М. ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КОМПОЗИЦІЇ З ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ.....	78
Кухарський В.М., Савула Я.Г., Копитко М.Ф. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ У СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ ВКЛЮЧЕНИМИ ТОНКИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ ШАРАМИ.....	86
Сяський А.О., Комбель С.М. ГРАНИЧНІ УМОВИ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА.....	93
Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. ПРО ВРАХУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ХІМІЧНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ І КОНЦЕНТРАЦІЯМИ В ЗАДАЧАХ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ.....	98
Яджак М.С. ПРО МОДЕЛЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ З ОБМЕЖЕНИМ ПАРАЛЕЛІЗМОМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	105

УДК 539.4

Кундрат М.М.

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КОМПОЗИЦІЇ З ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ

Запропоновано модельну постановку, в рамках якої вивчається вплив зосереджених сил на напружено-деформований стан, граничну рівновагу та руйнування в композиції з жорстким скінченною міцністю і на розрив лінійним включенням.

1. Постановка задачі та її розв'язок. Тонка необмежена пластина в умовах плоскої задачі з жорстким лінійним включенням вздовж відрізка $(-a, a)$ симетричного відносно осі ординат розтягується паралельно лінії включення двома зосередженими силами величини Q , прикладеними в точках $x=\pm h, y=0$ (рис. 1a). Матеріал пластины та контактної прошарку матриця-включення приймаємо приблизно рівномірними.

Внаслідок концентрації напружень біля кінців включення та точок прикладання сил виникатимуть зони пластичних деформацій. Дослідимо розвиток зон пластичності в околах кінців включення, нехтуючи для простоти впливом на їх розвиток пластичних зон біля точок прикладання сил, що допустимо при достатній віддаленості останніх від кінців включення. Для аналітичного вивчення розвитку зон пластичності використовуємо метод приведення задачі про пружнопластичну рівновагу тіла до задачі про пружну рівновагу з розривними переміщеннями на лініях пластичних смуг в околах вершин включення.

Приймаємо, що зародженню зон пластичності передують зони розпушення в $L_1 = \{b \leq |x| < a, y = 0\}$, дотичні напруження в яких розподіляються за законом (рис. 1b)

$$\tau_{xy}^+ = \tau_s^* \left(1 - \frac{|x| - b}{a - b} \right) \text{sign}(x), y = 0, b \leq |x| < a (x \in L_1). \tag{1}$$

Після досягнення довжиною зони розпушення деякого граничного значення, яке визначається структурою матеріалу, настає пластичне деформування в області $L_2 = \{c \leq |x| < b, y = 0\}$.

При цьому дотичні напруження розподіляються за законом (рис. 1c)

$$\tau_{xy}^+ = -\tau_{xy}^- = \tau_s^* \text{sign}(x), y = 0, c \leq |x| < b (x \in L_2). \tag{2}$$

На відрізку $|x| < c$ включення ідеально зв'язане з матрицею

$$u^\pm = v^\pm = 0, y = 0, |x| < c, (x \in L'). \tag{3}$$

Тут і далі $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ – компоненти тензора напружень; u, v – компоненти вектора переміщення відповідно по осях Ox та Oy ; $(b-c)$ – довжина зони пластичності; $(a-b)$ – довжина зони розпушення; τ_s^* – границя напружень зсуву контактної прошарку матриця-включення, а при моделюванні пластичних деформацій біля вершин включення $\tau_s^* = \tau_T^*$; знаки “+” та “-” відповідають граничним значенням на дійсній осі відповідно із верхньої ($y > 0$) та нижньої ($y < 0$)

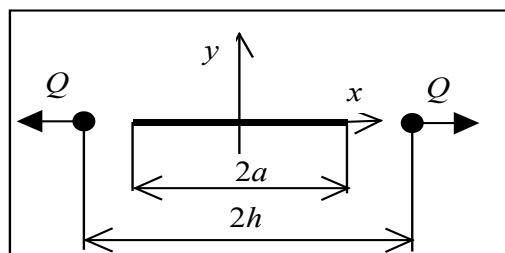


Рис. 1a.

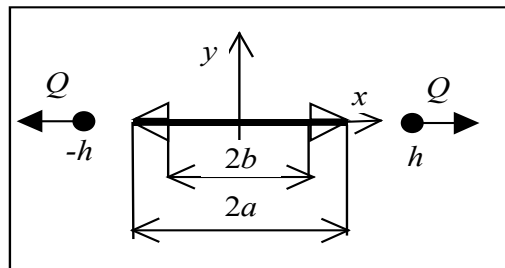


Рис. 1b.

півплощин; $sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Зону розпушення

($a-b$) приймаємо достатньо малою порівняно із зоною пластичності ($b-c$) та розмірами включення $2a$ так, щоб вона лише починала впливати на напружено-деформований стан в тілі. Її довжина $a-b=\rho$ визначається структурним параметром матеріалу контактної прошарку, що виражає сумарний вплив неоднорідності структури на напружено-деформований стан в тілі.

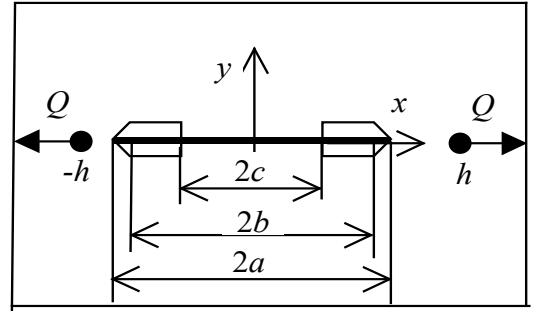


Рис. 1с.

Розв'язок задачі (1) – (3) визначаємо як суперпозицію розв'язків двох [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(z) + (z - \bar{z})\Phi'(z), \\ 2G(u' + i v') &= \chi\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(\bar{z})}, \\ \Phi(z) &= \Phi_0(z) + \Phi_*(z), \quad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \Omega_*(z), \end{aligned} \quad (4)$$

де індексом “нуль” позначені складові, що дають розв'язок задачі для суцільної пластини при її розтягу зосередженими силами, а “зірочкою” – розв'язок, що враховує розрив переміщень на лініях розпушення та пластичності. Розв'язок першої задачі відомий [1] і встановлюється формулами:

$$\Phi_0(z) = -\frac{Qh}{\pi(\chi+1)} \cdot \frac{1}{z^2 - h^2}, \quad \Omega_0(z) = \frac{\chi Qh}{\pi(\chi+1)} \cdot \frac{1}{z^2 - h^2}, \quad (5)$$

де $z=x+iy$ – координати точок, в яких визначається напружено-деформований стан; $\chi = (3 - \mu)/(1 + \mu)$; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці.

Розв'язок другої задачі після задоволення крайових умов (1) – (3) приводиться до задачі лінійного спряження з кусково-неперервними коефіцієнтами для функції $\Phi_*(z)$:

$$\Phi_*^+(x) - g\Phi_*^-(x) = f(x), \quad (6)$$

де $g = \begin{cases} -1, & x \in L' \\ 1, & x \in L_1 + L_2 \end{cases}$, $f(x) = f_0 = -2\Phi_0(x)$, $x \in L'$, $f(x) = f_2 = \frac{2\tau_s^*}{\chi+1} \operatorname{sign}(x)$, $x \in L_2$,

$f(x) = f_1 = -\frac{2\tau_s^*}{\chi+1} \frac{a-|x|}{a-b} \operatorname{sign}(x)$, $x \in L_1$, $\Phi_0(x)$ визначена формулою (5).

Розв'язок однорідної задачі спряження (6), коли $f(x) = 0$, вибираємо у вигляді $X(z) = 1/\sqrt{z^2 - c^2}$. Тоді загальний розв'язок неоднорідної задачі спряження (6) буде наступним

$$\Phi_*(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \left\{ \int_{L'} \frac{f_0(t)dt}{X^+(t)(t-z)} + \int_{L_1} \frac{f_1(t)dt}{X^+(t)(t-z)} + \int_{L_2} \frac{f_2(t)dt}{X^+(t)(t-z)} \right\} + X(z)(c_1 + c_2 z),$$

де c_1, c_2 – дійсні числа. Після інтегрування, виконання умов на нескінченності та спрощення отримуємо, що

$$\begin{aligned} \Phi_*(z) &= \frac{Qh}{\pi(\chi+1)} \cdot \frac{1}{z^2 - h^2} \left(1 - \frac{z\sqrt{h^2 - c^2}}{h\sqrt{z^2 - c^2}} \right) + \frac{zB_1}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \\ &+ \frac{\tau_s^*}{\pi(\chi+1)(a-b)} \left[b\Gamma_1(z, b, c) - a\Gamma_1(z, a, c) + z(\Gamma_2(z, a, c) - \Gamma_2(z, a, c)) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

де $B_1 = \frac{2\tau_s^*}{\pi(\chi+1)(a-b)} f_1(a, b, c)$, $f_1 = \sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} + b \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}$,

$$\Gamma_1(z, \alpha, \beta) = \ln\left(\xi^- / \xi^+\right), \quad \xi^\pm = \alpha \sqrt{z^2 - \beta^2} \pm z \sqrt{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$\Gamma_2(z, \alpha, \beta) = \ln\left(\eta^- / \eta^+\right), \quad \eta^\pm = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \pm \sqrt{z^2 - \beta^2}.$$

Враховуючи, що розв'язком поставленої задачі є суперпозиція розв'язків (5), (7), згідно з формулами (4) отримаємо вирази для функцій напружень

$$\Phi(z) = \left(B_1 z - \frac{Qz}{\pi(\chi+1)} \frac{\sqrt{h^2 - c^2}}{z^2 - h^2} \right) \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{\tau_s^*}{\pi(\chi+1)(a-b)} \left[-a\Gamma_1(z, a, c) + b\Gamma_1(z, b, c) + z(\Gamma_2(z, a, c) - \Gamma_2(z, b, c)) \right], \quad (8)$$

$$\Omega(z) = -\chi\Phi(z).$$

Формули (4), (8) дозволяють встановити напружено-деформований стан пластини та всебічно проаналізувати задачу. При попередніх перетвореннях використано наступні значення інтегралів:

$$\int_{L_1} \frac{t \cdot dt}{\sqrt{t^2 - c^2} (t - z)} = 2z \left(\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} \right) + z \sqrt{z^2 - c^2} (\Gamma_2(z, b, c) - \Gamma_2(z, a, c)),$$

$$\int_{L_2} \frac{\text{sign}(t) \cdot dt}{\sqrt{t^2 - c^2} (t - z)} = 2z \cdot \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - \sqrt{z^2 - c^2} \cdot \Gamma_1(z, b, c),$$

$$\int_{L_1} \frac{\text{sign}(t) \cdot dt}{\sqrt{t^2 - c^2} (t - z)} = 2z \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{b + \sqrt{b^2 - c^2}} + \sqrt{z^2 - c^2} \cdot (\Gamma_1(z, a, c) - \Gamma_1(z, b, c)),$$

$$\int_{L'} \frac{\sqrt{t^2 - c^2} dt}{t - z} = \sqrt{z^2 - c^2} - z.$$

Поведінка функцій Γ_1, Γ_2 на нескінченності визначається співвідношеннями

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma_1(z, a, c) = -2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma_2(z, a, c) = -2\sqrt{a^2 - c^2} \cdot \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

2. Довжина пластичних смуг та переміщення в них. Задовольняючи в розв'язку (8) умові неперервності напружень в околах вершин пластичних смуг $\tau_{xy}(x, 0) \rightarrow \tau_s^*$ при $x \rightarrow c - 0$ отримуємо рівняння для визначення їх довжини

$$\frac{Q}{2\tau_s^*} + \frac{\sqrt{h^2 - c^2}}{(a-b)} f_1(a, b, c) = 0, \quad (9)$$

розв'язок якого подано на рис. 2 лініями 1, 2, 3 для безрозмірної довжини смуг $\varepsilon = (a-b)/a$. Лінія 1 відповідає відстані до точок прикладання сил $r = h/a = 1,5$, для лінії 2 – $r = 2$, для лінії 3 – $r = 5$. Суттєвим тут є незалежність довжини пластичних смуг від пружних коефіцієнтів матеріалу матриці на відміну від такої ж задачі з однорідним напруженим станом на нескінченності.

У випадку $\rho=0$ (смуги розпушення відсутні) рівняння (9) спрощується до вигляду

$$\frac{Q}{2\tau_s^*} - \sqrt{h^2 - c^2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} = 0. \quad (10)$$

При малих $\varepsilon_c \ll 1$, використовуючи розвинення в ряд Тейлора та зберігаючи перші доданки, знаходимо, що

$$\sqrt{\varepsilon_c} = \frac{Q}{2\sqrt{2}a\tau_s^*} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 1}} \text{ або}$$

$$a - c = \frac{Q^2}{8(\tau_s^*)^2} \frac{a}{h^2 - a^2}.$$

Довжина смуг пропорційна квадрату прикладених сил та обернено пропорційна різниці квадратів відстані до точок їх прикладання та вершини включення. Лінія 4 при $r=h/a=1,5$, лінія 5 при $r=2$ та лінія 6 при $r=5$ на рис. 2 відповідають розрахункам за наближеною формулою (11), яка для значної частини навантаження може бути використана при обчисленні довжини смуг. Рівняння (9) описує довжину смуг пластичності та розпушення в залежності від Q, τ_s^*, a, h . Для подальшого використання подамо його у вигляді, що відображає залежність довжини смуг від навантаження, відстані до точок прикладання сил та величини τ_s^* :

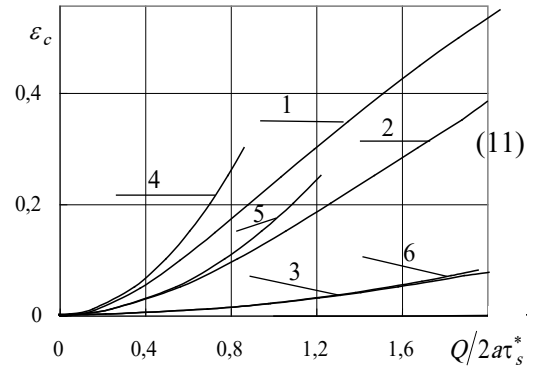


Рис. 2.

$$c = \varphi(Q, \tau_s^*, h) \cdot a. \quad (12)$$

Тангенціальні переміщення в смугах пластичності та розпушення (нормальні переміщення за умовою задачі дорівнюють нулю) згідно формул (4):

$$G(u' + \dot{v}')^+ = \chi \Phi^+(x) + \dot{\chi} \tau_{xy}^+ / (\chi + 1).$$

$$\text{Звідси } G(u' + \dot{v}')^+ = \frac{\chi \tau_s^*}{\pi(\chi + 1)(a - b)} \left[-a\Gamma_1^+(x, a, c) + b\Gamma_1^+(x, b, c) + x(\Gamma_2^+(x, a, c) - \Gamma_2^+(x, b, c)) \right].$$

Після інтегрування та перетворень знаходимо, що при $c \leq x \leq a$:

$$u(x) = \frac{\chi \tau_s^*}{2\pi G(\chi + 1)(a - b)} \left[\begin{aligned} &+ 2x \left(b\Gamma_2 \left(\frac{x}{a}, \frac{b}{a}, \varphi \right) - a\Gamma_1 \left(\frac{x}{a}, \frac{b}{a}, \varphi \right) \right) - \\ &\left(a^2 + x^2 \right) \Gamma_2 \left(\frac{x}{a}, 1, \varphi \right) - \left(b^2 + x^2 \right) \Gamma_2 \left(\frac{x}{a}, \frac{b}{a}, \varphi \right) - \\ &- 2\sqrt{x^2 - \varphi^2 a^2} \left(a\sqrt{1 - \varphi^2} - \sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2} \right) \end{aligned} \right]. \quad (13)$$

Найбільші переміщення досягаються в околах вершин включення ($x=\pm a$)

$$u(a) = \frac{\chi \tau_s^*}{\pi G(\chi + 1)(a - b)} f_2(a, b, \varphi), \quad (14)$$

$$\text{де } f_2 = a\sqrt{(1 - \varphi^2)(b^2 - \varphi^2 a^2)} + a^2(\varphi^2 - 1 - 2 \ln \varphi) + b \ln \frac{b\sqrt{1 - \varphi^2} - a\sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2}}{b\sqrt{1 - \varphi^2} + a\sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2}} -$$

$$-0.5(a^2 + b^2) \ln \frac{a\sqrt{1-\varphi^2} - \sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2}}{a\sqrt{1-\varphi^2} + \sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2}},$$

$\varphi(Q, \tau_s^*, h)$ визначається співвідношеннями (9), (12).

Величину максимальних переміщень в околах вершин включення знаходимо із розв'язку системи рівнянь (9), (14). Їх значення в залежності від навантаження подано на рис. 3. Для лінії 1 параметр $r=h/a=1,5$, для лінії 2 – $r=2$, для лінії 3 – $r=5$, для всіх $\chi=2,2$. В першому наближенні для оцінки розривів переміщень можна скористатися формулою, отриманою із розвинення в ряд Тейлора по ε у виразі (14) та формули (11)

$$u(a) = \frac{\chi Q^2}{4\pi G(\chi+1)a\tau_s^* r^2 - 1}, \tag{15}$$

розрахунки по якій відповідають на рис. 3 лініям 4, 5 та 6 при тих же відстанях до точок прикладання сил.

3. Контактні напруження. Значення контактних напружень вздовж межі включення-матриця визначаються формулами (для правої половини включення):

$$x \in L': \sigma_y^+ = 0,$$

$$\tau_{xy}^+ = \frac{2\tau_s^*}{\pi(a-b)} \left[a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{1-\varphi^2}}{\sqrt{a^2\varphi^2 - x^2}} - b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{b^2 - a^2\varphi^2}}{b\sqrt{a^2\varphi^2 - x^2}} + x \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2\varphi^2 - x^2}}{a\sqrt{1-\varphi^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2\varphi^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - a^2\varphi^2}} \right) \right];$$

$$x \in L_2: \sigma_y^+ = -\frac{(\chi-1)\tau_s^*}{\pi(\chi+1)(a-b)} \left[b \ln \frac{x\sqrt{b^2 - a^2\varphi^2} - b\sqrt{x^2 - \varphi^2 a^2}}{x\sqrt{b^2 - a^2\varphi^2} + b\sqrt{x^2 - \varphi^2 a^2}} - a\Gamma_1(x, a, \varphi) + x \cdot \left(-\Gamma_2(x, b, c) + \ln \frac{\sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2} - \sqrt{x^2 - a^2\varphi^2}}{\sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2} + \sqrt{x^2 - a^2\varphi^2}} \right) \right],$$

$$\tau_{xy}^+ = \tau_s^* \operatorname{sign}(x);$$

$$x \in L_1: \sigma_y^+ = -\frac{(\chi-1)\tau_s^*}{\pi(\chi+1)(a-b)} \left[b \ln \frac{b\sqrt{x^2 - \varphi^2 a^2} - x\sqrt{b^2 - a^2\varphi^2}}{b\sqrt{x^2 - \varphi^2 a^2} + x\sqrt{b^2 - a^2\varphi^2}} - a\Gamma_1(x, a, \varphi) + x \cdot \left(-\Gamma_2(x, b, c) + \ln \frac{\sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2} - \sqrt{x^2 - a^2\varphi^2}}{\sqrt{b^2 - \varphi^2 a^2} + \sqrt{x^2 - a^2\varphi^2}} \right) \right], \tag{16}$$

$$\tau_{xy}^+ = \tau_s^* (a - |x|) / (a - b) \operatorname{sign}(x).$$

Розподіл дотичних напружень по довжині правої половини включення $0 \leq x \leq a$ (ліва половина симетрична правій) подано на рис. 4. Для лінії 1 навантаження $Q=0,5\tau_s^*$, для лінії 2 – $Q=0,8\tau_s^*$,

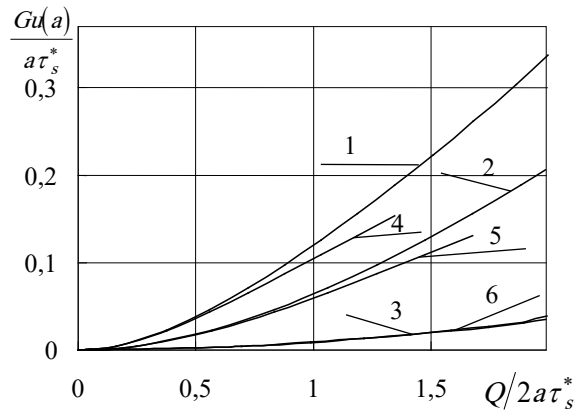


Рис. 3.

для обох – $r=h/a=2$. Якісний характер розподілу напружень узгоджується з експериментальними даними [2]. В композиції з пластичною матрицею дотичні напруження на поверхні розділу збільшуються до значень, при яких в матриці чи вздовж поверхні розділу біля вершини включення виникає пластична деформація. Після того, як на деякому відрізку включенню буде передана більша частина навантаження, вони швидко зменшуються.

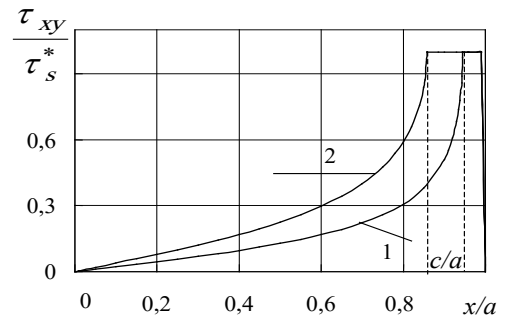


Рис. 4.

4. Осьові зусилля. Приймаємо, що включення хоч і жорстке, але має кінцеву міцність на розрив P_{pr} . Дотичні напруження на поверхні включення створюють в його поперечному перерізі розриваючі осьові зусилля $P(x)$, які розподіляються по довжині включення за законом

$$P(x) = \frac{2\tau_s^*}{\pi(a-b)} \left\{ \begin{aligned} & \left((b^2 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} - (a^2 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \right. \\ & + 2x \left(b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - x^2}} - a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{c^2 - x^2}} \right) + \\ & \left. + 0,5\pi(a-b)(a+b-2c) + \sqrt{b^2 - x^2} \left(\sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - c^2} \right) \right\} \quad (17) \end{aligned} \right.$$

якщо $0 \leq |x| \leq c$ і

$$P(x) = \sigma \tau_s^* (a + b - 2x) \text{ при } c \leq |x| \leq b, \quad P(x) = \sigma \tau_s^* (a - x)^2 / (a - b) \text{ при } b \leq |x| \leq a.$$

При цьому передачу зусиль через торець включення не враховуємо. Розподіл розриваючих осьових зусиль за формулою (17) по довжині включення приведено на рис. 5 для його правої половини. Навантаження $Q = 0,5\tau_s^*$ відповідає лінії 1 та

$Q = 0,8\tau_s^*$ – лінії 2, для обох – $r=h/a=2$. Слід відмітити існування області на середині включення, де величина осьових зусиль змінюється незначно. Наприклад, якщо допустити відносну різницю між найбільшим та найменшим значенням осьових зусиль у 5%, то така область складає не менше третини від довжини включення. Це свідчить про можливість в реальних композиціях одночасного розриву включення на декілька (більше двох) складових.

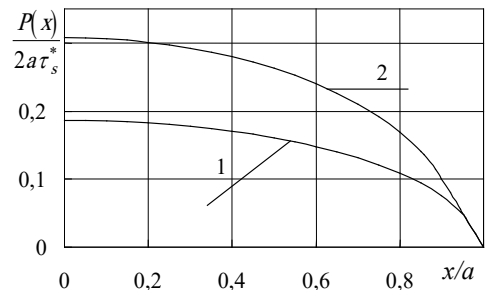


Рис. 5.

Максимальне значення розриваючих осьових зусиль досягається на середині включення

$$P(0) = \frac{2\tau_s^*}{\pi(a-b)} f_3(a, b, \varphi), \quad (18)$$

$$\text{де } f_3 = b^2 \operatorname{arctg} \left(a^2 \varphi^2 / \sqrt{b^2 - a^2 \varphi^2} \right) - a^2 \operatorname{arctg} \left(1 / \sqrt{1 - \varphi^2} \right) + a\varphi \left(\sqrt{b^2 - a^2 \varphi^2} - a\sqrt{1 - \varphi^2} \right) + 0,5\pi(a-b)(a+b-2a\varphi).$$

Залежність максимальних розриваючих зусиль $P(0)$ від навантаження на підставі системи рівнянь (18), (9) подано на рис. 6. Для лінії 1 параметр $r=h/a=1,5$, для лінії 2 – $r=2$, для лінії 3 – $r=5$.

5. Гранична рівновага та руйнування. Розглянемо два найбільш вірогідних варіанти розвитку руйнування в композиції. Перший – в смугах пластичності та розпушення відбувається переміщення точок матриці відносно включення. При досягненні переміщеннями певної межі, яка є характеристикою композиції, відбувається втрата зв'язку між включенням та матрицею, тобто виникає тріщина ковзання. Другий – дотичні напруження на поверхні матриця-включення створюють в поперечному перерізі включення осьові зусилля, спрямовані на його розрив. При досягненні розриваючими осьовими зусиллями межі міцності включення воно розірветься.

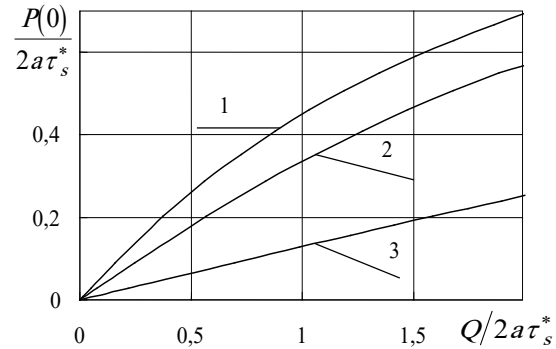


Рис. 6.

Розглянемо спочатку можливість відшарування включення, посилаючись на деформаційний критерій, тобто для відшарування необхідне досягнення розривами переміщень певного граничного значення:

$$u(a) = \delta_{2C}, \tag{19}$$

де δ_{2C} – стала характеристика, що визначається із експерименту. Значення граничного навантаження $Q=Q^*$, що відповідає зародженню біля кінців включення тріщин поперечного зсуву в залежності від параметра δ_{2C} знаходимо із розв'язку системи рівнянь

$$\frac{Q^*}{2\tau_s^*} = \sqrt{h^2 - c^2} \frac{f_1(a, b, c)}{(a - b)}, \quad \frac{G\delta_{2C}}{2\tau_s^*} = \frac{2\chi}{\pi(\chi + 1)} \frac{f_2(a, b, c)}{a - b}. \tag{20}$$

На рис. 7 подано її розв'язок, для лінії 1 параметр $r=h/a=1,5$, для лінії 2 – $r=2$. В першому наближенні

$$Q^* = 2\sqrt{r^2 - 1} \sqrt{\frac{\pi(\chi + 1)G\delta_{2C}a\tau_s^*}{\chi}}. \tag{21}$$

Отримані співвідношення можна використати в експериментальній механіці руйнування. При відомій довжині пластичних смуг, граничному навантаженні можна оцінити величину розривів переміщень δ_{2C} та енергію руйнування для конкретних композицій.

Розглянемо тепер можливість розриву включення. Найбільше значення осьових зусиль визначається за формулою (18). Із збільшенням навантаження та розвитком смуг пластичності осьові зусилля також зростають. Збільшення зусиль у включенні буде проходити до початку відшарування включення від матриці чи, що те саме, до досягнення розривами переміщень граничного значення δ_{2C} . Тому максимально можливі осьові зусилля у включенні знаходимо із розв'язку системи рівнянь

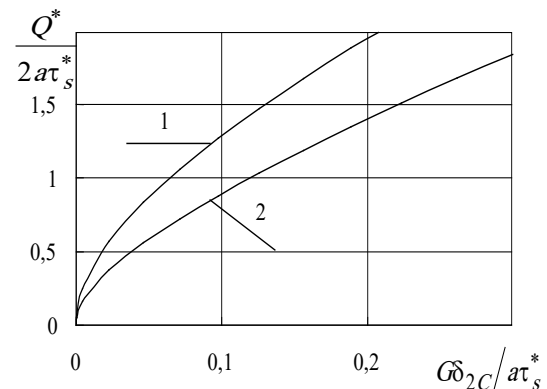


Рис. 7.

$$P_{\max} = \frac{2\tau_s^*}{\pi} \frac{f_3(a, b, c)}{a - b}, \quad \frac{G\delta_{2C}}{2\tau_s^*} = \frac{2\chi}{\pi(\chi + 1)} \frac{f_2(a, b, c)}{a - b}. \tag{22}$$

На рис. 8 подано їх значення, на які необхідно орієнтуватися при проектуванні такого класу композицій з включеннями.

З іншого боку, міцність включення на розрив обмежена. Для того, щоб включення залишилося цілим, максимальні осьові зусилля P_{\max} не повинні перевищувати міцності включення на розрив:

$$P_{\max} \leq P_{pr}. \quad (23)$$

Приймаючи умову (23) за критеріальну та розв'язуючи систему рівнянь

$$\frac{Q^{**}}{2\tau_s^*} = \frac{\sqrt{h^2 - c^2}}{(a-b)} f_1(a, b, c), \quad \frac{\pi P_{\max}}{2\tau_s^*} = \frac{f_3(a, b, c)}{a-b}, \quad (24)$$

знаходимо значення граничного навантаження Q^{**} для розриву включення. В нульовому наближенні просту формулу отримаємо виконавши в правих частинах наведеної системи рівнянь розвинення в ряд Тейлора і врахувавши лише перші складові:

$$Q^{**} = \frac{1}{2} \pi P_{pr} \sqrt{h^2 - a^2}. \quad (25)$$

Таким чином, характер руйнування в композиції буде визначатись: з однієї сторони - міцнісними параметрами матриці чи контактного прошарку матриця-включення δ_{2C} , τ_s^* (чи $\gamma_\tau^* = 4\delta_{2C}\tau_s^*$), з іншої сторони - міцністю включення на розрив P_{pr} і при фіксованій довжині включення або відшаровується від матриці або розривається в залежності від того, яка із граничних рівностей (19) чи (23) досягнеться раніше.

Отримані співвідношення визначають критичну довжину включення a_{cr} , яка разом з пружними та міцнісними параметрами композиції визначає механізм руйнування. При довжині включення більшій за критичну, яка визначається із розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\pi P_{pr}}{2\tau_s^*} = \frac{f_3(a_{cr}, b, c)}{a_{cr} - b}, \quad \frac{G\delta_{2C}}{2\tau_s^*} = \frac{2\chi}{\pi(\chi + 1)} \frac{f_2(a_{cr}, b, c)}{a_{cr} - b},$$

зі збільшенням навантаження відбудеться розрив включення. Відповідне граничне навантаження обчислюємо із системи рівнянь (24) чи за наближеною формулою (25). При довжині включення меншій за критичну a_{cr} розвиток руйнування буде проходити шляхом його відшарування. Граничне навантаження при цьому знаходимо із розв'язку системи рівнянь (20) чи за наближеною формулою (21).

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, 1966.- 707с.
2. Шами К. Механизм передачи нагрузки через поверхность раздела.- Композиционные материалы.- Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах.- М.:Мир.- 1978.- С.42-87.

Рівненський державний технічний університет, Рівне

Надійшла 15.02.2001

Кундрат Н.М. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ КОМПОЗИЦИИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ // В рамках предложеной модельной постановки изучается влияние сосредоточенных сил на напряженно-деформированное состояние, предельное равновесие и разрушение в композициях с жестким линейным включением.

Kundrat M.M. LIMITING EQUILIBRIUM COMPOSITION WITH INCLUSION UNDER THE ACTION BY CONCENTRATED FORCES // Calculation scheme for the analysis stresses and displacements, limiting equilibrium and fracture in compositions with rigid fiber inclusion are suggested.

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the mathematics, informatics and mechanics. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

У цьому випуску переважають роботи з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Редакційна колегія :

Барановський С.В. (*секретар*)
Бейко І. В.
Боднар Д. І.
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)
Бурак Я. Й.
Войтович М. М.
Гаращенко Ф. Г.
Горбачук М.Л.
Дейнека В.С.
Задерей П. В.
Каштан С. С. (*технічний секретар*)
Ковтунець В. В.
Кратко М. І.
Ляшко І.І.
Мельник В. С.
Попов Б. О.
Прикарпатський А. К.
Пташник Б. Й.
Савула Я. Г.
Скопєцький В. В. (*головний редактор*)
Сяський А. О.
Чикрій А.О.
Шевчук І.О.
Шинкаренко Г. А.
Янчук П. С.
Ясній П. В.

Editorial board :

Baranovsky S.V. (*secretary*)
Beyko I. V.
Bodnar D. I.
Bomba A. Ya. (*editor*)
Burak Ya. Y.
Voytovych M. M.
Garashchenko F. G.
Gorbachuk M.L.
Deyneka V.S.
Zaderej P. V.
Kashtan S. S. (*secretary*)
Kovtunets V. V.
Kratko M. I.
Lyashko I.I.
Melnyk V. S.
Popov B. O.
Prykarpatsky A. K.
Ptashnyk B. Y.
Savula Ya. G.
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)
Syasky A. O.
Chikriy A.O.
Shevchuk I.O.
Shynkarenko G. A.
Yanchuk P. S.
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 .

Наукове видання
"Волинський математичний вісник"
Випуск 8, 2001

Відповідальний за випуск Бомба А.Я.

Здано до друку . .200 р. Підписано до друку . .200 р.
Формат 1/8 Папір друк. 30×21 Ум. друк. арк. 4,54
Наклад 300 прим. Замовлення № –

Віддруковано в інформаційно-видавничому відділі
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, 33028, м. Рівне, вул. Остафова, 31