

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

Випуск 8

2001

Зміст

Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. ДО ПИТАННЯ ПРО МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІКИ РОСТУ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ЛАГАМИ.....	4
Бомба А.Я., Каштан С.С. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ТА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ.....	9
Булавацький В.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НЕРІВНОВАЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ НА ОСНОВІ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ.....	23
Бурак Я.Й., Кондрат В.Ф. РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ПОВІЛЬНО РУХОМИХ ПОРИСТИХ НАСИЧЕНИХ ТІЛ.....	27
Буренко В.І. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ВИРІЗАНИМИ СЕГМЕНТАМИ БІЛЯ ПОЛЮСІВ ПІД ЗОВНІШНІМ ТИСКОМ.....	33
Возняк О.Г. ПРО ОДНОЗНАЧНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ТА ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ.....	37
Дейнека В.С., Баран І.О. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ.....	48
Демиденко О.М., Быченко О.В., Максимей І.В., Агеєнко І.В. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В ЛОКАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ БАЗОЙ ДАННЫХ.....	54
Дяконюк Л.М. АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ІЄРАРХІЧНОЇ МОДЕЛІ ПОНИЖЕНОЇ ВИМІРНОСТІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ.....	61
Комбель С.М. НЕНАПРУЖЕНА ПОСАДКА ЖОРСТКОГО ДИСКА В ЕЛІПТИЧНИЙ ОТВІР НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ.....	65
Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ ТА РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	71
Кундрат М.М. ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КОМПОЗИЦІЇ З ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ.....	78
Кухарський В.М., Савула Я.Г., Копитко М.Ф. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ У СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ ВКЛЮЧЕНИМИ ТОНКИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ ШАРАМИ.....	86
Сяський А.О., Комбель С.М. ГРАНИЧНІ УМОВИ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА.....	93
Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. ПРО ВРАХУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ХІМІЧНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ І КОНЦЕНТРАЦІЯМИ В ЗАДАЧАХ ГЕТЕРОДИФУЗІЇ.....	98
Яджак М.С. ПРО МОДЕЛЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ З ОБМЕЖЕНИМ ПАРАЛЕЛІЗМОМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	105

УДК 539.3

Сяський А.О., Комбель С.М.

ГРАНИЧНІ УМОВИ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА

Записано граничні умови контакту жорсткого диска, запресованого в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки. Розглянуто випадки посадки диска з гарантованим натягом, з нульовим натягом, а також мішана контактна задача, якщо в центрі диска прикладена пара сил.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку з гладким криволінійним отвором, який обмежений контуром Γ у вигляді правильного N -кутника із закругленими кутами (гіпотрохоїди). Середню поверхню пластинки віднесемо до прямокутної системи координат з початком в центрі отвору.

1. Нехай функція

$$z = x + iy = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \tag{1.1}$$

реалізує конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка. Тут R – характерний розмір отвору; ε – параметр, що визначає форму отвору [1]. Не порушуючи загальності, вважаємо $R=1$.

Допустимо, що в отвір пластинки запресовано з натягом $\Delta > 0$ абсолютно жорсткий диск такої ж форми (рис.1).

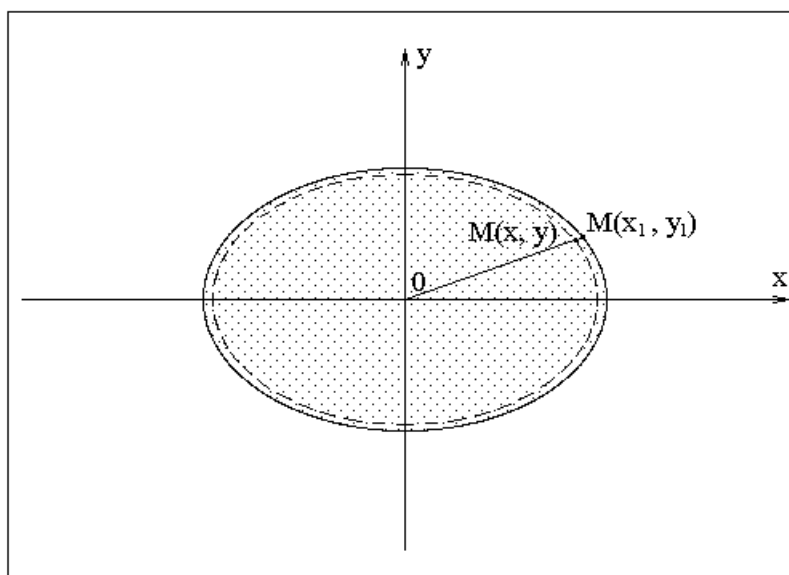


Рис.1.

Рівняння контура диска у вибраній системі координат, на підставі (1.1), має вигляд

$$x_1 + iy_1 = (R + \Delta) \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right) = (1 + \Delta) \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right), \quad \sigma = e^{i\lambda}. \tag{1.2}$$

Будемо вважати, що до спряження з пластинкою диск мав форму та розміри отвору і його контур визначався рівнянням

$$x + iy = R \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right) = \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right). \tag{1.3}$$

Після того, як диск був вставлений в отвір пластинки без зазору і натягу, він почав “збільшуватися” до виду (1.2). Таке “збільшення” еквівалентне гомотетії з центром в точці O і коефіцієнтом $(1+\Delta)$.

Граничні умови контакту пластинки і диска приймаємо у вигляді рівності нормальних зміщень в зоні контакту [2, 3]

$$U_n^{nl} = U_n^\partial; S_{\rho\lambda} = f(s), \quad (1.4)$$

де $S_{\rho\lambda}$, s , $f(s)$ – відповідно дотичне зусилля, дуга, функція, що визначає наявність сил тертя, в зоні контакту.

Компоненти вектора “зміщення” контурних точок диска визначаємо за формулою

$$U_\Delta + iV_\Delta = (x_1 - x) + i(y_1 - y) = \Delta \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right). \quad (1.5)$$

Враховуючи співвідношення [3]

$$U_n^{nl} = \frac{U\alpha + V\beta}{|\omega'(\sigma)|}; \alpha + i\beta = \omega'(\sigma), U_n^\partial = \frac{U_\Delta\alpha + V_\Delta\beta}{|\omega'(\sigma)|}, \quad (1.6)$$

одержимо після певних перетворень

$$U_n^\partial = \frac{\Delta[1 - \varepsilon^2(N-1) - \varepsilon(N-2)\cos N\lambda]}{|\omega'(\sigma)|}. \quad (1.7)$$

Підставляючи (1.7) в (1.4), одержимо граничні умови задачі про напружену посадку жорсткого диска виду (1.2) в криволінійний отвір нескінченної пластинки

$$\alpha U + \beta V = \Delta \left[1 - \varepsilon^2(N-1) + \varepsilon^2(N-2)\cos N\lambda \right]; S_{\rho\lambda} = f(s), \lambda \in \gamma (s \in \Gamma). \quad (1.8)$$

Тут $U + iV$ – компоненти зміщення контурних точок пластинки; γ – образ контура Γ при відображенні (1.1).

2. Нехай в криволінійний отвір пластинки виду (1.1) вставлений без зазору і натягу ($\Delta=0$) жорсткий диск, в центрі якого прикладена пара сил з моментом M_0 . Внаслідок цього диск повернеться на кут α і вступить в контакт з частиною контура Γ пластинки. Образом контура диска (1.3) при повороті на кут α_0 буде крива

$$x_1 + iy_1 = e^{i\alpha_0} (x + iy) = e^{i\alpha_0} \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right). \quad (2.1)$$

На рис.2 її положення зображене штриховою лінією. По аналогії з (1.5) одержимо вирази для компонент зміщення контурних точок диска

$$\begin{aligned} U_{\alpha_0} + iV_{\alpha_0} &= \left(e^{i\alpha_0} - 1 \right) \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right) = (\cos \alpha_0 - 1)(\cos \lambda + \varepsilon \cos(N-1)\lambda) - \\ &- \sin \alpha_0 (\sin \lambda - \sin(N-1)\lambda) + i \left[(\cos \alpha_0 - 1)(\sin \lambda - \varepsilon \sin(N-1)\lambda) + \right. \\ &\left. + \sin \alpha_0 (\cos \lambda + \varepsilon \cos(N-1)\lambda) \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Підставляючи (2.2) в (1.6), одержимо після певних перетворень

$$U_n^{\alpha_0} = \frac{(\cos \alpha_0 - 1) \left[1 - \varepsilon^2(N-1) - \varepsilon(N-2)\cos N\lambda \right] + \sin \alpha_0 N \varepsilon \sin N\lambda}{|\omega'(\sigma)|} = U_n^\partial. \quad (2.3)$$

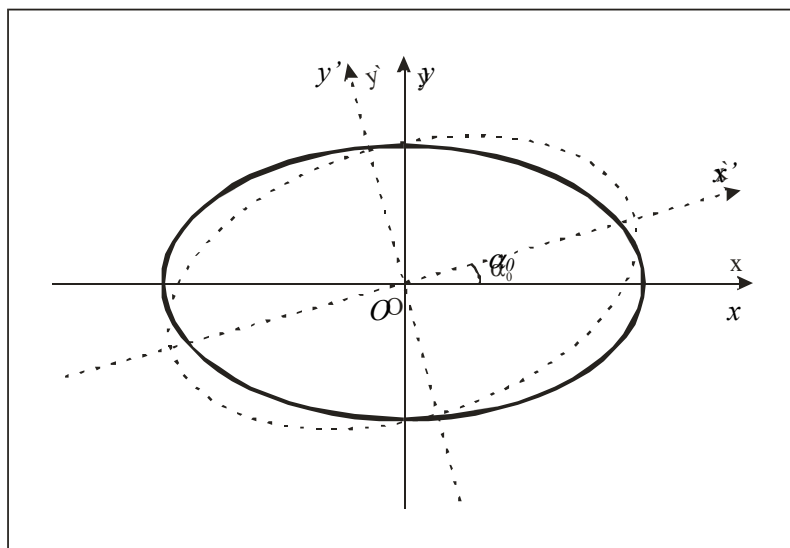


Рис.2.

З врахуванням (2.3) граничні умови (1.4) даної задачі запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha U + \beta V &= (\cos \alpha_0 - 1) \left[1 - \varepsilon^2 (N-1) \cos N\lambda \right] + \sin \alpha_0 N \varepsilon \sin N\lambda; \\ S_{\rho\lambda} &= f(s), \quad \lambda \in \gamma_1 (s \in \Gamma_1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

де Γ_1, γ_1 – відповідно зона контакту і її образ при відображенні (1.1). Для визначення кута повороту диска служить умова його рівноваги [1]

$$M_0 = -\operatorname{Im} \int_{\gamma_1} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) (1 + \varepsilon \sigma^N) d\lambda. \quad (2.5)$$

Тут $T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma)$; $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ – контактні зусилля.

Формула (2.3) відрізняється першим доданком в правій частині від відповідної формули, наведеної в [1], для еліптичного отвору. Таким же доданком будуть відрізнятися праві частини граничних умов (2.4). Для оцінки цього впливу знайдемо точний розв'язок задачі для диска, який повністю спаяний з контуром отвору пластинки.

Гранична умова другої основної задачі плоскої теорії пружності [1], на підставі (2.2), приймає вигляд

$$\kappa \varphi(\sigma) - \omega'(\sigma) \varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 2G \left(e^{i\alpha_0} - 1 \right) \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right). \quad (2.6)$$

З цієї умови визначаємо

$$\varphi(\sigma) = \frac{2G\varepsilon}{\kappa} \left(e^{i\alpha_0} - 1 \right) \frac{1}{\sigma^{N-1}}, \quad (2.7)$$

де $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$; G, ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Запишемо граничну умову першої основної задачі

$$\varphi(\sigma) + \omega'(\sigma) \varphi'(\sigma) + \Psi(\sigma) = i(f_1 + if_2) + C_0. \quad (2.8)$$

Тут $f_1 + if_2 = \frac{1}{2h} \int_0^\lambda (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{i\lambda} d\lambda$; $2h$ – товщина пластинки.

Додаючи (2.6) і (2.8) з врахуванням (2.7), одержимо після диференціювання по λ

$$T_{\rho}^* + iS_{\rho\lambda}^* = 4Gh \left(1 - e^{i\alpha_0}\right) \left[\frac{\varepsilon(N-1)}{\kappa} \sigma^{-N} + 1 \right]. \quad (2.9)$$

Поділивши (2.9) на $\omega'(\sigma)$, знаходимо після певних перетворень

$$T_{\rho} + iS_{\rho\lambda} = \frac{4Gh}{|\omega'(\sigma)|^2} \left(e^{i\alpha_0} - 1 \right) \left[\frac{\varepsilon(N-1)}{\kappa} \left(\sigma^{-N} - \varepsilon(N-1) \right) - 1 + \varepsilon(N-1) \sigma^N \right]. \quad (2.10)$$

Для визначення кільцевих зусиль T_{λ} на контурі Γ використаємо залежність [1]

$$T_{\lambda} + T_{\rho} = 8h \operatorname{Re} \frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}. \quad (2.11)$$

Формула (2.5) визначає зв'язок між моментом M_0 і кутом повороту диска α_0

$$M_0 = \frac{8\pi Gh}{\kappa} \left[\kappa + \varepsilon^2(N-1) \right] \sin \alpha_0. \quad (2.12)$$

Розділяючи в (2.10) дійсну і уявну частини, знаходимо

$$T_{\rho} = \frac{4Gh}{|\omega'(\sigma)|^2 \kappa} \left\{ (1 - \cos \alpha_0) \left[\kappa + \varepsilon^2(N-1) - \varepsilon(N-1)(\kappa+1) \cos N\lambda \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon(N-1)(1-\kappa) \sin N\lambda \sin \alpha_0 \right\}; \\ S_{\rho\lambda} = \frac{4Gh}{|\omega'(\sigma)|^2 \kappa} \left[(1 - \cos \alpha_0) b(\lambda) - a(\lambda) \sin \alpha_0 \right],$$

де $a(\lambda) = \kappa + \varepsilon^2(N-1)^2 - \varepsilon(N-1)(\kappa+1) \cos N\lambda$; $b(\lambda) = \varepsilon(N-1)(1-\kappa) \sin N\lambda$.

Для малих деформацій $\sin \alpha_0 \sim \alpha_0$, $(1 - \cos \alpha_0) \sim \frac{\alpha_0^2}{2}$, $(e^{i\alpha_0} - 1) \sim i\alpha_0$. Нехтуючи в

(2.13) доданками з множителем $(1 - \cos \alpha_0)$, одержимо

$$T_{\rho} = \frac{4Gh}{\kappa} \frac{b(\lambda) \sin \alpha_0}{1 + \varepsilon^2(N-1)^2 - 2\varepsilon(N-1) \cos N\lambda}; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{4Gh}{\kappa} \frac{a(\lambda) \sin \alpha_0}{1 + \varepsilon^2(N-1)^2 - 2\varepsilon(N-1) \cos N\lambda}. \quad (2.14)$$

Для еліптичного отвору ($N=2$) співвідношення (2.14) співпадають з [1].

Чисельні розрахунки контактних зусиль, проведених за формулами (2.13) і (2.14), практично співпадають. Це означає, що граничні умови (2.4) можна записати у вигляді

$$\alpha U + \beta V = N\varepsilon \sin \alpha_0 \sin N\lambda; \quad S_{\rho\lambda} = f(s), \quad \lambda \in \gamma_1 (s \in \Gamma_1). \quad (2.15)$$

3. Розглянемо комбінацію задач, наведених в попередніх пунктах, і будемо вважати, що в криволінійний отвір виду (1.1) нескінченної пластинки запресовано з натягом Δ жорсткий диск. В центрі диска прикладено пару сил з моментом M_0 . В залежності від величини Δ зона контакту Γ_1 може бути замкнена або розімкнена. Оскільки “збільшення” і поворот диска є лінійні перетворення, тому

$$U_n^{\partial} = U_n^{\Delta} + U_n^{\alpha_0}. \quad (3.1)$$

Підставляючи (1.6), (2.3) при $(1 - \cos \alpha_0) = 0$ з врахуванням (3.1) в граничні умови (1.4), одержимо

$$\alpha U + \beta V = \Delta \left[1 - \varepsilon^2(N-1) - \varepsilon(N-2) \cos N\lambda \right] + (1 + \Delta) \left[\sin \alpha_0 N E \sin N\lambda \right] \\ S_{\rho\lambda} = f(s), \quad \lambda \in \gamma_1 (s \in \Gamma_1). \quad (3.2)$$

Розв'язок задачі (3.2), (2.5) передбачає визначення зусиль T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$ в зоні контакту,

величини цієї зони та зв'язку між M_0 і α_0 . У випадку замкненої зони контакту така задача може бути розв'язана методом рядів Фур'є, а при розімкненому контакті – методом граничної колокації [4].

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.- 708с.
2. Сяський В.А. Вплив тертя на розподіл напружень при контакті гладких циліндричних тіл і штампів з кутовими точками // Волинський математичний вісник.- 1999.- Випуск 6.- С.127-134.
3. Андрій Сяський, Володимир Сяський. Контакт двозв'язного штампа з кутовими точками і криволінійного отвору нескінченної пластинки // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. В 2-х т.- Львів, 2000.- Т.2.- С.122-125.
4. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости.- М.: Наука, 1973.- 304с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Надійшла 13.12.2001

Сяський А.О., Комбель С.М. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ЖЕСТКОГО ДИСКА // *Записаны граничные условия контакта жесткого диска, запрессованного в криволинейное отверстие бесконечной изотропной пластинки. Рассмотрены случаи посадки диска с гарантированным натягом, с нулевым натягом, а также смешанная контактная задача, если в центре диска приложена пара сил.*

Syaskiy A.O., Kombel S.M. LIMITING CONDITIONS OF CONTACT TASKS FOR AN ENDLESS PLATE WITH CURVILINEAR OPENING AND HARD DISK // *Limiting conditions of contact of hard disk, which is pressed in a curvilinear aperture of endless isotropic plate were written. Cases of landing of the disk with guaranteed tension, with nought tension, and also the blend contact task, if in the center of the disk put to the pair of forces, were examined.*

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в галузі математики, інформатики та механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the results of investigation of the mathematics, informatics and mechanics. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

У цьому випуску переважають роботи з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики.

Заснований у 1994 році. Свідоцтво про реєстрацію: серія РВ, №148 від 11.04.1995р.

Редакційна колегія :

Барановський С.В. (*секретар*)
Бейко І. В.
Боднар Д. І.
Бомба А. Я. (*відповідальний редактор*)
Бурак Я. Й.
Войтович М. М.
Гаращенко Ф. Г.
Горбачук М.Л.
Дейнека В.С.
Задерей П. В.
Каштан С. С. (*технічний секретар*)
Ковтунець В. В.
Кратко М. І.
Ляшко І.І.
Мельник В. С.
Попов Б. О.
Прикарпатський А. К.
Пташник Б. Й.
Савула Я. Г.
Скопєцький В. В. (*головний редактор*)
Сяський А. О.
Чикрій А.О.
Шевчук І.О.
Шинкаренко Г. А.
Янчук П. С.
Ясній П. В.

Editorial board :

Baranovsky S.V. (*secretary*)
Beyko I. V.
Bodnar D. I.
Bomba A. Ya. (*editor*)
Burak Ya. Y.
Voytovych M. M.
Garashchenko F. G.
Gorbachuk M.L.
Deyneka V.S.
Zaderej P. V.
Kashtan S. S. (*secretary*)
Kovtunets V. V.
Kratko M. I.
Lyashko I.I.
Melnyk V. S.
Popov B. O.
Prykarpatsky A. K.
Ptashnyk B. Y.
Savula Ya. G.
Skopetsky V. V. (*Editor-in-Chief*)
Syasky A. O.
Chikriy A.O.
Shevchuk I.O.
Shynkarenko G. A.
Yanchuk P. S.
Yasniy P. V.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Українського математичного товариства, Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем математики і механіки НАНУ ім. Я.С.Підстригача. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції : 33000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31, Рівненський державний гуманітарний університет, кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ. Тел.: (8+0362) 260-444 .

Наукове видання
"Волинський математичний вісник"
Випуск 8, 2001

Відповідальний за випуск Бомба А.Я.

Здано до друку . .200 р. Підписано до друку . .200 р.
Формат 1/8 Папір друк. 30×21 Ум. друк. арк. 4,54
Наклад 300 прим. Замовлення № –

Віддруковано в інформаційно-видавничому відділі
Рівненського державного гуманітарного університету
Україна, 33028, м. Рівне, вул. Остафова, 31