

Зміст

Баб'юк М.П. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є НА ДВОСКЛАДОВІЙ ДЕКАРТОВІЙ ОСІ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ	5
Бернакевич І.Є., Вагін П.П., Шинкаренко Г.А. АНАЛІЗ ЗСУВНИХ ОБОЛОНОК З ДЕФОРМІВНОЮ НОРМАЛЛЮ: АКУСТИКА ВЗАЄМОДІЇ З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ	11
Бомба А.Я. ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	17
Величко І.Г. ПЛОСКА ЗАДАЧА ПРО ОДНОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ГЛАДКОГО ШАРУ З ШАРУВАТИМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ ПІВПРОСТОРОМ.....	22
Волошина Т.В., Рудик О.В. АЛГОРИТМ МАТЕМАТИКО-АНАМОРФОВАНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ТЕМАТИЧНОМУ КАРТУВАННІ	30
Ворошик Н.Й. ПРЯМІ ТЕОРЕМИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ.....	35
Грицак П., Косак О.С. ТЕПЛООБМІН В КАНАЛІ ПРИ ГІДРАВЛІЧНО СТАБІЛІЗОВАНОМУ ПОТОЦІ НЕНЬЮТОНІВСЬКОЇ РІДИНИ.....	38
Дейнека В.С., Баран І.О. СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ З ВЛАСНИМИ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ДЖЕРАЛАМИ	43
Дейнека В.С., Калинюк Н.А. ЧИСЕЛЬНА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ ТА КОЕФІЦІЄНТАМИ ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ.....	48
Дейнека В.С., Смик М.В. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СХЕМИ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ З РОЗРИВНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ТА РОЗРИВНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ.....	55
Дейнека О.Ю. ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ТЕЛЕГРАФНИХ РІВНЯНЬ	61
Ємець О.О., Ємець Є.М. ОЦІНКИ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ МІНІМУМУ СИЛЬНО ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ЇЇ МІНІМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ.....	67
Ємець О.О., Колечкіна Л.М. МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЙНИМИ ЗАДАЧАМИ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ЦІЛІ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ	70
Каиштан С.С. ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ З ОСОБЛИВОСТЯМИ.....	78
Кундрат М.М. РОЗВИТОК СМУГИ КОВЗАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ ВКЛЮЧЕННЯ НА МЕЖІ РОЗДІЛУ РІЗНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ	87
Лаушник О.І. ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД x^p	95
Левченко О.М., Шинкаренко Г.А. ВИЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ ДЕННОГО НАКОПИЧЕННЯ СОНЯЧНОЇ ЕНЕРГІЇ НА ДІЛЯНКАХ РЕАЛЬНОЇ МІСЦЕВОСТІ.....	101
Ляшенко Б.М. ЛІНІЇ РІВНЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ СПРОЩЕНОГО РІВНЯННЯ БАЛОННОЇ НЕСТІЙКОСТІ ПЛАЗМИ.....	106
Нгуен Суан Тхао О СВЕРТКАХ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ФУНКЦІЄЙ МАКДОНАЛЬДА В ЯДРАХ.....	111

<i>Нікітіна О.М.</i> УЗАГАЛЬНЕНЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ МЕЛЕРА-ФОКА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$ З ДВОМА ТОЧКАМИ СПРЯЖЕННЯ.....	116
<i>Піх О.З., Скасків О.Б., Сороківський В.М.</i> ПРО R-ТИП НА ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ПРОМЕНІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЗОБРАЖУВАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ.....	124
<i>Попов Б.О., Сущик К.В.</i> ОБМІННА ТЕОРЕМА ДЛЯ НАЙКРАЩОГО ЧЕБИШОВСЬКОГО НЕЛІНІЙНОГО НАБЛИЖЕННЯ.....	127
<i>Тараненко Н.В.</i> АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФУНКЦИИ.....	132
<i>Тополук Ю.П.</i> ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНФОРМНОГО РЕЗОНАТОРА З СИНТЕЗОВАНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПРОЗОРСТІ.....	140
<i>Турбал Ю.В.</i> ПРО УТОЧНЕННЯ ДЕЯКИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ ФУНКЦІЙ ЗНОСУ МОДЕЛІ РАДІОАКТИВНОГО ЗАБРУДНЕННЯ.....	147
<i>Фінін Г.С.</i> МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ВОДИ У ВІДКРИТИХ КАНАЛАХ ПРИ НАЯВНОСТІ ЦИКЛІВ.....	154
<i>Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В.</i> НОВА ФОРМУЛА МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ.....	159
<i>Цимбал В.М.</i> ВИРОДЖЕННЯ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ У ЗАДАЧУ ГУРСА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....	165
<i>Черняга П.Г., Бялик М.В., Степанченко О.М.</i> МОДЕЛЮВАННЯ АТМОСФЕРНОЇ РЕФРАКЦІЇ ПРИ СУПУТНИКОВИХ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ.....	170
<i>Щербакова А.Г.</i> АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КНЕЗЕРА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	176
<i>Яджак М.С.</i> ПРО ОПТИМАЛЬНІСТЬ АЛГОРИТМУ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	181
<i>Янчук П.С.</i> МЕТОД МНОГОЧЛЕННИХ РЯДІВ ФУРСЬ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРЯМОКУТНИКУ.....	193
<i>Скасків О.Б., Півкач М.Г.</i> ЛИСТ В РЕДАКЦІЮ.....	209

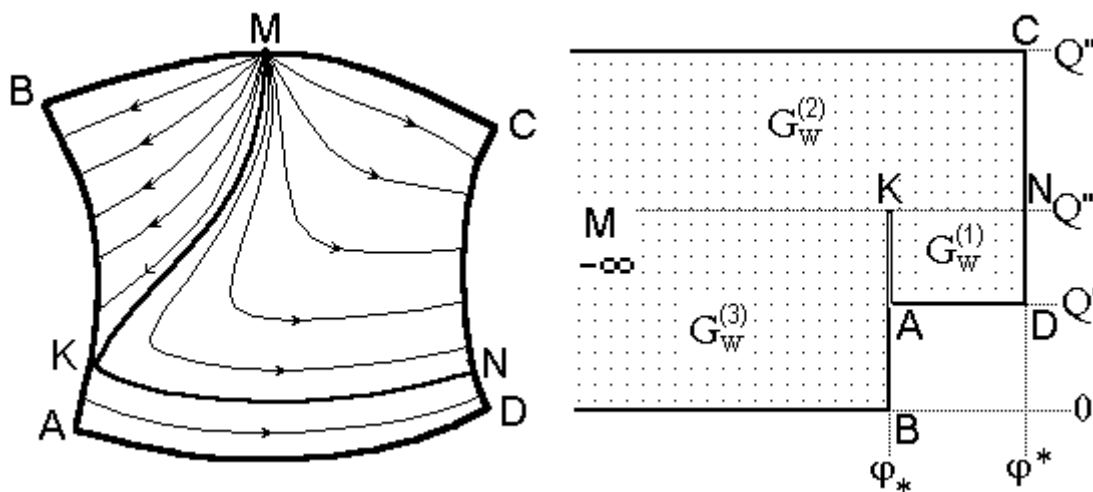
УДК 519.632.4.001.57+517.54

Каштан С.С.

ПРО МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ З ОСОБЛИВОСТЯМИ

На основі модифікації методу сумарних зображень Г.Положого побудовано алгоритм наближення розв'язків нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з особливостями.

Розглянемо модельну задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в скінченній однозв'язній криволінійній області $G_z = ABMCD$ ($z = x + iy$), обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BMC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами (див. рис. 1а) при наявності точкового джерела (особливої точки) $M \in BC$ з умовами: $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\varphi|_M = -\infty$, $\frac{d\varphi}{dn}|_{BM} = \frac{d\varphi}{dn}|_{AD} = \frac{d\varphi}{dn}|_{MN} = \frac{d\varphi}{dn}|_{CM} = 0$ (де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої) [1, 2]. Ввівши гармонічну функцію $\psi = \psi(x, y)$ (функцію течії), комплексно спряжену до функції $\varphi = \varphi(x, y)$, і замінивши останні чотири граничні умови на умови: $\psi|_{BM} = 0$, $\psi|_{AD} = Q'$, $\psi|_{CM} = Q''$, $\psi|_{MN} = Q'''$, де Q', Q'', Q''' – величини фільтраційних потоків (Q', Q''' – невідомі параметри), дану задачу замінимо більш загальною задачею на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega: -\infty < \varphi < \varphi_*, 0 < \psi < Q''\} \cup \cup \{\omega: \varphi = \varphi_*, Q' < \psi < Q''\} \cup \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q' < \psi < Q''\}$ (див. рис. 1б) при відповідності кутових точок [1 – 8].



а) Фізична область G_z .

б) Область комплексного потенціалу G_ω .

Рис.1.

Обернена нелінійна крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомих Q' , Q''' запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & Q' \leq \psi \leq Q''', & f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & Q''' \geq \psi \geq 0, \\ f_2(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \geq \varphi > -\infty, & f_2(x(\varphi, Q''), y(\varphi, Q'')) = 0, & -\infty < \varphi \leq \varphi^*, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & Q'' \geq \psi \geq Q', & f_4(x(\varphi, Q'), y(\varphi, Q')) = 0, & \varphi^* \geq \varphi \geq \varphi_*, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, & \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, & & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \end{cases} \quad (1)$$

де Q''' – потік, що виходить із області G_z через ділянку BK ($Q''' - Q'$ – потік, що входить в неї через ділянку KA , а $Q'' - Q'$ – потік, що виходить із G_z через ділянку CD).

Задачу (1) зведемо до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ при заданих крайових умовах, умовах Коші-Рімана $x_\varphi = y_\psi$, $x_\psi = -y_\varphi$ на ділянці $\{\omega: \varphi < \varphi^*, \psi = Q''\} \cup \{\omega: \varphi = \varphi^*, Q' < \psi < Q''\} \cup \{\omega: \varphi = \varphi_*, 0 < \psi < Q'''\}$ границі ∂G_ω та умовах склеювання вздовж лінії розділу течії MKN [1 – 6].

Різницевий аналог цієї крайової задачі у сітковій області $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^3 G_\omega^{(l)}$,

$$G_\omega^{(1)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j): \quad \varphi_i = \varphi_* + h_\varphi i, i = \overline{0, m+1}; \quad \psi_j = Q' + h_\psi (j - n_0), j = \overline{n_0, n_1}; \quad h_\psi = \frac{Q''' - Q'}{n_1 - n_0} \right\},$$

$$G_\omega^{(2)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j): \quad \varphi_i = \varphi^* - h_\varphi (i - m - 1), i = \overline{m+1, -\infty}; \quad \psi_j = Q''' + h_\psi (j - n_1), j = \overline{n_1, n+1}; \right.$$

$$\left. h_\psi = \frac{Q'' - Q'''}{n+1 - n_1} \right\}, \quad G_\omega^{(3)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j): \quad \varphi_i = \varphi^* - h_\varphi i, i = \overline{0, -\infty}; \quad \psi_j = h_\psi j, j = \overline{0, n_1}; \quad h_\psi = \frac{Q'''}{n_1} \right\},$$

$h_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}$, $\gamma^{(l)} = \frac{h_\varphi}{h_\psi}$, запишемо у вигляді [9]:

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^{(l)} - 2(1+\gamma^{(l)2})x_{i,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2}(x_{i,j-1}^{(l)} + x_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} - 2(1+\gamma^{(l)2})y_{i,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} + \gamma^{(l)2}(y_{i,j-1}^{(l)} + y_{i,j+1}^{(l)}) = 0, \\ l=1, \begin{cases} i = \overline{1, m}, \\ j = \overline{n_0+1, n_1-1}, \end{cases} \quad l=2, \begin{cases} i = \overline{m, -\infty}, \\ j = \overline{n_1+1, n}, \end{cases} \quad l=3, \begin{cases} i = \overline{-1, -\infty}, \\ j = \overline{1, n_1-1}; \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, & j = \overline{n_0, n_1}, & f_1(x_{0,j}^{(3)}, y_{0,j}^{(3)}) = 0, & j = \overline{0, n_1}, \\ f_2(x_{i,0}^{(3)}, y_{i,0}^{(3)}) = 0, & i = \overline{-\infty, 0}, & f_2(x_{i,n+1}^{(2)}, y_{i,n+1}^{(2)}) = 0, & i = \overline{-\infty, m+1}, \\ f_3(x_{m+1,j}^{(2)}, y_{m+1,j}^{(2)}) = 0, & j = \overline{n_1, n+1}, & f_3(x_{m+1,j}^{(1)}, y_{m+1,j}^{(1)}) = 0, & j = \overline{n_0, n_1}, \\ f_4(x_{i,n_0}^{(1)}, y_{i,n_0}^{(1)}) = 0, & i = \overline{0, m+1}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,n+1}^{(2)} - x_{i-1,n+1}^{(2)} = \gamma^{(2)} \left(y_{i,n+1}^{(2)} - y_{i,n}^{(2)} \right) \\ y_{i-1,n+1}^{(2)} - y_{i,n+1}^{(2)} = \gamma^{(2)} \left(x_{i,n+1}^{(2)} - x_{i,n}^{(2)} \right) \end{array} \right\} \quad i = \overline{-\infty, m},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m,j}^{(l)} = \gamma^{(l)} \left(y_{m+1,j}^{(l)} - y_{m+1,j-1}^{(l)} \right) \\ y_{m,j}^{(l)} - y_{m+1,j}^{(l)} = \gamma^{(l)} \left(x_{m+1,j}^{(l)} - x_{m+1,j-1}^{(l)} \right) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} l=1, j = \overline{n_0+1, n_1-1}, \\ l=2, j = \overline{n_1+1, n}, \end{array} \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{0,j}^{(3)} - x_{-1,j}^{(3)} = \gamma^{(3)} \left(y_{0,j}^{(3)} - y_{0,j-1}^{(3)} \right) \\ y_{-1,j}^{(3)} - y_{0,j}^{(3)} = \gamma^{(3)} \left(x_{0,j}^{(3)} - x_{0,j-1}^{(3)} \right) \end{array} \right\} \quad j = \overline{1, n_1-1};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,n_1}^{(l)} = x_{i,n_1}^{(2)}, \quad y_{i,n_1}^{(l)} = y_{i,n_1}^{(2)}, \quad \begin{array}{l} l=1, i = \overline{1, m}, \\ l=3, i = \overline{-\infty, -1}, \end{array} \\ \gamma^{(l)} \left(x_{i,n_1}^{(l)} - x_{i,n_1-1}^{(l)} \right) = \gamma^{(2)} \left(x_{i,n_1+1}^{(2)} - x_{i,n_1}^{(2)} \right) \\ \gamma^{(l)} \left(y_{i,n_1}^{(l)} - y_{i,n_1-1}^{(l)} \right) = \gamma^{(2)} \left(y_{i,n_1+1}^{(2)} - y_{i,n_1}^{(2)} \right) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} l=1, i = \overline{0, m+1}, \\ l=3, i = \overline{-\infty, 0}; \end{array} \quad (5)$$

$$\gamma^{(l)} = \frac{1}{Kl} \sum_{i,j} \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)} \right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)} \right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)} \right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)} \right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)} \right)^2}}, \quad (6)$$

$$l=1, Kl = (m+1)(n_1 - n_0), \quad l=2, Kl = |N|(n+1 - n_1), \quad l=3, Kl = (|N| - m - 1)n_1,$$

де $-\infty < N < -1$ – скінченне число, $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ – вузли області G_z .

Загальний розв’язок скінченно-різницевих рівнянь (2), згідно з формулами сумарних зображень Г.Положого [10, 11], має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j}^{(1)} = \sum_{k=n_0+1}^{n_1-1} p_{j,k} \left(\mu_k^i A_k^{(1)} + \nu_k^i B_k + \gamma^{(1)2} \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{n_0+1,k} x_{t,n_0}^{(1)} + p_{n_1-1,k} x_{t,n_1}^{(1)} \right) \right), \\ y_{i,j}^{(1)} = \sum_{k=n_0+1}^{n_1-1} p_{j,k} \left(\mu_k^i C_k^{(1)} + \nu_k^i D_k + \gamma^{(1)2} \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{n_0+1,k} y_{t,n_0}^{(1)} + p_{n_1-1,k} y_{t,n_1}^{(1)} \right) \right), \end{array} \right. \quad (7)$$

$$i = \overline{0, m+1}, j = \overline{n_0+1, n_1-1},$$

$$\text{де } p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n_1 - n_0}} \sin \frac{(j - n_0)(k - n_0)\pi}{n_1 - n_0}, \quad \eta_k = 1 + \gamma^{(1)2} \left(1 - \cos \frac{(k - n_0)\pi}{n_1 - n_0} \right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=n_1+1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i A_k^{(2)} + \gamma^{(2)2} \sum_{t=-\infty}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{n_1+1,k} x_{t,n_1}^{(2)} + p_{n,k} x_{t,n+1}^{(2)} \right) \right), \\ y_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=n_1+1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i C_k^{(2)} + \gamma^{(2)2} \sum_{t=-\infty}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{n_1+1,k} y_{t,n_1}^{(2)} + p_{n,k} y_{t,n+1}^{(2)} \right) \right), \end{array} \right. \quad (8)$$

$$i = \overline{-\infty, m+1}, j = \overline{n_1+1, n},$$

$$\text{де } p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1 - n_1}} \sin \frac{(j - n_1)(k - n_1)\pi}{n+1 - n_1}, \quad \eta_k = 1 + \gamma^{(2)2} \left(1 - \cos \frac{(k - n_1)\pi}{n+1 - n_1} \right).$$

$$\begin{cases} x_{i,j}^{(3)} = \sum_{k=1}^{n_1-1} p_{j,k} \left(\mu_k^i A_k^{(3)} + \gamma^{(3)2} \sum_{t=-\infty}^{-1} \frac{v_k^{|i-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{t,0}^{(3)} + p_{n_1-1,k} x_{t,n_1}^{(3)}) \right), \\ y_{i,j}^{(3)} = \sum_{k=1}^{n_1-1} p_{j,k} \left(\mu_k^i C_k^{(3)} + \gamma^{(3)2} \sum_{t=-\infty}^{-1} \frac{v_k^{|i-t|}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0}^{(3)} + p_{n_1-1,k} y_{t,n_1}^{(3)}) \right), \end{cases} \quad (9)$$

$$i = \overline{-\infty, 0}, j = \overline{1, n_1-1}, \text{ де } p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n_1}} \sin \frac{jk\pi}{n_1}, \eta_k = 1 + \gamma^{(3)2} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n_1} \right).$$

Тут $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $v_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$.

Невідомі $\gamma^{(l)}$, $A_k^{(l)}$, B_k , $C_k^{(l)}$, D_k , $x_{t,0}^{(3)}$, $y_{t,0}^{(3)}$, $x_{t,n_0}^{(1)}$, $y_{t,n_0}^{(1)}$, $x_{t,n_1}^{(l)}$, $y_{t,n_1}^{(l)}$, $x_{i,n+1}^{(2)}$, $y_{i,n+1}^{(2)}$ ($l = \overline{1, 3}$) визначаються в результаті розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (3), (4), (5), (6), де $x_{0,j}^{(1)}$, $y_{0,j}^{(1)}$, $x_{0,j}^{(3)}$, $y_{0,j}^{(3)}$, $x_{m+1,j}^{(1)}$, $y_{m+1,j}^{(1)}$, $x_{m+1,j}^{(2)}$, $y_{m+1,j}^{(2)}$, $x_{-1,j}^{(3)}$, $y_{-1,j}^{(3)}$, $x_{m,j}^{(1)}$, $y_{m,j}^{(1)}$, $x_{m,j}^{(2)}$, $y_{m,j}^{(2)}$, $x_{i,n_1+1}^{(2)}$, $y_{i,n_1+1}^{(2)}$, $x_{i,n_1-1}^{(1)}$, $y_{i,n_1-1}^{(1)}$, $x_{i,n_1-1}^{(3)}$, $y_{i,n_1-1}^{(3)}$, $x_{i,n}^{(2)}$, $y_{i,n}^{(2)}$ ($l = \overline{1, 3}$) представлені за формулами (7), (8), (9). Розв'язок цієї системи знаходимо

ітераційно таким чином: задаємо нульові наближення невідомих величин $\gamma^{(l)}$. Розв'язуємо відповідну систему при заданих значеннях $\gamma^{(l)}$, наприклад, за методом Ньютона [12, 13, 8] та перевіряємо виконання умови (6). В залежності від одержаної нев'язки вибираємо наступні наближення невідомих величин $\gamma^{(l)}$ і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність:

$$\sum_{l=1}^3 \left| \gamma^{(l)(k+1)} - \gamma^{(l)(k)} \right| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Ефективність запропонованої методики полягає в тому, що формули сумарних зображень забезпечують розв'язність локалізованої лінійної (основної) частини даної системи, а невідомі коефіцієнти знаходять шляхом розв'язання нелінійних систем невисоких порядків, породжених граничними умовами (3), умовами Коші-Рімана (4) та умовами спряження (5). Коректність отриманої нескінченної системи алгебраїчних рівнянь (2) – (6) забезпечується (див., напр., [12]) її специфікою та близькістю апіорі $(x_{i+1,j}, y_{i+1,j})$ до $(x_{i,j}, y_{i,j})$ при достатньо великих значеннях параметра i .

Розглянемо тепер випадок, коли область G_ω задана, тобто величини φ_* , φ^* , Q' , Q'' , Q''' – відомі $(\varphi_* < \varphi^*, 0 < Q' < Q'' < Q''')$, та допускається її покриття рівномірною сіткою, а G_z – вільна, а саме: $BC = \{z: f_2(x,y) = \rho\}$, $K(x_K, y_K)$, $M(x_M, y_M)$ – плаваючі точки на кривих AB , BC (відповідно), де $f_2(x,y)$ задана гладка функція, ρ , x_K , x_M – невідомі параметри. Тоді обернена крайова задача на конформне відображення даної області G_ω на відповідну область G_z знову зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ при нелінійних крайових умовах $f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0$,

$$f_2(x(\varphi,0),y(\varphi,0))=\rho, \quad f_2(x(\varphi,Q''),y(\varphi,Q''))=\rho, \quad f_3\left(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi)\right)=0,$$

$f_4(x(\varphi,Q'),y(\varphi,Q'))=0$, умовах Коші-Рімана на границі ∂G_ω області G_ω та умовах склеювання на лінії розділу течії MKN .

Різницевий аналог цієї крайової задачі у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = G'_\omega \cup G''_\omega = \left\{(\varphi_i, \psi_j): \varphi_i = \varphi_* + h_\varphi i, i = \overline{0, m+1}, \psi_j = Q' + h_\psi(j - n_0), j = \overline{n_0, n+1}\right\} \cup$

$$\cup \left\{(\varphi_i, \psi_j): \varphi_i = \varphi_* - h_\varphi i, i = \overline{0, -\infty}, \psi_j = h_\psi j, j = \overline{0, n+1}\right\}, \quad \text{де} \quad h_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1} \quad \text{та}$$

$$h_\psi = \frac{Q''}{n+1} = \frac{Q'''}{n_1} = \frac{Q'}{n_0} = \frac{Q'' - Q'''}{n+1-n_1} = \frac{Q'' - Q'}{n+1-n_0} = \frac{Q''' - Q'}{n_1 - n_0} \quad \left(\gamma = \frac{h_\varphi}{h_\psi}\right) \quad \text{запишемо у вигляді [9]:}$$

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \\ y_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \\ \text{якщо } \omega \in G'_\omega, \text{ то } i = \overline{1, m}, j = \overline{n_0+1, n}, \\ \text{якщо } \omega \in G''_\omega, \text{ то } i = \overline{-\infty, -1}, j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} f_1(x'_{0,j}, y'_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{n_0, n_1}, \quad f_1(x''_{0,j}, y''_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n_1}, \\ f_2(x'_{i,0}, y'_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{-\infty, 0}, \quad f_2(x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{-\infty, 0}, \\ f_2(x'_{i,n+1}, y'_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad f_3(x'_{m+1,j}, y'_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{n_0, n+1}, \\ f_4(x'_{i,n_0}, y'_{i,n_0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} x''_{i,n+1} - x''_{i-1,n+1} &= \gamma(y''_{i,n+1} - y''_{i,n}) \\ y''_{i-1,n+1} - y''_{i,n+1} &= \gamma(x''_{i,n+1} - x''_{i,n}) \end{aligned} \right\} \quad i = \overline{-\infty, -1}, \\ \left. \begin{aligned} x'_{i,n+1} - x'_{i-1,n+1} &= \gamma(y'_{i,n+1} - y'_{i,n}) \\ y'_{i-1,n+1} - y'_{i,n+1} &= \gamma(x'_{i,n+1} - x'_{i,n}) \end{aligned} \right\} \quad i = \overline{1, m}, \\ \left. \begin{aligned} x'_{m+1,j} - x'_{m,j} &= \gamma(y'_{m+1,j} - y'_{m+1,j-1}) \\ y'_{m,j} - y'_{m+1,j} &= \gamma(x'_{m+1,j} - x'_{m+1,j-1}) \end{aligned} \right\} \quad j = \overline{n_0+1, n}, \\ \left. \begin{aligned} x''_{0,j} - x''_{-1,j} &= \gamma(y''_{0,j} - y''_{0,j-1}) \\ y''_{-1,j} - y''_{0,j} &= \gamma(x''_{0,j} - x''_{0,j-1}) \end{aligned} \right\} \quad j = \overline{1, n_1-1}; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x'_{0,j} = x''_{0,j}, \quad y'_{0,j} = y''_{0,j}, \quad j = \overline{n_1+1, n}, \\ \left. \begin{aligned} x'_{1,j} - x'_{0,j} &= x''_{0,j} - x''_{-1,j} \\ y'_{1,j} - y'_{0,j} &= y''_{0,j} - y''_{-1,j} \end{aligned} \right\} \quad j = \overline{n_1, n+1}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x'_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y'_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), (\varphi_i, \psi_j) \in G'_\omega, \\ x''_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y''_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), (\varphi_i, \psi_j) \in G''_\omega. \end{cases}$$

Розв'язок рівнянь Лапласа (11) знаходимо згідно з формулами сумарних зображень Г.Положого [10, 11]:

$$\begin{cases} x'_{i,j} = \sum_{k=n_0+1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i A'_k + \nu_k^i B_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{n_0+1,k} x'_{t,n_0} + p_{n,k} x'_{t,n+1}) \right), \\ y'_{i,j} = \sum_{k=n_0+1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i C'_k + \nu_k^i D_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{n_0+1,k} y'_{t,n_0} + p_{n,k} y'_{t,n+1}) \right), \end{cases} \quad (15)$$

$$i = \overline{0, m+1}, j = \overline{n_0+1, n}, \text{ де } p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1-n_0}} \sin \frac{(j-n_0)(k-n_0)\pi}{n+1-n_0}, \eta_k = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{(k-n_0)\pi}{n+1-n_0} \right).$$

$$\begin{cases} x''_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i A''_k + \gamma^2 \sum_{t=-\infty}^{-1} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x''_{t,0} + p_{n,k} x''_{t,n+1}) \right), \\ y''_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i C''_k + \gamma^2 \sum_{t=-\infty}^{-1} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y''_{t,0} + p_{n,k} y''_{t,n+1}) \right), \end{cases} \quad (16)$$

$$i = \overline{-\infty, 0}, j = \overline{1, n}, \text{ де } p_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \eta_k = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

Тут $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$.

Невідомі $A'_k, B_k, C'_k, D_k, A''_k, C''_k, x''_{t,0}, y''_{t,0}, x'_{t,n_0}, y'_{t,n_0}, x'_{t,n+1}, y'_{t,n+1}, x''_{t,n+1}, y''_{t,n+1}$ визначаються в результаті розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (12), (13), (14), де $x'_{0,j}, y'_{0,j}, x''_{0,j}, y''_{0,j}, x'_{m+1,j}, y'_{m+1,j}, x''_{-1,j}, y''_{-1,j}, x'_m, y'_m, x'_1, y'_1, x'_{i,n}, y'_{i,n}, x''_{i,n}, y''_{i,n}$ представлені за формулами (15), (16). Розв'язок цієї системи знаходимо ітераційно таким чином: задаємо нульові наближення невідомих величин $\rho, x_K = x_{0,n_1}, x_M = x_{N,j}$. Розв'язуємо відповідну систему, наприклад, за методом Ньютона [12, 13, 8] та перевіряємо виконання умов:

$$x_M = \frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^{n+1} x''_{N,j}, \quad x_K = \frac{x''_{-1,n_1} - x'_{1,n_1}}{2\gamma} + \frac{x'_{0,n_1+1} + x''_{0,n_1+1}}{2},$$

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{|N|+1} \sum_{i=N}^0 f_2(x'_{i,0}, y'_{i,0}) + \frac{1}{|N|+1} \sum_{i=N}^0 f_2(x''_{i,n+1}, y''_{i,n+1}) + \frac{1}{m+2} \sum_{i=0}^{m+1} f_2(x'_{i,n+1}, y'_{i,n+1}) + f_2(x_M, y_M) \right),$$

$$\text{де } y_M = \frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^{n+1} y''_{N,j}.$$

В залежності від отриманих нев'язок вибираємо наступні наближення невідомих параметрів і т.д. Умовою закінчення процесу може бути нерівність:

$$\left| \rho^{(k+1)} - \rho^{(k)} \right| + \left| x_K^{(k+1)} - x_K^{(k)} \right| + \left| x_M^{(k+1)} - x_M^{(k)} \right| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Очевидно, що в залежності від значення $0 < Q'' < \infty$ можливі й інші випадки

формування течії (перетоків) в області G_z , а отже – побудови відповідної області комплексного потенціалу G_w (див. рис. 2 – 5).

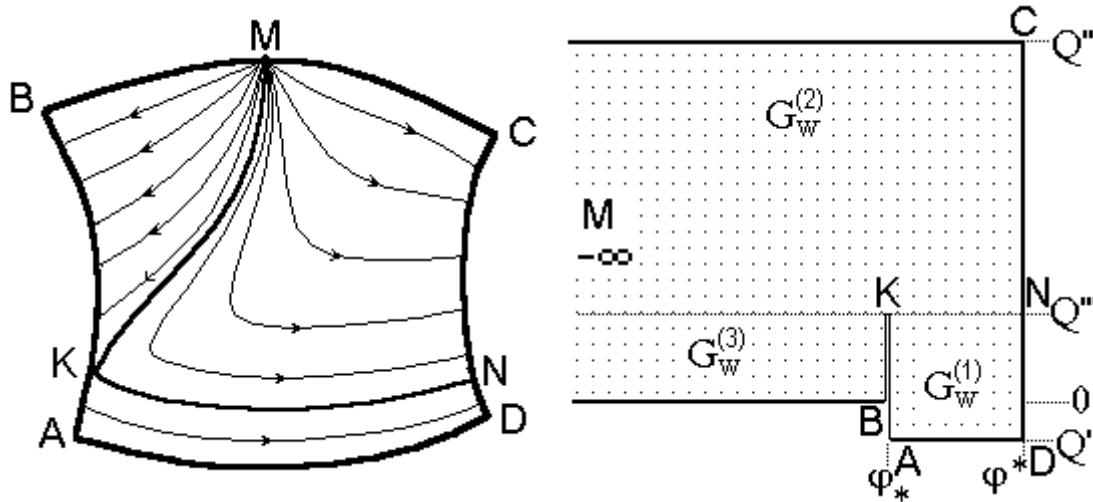


Рис.2.

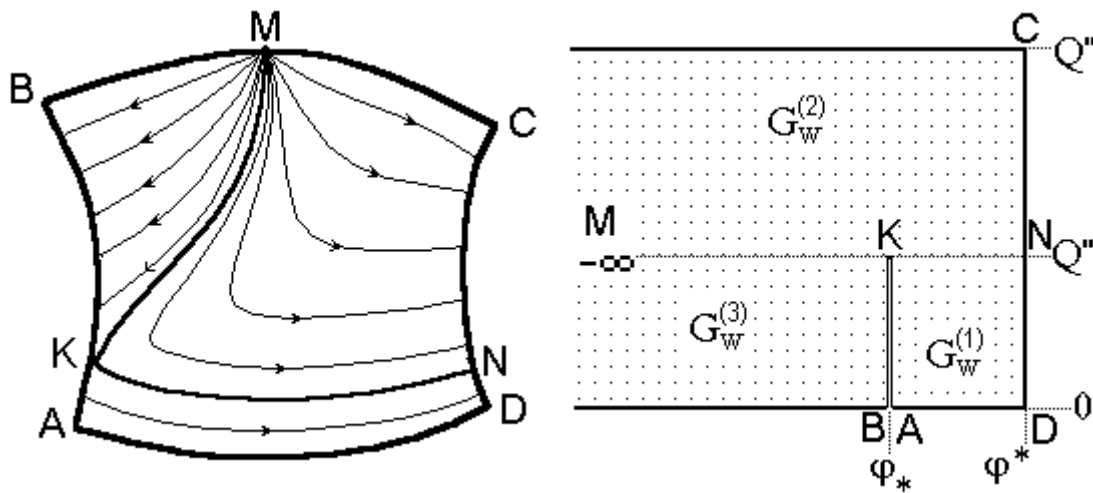


Рис.3.

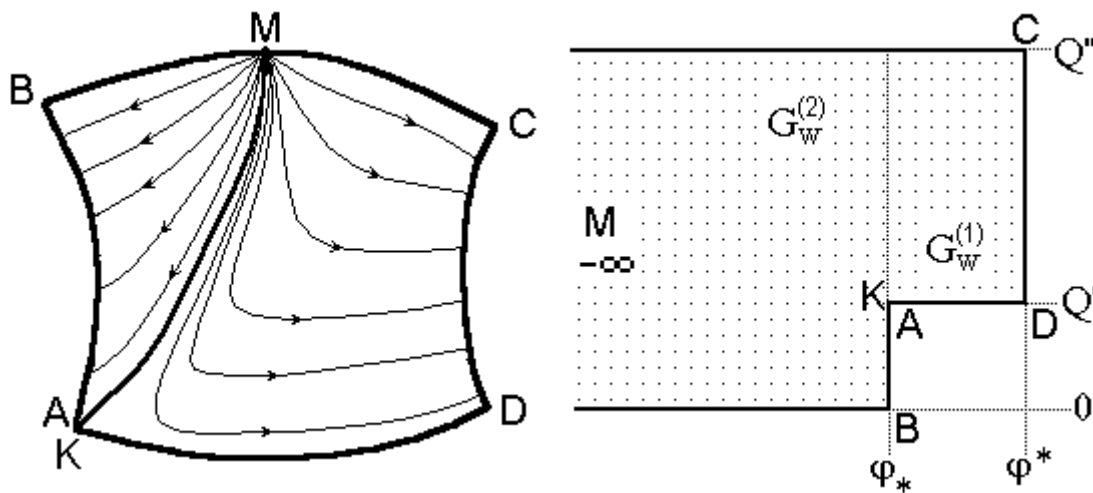


Рис.4.

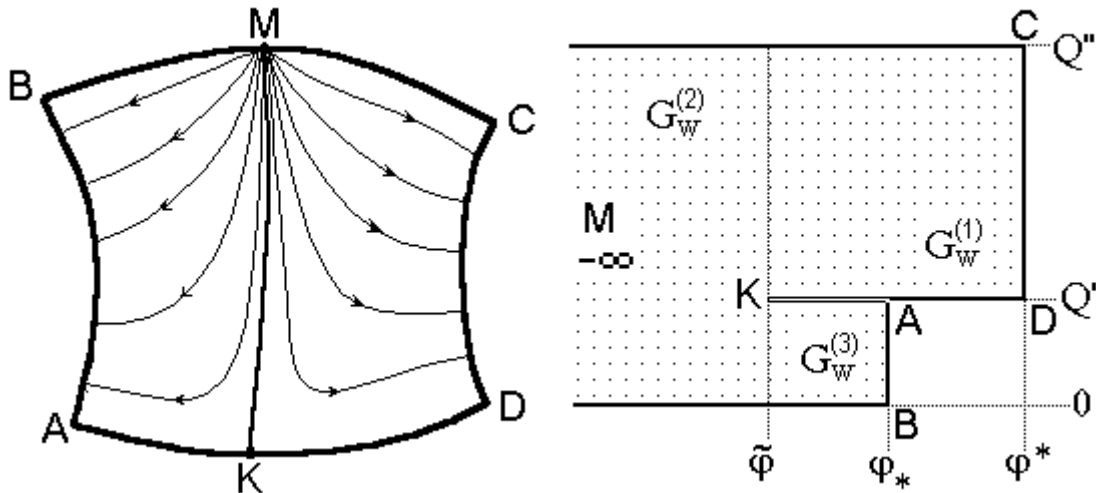


Рис.5.

З метою вибору одного із них (див. рис. 1–5) та розв’язку відповідної оберненої задачі за заданими скінченими значеннями φ_* , φ^* , $Q''=q$ побудуємо відповідний алгоритм наступним чином:

- 1) Розв’язуємо допоміжну (“ключеву”) задачу III (рис. 3) при “компенсаційній” умові $\Psi|_B = \Psi|_A$, де значення Q'' знаходиться в процесі розв’язання даної задачі. Позначимо це значення Q'' через Q_3'' .
- 2) Якщо задане значення $q < Q_3''$, то розв’язуємо задачу II (рис. 2) при невідомих значеннях Q' , Q''' . У випадку $q = Q_3''$ задача є розв’язаною. Якщо задане значення $q > Q_3''$, то розв’язуємо допоміжну (“ключеву”) задачу IV (рис. 4), де значення Q'' знаходиться в процесі розв’язання даної задачі. Позначимо це значення Q'' через Q_4'' .
- 3) Якщо задане значення $q < Q_4''$ ($q > Q_4''$), то розв’язуємо задачу I (рис. 1) при невідомих значеннях Q' , Q''' (V (рис. 5) при невідомих значеннях Q' , $\tilde{\varphi}$). У випадку $q = Q_4''$ задача є розв’язаною.

1. Бомба А.Я., Каштан С.С. Про метод сумарних зображень розв’язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з особливостями і моделювання ліній розділу фільтраційних потоків // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені І.Пулюя.- 1998.- Т.3, №4.- С.12-20.
2. Бомба А.Я., Кузьменко А.П. Про метод сумарних зображень розв’язування крайових задач на конформні відображення з особливостями // Волинський математичний вісник.- 1997.- Вип. 4.- С.18-21.
3. Бомба А.Я., Каштан С.С., Кузьменко А.П. Про застосування методу сумарних зображень до розв’язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1998.- Вип. 5.- С.16-25.
4. Бомба А.Я., Каштан С.С. Про розв’язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1999.- Вип. 6.- С.25-36.
5. Каштан С.С. Про метод сумарних зображень розв’язання одного класу нелінійних обернених крайових задач теорії фільтрації // Вісник Української державної академії водного господарства. Збірник наукових статей за матеріалами Міжнародної конференції “Сучасні проблеми теорії фільтрації” присвяченої пам’яті П.Ф.Фільчакова (1-3 червня, 1998р.).- Рівне - 1998.- С.70-77.

6. *Каштан С.С.* Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення і моделювання ліній розділу фільтраційних потоків в пористих середовищах // Фізика конденсованих високомолекулярних систем.- 1998.- №4.- С.119-122.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного.- Москва: Наука, 1973.- 736с.
8. *Фильчаков П.Ф.* Справочник по высшей математике.- Киев: Наукова думка, 1972.- 744с.
9. *Самарский А.А.* Теория разностных схем.- Москва: Наука, 1977.- 656с.
10. *Положий Г.М.* Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента.- Киев: Изд-во КГУ, 1982.-161с.
11. *Ляшко И.И., Великоиваненко И.М.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации.- Киев: Наукова думка, 1973.- 264с.
12. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики.- Киев: Наукова думка, 1980.-334с.
13. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа.- Москва-Ленинград: Физматгиз, 1962.- 708с.

Рівненський державний технічний університет, Рівне

Надійшла 5.01.2000

Каштан С.С. О МЕТОДЕ СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ // *На основании модификации метода суммарных представлений Г.Положий построено алгоритм приближения решений нелинейных обратных краевых задач на конформные отображения с особенностями.*

Kashtan S.S. ABOUT A METHOD OF SUMMARIZED REPRESENTATIONS OF A SOLUTION OF NONLINEAR INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL MAPPINGS WITH SINGULARITIES // *On the basis of modification of a method of summarized representations H.Polozij's the algorithm of an approximation of solutions of nonlinear inverse boundary value problems on conformal mappings with singularities is constructed.*