## *Зміст*

УДК 517.21

**Турбал Ю.В.**

# ПРО УТОЧНЕННЯ ДЕЯКИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ ФУНКЦІЙ ЗНОСУ МОДЕЛІ РАДІОАКТИВНОГО ЗАБРУДНЕННЯ

*Пропонуються деякі уточнення оцінок параметрів функцій зносу моделі радіоактивного забруднення, що використовують специфіку траєкторій процесів радіоактивного забруднення.*

## 1. Вступ.

Розглянемо випадковий процес

$$X(t)=\sum_{i=1}^{m} X_i(t), \tag{1}$$

де функції $X_i(t)$ задовольняють стохастичні диференційні рівняння:

$$dX_i(t)=-\mu_i X_i(t)dt+dA_i(t),\quad X_i(0)=x_0^i,\ i=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Тут $\mu_i$ – деякі параметри, $A_i(t)$-узагальнені пуассонівські процеси з параметрами $(\lambda_i, G_i(t))$, $x_0^i$ – деякі початкові значення, $x_0=\sum_{i=1}^{m} x_o^i$,. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – часовий ряд процесу (1). В роботі [1] запропонований метод побудови оцінок параметрів функцій зносу, який грунтується на виділенні інтервалів неперервності траєкторій процесу. Згідно з описаним методом, оцінка будується так:

$$\tilde{\mu}_1^n=\mu_1^{i^*},\ldots,\tilde{\mu}_m^n=\mu_m^{i^*}, \tag{3}$$

де $i^*$ знаходиться з умови: $\mu_1^{i^*} y_1^j+\ldots+\mu_m^{i^*} y_m^j=\max_j(\mu_1^j y_1^j+\ldots+\mu_1^j y_1^j), i, j=\overline{1,p}$,

$(\mu_1^i,\mu_2^i,\ldots,\mu_m^i, y_1^i, y_2^i,\ldots,y_m^i)$ - розв'язки відповідних систем нелінійних рівнянь виду (див. [1]):

$$\begin{cases} y_1+y_2+\ldots+y_m=x_0, \\ y_1e^{-\mu_1}+y_2e^{-\mu_2}+\ldots+y_me^{-\mu_m}=x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1e^{-(2m-1)\mu_1}+y_2e^{-(2m-1)\mu_2}+\ldots+y_me^{-(2m-1)\mu_m}=x_{2m-1}. \end{cases} \tag{4}$$

Надалі будемо називати такі системи будемо називати характеристичними. Відмітимо, що оцінка (3)-(4) – це, по суті, алгоритм вибору інтервалу, на якому розв'язок характеристичної системи дає точні значення праметрів функцій зносу.

## 2. Оцінка ймовірності події, коли характеристична система сумісна.

Відмітимо, що маючи 2m елементів часового ряду процесу (1), при яких відповідна характеристична система сумісна, ще не можемо з ймовірністю 1 визначити точні значення параметрів функцій зносу. Адже ймовірність того, що характеристична система сумісна при умові, що на відповідному інтервалі є стрибки траєкторії процесу *X(t)*, відмінна від нуля. Це легко бачити, наприклад, проаналізувавши достатню умову сумісності систем рівнянь виду (3), яка розглядалась в роботі [4]. Спробуємо оцінити згадану ймовірність.

Нехай $x(0), x(1), x(2)\ldots, x(2m-1)$-значення процесу (1) у відповідних точках 0, 1, 2,…,2*m*-1, $x_n^{\min}$ та $x_n^{\max}$ – відповідно мінімальне та максимальне значення функції

$$f_n(y_1,y_2,\ldots,y_m,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)=y_1e^{-n\mu_1}+y_2e^{-n\mu_2}+\ldots+y_me^{-n\mu_m} \text{ за умов:}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \ldots + y_m = x(0), \\ y_1 e^{-\mu_1} + y_2 e^{-\mu_2} + \ldots + y_m e^{-\mu_m} = x(1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1 e^{-(n-1)\mu_1} + y_2 e^{-(n-1)\mu_2} + \ldots + y_m e^{-(n-1)\mu_m} = x(n-1), \end{cases} \qquad (5)$$

$$y_i, \mu_i > 0, \ \ i = \overline{1,m}. \qquad (6)$$

Тоді ймовірність того, що наступна система

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \ldots + y_m = x(0), \\ y_1 e^{-\mu_1} + y_2 e^{-\mu_2} + \ldots + y_m e^{-\mu_m} = x(1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1 e^{-(2m-1)\mu_1} + y_2 e^{-(2m-1)\mu_2} + \ldots + y_m e^{-(2m-1)\mu_m} = x(2m-1). \end{cases}$$

є сумісною, з врахуванням результатів роботи [4] , можемо записати у вигляді:

$$P\{x_1^{\min} < x(1) < x(0), x_2^{\min} < x(2) < x(1), \ldots, x_{2m-1}^{\min} < x(2m-1) < x(2m-2)\} \qquad . \qquad (7)$$

Оцінимо ймовірність (7). Маємо:

$$P\{x_1^{\min} < x(1) < x(0), x_2^{\min} < x(2) < x(1), \ldots, x_{2m-1}^{\min} < x(2m-1) < x(2m-2)\} \le P\{x(1) < x(0), .$$
$$x(2) < x(1), \ldots, x(2m-1) < x(2m-2)\}$$

З співвідношення (1) можемо отримати:

$X_i(k+1) = X_i(k)e^{-\mu_i} + \int_k^{k+1} e^{-\mu_i(k+1-u)} dA_i(u), i = \overline{1,m}, k = \overline{0,2m-2}$. Позначимо через $\nu_k^j$ наступні співвідношення: $\nu_k^j = \int_k^{k+1} e^{-\mu_i(k+1-u)} dA_i(u), i = \overline{1,m}, k = \overline{0,2m-2}$. Тоді справджуються такі нерівності:

$$P\{x(1) < x(0), \ \ x(2) < x(1), \ldots, x(2m-1) < x(2m-2)\} = P\{\sum_{i=1}^m \nu_1^j < \sum_{i=1}^m x_0^i(1 - e^{-\mu_i}), \sum_{i=1}^m \nu_2^j <$$

$$< \sum_{i=1}^m (1 - e^{-\mu_i})(x_0^i e^{-\mu_i} + \nu_1^j), \ldots, \sum_{i=1}^m \nu_{k+1}^j < \sum_{i=1}^m (1 - e^{-\mu_i})(x_0^i e^{-k\mu_i} + \nu_1^j e^{-(k-1)\mu_i} +$$

$$+ \nu_2^j e^{-(k-2)\mu_i} \ldots + \nu_k^j), \ldots, \sum_{i=1}^m \nu_{2m-1}^j < \sum_{i=1}^m (1 - e^{-\mu_i})(x_0^i e^{-(2m-2)\mu_i} + \sum_{r=1}^{2m-2} \nu_r^j e^{-(2m-2-r)\mu_i})\} =$$

$$= P\{\bigcap_{k=0}^{2m-2} (\sum_{i=1}^m \nu_{k+1}^j < \sum_{i=1}^m (1 - e^{-\mu_i})(x_0^j e^{-k\mu_i} + \sum_{r=1}^k \nu_r^j e^{-(k-r)\mu_i}))\}$$

Нехай $\alpha = \max_{i=1,m}(1 - e^{-\mu_i})$, $\beta = \max_{i=1,m} e^{-\mu_i}$. Тоді легко отримати наступні співвідношення:

$$\sum_{i=1}^m \nu_1^j < \sum_{i=1}^m x_0^i (1 - e^{-\mu_i}) < \alpha x_0, \sum_{i=1}^m \nu_2^j < \sum_{i=1}^m (1 - e^{-\mu_i})(x_0^i e^{-\mu_i} + \nu_1^j) < \alpha(\beta x_0 + \sum_{i=1}^m \nu_1^j) < \alpha(\alpha + \beta)x_0$$

..., $\sum_{i=1}^m \nu_{k+1}^j < \alpha(\alpha + \beta)^k x_0$. Останню нерівність можна отримати за індукцією.

Тоді, враховуючи що величини $\nu_k^j, k = \overline{1,2m-2}$ є незалежними та однаково розподіленими випадковими величинами [5], маємо:

$$P\{\bigcap_{k=0}^{2m-2} (\sum_{i=1}^m \nu_{k+1}^i < \sum_{i=1}^m (1 - e^{-\mu_i})(x_0^i e^{-k\mu_i} + \sum_{r=1}^k \nu_r^i e^{-(k-r)\mu_i}))\} \le P\{\bigcap_{k=0}^{2m-2} (\sum_{i=1}^m \nu_{k+1}^i < \alpha(\alpha + \beta)^k x_0)\} =$$

$$= \prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^m \nu_1^i < \alpha(\alpha + \beta)^k x_0\}.$$

Очевидно, що ймовірність події, коли на інтервалі [0,2m-1] не було стрибків траєкторії досліджуваного процесу, рівна $e^{-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m)(2m-1)}$. Тому ймовірність того, що система (4) сумісна при умові, що на інтервалі [0,2m-1] є стрибки траєкторії, можна оцінити зверху величиною $\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\}$ - $e^{-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m)(2m-1)}$.

**3. Алгоритм моделювання та результати чисельних розрахунків при деяких значеннях параметрів.**

Оцінити ймовірності, що фігурують в останньому виразі, досить складно, оскільки для величин $v_k^i$ відоме лише перетворення Лапласа. Обчислити відповідну щільність та функцію розподілу (яка необхідна в нашому випадку) можна лише наближено. В роботі [3] пропонується спосіб наближеного обчислення відповідної щільності. Але він дуже громіздкий, вимагає великої кількості машинного часу при реалізації відповідних методів на комп'ютері. Тому в даному випадку легше використати безпосереднє комп'ютерне моделювання випадкових величин $v_k^i$. Алгоритм моделювання випадкової величини $v_1^i$ можемо запропонувати наступний:

1. Моделюємо показниково-розподілені з параметром $\lambda_i$ випадкові величини $\tau_1, \tau_2, \ldots$ та визначаємо величину $n_1 = \max\{n: \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n \le 1\}$.

2. Якщо $n_1 = 0$, покладаємо $v_1^i$=0. В противному випадку моделюємо показниково-розподілені з параметром $\mu_i$ випадкові величини $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_{n_1}^i$ та визначаємо величину $v_1^i = \xi_1^i e^{-\mu_i(1-\tau_1)} + \xi_2^i e^{-\mu_i(1-\tau_1-\tau_2)} + \ldots + \xi_{n_1}^i e^{-\mu_i(1-\tau_1-\tau_2-\ldots-\tau_{n_1})}$.

Способи моделювання показникового розподілу - див. [6].

Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$ -значення, отримані в результаті моделювання випадкової величини $\sum_{i=1}^{m} v_1^i$. Тоді ймовірності $P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < x\}$ можна наближено оцінити очевидним чином: $P\{\sum_{i=1}^{m} v_1^i < x\} \approx \frac{n_l(x)}{n}$, де $n_l(x)$ -кількість змодельованих значень $v_1, v_2, \ldots, v_n$, які менші за $x$.

Приведемо результати моделювання при деяких значеннях параметрів:

$m$=10, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 4, \lambda_5 = 5,\ \lambda_6 = 6,\ \lambda_7 = 7,\ \lambda_8 = 8,\ \lambda_9 = 9, \lambda_{10} = 10$

$\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2,\ \mu_3 = 3,\ \mu_4 = 4, \mu_5 = 5,\ \mu_6 = 6,\ \mu_7 = 7,\ \mu_8 = 8,\ \mu_9 = 9, \mu_{10} = 10$

$\alpha = 0.8, \beta = 0.5,\ x_0 = 10.$

$$\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\} \approx 0.036944,$$

$$\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m)(2m-1)} \approx 0.036944$$

$m$=10, $\lambda_1 = 0.1,\ \lambda_2 = 0.2,\ \lambda_3 = 0.3,\ \lambda_4 = 0.4, \lambda_5 = 0.5,\ \lambda_6 = 0.6,\ \lambda_7 = 0.7,\ \lambda_8 = 0.8,$ $\lambda_9 = 0.9, \lambda_{10} = 1, \mu_1 = 0.1,\ \mu_2 = 0.2,\ \mu_3 = 0.3,\ \mu_4 = 0.4, \mu_5 = 0.5,\ \mu_6 = 0.6,\ \mu_7 = 0.7,\ \mu_8 = 0.8,$ $\mu_9 = 0.9, \mu_{10} = 1, \alpha = 0.8, \beta = 0.5,\ x_0 = 10.$

$$\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\} \approx 0.00006228$$

$$\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m)(2m-1)} \approx 0.00006228$$

$m$=3, $\lambda_1 = 0.1,\ \lambda_2 = 0.2,\ \lambda_3 = 0.3,\ \mu_1 = 0.1,\ \mu_2 = 0.2,\ \mu_3 = 0.3,\ \alpha = 0.8, \beta = 0.5,\ x_0 = 10.$

$$\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\} \approx 0.1256905$$

$$\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m)(2m-1)} \approx 0.075903$$

m=5, $\lambda_1 = 0.1,\ \lambda_2 = 0.2,\ \lambda_3 = 0.3,\ \lambda_4 = 0.4, \lambda_5 = 0.5,$

$\mu_1 = 0.1,\ \mu_2 = 0.2,\ \mu_3 = 0.3,\ \mu_4 = 0.4, \mu_5 = 0.5,$

$\alpha = 0.8, \beta = 0.5, x_0 = 10.$

$$\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\} \approx 0.036985$$

$$\prod_{k=0}^{2m-2} P\{\sum_{i=1}^{m} \nu_1^i < \alpha(\alpha+\beta)^k x_0\} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m)(2m-1)} \approx 0.036983$$

Як показали проведені експерименти, згадана вище ймовірність суттєво залежить від величини $x_0$. Однак, при деякому m (на практиці мова може йти про десятки чи навіть сотні ізотопів, що утворюють радіоактивний фон) ця ймовірність є досить малою. Враховуючи останню обставину та той факт, що наближено пораховані лише дуже грубі оцінки зверху ймовірності сумісності характеристичної системи на інтервалі з стрибками траєкторії, на практиці можемо обмежитись знаходженням лише одного інтервалу, на якому відповідні елементи часового ряду забезпечують сумісність характеристичної системи. Розв'язок такої системи дасть точні значення параметрів функцій зносу з ймовірністю, близькою до 1.

**4. Модифікована оцінка параметрів функцій зносу.**

Побудуємо ще одну оцінку параметрів функцій зносу, аналогічну оцінці (3). Нехай $(\mu_1, \mu_2,..., \mu_m, y_1, y_2,..., y_m)$, $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2,..., \tilde{\mu}_m, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2,..., \tilde{y}_m)$ - розв'язки характеристичних систем на деяких інтервалах. Припустимо, що $(\mu_1, \mu_2,..., \mu_m)$ -точні значення параметрів функцій зносу, $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2,..., \tilde{\mu}_m)$ - не співпадають з точними значеннями, тобто на відповідному інтервалі є стрибки траєкторії процесу $X(t)$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2,..., \tilde{\mu}_m, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2,..., \tilde{y}_m)$ є розв'язком системи (5). Тобто на інтервалі [0,2m-1] є стрибки траєкторії, але система (5) сумісна. Розглянемо функції $f(t) = \sum_{i=1}^{m} x_0^i e^{-\mu_i t}$ та $\tilde{f}(t) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{y}_i e^{-\tilde{\mu}_i t}$.

В силу того, що стрибки траєкторії в розглядуваній моделі можуть бути лише додатними, очевидним є наступне співвідношення: $f(t) \le \tilde{f}(t), t \to \infty$. Розглянемо, як ведуть себе ці функкції при $t \to 0$ .Нехай виконуються наступні співвідношення:

$f(1) \le \tilde{f}(1),\ f(2) \le \tilde{f}(2),...,\ f(2m-1) \le \tilde{f}(2m-1)$. Покажемо, що можлива ситуація (ймовірність відповідної події, очевидно, дуже мала), коли $f(t) > \tilde{f}(t), t \to 0$. Очевидно, що при m=1 така ситуація неможлива. Розглянемо випадок , коли m=2. Маємо: $f(t) = x_0^1 e^{-\mu_1 t} + x_0^2 e^{-\mu_2 t}$, $\tilde{f}(t) = \tilde{y}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} + \tilde{y}_2 e^{-\tilde{\mu}_2 t}$. Нехай $\mu_{\min} = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, $\tilde{\mu}_{\min} = \min\{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2\}$. Тоді

Розглянемо $\frac{f(t)}{\tilde{f}(t)} = \frac{x_0^1 e^{-\mu_1 t} + x_0^2 e^{-\mu_2 t}}{\tilde{y}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} + \tilde{y}_2 e^{-\tilde{\mu}_2 t}} = \frac{e^{-\mu_{\min} t}(x_0^1 e^{-(\mu_1-\mu_{\min})t} + x_0^2 e^{-(\mu_2-\mu_{\min})t})}{e^{-\tilde{\mu}_{\min} t}(\tilde{y}_1 e^{-(\mu_1-\mu_{\min})t} + \tilde{y}_2 e^{-(\mu_2-\mu_{\min})t})}$.

Тоді $$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{f(t)} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \ \mu_{\min} > \tilde{\mu}_{\min}, \\ \infty, \text{ якщо } \ \mu_{\min} < \tilde{\mu}_{\min}, \\ \dfrac{\min\{x_0^1, x_0^2\}}{\min\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2\}}, \text{ якщо } \ \mu_{\min} = \tilde{\mu}_{\min}. \end{cases}$$

Оскільки, як вже зазначено вище, $f(t) \le \widetilde{f}(t), t \to \infty$, то виконується нерівність: $\mu_{\min} > \widetilde{\mu}_{\min}$ (Відмітимо, що це співвідношення має місце і при довільному $m$) . Випадок, коли $\mu_{\min} = \widetilde{\mu}_{\min}$ розглядати не будемо, оскільки ймовірність відповідної події є нуль. Нехай, наприклад, $\mu_{\min} = \mu_1, \widetilde{\mu}_{\min} = \widetilde{\mu}_1$. Тоді $\mu_2 = \mu_1 + \delta, \widetilde{\mu}_2 = \widetilde{\mu}_1 + \varepsilon, \mu_1 = \widetilde{\mu}_1 + \gamma, \delta > 0, \varepsilon > 0, \gamma > 0$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $x_0^1 + x_0^2 = \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2 = 1$. Розглянемо наступну систему співвідношень:

$$(1 - x_0^2)e^{-\mu_1} + x_0^2 e^{-(\mu_1 + \delta)} < (1 - \widetilde{y}_2)e^{-\widetilde{\mu}_1} + \widetilde{y}_2 e^{-(\widetilde{\mu}_1 + \varepsilon)},$$
$$(1 - x_0^2)e^{-2\mu_1} + x_0^2 e^{-2(\mu_1 + \delta)} < (1 - \widetilde{y}_2)e^{-2\widetilde{\mu}_1} + \widetilde{y}_2 e^{-2(\widetilde{\mu}_1 + \varepsilon)}$$
$$(1 - x_0^2)e^{-3\mu_1} + x_0^2 e^{-3(\mu_1 + \delta)} < (1 - \widetilde{y}_2)e^{-3\widetilde{\mu}_1} + \widetilde{y}_2 e^{-3(\widetilde{\mu}_1 + \varepsilon)}$$
$$x_0^1(1 - \mu_1 t + o(t)) + x_0^2(1 - \mu_2 t + o(t)) > \widetilde{y}_1(1 - \widetilde{\mu}_1 t + o(t)) + \widetilde{y}_2(1 - \mu_2 t + o(t))$$

З врахуванням введених позначень, з останньої системи отримуємо наступну:

$$\begin{aligned} &e^{-\gamma}(x_0^1 + x_0^2 e^{-\delta}) < \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2 e^{-\varepsilon} \\ &e^{-2\gamma}(x_0^1 + x_0^2 e^{-2\delta}) < \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2 e^{-2\varepsilon} \\ &e^{-3\gamma}(x_0^1 + x_0^2 e^{-3\delta}) < \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2 e^{-3\varepsilon} \\ &\widetilde{y}_2\varepsilon - x_0^2\delta > \gamma \end{aligned} \tag{8}$$

Область, задана системою нерівностей (8) є непорожньою. Дійсно, розглянемо наступну систему:

$$e^{-\gamma}\max(x_0^1, x_0^2)(1 + e^{-\delta}) < \min(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2)(1 + e^{-\varepsilon})$$
$$e^{-2\gamma}\max(x_0^1, x_0^2)(1 + e^{-2\delta}) < \min(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2)(1 + e^{-2\varepsilon})$$
$$e^{-3\gamma}\max(x_0^1, x_0^2)(1 + e^{-3\delta}) < \min(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2)(1 + e^{-3\varepsilon})$$
$$\widetilde{y}_2\varepsilon - x_0^2\delta > \gamma$$

Нехай $\min(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2) = 1/2, \max(x_0^1, x_0^2) = 1/2$ . Тоді отримуємо такі нерівності:

$e^{-\gamma}(1 + e^{-\delta}) < (1 + e^{-\varepsilon}), e^{-2\gamma}(1 + e^{-2\delta}) < (1 + e^{-2\varepsilon}), e^{-3\gamma}(1 + e^{-3\delta}) < (1 + e^{-3\varepsilon})$, $\varepsilon - \delta > 2\gamma$

Підберемо такі значення $\varepsilon$ та $\delta$, при яких останні нерівності виконуються. Наприклад, нехай $\varepsilon = 3\delta$. Тоді отримуємо: $\delta > \gamma$, $e^{-(\delta - \tau)}(1 + e^{-\delta}) < (1 + e^{-3\delta})$, $e^{-2(\delta - \tau)}(1 + e^{-2\delta}) < (1 + e^{-6\delta})$, $e^{-3(\delta - \tau)}(1 + e^{-3\delta}) < (1 + e^{-9\delta})$, де $\gamma = \delta - \tau > 0$.

Очевидно, що легко підібрати такі значення $\delta$ та $\tau$, при яких відповідна система нерівностей справджується. Отже, як показують тривіальні міркування, проведені вище, $f(t) > \widetilde{f}(t), t \to 0$, причому виконується умови: $f(t) \le \widetilde{f}(t), t \to \infty$ , $f(1) \le \widetilde{f}(1), f(2) \le \widetilde{f}(2), ..., f(2m-1) \le \widetilde{f}(2m-1)$.

Зроблені вище міркування показують, що у випадку сумісності характеристичної системи на інтервалі з стрибками траєкторії (ймовірність такої події близька до нуля, див. п. 2), користуючись методом, аналогічним (3)-(4), не завжди можна вибрати розв'язок характеристичної системи, що співпадає з точними значеннями параметрів функцій зносу.

Враховуючи останню обставину, можемо запропонувати оцінку, яка не має описаного вище недоліку. Нехай $(y^1, \mu^1), (y^2, \mu^2), ..., (y^n, \mu^n)$ -розв'язки відповідних характеристичних систем на інтервалах $[t_1^1, t_{2m}^1]$, $[t_1^2, t_{2m}^2], \ldots, [t_1^n, t_{2m}^n]$. Будемо вважати, що $\mu^1 = (\mu_1^1, \mu_2^1, ..., \mu_m^1)$ - точні значення параметрів. Тоді, провівши міркування, аналогічні проведеним вище, отримаємо співвідношення:

$\min\limits_{i=1,m} \mu_i^1 \geq \min\limits_{i=1,m} \mu_i^j,\ j=\overline{1,n}.$

Звідси очевидно випливає наступний спосіб побудови оцінки:

$$\overline{\mu}_1 = \mu_1^{i^*},\ldots,\overline{\mu}_m = \mu_m^{i^*}, \tag{9}$$

де $i^*$ знаходиться з умови:

$$\min\limits_{i=1,m} \mu_i^{i^*} \geq \min\limits_{i=1,m} \mu_i^j,\ j=\overline{1,n}, \tag{10}$$

де $(\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots, \mu_m^i, y_1^j, y_2^j, \ldots, y_m^j)$, розв'язки відповідних характеристичних систем нелінійних рівнянь . Відмітимо, що оцінка (9) , на відміну від оцінки (3), не використовує значень $(y_1^j, y_2^j, \ldots, y_m^j)$. Це дозволяє забезпечити оптимальний вибір навіть у випадку, розглянутому в пункті 2.

**5. Про оцінювання параметрів функцій зносу в умовах обмеженості інформації.**

Припустимо, що для даного часового ряду $x_1, x_2, \ldots, x_n$ маємо лише один інтервал довжиною $2m$, на якому відповідна характеристична система сумісна. Тоді, як відмічалося вище, існує ненульова (хоча й дуже мала) ймовірність того, що на відповідному інтервалі є стрибки траєкторії. Тобто розв'язки характеристичної системи не дадуть точних значень параметрів. В цьому випадку важливим є питання, чи дійсно відповідні розв'язки співпадають з точними значеннями параметрів.

Без обмеження загальності будемо вважати, що єдиним інтервалом сумісності характеристичної системи є $[0,2m\text{-}1]$. Розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = x_{2m} - f_1 \\ \nu_1 e^{-\mu_1} + \nu_2 e^{-\mu_2} + \ldots + \nu_r e^{-\mu_m} = x_{2m+1} - f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_1 e^{-(2m-1)\mu_1} + \nu_2 e^{-(2m-1)\mu_2} + \ldots + \nu_r e^{-(2m-1)\mu_m} = x_{2(m+r)-1} - f_{2r} \end{cases} \tag{11}$$

де $f_i = \sum\limits_{j=1}^{m} x_0^j e^{-(2m+i-1)\mu_j^0}$, $i=\overline{1,m}$, $\mu_j^0,\ j=\overline{1,m}$-розв'язки системи (4).

Тоді, якщо існує таке r , при якому система (11) сумісна і $\{\mu_1^1, \mu_2^1, \ldots, \mu_r^r\} \subset \{\mu_1^0, \mu_2^0, \ldots, \mu_m^0\}$, то з ймовірністю 1 на інтервалі [0, 2m-1] немає стрибків траєкторії процесу (1).

Дійсно, припустимо, що стрибків на інтервалі [0, 2m-1] немає. Нехай на інтервалі [2m-1,2m] є стрибки строго r складових процесу (1), а на інтервалі [2m,2m+2r-1] стрибків траєкторії процесу (1) немає. Тоді система (11) очевидно записується з врахуванням структури процесу *x(t)*, вона буде сумісною, причому розв'язки $\nu_j,\ j=\overline{1,r}$, системи (11) є не що інше, як вибіркові значення величин $\int\limits_{2m-1}^{2m} e^{-\mu_{ji}(2m-u)} dA_j(u),\ j=\overline{1,r}$. У випадку, коли на інтервалі [0, 2m-1] є стрибки, значення $\{\mu_1^1, \mu_2^1, \ldots, \mu_r^r\}, \{\mu_1^0, \mu_2^0, \ldots, \mu_m^0\}$ є випадковими величинами з неперервним розподілом і визначаються через елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (див. [1]). А звідси випливає, що ймовірність події, коли виконується умова $\{\mu_1^1, \mu_2^1, \ldots, \mu_r^r\} \subset \{\mu_1^0, \mu_2^0, \ldots, \mu_m^0\}$, є нуль.

Отже, у випадках, коли немає принаймні двох інтервалів, на яких розв'язки відповідних характеристичних систем співпадають (тоді відповідні розв'язки характеристичних систем є точними значеннями параметрів функцій зносу з ймовірністю 1 і застосовувати підхід, описаний вище, не потрібно), можемо застосувати методику уточнення розв'язку, описаному в даному пункті. Тоді можна з ймовірністю 1 стверджувати, чи співпадає оцінка, запропонована в п.3 з точними значеннями параметрів функцій зносу.

**6. Деякі зауваження стосовно побудови оцінки спектру ізотопів, що утворюють радіоактивний фон, в режимі реального часу.**

Відмітимо, що в методах оцінки параметрів, що пропонуються в роботах [1]-[2], довжина інтервалу між точками спостереження є несуттєвою. Одиничний інтервал був вибраний виключно з міркувань зручності запису. Як відмічалось в роботі [1], у випадку, коли не існує інтервалу неперервності траєкторії процесу (1) довжиною $2m$ (в межах проміжку спостереження), побудувати оцінки параметрів процесу (1) методами, що використовують специфіку траєкторії, неможливо. Тому теоретично необхідно вибирати якомога менший інтервал часу між окремими спостереженнями. Але в цьому випадку на практиці виникає проблема точності (дослідження розв'язків відповідних систем при великих розмірностях може бути предметом наступного дослідження). Із зменшенням інтервалу між спостереженнями зменшується точність оцінок параметрів функцій зносу (відповідні розрахунки наводити не будемо) . Тому розумно запропонувати метод коррекції інтервалу між спостереженнями при роботі в режимі реального часу. Якщо на протязі певного часу не виділено жодного інтервалу неперервності, проміжок між спостереженнями необхідно зменшувати.

1. *Закусило О.К.,Турбал Ю.В.* Один метод оцінки параметрів функцій зносу моделі радіоактивного забруднення // Вісник Київського університету.- 1996.- №1.- С.98-106.
2. *Доценко С.М., Турбал Ю.В.* Про достатні умови стрибка траєкторії моделі радіоактивного забруднення.// Волинський математичний вісник.- 1998.- №5.- С.48-56.
3. *Турбал Ю.В.* Оцінка інтенсивностей пуассонівських потоків моделі радіоактивного забруднення.// Волинський математичний вісник, №3,1996, с. 130-135
4. *Турбал Ю.В.* Про необхідні та достатні умови сумісності деяких систем нелінійних рівнянь.// Волинський математичний вісник, №6,1999, с. 143-146

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

*Надійшла 18.01.2000*

**Турбал Ю.В.** ОБ УТОЧНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИЙ СНОСА МОДЕЛИ РАДИОАКТИВНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ // *Предлагается ряд уточнений оценок параметров функций износа модели радиоактивного загрязнения, которые используют специфику траекторий исследуемого процесса.*

**Turbal Yu.V.** ABOUT THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF ANY SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS INCOMPATIBILITY // *It is proposed necessary and sufficient conditions of any system of nonlinear equations incompatibility which are based on the finding of the nonlinear function exstremums.*