Зміст

УДК 519.63.4.001.57+517.54

Бомба А.Я.

ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

На основі модифікації методу сумарних зображень побудовано алгоритм наближення розв'язку обернених крайових задач на конформні відображення в шаруватих середовищах.

Розглянемо модельну задачу про знаходження функції (напору) $h=h(x,y)$ в однозв'язній чотирикутній криволінійній області $G_z=ABCD=\bigcup_{l=0}^{m} G_z^{(l)} \bigcup_{l=1}^{m} L_z^{(l)}$ $(z=x+iy)$, обмеженій чотирма гладкими кривими $AB=\{z: f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z: f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z: f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z: f_4(x,y)=0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, $G_z^{(l)}=\left\{z\in G_z: h^{(l)}<h(x,y)<h^{(l+1)}\right\}$, $L_z^{(l)}=\left\{z\in G_z: h(x,y)=h^{(l)}\right\}$, що в кожній із областей $G_z^{(l)}$ задовільняє диференціальне рівняння $div(\chi(h)\, grad h)=0$ при таких крайових умовах: $h|_{CD}=h^*=h^{(m+1)}$, $h|_{AB}=h_*=h^{(0)}$, $\left.\frac{dh}{dn}\right|_{BC}=\left.\frac{dh}{dn}\right|_{DA}=0$, та умовах спряження вздовж ліній розриву $L_z^{(l)}$ функції $\chi(h(x,y))$: $[h]\Big|_{L_z^{(l)}}=0$, $\left[\chi\frac{\partial h}{\partial n}\right]\Bigg|_{L_z^{(l)}}=0$, де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої, $\chi(h(x,y))=\chi_l$ при $(x,y)\in G_z^{(l)}$ (χ_l– дійсні додатні числа), $[f]$ – стрибок функції f при переході через відповідну лінію (по нормалі) (див. рис. 1). Ввівши функцію течії $\psi=\psi(x,y)$, комплексно спряжену (в узагальненому розумінні) до $h=h(x,y)$, і замінивши останні дві граничні умови на умови $\psi|_{BC}=Q$, $\psi|_{AD}=0$, де стала $Q=\int\limits_{EF}\frac{\partial\psi}{\partial s}ds=\int\limits_{EF}-\frac{\partial h}{\partial y}dx+\frac{\partial h}{\partial x}dy$ $(E\in AD,\ F\in BC)$ – повна витрата (невідомий параметр), дану задачу замінимо [1–5] більш загальною задачею на узагальнене конформне відображення $\omega=\omega(z)=h(x,y)+i\psi(x,y)$ області G_z на прямокутник (область комплексного потенціалу)

$$G_\omega=\left\{\omega:\ h_*<h<h^*, 0<\psi<Q\right\}=\bigcup_{l=0}^{m} G_\omega^{(l)} \bigcup_{l=1}^{m} L_\omega^{(l)}, \qquad L_\omega^{(l)}=\left\{\omega\in G_\omega: h=h^{(l)}\right\},$$

$G_\omega^{(l)}=\left\{\omega\in G_\omega: h^{(l)}<h<h^{(l+1)}, 0<\psi<Q\right\}$ при відповідності чотирьох кутових точок [9] (див. рис. 2). Обернена до неї крайова задача на узагальнене конформне відображення $z=z(\omega)=x(h,\psi)+iy(h,\psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q, що має вигляд:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial x}{\partial h}=\chi\dfrac{\partial y}{\partial\psi}, & \chi\dfrac{\partial x}{\partial\psi}=-\dfrac{\partial y}{\partial h}, & (h,\psi)\in G_\omega,\\
[x]\Big|_{L_\omega^{(l)}}=[y]\Big|_{L_\omega^{(l)}}=0, & \left[\dfrac{1}{\chi}\dfrac{\partial x}{\partial h}\right]\Bigg|_{L_\omega^{(l)}}=\left[\dfrac{1}{\chi}\dfrac{\partial y}{\partial h}\right]\Bigg|_{L_\omega^{(l)}}=0, & l=\overline{1,m},\\
f_1(x(h_*,\psi),y(h_*,\psi))=0, & f_3\left(x(h^*,\psi),y(h^*,\psi)\right)=0, & 0\le\psi\le Q,\\
f_2(x(h,Q),y(h,Q))=0, & f_4(x(h,0),y(h,0))=0, & h_*\le h\le h^*,
\end{cases}$$

зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x=0$, $\Delta y=0$ при заданих крайових умовах, умовах Коші-Рімана на нижній та лівій ділянках границі ∂G_ω області G_ω та умовах склеювання вздовж ліній $h=h^{(l)}$, $l=\overline{1,m}$ [1–4].

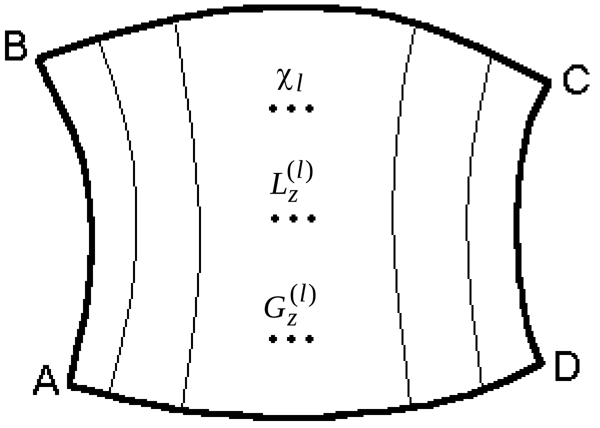

Рис.1. Фізична область G_z.

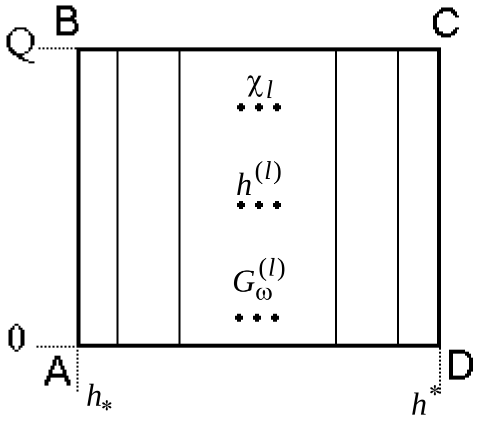

Рис.2. Область комплексного потенціалу G_ω.

Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma=\bigcup_{l=0}^{m} G_\omega^{\gamma(l)}$, де $G_\omega^{\gamma(l)}=\Big\{(h_i,\psi_j): h_i=h^{(l)}+\Delta_h(i-i_l), i=\overline{i_l,i_{l+1}};\ \psi_j=\Delta_\psi j,\ j=\overline{0,n+1};$ $\Delta_h=\frac{h^{(l+1)}-h^{(l)}}{i_{l+1}-i_l},\ \Delta_\psi=\frac{Q}{n+1},\ \gamma=\frac{\Delta_h}{\Delta_\psi}\Big\}$ запишемо у вигляді [6]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)}-2\left(1+\gamma^2\right)x_{i,j}^{(l)}+x_{i-1,j}^{(l)}+\gamma^2\left(x_{i,j-1}^{(l)}+x_{i,j+1}^{(l)}\right)=0, \\ y_{i+1,j}^{(l)}-2\left(1+\gamma^2\right)y_{i,j}^{(l)}+y_{i-1,j}^{(l)}+\gamma^2\left(y_{i,j-1}^{(l)}+y_{i,j+1}^{(l)}\right)=0, \\ i=\overline{i_l+1,i_{l+1}-1},\ j=\overline{1,n},\ l=\overline{0,m}; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} f_1\left(x_{i_0,j}^{(0)},y_{i_0,j}^{(0)}\right)=0, \quad f_3\left(x_{i_{m+1},j}^{(m)},y_{i_{m+1},j}^{(m)}\right)=0, \quad j=\overline{0,n+1}, \\ f_2\left(x_{i,n+1}^{(l)},y_{i,n+1}^{(l)}\right)=0, \quad f_4\left(x_{i,0}^{(l)},y_{i,0}^{(l)}\right)=0, \quad i=\overline{i_l,i_{l+1}},\ l=\overline{0,m}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x_{i_0+1,j}^{(0)}-x_{i_0,j}^{(0)}&=\gamma\chi_0\left(y_{i_0,j+1}^{(0)}-y_{i_0,j}^{(0)}\right) \\ y_{i_0,j}^{(0)}-y_{i_0+1,j}^{(0)}&=\gamma\chi_0\left(x_{i_0,j+1}^{(0)}-x_{i_0,j}^{(0)}\right) \end{aligned}\right\} \quad j=\overline{1,n}, \\ \left.\begin{aligned} x_{i+1,0}^{(l)}-x_{i,0}^{(l)}&=\gamma\chi_l\left(y_{i,1}^{(l)}-y_{i,0}^{(l)}\right) \\ y_{i,0}^{(l)}-y_{i+1,0}^{(l)}&=\gamma\chi_l\left(x_{i,1}^{(l)}-x_{i,0}^{(l)}\right) \end{aligned}\right\} \quad i=\overline{i_l+1,i_{l+1}-1},\ l=\overline{0,m}; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_{i_l,j}^{(l-1)}=x_{i_l,j}^{(l)}, \quad y_{i_l,j}^{(l-1)}=y_{i_l,j}^{(l)}, \quad j=\overline{1,n}, \\ \left.\begin{aligned} \chi_l\left(x_{i_l,j}^{(l-1)}-x_{i_l-1,j}^{(l-1)}\right)&=\chi_{l-1}\left(x_{i_l+1,j}^{(l)}-x_{i_l,j}^{(l)}\right) \\ \chi_l\left(y_{i_l,j}^{(l-1)}-y_{i_l-1,j}^{(l-1)}\right)&=\chi_{l-1}\left(y_{i_l+1,j}^{(l)}-y_{i_l,j}^{(l)}\right) \end{aligned}\right\} \quad j=\overline{0,n+1}, \end{cases} \quad l=\overline{1,m}; \tag{4}$$

$$\gamma=\frac{1}{\left(i_{m+1}-i_0\right)(n+1)}\times\sum_{i,j=i_0,0}^{i_{m+1}-1,n}\frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)}-x_{i,j}^{(l)}\right)^2+\left(y_{i+1,j}^{(l)}-y_{i,j}^{(l)}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)}-x_{i,j+1}^{(l)}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}^{(l)}-y_{i,j+1}^{(l)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)}-x_{i,j}^{(l)}\right)^2+\left(y_{i,j+1}^{(l)}-y_{i,j}^{(l)}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)}-x_{i+1,j}^{(l)}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}^{(l)}-y_{i+1,j}^{(l)}\right)^2}},\tag{5}$$

де $l=\overline{0,m},\ x_{i,j}^{(l)}=x(h_i,\psi_j),\ y_{i,j}^{(l)}=y(h_i,\psi_j),\ \left(h_i,\psi_j\right)\in G_{\omega}^{(l)}$.

Загальний розв'язок скінченно-різницевих рівнянь (1), згідно з формулами сумарних зображень Г.Положого [10, 11], має вигляд:

$$\begin{cases} x_{i,j}^{(l)}=\sum\limits_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^iA_k+\nu_k^iB_k+\gamma^2\sum\limits_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l)}\right)\right),\\ y_{i,j}^{(l)}=\sum\limits_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^iC_k+\nu_k^iD_k+\gamma^2\sum\limits_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l)}\right)\right),\end{cases}\tag{6}$$

$$l=\overline{0,m},\ i=\overline{i_l,i_{l+1}},\ j=\overline{1,n},$$

де $p_{j,k}=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{jk\pi}{n+1}$, $\eta_k=1+\gamma^2-\gamma^2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $\mu_k=\eta_k+\sqrt{\eta_k^2-1}$, $\nu_k=\eta_k-\sqrt{\eta_k^2-1}$.

Невідомі γ, A_k, B_k, C_k, D_k, $x_{i,0}^{(l)},y_{i,0}^{(l)}$, $x_{i,n+1}^{(l)},y_{i,n+1}^{(l)}$ $\left(l=\overline{0,m}\right)$ визначаються в результаті розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$f_1\left(\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_0}A_k+\nu_k^{i_0}B_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(0)}\right)\right),\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_0}C_k+\nu_k^{i_0}D_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(0)}\right)\right)\right)=0;$$

$$f_2\left(x_{i,n+1}^{(l)},y_{i,n+1}^{(l)}\right)=0;\quad f_4\left(x_{i,0}^{(l)},y_{i,0}^{(l)}\right)=0;$$

$$f_3\left(\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_{m+1}}A_k+\nu_k^{i_{m+1}}B_k+\gamma^2\sum_{t=i_m+1}^{i_{m+1}-1}\frac{\nu_k^{i_{m+1}-t}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(m)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(m)}\right)\right),\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_{m+1}}C_k+\nu_k^{i_{m+1}}D_k+\gamma^2\sum_{t=i_m+1}^{i_{m+1}-1}\frac{\nu_k^{i_{m+1}-t}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(m)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(m)}\right)\right)\right)=0;$$

$$\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_0}\left(\mu_k-1\right)A_k+\nu_k^{i_0}\left(\nu_k-1\right)B_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}\left(\mu_k-1\right)}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(0)}\right)\right)=$$
$$=\gamma\chi_0\sum_{k=1}^{n}\left(p_{j+1,k}-p_{j,k}\right)\left(\mu_k^{i_0}C_k+\nu_k^{i_0}D_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(0)}\right)\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_{j,k}\left(\mu_k^{i_0}(1-\mu_k)C_k+\nu_k^{i_0}(1-\nu_k)D_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}(1-\mu_k)}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(0)}\right)\right)=$$

$$=\gamma\chi_0\sum_{k=1}^{n}\left(p_{j+1,k}-p_{j,k}\right)\left(\mu_k^{i_0}A_k+\nu_k^{i_0}B_k+\gamma^2\sum_{t=i_0+1}^{i_1-1}\frac{\nu_k^{t-i_0}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(0)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(0)}\right)\right);$$

$$x_{i+1,0}^{(l)}-x_{i,0}^{(l)}=\gamma\chi_l\left(\sum_{k=1}^{n}p_{1,k}\left(\mu_k^{i}C_k+\nu_k^{i}D_k+\gamma^2\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l)}\right)\right)-y_{i,0}^{(l)}\right);$$

$$y_{i,0}^{(l)}-y_{i+1,0}^{(l)}=\gamma\chi_l\left(\sum_{k=1}^{n}p_{1,k}\left(\mu_k^{i}A_k+\nu_k^{i}B_k+\gamma^2\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l)}\right)\right)-x_{i,0}^{(l)}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{j,k}}{\mu_k-\nu_k}\left(\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\nu_k^{t-i_l}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l)}\right)-\sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_l-1}\nu_k^{i_l-t}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l-1)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l-1)}\right)\right)=0;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{j,k}}{\mu_k-\nu_k}\left(\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\nu_k^{t-i_l}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l)}\right)-\sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_l-1}\nu_k^{i_l-t}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l-1)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l-1)}\right)\right)=0;$$

$$\chi_l\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_l}(1-\nu_k)A_k+\nu_k^{i_l}(1-\mu_k)B_k+\gamma^2\sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_l-1}\frac{\nu_k^{i_l-t}(1-\mu_k)}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l-1)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l-1)}\right)\right)=$$

$$=\chi_{l-1}\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_l}(\mu_k-1)A_k+\nu_k^{i_l}(\nu_k-1)B_k+\gamma^2\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\frac{\nu_k^{t-i_l}(\mu_k-1)}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}x_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}x_{t,n+1}^{(l)}\right)\right);$$

$$\chi_l\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_l}(1-\nu_k)C_k+\nu_k^{i_l}(1-\mu_k)D_k+\gamma^2\sum_{t=i_{l-1}+1}^{i_l-1}\frac{\nu_k^{i_l-t}(1-\mu_k)}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l-1)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l-1)}\right)\right)=$$

$$=\chi_{l-1}\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^{i_l}(\mu_k-1)C_k+\nu_k^{i_l}(\nu_k-1)D_k+\gamma^2\sum_{t=i_l+1}^{i_{l+1}-1}\frac{\nu_k^{t-i_l}(\mu_k-1)}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}^{(l)}+p_{n,k}y_{t,n+1}^{(l)}\right)\right);$$

$l=\overline{0,m},\ i=\overline{i_l+1,i_{l+1}-1},\ j=\overline{1,n}$, де невідома функція γ визначається за формулою (5).

Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульове наближення невідомої величини γ (так, щоб число $\alpha=\Delta_h\cdot\frac{n+1}{\gamma}$ не перевищувало шуканої витрати Q). Розв'язуємо дану систему при заданому значенні γ, наприклад, за методом Ньютона [7, 8] та перевіряємо виконання умови (5). В залежності від одержаної нев'язки вибираємо наступне наближення невідомої величини γ і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність: $\left|\gamma^{(k+1)}-\gamma^{(k)}\right|<\varepsilon$.

1. *Бомба А.Я., Каштан С.С., Кузьменко А.П.* Про застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1998.- №5.- С.16-25.
2. *Бомба А.Я., Кузьменко А.П.* Про метод сумарних зображень розв'язування крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1996.- №3.- С.23-25.

3. *Бомба А.Я., Кузьменко А.П.* Про метод сумарних зображень розв'язування крайових задач на конформні відображення з особливостями // Волинський математичний вісник.- 1997.- №4.- С.18-21.
4. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1999.- №6.- С.27-38.
5. *Ляшко И.И., Сергиенко И.В., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В.* Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ.- Киев: Наукова думка, 1977.- 288с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем.- Москва: Наука, 1977.- 656с.
7. *Канторович Л.В., Крылов В.*И. Приближенные методы высшего анализа.- Москва-Ленинград: Физматгиз, 1962.- 708с.
8. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики.- Киев: Наукова думка, 1980.-334с.
9. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного.- Москва: Наука, 1973.- 736с.
10. *Ляшко И.И., Великоиваненко И.М.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации.- Киев: Наукова думка, 1973.- 264с.
11. *Положий Г.М.* Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента.- Киев: Изд-во КГУ, 1982.-161с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Надійшла 28.12.1999

Бомба А.Я. О МЕТОДЕ СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ // *На основании модификации метода суммарных представлений построено алгоритм приближения решения обратных краевых задач на конформные отображения в слоистых средах.*

Bomba A.J. ABOUT A METHOD OF SUMMARISHE REPRESENTATIONS OF A SOLUTION OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL MAPPINGS IN STRATIFIED MEDIUMS // *On the basis of modification of a method of summarishe representations the algorithm of an approximation of a solution of inverse boundary value problems on conformal mappings in stratified mediums is constructed.*