

## Зміст

<b>Баб'юк М.П.</b> ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є НА ДВОСКЛАДОВІЙ ДЕКАРТОВІЙ ОСІ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ .....	5
<b>Бернакевич І.Є., Вагін П.П., Шинкаренко Г.А.</b> АНАЛІЗ ЗСУВНИХ ОБОЛОНОК З ДЕФОРМІВНОЮ НОРМАЛЛЮ: АКУСТИКА ВЗАЄМОДІЇ З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ .....	11
<b>Бомба А.Я.</b> ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	17
<b>Величко І.Г.</b> ПЛОСКА ЗАДАЧА ПРО ОДНОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ГЛАДКОГО ШАРУ З ШАРУВАТИМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ПІВПРОСТОРОМ.....	22
<b>Волошина Т.В., Рудик О.В.</b> АЛГОРИТМ МАТЕМАТИКО-АНАМОРФОВАНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ТЕМАТИЧНОМУ КАРТУВАННІ .....	30
<b>Ворошик Н.Й.</b> ПРЯМІ ТЕОРЕМИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ.....	35
<b>Грицак П., Косак О.С.</b> ТЕПЛООБМІН В КАНАЛІ ПРИ ГІДРАВЛІЧНО СТАБІЛІЗОВАНОМУ ПОТОЦІ НЕНЬЮТОНІВСЬКОЇ РІДИНИ.....	38
<b>Дейнека В.С., Баран І.О.</b> СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ З ВЛАСНИМИ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ДЖЕРАЛАМИ .....	43
<b>Дейнека В.С., Калинюк Н.А.</b> ЧИСЕЛЬНА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ ТА КОЕФІЦІЄНТАМИ ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ.....	48
<b>Дейнека В.С., Смик М.В.</b> ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ З РОЗРИВНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ТА РОЗРИВНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ.....	55
<b>Дейнека О.Ю.</b> ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ТЕЛЕГРАФНИХ РІВНЯНЬ .....	61
<b>Ємець О.О., Ємець Є.М.</b> ОЦІНКИ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ МІНІМУМУ СИЛЬНО ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ЇЇ МІНІМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ.....	67
<b>Ємець О.О., Колечкіна Л.М.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЙНИМИ ЗАДАЧАМИ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ЦІЛІ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ .....	70
<b>Каиштан С.С.</b> ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ З ОСОБЛИВОСТЯМИ.....	78
<b>Кундрат М.М.</b> РОЗВИТОК СМУГИ КОВЗАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ ВКЛЮЧЕННЯ НА МЕЖІ РОЗДІЛУ РІЗНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ .....	87
<b>Лаушник О.І.</b> ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД $x^p$ .....	95
<b>Левченко О.М., Шинкаренко Г.А.</b> ВИЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ ДЕННОГО НАКОПИЧЕННЯ СОНЯЧНОЇ ЕНЕРГІЇ НА ДІЛЯНКАХ РЕАЛЬНОЇ МІСЦЕВОСТІ.....	101
<b>Ляшенко Б.М.</b> ЛІНІЇ РІВНЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ СПРОЩЕНОГО РІВНЯННЯ БАЛОННОЇ НЕСТІЙКОСТІ ПЛАЗМИ.....	106
<b>Нгуен Суан Тхао</b> О СВЕРТКАХ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ФУНКЦІЄЙ МАКДОНАЛЬДА В ЯДРАХ.....	111

<i>Нікітіна О.М.</i> УЗАГАЛЬНЕНЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ МЕЛЕРА-ФОКА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$ З ДВОМА ТОЧКАМИ СПРЯЖЕННЯ.....	116
<i>Піх О.З., Скасків О.Б., Сороківський В.М.</i> ПРО R-ТИП НА ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ПРОМЕНІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЗОБРАЖУВАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ.....	124
<i>Попов Б.О., Суцник К.В.</i> ОБМІННА ТЕОРЕМА ДЛЯ НАЙКРАЩОГО ЧЕБИШОВСЬКОГО НЕЛІНІЙНОГО НАБЛИЖЕННЯ.....	127
<i>Тараненко Н.В.</i> АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФУНКЦИИ.....	132
<i>Тополук Ю.П.</i> ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНФОРМНОГО РЕЗОНАТОРА З СИНТЕЗОВАНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПРОЗОРСТІ.....	140
<i>Турбал Ю.В.</i> ПРО УТОЧНЕННЯ ДЕЯКИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ ФУНКЦІЙ ЗНОСУ МОДЕЛІ РАДІОАКТИВНОГО ЗАБРУДНЕННЯ.....	147
<i>Фінін Г.С.</i> МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ВОДИ У ВІДКРИТИХ КАНАЛАХ ПРИ НАЯВНОСТІ ЦИКЛІВ.....	154
<i>Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В.</i> НОВА ФОРМУЛА МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ.....	159
<i>Цимбал В.М.</i> ВИРОДЖЕННЯ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ У ЗАДАЧУ ГУРСА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....	165
<i>Черняга П.Г., Бялик М.В., Степанченко О.М.</i> МОДЕЛЮВАННЯ АТМОСФЕРНОЇ РЕФРАКЦІЇ ПРИ СУПУТНИКОВИХ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ.....	170
<i>Щербакова А.Г.</i> АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КНЕЗЕРА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	176
<i>Яджак М.С.</i> ПРО ОПТИМАЛЬНІСТЬ АЛГОРИТМУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	181
<i>Янчук П.С.</i> МЕТОД МНОГОЧЛЕННИХ РЯДІВ ФУРСЬ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРЯМОКУТНИКУ.....	193
<i>Скасків О.Б., Півкач М.Г.</i> ЛИСТ В РЕДАКЦІЮ.....	209

УДК 517.9

Дейнека О.Ю.

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ТЕЛЕГРАФНИХ РІВНЯНЬ

Отримані необхідні і достатні умови експоненціальної стійкості розв'язків системи телеграфних рівнянь з лінійними крайовими умовами.

**1.Позначення. Основний результат.** Нехай  $C^0(M, \mathbf{R}^n)$  та  $C^1(M, \mathbf{R}^n)$  – простори відповідно неперервних та неперервно диференційованих на множині  $M$  функцій із значеннями в  $\mathbf{R}^n$ , з нормами  $\|z\|_{C^0} = \sup_{t \in M} \|z(t)\|_{\mathbf{R}^n}$  та  $\|z\|_{C^1} = \|z\|_{C^0} + \sup_{t \in M} \left\| \frac{dz(t)}{dt} \right\|_{\mathbf{R}^n}$ ;  $\sigma(A)$  – спектр оператора  $A$ , а  $r(A)$  – його спектральний радіус.

В роботі вивчається поведінка розв'язків системи телеграфних рівнянь

$$\begin{cases} A \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \\ A \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial i(x,t)}{\partial x}, \quad x \in [0, l], t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

з лінійними крайовими

$$\begin{cases} Cu(0,t) + Di(0,t) = 0, \\ E \frac{du(l,t)}{dt} + Fu(l,t) + Gi(l,t) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

та початковими

$$\begin{cases} u(x,0) = \alpha(x), \\ i(x,0) = \beta(x), \quad x \in [0, l] \end{cases} \quad (3)$$

умовами, де  $l$ -фіксоване додатне число;  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_j > 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;  $C, D, E, F, G$  – квадратні матриці  $n$ -го порядку, для яких  $\det[E(C+D)(C-D)] \neq 0$ ;  $\alpha = \alpha(x), \beta = \beta(x) \in C^1([0, l], \mathbf{R}^n)$ ;  $i = i(x,t), u = u(x,t) \in C^1([0, l] \times [0, +\infty), \mathbf{R}^n)$ . Вважається, що початкова та крайова умови узгоджені в точках  $(0,0)$  та  $(l,0)$

$$\begin{cases} C\alpha(0) + D\beta(0) = 0, \\ -EA^{-1} \left. \frac{d\beta(x)}{dx} \right|_{x=l} + F\alpha(l) + G\beta(l) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Нульовий розв'язок задачі (1) – (4) називається експоненціально стійким, якщо існують додатні числа  $\gamma$  і  $N$ , такі що для довільного розв'язку цієї задачі виконується нерівність

$$\max_{x \in [0, l]} (\|i(x,t)\|_{\mathbf{R}^n} + \|u(x,t)\|_{\mathbf{R}^n}) \leq N \exp\{-\gamma t\} \max_{x \in [0, l]} (\|i(x,0)\|_{\mathbf{R}^n} + \|u(x,0)\|_{\mathbf{R}^n})$$

для всіх  $t \geq 0$ .

Для формулювання основного результату введемо такі позначення:

$$K = (C+D)^{-1}(D-C);$$

$$P_k = \text{diag}(\delta_{k1}, \dots, \delta_{kn}), \quad \delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = t, \\ 0, & \text{якщо } s \neq t; \end{cases}$$

$$H(\omega) = \sum_{v,k=1}^n \exp\{-i\omega(a_k + a_v)l\} P_k K P_v \quad (\omega \in \mathbf{R}).$$

**Теорема.** Якщо  $\sup_{\omega \in \mathbf{R}} r(H(\omega)) < 1$ , то нульовий розв'язок задачі (1) – (4) експоненціально стійкий тоді і тільки тоді, коли

$$\bigcup_{\omega \in \mathbf{R}} \sigma \left[ (I + H(\omega))^{-1} (E^{-1}(G - F) - E^{-1}(F + G)H(\omega)) \right] \subset \{ \lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0 \}.$$

Для доведення теореми перейдемо від задачі (1) – (4) до диференціально-різницевого рівняння з початковою умовою, визначеною (3), за методом запропонованим в роботі [1].

**2. Допоміжні результати.** З'ясуємо як пов'язані розв'язки задачі (1) – (4) та розв'язки відповідного цій задачі диференціально-різницевого рівняння. Аналогічно як в роботі [2], використовуючи оператори проектування  $P_k$ , введені в пункті 1, загальний розв'язок (1) представимо у вигляді

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{k=1}^n P_k (\varphi(t - a_k x) + \theta(t + a_k x)), \\ i(x, t) = \sum_{k=1}^n P_k (\varphi(t - a_k x) - \theta(t + a_k x)), \end{cases} \quad (5)$$

де  $\theta(s) \in C^1([0, +\infty), \mathbf{R}^n)$ ,  $\varphi_k(s) \in C^1([-a_k l, +\infty), \mathbf{R}^n)$  для всіх  $k = \overline{1, n}$ . Після підстановки (5) в (2) отримаємо систему

$$(C + D)\varphi(t) + (C - D)\theta(t) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} E \sum_{k=1}^n P_k \frac{d\varphi(t - a_k l)}{dt} + E \sum_{k=1}^n P_k \frac{d\theta(t + a_k l)}{dt} + \\ + (F + G) \sum_{k=1}^n P_k \varphi(t - a_k l) + (F - G) \sum_{k=1}^n P_k \theta(t + a_k l) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Далі у рівнянні (7) зробимо заміну

$$y(t) = \sum_{k=1}^n P_k \theta(t + a_k l) \quad (8)$$

та із співвідношення (6), враховуючи (8), запишемо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_k \varphi(t - a_k l) &= \sum_{k=1}^n P_k K \theta(t - a_k l) = \sum_{k=1}^n P_k K \sum_{v=1}^n P_v y(t - (a_k l) - a_v l) = \\ &= \sum_{k,v=1}^n P_k K P_v y(t - (a_k + a_v) l). \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді рівняння (7) набуде вигляду

$$\frac{dy(t)}{dt} + \sum_{v,k=1}^n P_v K P_k \frac{dy(t - (a_k + a_v) l)}{dt} = E^{-1}(G - F)y(t) - E^{-1}(F + G) \sum_{v,k=1}^n P_v K P_k y(t - (a_k + a_v) l)$$

і з останньої рівності після перепозначень

$$\sum_{v,k=1}^n P_v K P_k y(t - (a_k + a_v) l) = \sum_{v,k=1}^n A_{k,v} y(t - \Delta_{v,k}), \quad E^{-1}(G - F) = B_0, \quad -E^{-1}(F + G) = B_1$$

отримаємо диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{d}{dt} \left( y(t) + \sum_{v,k=1}^n A_{v,k} y(t - \Delta_{v,k}) \right) = B_0 y(t) + B_1 \sum_{v,k=1}^n A_{v,k} y(t - \Delta_{v,k}). \quad (10)$$

Для існування єдиного розв'язку  $y = y(t) \in C^1([0, +\infty), \mathbf{R}^n)$  рівняння (10) з заданою

початковою умовою – функцією  $\psi = \psi(t) \in C^1([0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \mathbf{R}^n)$  необхідно і достатньо, згідно [4], щоб виконувалася рівність

$$\left. \frac{d\psi(t)}{dt} \right|_{t=\Delta-0} + \sum_{v,k=1}^n A_{v,k} \left. \frac{d\psi(t-\Delta_{v,k})}{dt} \right|_{t=\Delta+0} = B_0 \psi(\Delta) + B_1 \sum_{v,k=1}^n A_{v,k} \psi(\Delta - \Delta_{v,k}),$$

де  $\Delta = \max_{v,k} \Delta_{v,k} = 2 \max_k a_k I$ . Тому опишемо алгоритм визначення початкової умови

$\psi = \psi(t) \in C^1([0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \mathbf{R}^n)$  із задачі (1) – (4).

Використовуючи (3),(5), отримаємо систему

$$\begin{cases} 2 \sum_{k=1}^n P_k \varphi(-a_k x) = \alpha(x) + \beta(x), \\ 2 \sum_{k=1}^n P_k \theta(a_k x) = \alpha(x) - \beta(x), \end{cases} \quad (11)$$

згідно з якою,  $\theta_k(s)$  визначені і неперервні разом із своїми похідними на  $[0; a_k I]$  ( $k = \overline{1, n}$ ), а  $\varphi_k(s)$  – на  $[-a_k I; 0]$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Із (6)  $\theta_k(s)$  і  $\varphi_k(s)$  визначаються на  $[-a_k I; a_k I]$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Співвідношення (4) гарантують неперервну диференційованість в точці  $t=0$ , тобто  $\theta_k(s), \varphi_k(s) \in C^1([-a_k I; a_k I], \mathbf{R}^n)$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Щоб задати початкову умову для рівняння (10), згідно (8), функції  $\theta_k(s)$  необхідно продовжити так, щоб  $\theta_k(s) \in C^1([a_k I; a_k I + 2 \max_k a_k I], \mathbf{R}^n)$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Тому, на підставі неперервної диференційованості функцій  $\varphi_k(t - a_k I)$  коли  $t \in [0; \min_k a_k I]$  для всіх  $k = \overline{1, n}$ , з рівності (7) однозначно визначаємо неперервно диференційовані функції  $\theta_k(s)$  на  $[a_k I; a_k I + \min_k a_k I]$ , неперервні в точках  $t = a_k I$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Для доведення неперервної диференційованості в точках  $t = a_k I$  досить за допомогою рівності (7) продовжити  $\theta_k(s)$  на  $[0 + \varepsilon; \min_k a_k I + \varepsilon]$  ( $\varepsilon$  – досить мале додатне число) для всіх  $k = \overline{1, n}$ . Продовжуючи цей процес з використанням (6) та (7)  $[2 \max_k a_k / \min_k a_k] + 1$  разів, згідно (8), отримуємо початкову умову  $\psi(t) \in C^1([0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \mathbf{R}^n)$ .

Зауважимо, що проводячи міркування у зворотному порядку можна з початкової умови  $\psi(t) \in C^1([0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \mathbf{R}^n)$  отримати початкову умову (3) і співвідношення (4).

Далі, на підставі алгоритму,  $\theta_k(s) \in C^1([0; 2 \max_k a_k I + a_k I + \varepsilon], \mathbf{R}^n)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), тому похідна функції  $y = y(t)$  є неперервною в точці  $t = \Delta = \max_{v,k} \Delta_{v,k} = 2 \max_k a_k I$ , тобто виконана умова

$$\left. \frac{d\psi(t)}{dt} \right|_{t=\Delta-0} + \sum_{v,k=1}^n A_{v,k} \left. \frac{d\psi(t-\Delta_{v,k})}{dt} \right|_{t=\Delta+0} = B_0 \psi(\Delta) + B_1 \sum_{v,k=1}^n A_{v,k} \psi(\Delta - \Delta_{v,k}).$$

Таким чином, рівняння (10) має єдиний розв'язок  $y = y(t) \in C^1([0; +\infty), \mathbf{R}^n)$ , для кожної

визначеної, за описаним вище алгоритмом функції  $\psi = \psi(t)$ .

Відмітимо, що розв'язки задачі (1) – (4) пов'язані з розв'язками рівняння (10) з початковою умовою  $\psi(t) \in C^1([0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \mathbf{R}^n)$  через співвідношення (5), (8), (9) наступним чином:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{k=1}^n P_k \left[ K \sum_{v=1}^n P_v \mathcal{Y}(t - a_v I - a_k x) + \sum_{v=1}^n P_v \mathcal{Y}(t - a_v I + a_k x) \right], \\ i(x,t) = \sum_{k=1}^n P_k \left[ K \sum_{v=1}^n P_v \mathcal{Y}(t - a_v I - a_k x) - \sum_{v=1}^n P_v \mathcal{Y}(t - a_v I + a_k x) \right], \end{cases} (x,t) \in [0, l] \times [0, +\infty). \quad (12)$$

Аналізуючи ці рівності робимо висновок, що компоненти вектор-функцій  $u = u(x,t)$  та  $i = i(x,t)$  визначаються через лінійну комбінацію компонент вектор-функції  $y = \mathcal{Y}(t)$  для кожного фіксованого  $x \in [0, l]$ . І навпаки, згідно з (5) та (9), компоненти вектор-функції  $y = \mathcal{Y}(t)$  визначається через лінійну комбінацію компонент вектор-функцій  $u = u(x,t)$  та  $i = i(x,t)$  за допомогою співвідношення

$$2y(t) = u(l,t) - i(l,t). \quad (13)$$

Нагадаємо, що нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння (10) називається експоненціально стійким, якщо існують додатні  $\gamma_1$  і  $N_1$ , такі що для довільного його розв'язку з початковою умовою  $\psi(t) \in C^1([0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \mathbf{R}^n)$ , виконується нерівність

$$\|\mathcal{Y}(t)\|_{\mathbf{R}^n} \leq N_1 \exp\{-\gamma_1 t\} \max_{t \in [0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}]} \|\psi(t)\|_{\mathbf{R}^n}, \text{ для всіх } t \geq 0.$$

Отже, так як між початковими умовами задачі (1) – (4) та відповідного їй рівняння (10) існує взаємно однозначна відповідність, згідно описаного вище алгоритму, а також, на підставі (12), (13), отримуємо твердження.

**Лема.** Нульовий розв'язок задачі (1) – (4) є експоненціально стійким тоді і тільки тоді, коли експоненціально стійким є нульовий розв'язок дифференціально-різницевого рівняння (10).

**3. Доведення теореми.** Доводити теорему будемо за схемою запропонованою В.Ю.Слюсарчуком [3].

**Необхідність.** Нехай нульовий розв'язок задачі (1) – (4) є експоненціально стійким. Тоді, згідно з лемою, експоненціально стійким є нульовий розв'язок рівняння (10). Подамо розв'язок (10) у вигляді  $\mathcal{Y}(t) = \exp\{pt\} b$  ( $b \in \mathbf{R}^n$ ,  $p$ - комплексне число,  $t \geq 0$ ) і підставимо в рівняння, тоді  $p \exp\{pt\} b + p \exp\{pt\} H(-ip)b = p \exp\{pt\} B_0 b + p \exp\{pt\} B_1 H(-ip)b$ , або  $p(I + H(-ip))b = (B_0 + B_1 H(-ip))b$ .

З умови  $\sup_{\omega \in \mathbf{R}} r(H(\omega)) < 1$  теореми та рівномірної неперервності  $H(\omega)$ , як майже-періодичної функції, впливає існування  $(I + H(\omega))^{-1}$  [5]. Тому

$$(I + H(-ip))^{-1} (B_0 + B_1 H(-ip))b = pb$$

і за припущенням про експоненціальну стійкість розв'язку  $\mathcal{Y}(t) = \exp\{pt\} b$ , тобто, що  $\text{Re } p < 0$ , отримуємо твердження теореми. Необхідність доведена.

**Достатність.** Нехай виконуються умови теореми, тоді існує неперервний обернений оператор  $(I + H(\omega))^{-1}$  [5]. Тому

$$\sup_{\text{Re } \lambda > 0} \left\| (I + H(-i\lambda))^{-1} \right\|_{L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)} < \infty. \quad (14)$$

З умови теореми, враховуючи зроблені в пункті 2 позначення,

$$\sum_{v,k=1}^n P_v k P_k \mathcal{Y}(t-(a_k+a_v)l) = \sum_{v,k=1}^n A_{k,v} \mathcal{Y}(t-\Delta_{v,k}), \quad E^{-1}(G-F) = B_0, \quad -E^{-1}(F+G) = B_1$$

впливає, що  $\bigcup_{\operatorname{Re}\lambda > 0} \sigma\left[(I+H(-i\lambda))^{-1}(B_0+B_1H(-i\lambda))\right] \subset \{\mu: \operatorname{Re}\mu \leq \varepsilon < 0\}$ , тобто

$$\bigcup_{\operatorname{Re}\lambda > 0} \sigma\left[\lambda I - (I+H(-i\lambda))^{-1}(B_0+B_1H(-i\lambda))\right] \subset \{\mu: \operatorname{Re}\mu > 0\}.$$

Отже,

$$0 \notin \sigma\left[\lambda(I+H(-i\lambda)) - B_0 - B_1H(-i\lambda)\right], \quad \text{для всіх } \lambda \in \{\lambda: \operatorname{Re}\lambda > 0\}. \quad (15)$$

Введемо в розгляд функцію

$$z(t) = \begin{cases} \exp\{\beta t\} \vartheta(t, \psi(\tau)), & \text{коли } t \geq 0, \\ \exp\{\beta t\} \psi(\tau), & \text{коли } t \in [0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \end{cases} \quad (16)$$

де  $\vartheta(t, \psi(\tau))$  – розв’язок побудований по функції  $\psi(\tau)$ ,  $\beta$  – досить мале додатне число. Функція  $z = z(t)$  є розв’язком рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( z(t) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) \right) &= B_0 z(t) + \\ + B_1 \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) &+ \beta \left( z(t) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta \Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

З (14), (15) і того, що  $\beta$  досить мале отримуємо, згідно з [6] ст.28,

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda < 0} \left\| \left( I + \sum_{v,k=1}^n \exp\{(\beta - \lambda)\Delta_{v,k}\} A_{v,k} \right)^{-1} \right\|_{L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)} < \infty. \quad (18)$$

та

$$0 \notin \left[ (\lambda - \beta) \left( I + \sum_{v,k=1}^n \exp\{(\beta - \lambda)\Delta_{v,k}\} A_{v,k} \right) - B_0 - B_1 \sum_{v,k=1}^n \exp\{(\beta - \lambda)\Delta_{v,k}\} A_{v,k} \right] \quad (19)$$

для всіх  $\lambda \in \{\lambda: \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ .

До рівняння (17) застосуємо перетворення Лапласа, і на підставі (18), (19) отримаємо нерівність  $\left\| \frac{\tilde{z}(\lambda)}{\lambda} \right\|_{\mathbf{R}^n} < \frac{c}{|\lambda|^2}$ , для всіх  $\lambda \in \{\lambda: \operatorname{Re}\lambda > 0\}$  ( $c = \text{const} \in (0, +\infty)$ ),  $\tilde{z}(\lambda)$  – зображення

функції  $z(t)$ . З останньої нерівності та формули  $\int_0^t z(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \exp\{\lambda t\} \frac{\tilde{z}(\lambda)}{\lambda} d\lambda$  [5], в

якій  $\alpha > \max\left\{0, \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln(1 + \|z(t)\|_{\mathbf{R}^n})\right\}$ , отримаємо оцінку

$$\left\| \int_0^t z(s) ds \right\|_{\mathbf{R}^n} \leq Q \quad \text{для всіх } t \geq 0, \quad (20)$$

де  $Q$  – постійна, що не залежить від  $\psi(\tau)$ .

Далі, від (17) перейдемо до функціонального рівняння

$$\begin{aligned} z(t) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta\Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) &= z(0) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta\Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(-\Delta_{v,k}) + \\ &+ \beta \left( \int_0^t z(s) ds + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta\Delta_{v,k}\} A_{v,k} \int_0^t z(s - \Delta_{v,k}) ds \right) + B_0 \int_0^t z(s) ds + \\ &+ B_1 \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta\Delta_{v,k}\} A_{v,k} \int_0^t z(s - \Delta_{v,k}) ds \end{aligned}$$

права частина якого обмежена на  $[0; +\infty)$ , згідно з (20). На підставі (18), його розв'язок є обмеженим. Тому обмеженою є права частина рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta\Delta_{v,k}\} A_{v,k} \frac{dz(t - \Delta_{v,k})}{dt} &= B_0 z(t) + B_1 \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta\Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) + \\ &+ \beta \left( z(t) + \sum_{v,k=1}^n \exp\{\beta\Delta_{v,k}\} A_{v,k} z(t - \Delta_{v,k}) \right). \end{aligned}$$

І, згідно з (18), є обмеженим на  $[0; +\infty)$  розв'язок  $\frac{dz(t)}{dt}$  цього рівняння.

Отже кожний розв'язок (17) є обмеженим для довільної функції  $\psi(t) \in C^1([0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \mathbf{R}^n)$ . Згідно теореми Банаха-Штейнгауза [5], нульовий розв'язок (17) є стійким. Цього достатньо, на підставі (16), для експоненціальної стійкості нульового розв'язку рівняння (10). Справді, функція  $\vartheta(t, \psi(t)) = \exp\{-\beta t\} z(t)$  є розв'язком рівняння (10) для кожної функції  $\psi(t) \in C^1([0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}], \mathbf{R}^n)$ , тому має місце оцінка

$$\|\vartheta(t, \psi(t))\|_{\mathbf{R}^n} \leq \exp\{-\beta t\} \max_{t \geq 0} \|z(t)\|_{\mathbf{R}^n} \leq N_2 \exp\{-\beta t\} \max_{t \in [0; \max_{v,k} \Delta_{v,k}]} \|\psi(t)\|_{\mathbf{R}^n} \text{ для всіх } t \geq 0.$$

В свою чергу твердження леми гарантує експоненціальну стійкість нульового розв'язку задачі (1) – (4). Достатність доведена.

*Колесов Ю.С., Швидра Д.И.* Автоколебания в системах с запаздыванием.- Вильнюс: Моклас, 1974.- 174с.

*Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4.- М.: Физматгиз, 1958.- 457с.

*Слюсарчук В.Е.* Абсолютная экспоненциальная устойчивость линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа в банаховом пространстве // Диф. уравнения.- 1980.- №3.- С462-469.

*Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.- М.: Мир, 1967.- 548с.

*Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Наука, 1989.- 624с.

*Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1970.- 376с.

Рівненський державний технічний університет, Рівне

Надійшла 5.02.2000

**Дейнека О.Ю.** ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ // Получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости решений системы телеграфных уравнений с линейными граничными условиями.

**Dejneka O.J.** EXPONENTIAL STABILITY OF THE SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF TELEGRAPH EQUATIONS // Necessary and sufficient conditions of exponential stability of the solutions of the system of telegraph equations are obtained.