Національна академія наук України
Інститут математики НАН України
Рівненський державний педагогічний інститут
Українське математичне товариство
Український фонд "Відродження"

National Academy of Sciences of Ukraine
Institute of Mathematic of NAS of Ukraine
Rivne State Pedagogical Institute
Ukrainian Mathematical Society
Ukrainian fond "Vidrodgennia"

Волинський математичний вісник

Випуск 3

(Матеріали міжнародної конференції "Теорія апроксимацій та чисельні методи", присвяченої 100-річчю з дня народження Е.Ремеза, Україна, Рівне, 19-21 червня 1996)

Volyn Mathematical Bulletin

ISSUE 3

(Proceedings International Conference "Approximation theory and numerical methods", dedicated to the 100-th Remez birthday unniversary, Ukraine, Rivne, June, 19-21, 1996)

Rivne 1996

"Волинський математичний вісник" публікує результати досліджень в області теоретичної та прикладної математики у вигляді коротких повідомлень, оригінальних статей, оглядів, матеріалів конференцій та семінарів. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів механіко-математичних спеціальностей.

The "Volyn Mathematical Bulletin" publishes the rezults of investigation of the theoretical and applied mathematics in the form of the short repots, original articles, surveys, works of cónferences and seminars. It is good for science workers, teachers of higher schools, post graduates and senior years students of the mechanics and mathematics specialities.

Видається один раз у рік з 1994 року. Свідоцтво про державну реєстрацію: серія РВ, N 148 від 11.04.1995 р. Засновники : Бомба А.Я., Ковтунець В.В., Слюсарчук В.Ю..

It publishes one time a year beginning from 1994. The paper of State registration: series PB N 148, 11.04.1995 . Founders: Bomba A.Ya., Kovtunets V.V., Slusarchuk V.Yu.

Адреса редакції: 266000, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 26, педінститут, кафедра інформатики та прикладної математики. Тел.: (8+036+2) 26-04-44. E-Mail: rspi@rspi.rovno.ua

При виданні матеріалів конференції редакція вирішила не брати на себе право істотнього редагування підготовлених авторами текстів.

The editorship desided not to make the material changes in the authors' original articles of the conferenses works.

ЗМІСТ

УДК 519.5

П.С.Янчук, канд. фіз.-мат. наук (Рівне, педінститут)

МНОГОЧЛЕННО-СІТКОВИЙ СПОСІБ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ.

In this paper the polynomial approximation scheme of Dirichlet problem solutions for Poisson equation and its derivatives is presented. Obtained results are order-optimal. The numerical scheme was constructed on 5-th degree polynomials.

В дальнішому мова піде про многочленно-сітковий спосіб наближеного розв'язування стаціонарних задач математичної фізики, запропонований П. Янчуком . Будуть описані результати досліджень цього способу на прикладі задачі Діріхле для рівняння Пуасона в так званих L-подібних областях (див. нижче). Спочатку будуть дані необхідні формули для спектральних многочленів. Спектральні многочлени були введені і детально досліджені П. Янчуком (див. наприклад, [2]). На основі цих спектральних многочленів будується многочленна функція Гріна, після чого описується загальна схема кусково-многочленного наближення розв'язків задачі Діріхле. Многочленно-сітковий спосіб одержаний шляхом поширення ідей апроксимаційно-ітеративного методу В. Дзядика на випадок стаціонарних задач математичної фізики.

1.Спектральні многочлени. Через P_x^n позначимо взяття часткової суми степення n ряду Фур'є-Лежандра із вилученням доданку, що відповідає нульовому степеню. Індекс внизу означає змінну, відносно якої відбувається розклад в ряд Фур'є-Лежандра. Через I_x будемо позначати оператор взяття інтегралу по x, точніше

$$I_x(\mathrm{f})=\mathrm{g},\quad \mathrm{f}=\mathrm{f}(\mathrm{x}),\quad \mathrm{g}=\mathrm{g}(\mathrm{x}),\ \text{якщо}\quad g(x)=\int_{-1}^{x} f(x_1)dx_1\,.$$

Для фіксованого n=4 спектральними многочленами називаємо ортонормовані многочлени $K_1=K_1(x)$, $K_2=K_2(x)$, $K_3=K_3(x)$, $K_4=K_4(x)$, які задовільняють співвідношенням вигляду $P_x^4 I_{xx} K_i(x)=-\lambda_i K_i(x)$, $i=1,2,3,4$, де $I_{xx}=I_x I_x$, а λ_i дійсні числа.

2.Многочленна функція Гріна.

Почнемо із задачі

$$-\Delta u=f_1,\quad u=0\quad \text{при}\quad x=\pm1\ \text{ та }\ y=\pm1,\ -1\le x,y\le1, \tag{1}$$

де $f_3=f_3(x,y)$, алгебраїчний многочлен, степінь якого не перевищує трьох.

Наближений розв'язок цієї задачі у вигляді многочлена, степінь якого не перевищує 5, можна записати у вигляді

$$u_5 = \sum_{p,q=0}^{2}\sum_{i,j=0}^{1}\Big[C^{2p+1,2q+1}_{2i+1,2j+1} f_{2i+1,2j+1} xy + C^{2p,2q}_{2i,2j} f_{2i,2j} + \qquad (2)$$

$$+ C^{2p,2q+1}_{2i,2j+1} f_{2i,2j+1} y + C^{2p+1,2q}_{2i+1,2j} f_{2i+1,2j} x\Big] x^{2p} y^{2q}.$$

Маючи в своєму розпорядженні числа C^{pq}_{ij} легко встановити наближений розв'язок однорідної задачі вигляду (1). Тому природньо називати формулу вигляду (2) аналогом функції Гріна. В загальному випадку мають місце аналогічні формули.

3. Коефіцієнти наближеної формули Гріна (2).

Покажемо як обчислити числа C^{pq}_{ij}, після чого формула (2) набуде реального змісту. Із загальної теорії спектральних многочленів мають місце формули вигляду

$$K_1 = \beta_1^1 x + \beta_3^1 x^3,$$
$$K_3 = \beta_1^3 x + \beta_3^3 x^3,$$
$$K_2 = \beta_2^2\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) + \beta_4^2\left(x^4 - \tfrac{1}{5}\right),$$
$$K_4 = \beta_2^4\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) + \beta_4^4\left(x^4 - \tfrac{1}{5}\right). \qquad (3)$$

Визначаючи степені x із (3) одержимо

$$x = \gamma_1^1 K_1 + \gamma_3^1 K_3,$$
$$x^3 = \gamma_1^3 K_1 + \gamma_3^3 K_3,$$
$$x^2 - \tfrac{1}{3} = \gamma_2^2 K_2 + \gamma_4^2 K_4,$$
$$x^4 - \tfrac{1}{5} = \gamma_2^4 K_2 + \gamma_4^4 K_4. \qquad (4)$$

Маючи коефіцієнти формул (3) і (4) можна обчислити коефіцієнти формул (2) по схемі вигляду

$$c^{2p+1,2q+1}_{2i+1,2j+1} = \sum_{r,s=1}^{2} \frac{\beta_{2r}^{2i+2}\beta_{2s}^{2j+2}\gamma_{2p}^{2r}\gamma_{2q}^{2s}}{4(\lambda_{2r}+\lambda_{2s})(2p+1)(2q+1)(i+1)(j+1)},$$

$$c^{2p,2q}_{2i,2j} = \sum_{r,s=1}^{2} \frac{\beta_{2r+1}^{2i+1}\beta_{2s+1}^{2j+1}\gamma_{2p-1}^{2r+1}\gamma_{2q-1}^{2s+1}}{4(\lambda_{2r+1}+\lambda_{2s+1})(2i+1)(2j+1)pq},$$

$$c^{2p+1,2q}_{2i+1,2j} = \sum_{r,s=1}^{2} \frac{\beta_{2r}^{2i+2}\beta_{2s+1}^{2j+1}\gamma_{2p}^{2r}\gamma_{2q-1}^{2s+1}}{4(\lambda_{2r}+\lambda_{2s+1})(2p+1)q(i+1)(2j+1)},$$

$$c^{2p,2q+1}_{2i,2j+1} = \sum_{r,s=1}^{2} \frac{\beta_{2r+1}^{2i+1}\beta_{2s}^{2j+2}\gamma_{2p-1}^{2r+1}\gamma_{2q}^{2s}}{4(\lambda_{2r+1}+\lambda_{2s})p(2q+1)(2i+1)(j+1)}, \qquad (5)$$

p=1,2; q=1,2; i=0,1; j=0,1.

Цими 16-ма коефіцієнтами наближеного розв'язку можна і обмежитися, якщо переписати його у вигляді

$$u_5 = u_5(x,y) = \sum_{p,q=1}^{2}\Big[u_{2p+1,2q+1}\left(x^{2p+1}-x\right)\left(y^{2q+1}-y\right)+u_{2p,2q}\left(x^{2p}-1\right)\left(y^{2q}-1\right)+ \tag{6}$$

$$+u_{2p,2q}\left(x^{2p}-1\right)\left(y^{2q+1}-y\right)+u_{2p+1,2q}\left(x^{2p+1}-x\right)\left(y^{2q}-1\right)\Big],$$

де

$$u_{2p,2q} = \sum_{i,j=0}^{1} c_{2i,2j}^{2p,2q} f_{2i,2j}\,,$$

$$u_{2p,2q+1} = \sum_{i,j=0}^{1} c_{2i,2j+1}^{2p,2q+1} f_{2i,2j+1}\,,$$

$$u_{2p+1,2q} = \sum_{i,j=0}^{1} c_{2i+1,2j}^{2p+1,2q} f_{2i+1,2j}\,,$$

$$u_{2p+1,2q+1} = \sum_{i,j=0}^{1} c_{2i+1,2j+1}^{2p+1,2q+1} f_{2i+1,2j+1}\,. \tag{7}$$

Відома права частина рівняння (1) записується у вигляді

$$f = \sum_{i,j=0}^{3} f_{ij} x^i y^j \tag{8}$$

і визначається через 16 коефіцієнтів. Зауважимо що формули (7) встановлюють взаємно-однозначну відповідність між коефіцієнтами відомої правої частини (8) та коефіцієнтами наближеного розв'язку (6). Більше того, така відповідність встановлюється між четвірками таких коефіцієнтів і випливає, власне кажучи, з властивостей парності розв'язку задачі Діріхле (1). Завдяки останньому факту для знаходження наближеного розв'язку у вигляді апроксимаційного многочлена степеня не вище 5 потрібно виконати 64 операції множення і приблизно стількиж операцій додавання.

Описана схема практично повністю зберігається, якщо степінь наближеного розв'язку дорівнює 3, 5, 9, 11 і т.д. Таким способом одержаний многочлен є найкращим в метриці простору $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$, яка породжується скалярним добутком

$$[u,v] = \iint\limits_D \left(u_x v_x + u_y v_y\right)dxdy, \qquad u, v \in \overset{0}{W}{}_2^1(D).$$

Нагадаємо, що функції $u = u(x,y)$, як елементи соболевського простору $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$ перетворюються в нуль на краю ∂D на краю області D (в даному випадку $D=[-1,1]\times[-1,1]$). Побудовані нами многочлени для апроксимації розв'язку, як і сам розв'язок, належать простору $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$.

4. Кусково-многочленне наближення розв'язків.

Розглянемо тепер область D складену із квадратів однакових розмірів. Припустимо, що ці квадрати утворені двома сімействами прямих

$$x = x_i h,\ \ i=\overline{0,M} \quad \text{та} \quad y = y_j h,\ \ j=\overline{0,N}$$

Точки перетину цих прямих назвемо вузлами сітки, а їх сукупність просто сіткою. Вузол назвемо внутрішнім, якщо він належить внутрішності області D і граничним, якщо він належить границі області. Околом внутрішнього вузла (x_i, y_j) назвемо квадрат $\Pi_{ij}=(x_i-h,x_i+h)\times(y_j-h,y_j+h)$ і вважатимемо, що окіл кожного внутрішнього вузла належить області G. Крім того, припустимо, що область G є зв'язною в тому розумінні, що будь-які два внутрішні вузли можна сполучити ламаною, яка перетинає лінії сітки лише по прямих $x = x_i h$ та $y = y_i h$ і повністю належить внутрішності області D.

В описаній області D будемо розв'язувати задачу Діріхле

$$-\Delta u = f(x,y), \quad (x,y)\in G,$$
$$u(x,y)=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma, \tag{9}$$

де Г границя області D.

В околі кожного внутрішнього вузла (x_k, y_1) наближений розв'язок будемо записувати у вигляді

$$u^{k,l}=\sum_{p,q=1}^{2}\Bigg[u^{k,l}_{2p+1,2q+1}\frac{(x-x_k)(y-y_l)}{h^2}+u^{k,l}_{2p+1,2q}\frac{(x-x_k)}{h}+$$

$$u^{k,l}_{2p,2q+1}\frac{(y-y_l)}{h}+u^{kl}_{2p,2q}\Bigg]\left(\left(\frac{x-x_k}{h}\right)^{2p}-1\right)\left(\left(\frac{y-y_l}{h}\right)^{2q}-1\right)+$$

$$+\sum_{q=0}^{5}\frac{\left(\eta_q^{k+1,l}-\eta_q^{k-1,l}\right)(x-x_k)(y-y_l)^q}{2h^{q+1}}+\sum_{q=0}^{5}\frac{\left(\eta_q^{k+1,l}-\eta_q^{k-1,l}\right)(y-y_l)^q}{2h^q}+$$

$$+\sum_{q=0}^{5}\frac{\left(\xi_p^{k,l+1}-\xi_p^{k,l-1}\right)(x-x_k)(y-y_l)}{2h^p}+\sum_{q=0}^{5}\frac{\left(\xi_p^{k,l+1}-\xi_p^{k,l-1}\right)(x-x_k)}{2h^p}+ \tag{10}$$

$$+b_1^{k,l}\frac{(x-x_k)(y-y_l)}{h^2}+b_2^{k,l}\frac{x-x_k}{h}+b_3^{k,l}\frac{y-y_l}{h}+b_4^{k,l},$$

де

$$u^{k,l}_{2p+1,2q+1} = h^2 \sum_{i,j=0}^{1} c^{2p+1,2q+1}_{2i+1,2j+1} f^{k,l}_{2i+1,2j+1} + \sum_{i=0}^{1}(2j+3)(2j+2)c^{2p+1,2q+1}_{1,2j+1}\left(\frac{\eta^{k+1,l}_{2j+3} - \eta^{k-1,l}_{2j+3}}{2}\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{1}(2i+3)(2i+2)c^{2p+1,2q+1}_{2i+1,1}\left(\frac{\xi^{k,l+1}_{2i+3} - \xi^{k,l-1}_{2i+3}}{2}\right),$$

$$u^{k,l}_{2p,2q} = h^2 \sum_{i,j=0}^{1} c^{2p,2q}_{2i,2j} f^{k,l}_{2i,2j} + \sum_{j=0}^{1}(2j+1)(2j+2)c^{2p,2q}_{0,2j}\left(\frac{\eta^{k+1,l}_{2j+2} + \eta^{k-1,l}_{2j+2}}{2}\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{1}(2i+1)(2i+2)c^{2p,2q}_{2i,0}\left(\frac{\xi^{k,l+1}_{2i+2} + \xi^{k,l-1}_{2i+2}}{2}\right),$$

$$u^{k,l}_{2p+1,2q+1} = h^2 \sum_{i,j=0}^{1} c^{2p+1,2q+1}_{2i+1,2j+1} f^{k,l}_{2i+1,2j+1} + \sum_{i=0}^{1}(2j+3)(2j+2)c^{2p+1,2q+1}_{1,2j+1}\left(\frac{\eta^{k+1,l}_{2j+3} - \eta^{k-1,l}_{2j+3}}{2}\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{1}(2i+3)(2i+2)c^{2p+1,2q+1}_{2i+1,1}\left(\frac{\xi^{k,l+1}_{2i+3} - \xi^{k,l-1}_{2i+3}}{2}\right)$$

$$u^{k,l}_{2p+1,2q} = h^2 \sum_{i,j=0}^{1} c^{2p+1,2q}_{2i+1,2j} f^{k,l}_{2i+1,2j} + \sum_{j=0}^{1}(2j+1)(2j+2)c^{2p+1,2q}_{1,2j}\left(\frac{\eta^{k+1,l}_{2j+2} - \eta^{k-1,l}_{2j+2}}{2}\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{1}(2i+3)(2i+2)c^{2p+1,q}_{2i+1,0}\left(\frac{\xi^{k,l+1}_{2i+3} - \xi^{k,l-1}_{2i+3}}{2}\right),$$

$$u^{k,l}_{2p,2q+1} = h^2 \sum_{i,j=0}^{1} c^{2p,2q+1}_{2i,2j+1} f^{k,l}_{2i,2j+1} + \sum_{j=0}^{1}(2j+2)(2j+3)c^{2p,2q+1}_{0,2j+1}\left(\frac{\eta^{k+1,l}_{2j+3} + \eta^{k-1,l}_{2j+3}}{2}\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{1}(2i+1)(2i+2)c^{2p,2q+1}_{2i,1}\left(\frac{\xi^{k,l+1}_{2i+2} - \xi^{k,l-1}_{2i+2}}{2}\right), \tag{11}$$

$$u^{k,l}_{2p,2q} = h^2 \sum_{i,j=0}^{1} c^{2p,2q}_{2i,2j} f^{k,l}_{2i,2j} + \sum_{j=0}^{1}(2j+1)(2j+2)c^{2p,2q}_{0,2j}\left(\frac{\eta^{k+1,l}_{2j+2} + \eta^{k-1,l}_{2j+2}}{2}\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{1}(2i+1)(2i+2)c^{2p,2q}_{2i,0}\left(\frac{\xi^{k,l+1}_{2i+2} + \xi^{k,l-1}_{2i+2}}{2}\right),$$

крім того

$$b_1^{k,l} = \left(-a^{k-1,l-1} + a^{k+1,l-1} - a^{k+1,l+1} + a^{k-1,l+1}\right)/4,$$

$$b_2^{k,l} = \left(a^{k-1,l-1} - a^{k+1,l-1} - a^{k+1,l+1} + a^{k-1,l+1}\right)/4,$$

$$b_3^{k,l} = \left(a^{k-1,l-1} + a^{k+1,l-1} - a^{k+1,l+1} - a^{k-1,l+1}\right)/4, \tag{12}$$

$$b_4^{k,l} = \left(-a^{k-1,l-1} - a^{k+1,l-1} - a^{k+1,l+1} - a^{k-1,l+1}\right)/4,$$

де $$a^{k,l} = u(x_k, y_l).$$

Далі піде мова про числа η_j^{kl}, ξ_i^{kl}, які необхідні для обчислення розв'язків. І так, кожному внутрішньому вузлу (x_k, y_l) області D поставим у відповідність сукупність невідомих ξ_0^{kl}, ξ_1^{kl}, ..., ξ_5^{kl} та $\eta_0^{kl}, \eta_1^{kl}, ..., \eta_5^{kl}$ і стільки ж лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\eta_{2q+1}^{k,l} = \overline{F}_{2q+1}^{kl} + \sum_{j=1}^{2} \widetilde{G}_j^q \frac{\eta_{2j+1}^{k+1,l} + \eta_{2j+1}^{k-1,l}}{2} + \sum_{i=1}^{2} \widetilde{H}_i^q \frac{\xi_{2i}^{k,l+1} - \xi_{2i}^{k,l-1}}{2},$$

$$\eta_{2q}^{k,l} = F_{2q}^{kl} + \sum_{j=1}^{2} G_j^q \frac{\eta_{2j}^{k+1,l} + \eta_{2j}^{k-1,l}}{2} + \sum_{i=1}^{2} H_i^q \frac{\xi_{2i}^{k,l+1} + \xi_{2i}^{k,l-1}}{2},$$

$$q=0,1,2. \tag{13}$$

$$\xi_{2q+1}^{k,l} = \overline{F}_{2q+1}^{kl} + \sum_{j=1}^{2} \widetilde{G}_j^q \frac{\xi_{2j+1}^{k,l+1} + \xi_{2j+1}^{k,l-1}}{2} + \sum_{i=1}^{2} \widetilde{H}_i^q \frac{\eta_{2i}^{k+1,l} - \eta_{2i}^{k-1,l}}{2},$$

$$\xi_{2q}^{k,l} = F_{2q}^{kl} + \sum_{j=1}^{2} G_j^q \frac{\xi_{2j}^{k,l+1} + \xi_{2j}^{k,l-1}}{2} + \sum_{i=1}^{2} H_i^q \frac{\eta_{2i}^{k+1,l} + \eta_{2i}^{k-1,l}}{2},$$

Числа $\widetilde{G}_j^q$, $\widetilde{H}_i^q$, G_j^q, H_i^q фіксовані і не залежать від правої частини і крайових умов.

5.Має місце слідуюча

Теорема. Якщо розв'язок $u = u(x,y)$ задачі (9) належить простору $C^6(D)$ - 6 раз неперервно диференційовних в (D) функцій, то для наближеного розв'язку має місце оцінка $\max\limits_{\Pi_{kl}} \left| D^\alpha \left(u(x,y) - u^{k,l}(x,y)\right)\right| \le kh^{5-|\alpha|}$, $|\alpha| < 5$

де k-число, не залежне ні від h, ні від x та y,

$$\Pi_{kl} = (x_k - h, x_k + h) \times (y_l - h, y_l + h).$$

6.Представлення про реальну величину локальної похибки

$$\varepsilon_{k,l} = \max_{\Pi_{kl}} \left| u(x,y) - u^{k,l}(x,y) \right|$$

можна отримати із таблиці вигляду

n \ h	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
3	2^{-8}	2^{-10}	2^{-15}	2^{-19}	2^{-23}	2^{-27}	2^{-31}	2^{-39}	—	—
5	2^{-11}	2^{-17}	2^{-23}	2^{-30}	2^{-35}	2^{-42}	—	—	—	—
7	2^{-18}	2^{-25}	2^{-32}	2^{-43}	2^{-46}	2^{-50}	—	—	—	—
9	2^{-27}	2^{-34}	2^{-41}	2^{-42}	—	—	—	—	—	—

Тут n степінь многочленів при кусково-многочленному наближенні, h крок по x та y. В таблиці наведено числове значення локальної похибки

$$\varepsilon_{k,l} = \max_{\Pi_{kl}} \left| u(x,y) - u^{k,l}(x,y) \right|$$

при наближеному обчисленні розв'язку задачі Діріхле вигляду (9), коли розв'язком є відома функція $y = e^{x+y}$. У випадку, коли розв'язком задачі (9) є функція

$$y = \frac{\sin x \ \sin y}{1 - 0.95\sin^2 x \ \sin^2 y}$$

величини локальних похибок наближень занесено у таблицю вигляду

n \ h	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
3	2^{0}	2^{-1}	2^{-4}	2^{-9}	2^{-13}	2^{-17}	2^{-20}	2^{-25}	2^{-30}	2^{34}
5	2^{0}	2^{-2}	2^{-4}	2^{-10}	2^{-20}	2^{-29}	2^{-33}	2^{-39}	2^{-45}	—
7	2^{0}	2^{-3}	2^{-7}	2^{-13}	2^{-29}	2^{-36}	2^{-43}	2^{-46}	—	—
9	2^{-1}	2^{-5}	2^{-10}	2^{-17}	2^{-36}	2^{-45}	2^{-46}	—	—	—

Замітимо, що для відомої схеми "хрест" при кроці $h=10^{-6}$ досягаємо локальну точність $\approx 10^{-13}$ у випадку функції $y = e^{x+y}$. Кусково-сіткове наближення многочленами степеня 5 дає таку точність при кроці h=1/32. При цьому схема "хрест" використовує біля 10^{12} невідомих, а дана схема не більше $5 \cdot 10^{4}$. Серед розглянутих схем найбільш економічною є схема, яка грунтується на многочленах 9-го степеня. Проте, при виборі схеми слід , звичайно, враховувати гладкість розв'язку.

Олександр Шпортько написав програмний комплекс для ЕОМ на основі многочленно-сіткового методу, який зарекомендував себе добре при розв'язуванні практичних задач. Зручний інтерфейс дозволяє легко вводити дані про дану область та крайові умови і одержувати результати в аналітичному, графічному та інших представленнях.

1. В.К.Дзядик. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.-К.: Наук. думка, 1988.-304 с.
2. П.С.Янчук. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений. // В кн. : Ин-т матем. АН УССР, 1989.-С.112-121.
3. П.С.Янчук. Апроксимаційно-ітеративні схеми кусково-многочленного наближення. //Волинський математичний вісник, вип. 3, Рівне, 1995.-С.180-184.