Зміст

УДК 517.5 519.62

Янчук П.С.

МЕТОД МНОГОЧЛЕННИХ РЯДІВ ФУР'Є ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В ПРЯМОКУТНИКУ

Отримані явні формули для многочленних наближень розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона в прямокутнику, які є найкращими відносно енергетичної метрики. Вивчаються питання апроксимації і стійкості для отриманого наближення.

1.Вступ. Алгебраїчні многочлени є популярними агрегатами при наближенні відомих функцій. Практично таке наближення здійснюється шляхом інтерполяції, середньоквадратичного наближення і рядом інших методів. Використання многочленів є оправданим на класах диференційованих функцій, оскільки вони у випадку важливих метрик дають краще наближення порівняно з іншими можливими агрегатами. Ми не будемо зупинятися тут на відповідних точних формулюваннях, а відразу перейдемо до проблеми многочленного наближення розв'язків задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Звичайно, значення наших результатів не обмежується лише зазначеною вижче крайовою задачею і відкриває перспективи для розв'язування і ряду інших крайових задач. На наш погляд найбільш розвинутими методами для многочленного наближення розв'язків крайових задач для еліптичних рівнянь є методи типу методу Гальоркіна, які розвивалися багатьма відомими вченими. У випадку многочленних базисів метод Гальоркіна приводить до необхідності розв'язування систем алгебраїчних рівнянь із щільною (повністю заповненою) матрицею. Коли ж використати власні функції оператора Лапласа, які як відомо, не є многочленами, то можна прийти і до системи алгебраїчних рівнянь з діагональною матрицею. Виявляється, що задача Діріхле зводиться до такого інтегрального рівняння, що в свою чергу породжує дискретне рівняння, для якого власними функціями будуть многочлени. Це дасть змогу розв'язати останнє фактично шляхом розділення змінних. При цьому крайові умови можуть бути неоднорідними. Якщо ці многочлени взяти у ролі базисних для методу Гальоркіна (або, Рітца), то ми отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з діагональною матрицею і для оцінки наближення можна скористатися відомими із теорії методів Гальоркіна фактами. Реалізовувати ж це не має особливої необхідності. Як відомі функції, так і невідомі розв'язки-функції можна розкладати в ряд Фур'є за системою ортогональних многочленів з вагою, тотожно рівною одиниці. Ми будемо вести наш виклад в основному в рамках рядів Фур'є за квазіспектральними многочленами [4].

2.Класична постановка задачі Діріхле. Знайти таку функцію $u = u(x, y)$, для якої у кожній внутрішній точці (x, y) квадрата $(-1,1)\times(-1,1)$ буде мати місце рівність

$$-\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = f(x, y), \tag{2.1}$$

для кожної точки x проміжку $[-1,1]$ крайові умови вигляду

$$u(x,-1) = \varphi_1(x), u(x,1) = \varphi_2(x), \tag{2.2}$$

і для кожної точки y проміжку $[-1,1]$ крайові умови вигляду

$$u(-1, y) = \psi_1(y), u(1, y) = \psi_2(y). \tag{2.3}$$

При цьому, звичайно, права частина $f = f(x, y)$ рівняння (2.1) та функції $\varphi_i = \varphi_i(x)$ та $\psi_i = \psi_i(y)$, $i = 1,2$ вважаються відомими.

3. Умови гладкості для класичного розв'язку. Умови гладкості для наближеного розв'язку формулюватимемо таким чином, щоб мала місце конструкція наближеного розв'язку, описана нижче. Проте, як можна буде помітити , ці умови не будуть обтяжливими при практичному розв'язуванні задачі Діріхле (2.1)-(2.3). Запишемо умови гладкості у вигляді

3.0. f визначена і неперервна у замкнутому квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$, тобто $f \in C((-1,1)\times(-1,1))$.

3.1. u *визначена і неперервна у замкнутому квадраті* $[-1,1]\times[-1,1]$, *тобто* $u\in C([-1,1]\times[-1,1])$.

3.2. u *має всі неперервні частинні похідні до другого порядку включно у відкритому квадраті* $(-1,1)\times(-1,1)$, *тобто* $u\in C^2((-1,1)\times(-1,1))$.

3.3. Кожна з функцій φ_i *та* ψ_i *неперервна разом з першими і другими похідними, тобто* $\varphi_i\in C^2(-1,1), \psi_i\in C^2(-1,1)$.

3.4.Крайові умови (2.2) та (2.3) будемо вважати узгодженими. Під узгодженістю крайових умов ми розуміємо виконання рівностей вигляду

$\psi_1(-1)=\varphi_1(-1), \varphi_1(1)=\psi_2(-1), \psi_2(1)=\varphi_2(1), \varphi_2(-1)=\psi_1(1)$.

Зауваження 3.1. Тут відразу виписані умови , які накладаються на функції, які відомі до початку розв'язування задачі, так і умови на функцію u, яка буде знайдена вже після розв'язування задачі. Із класичних теорем існування наближеного розв'язку слідує, що умови 3.1 та 3.2 є наслідком умов 3.0 та 3.3,3.4. Більше того, умова 3.3 може бути ослаблена до вимоги неперервності функцій φ_i та ψ_i.

Зауваження 3.2. Зупинимося на інших взаємозв'язках умов 3.0-3.4. Замітимо, що із умови гладкості 3.1 слідують умови узгодженості крайових умов 3.4. Геометрично узгодженість крайових умов означає, що якщо вони визначені і неперервні на двох сторонах квадрата $[-1,1]\times[-1,1]$, які мають спільну точку, то вони співпадають у цій точці. Іншими словами, обмеження функції u на контурі розглядуваного квадрата є неперервною функцією у метриці, що індукується метрикою простору R^2. Звичайно, практично важливими є задачі, в яких крайові умови на межі області є розривними. Але, тоді мова повинна йти, напевно, про їх наближення агрегатами, відмінними від многочленів.

Зауваження 3.3. Умова 3.3 свідчить про те, що ми розглядаємо не самий загальний випадок класичного розв'язку, коли вимагається однієї лише неперервності функції, визначеної на межі області. Разом з тим, очевидно, що для досягнення прийнятної точності в рівномірній метриці при наближенні функцій многочленами, потрібно вимагати, щоб вони мали певний запас гладкості.

Зауваження 3.4. Нижче, ми розглянемо проблему наближення узагальнених розв'язків многочленами, але відносно описаних нижче інтегральних метрик. В цьому випадку умови як на f, так і на функції φ_i та ψ_i будуть ослабленими, порівняно з класичним випадком.

4.Умови гладкості для узагальненого розв'язку. У випадку узагальненого розв'язку $u=u(x,y)$ задачі (2.1)-(2.3) будемо вимагати виконання наступних умов

4.0. f *є сумовною з квадратом в області* $[-1,1]\times[-1,1]$, *тобто* $f\in L_2([-1,1]\times[-1,1])$,

4.1. u *неперервна в замкнутому квадраті* $[-1,1]\times[-1,1]$, *тобто* $u\in C([-1,1]\times[-1,1])$.

4.2. u *разом з усіма похідними до другого порядку включно є сумовною з квадратом в області* $[-1,1]\times[-1,1]$, *тобто* $u\in W_2^2([-1,1]\times[-1,1])$.

4.3.Кожна з функцій φ_i *та* ψ_i *є сумовною з квадратом в* $[-1,1]$, *тобто* $\varphi_i,\psi_i\in W_2^2([-1,1])$.

4.4.Крайові умови (2.2) та (2.3) будемо вважати узгодженими. Під узгодженістю крайових умов ми розуміємо виконання рівностей вигляду

$\psi_1(-1)=\varphi_1(-1), \varphi_1(1)=\psi_2(-1), \psi_2(1)=\varphi_2(1), \varphi_2(-1)=\psi_1(1)$.

Зауваження 4.1. Безумовно, як і в попередньому пункті, умови 4.0-4.3 не є незалежними. Зокрема, умова 4.0 слідує з умови 4.2.

Зауваження 4.2. Умова 4.1 повторює умову 3.1 для класичного розв'язку і наведена нами для зручності. Із класичних теорем вкладення слідує, що якщо має місце умова 4.2, то функцію u можна вважати неперервною в розглядуваному квадраті (можливо, змінивши її значення на множині міри нуль в $[-1,1]\times[-1,1]$, якщо це потрібно). В цьому смислі умова 4.1 стає наслідком умови 4.2. Прийнята умова 4.3 може бути теоретично ослаблена, але знову ж таки з огляду на можливість якісного наближення многочленами вона не виглядає нелогічною. Відмітимо, що із умови 4.2 і теореми про слід функції слідує, що $\varphi_i, \psi_i \in W_2^1([-1,1])$. Проте, з того, що $\varphi_i, \psi_i \in W_2^1([-1,1])$, а крайові умови узгоджені, не слідує взагалі кажучи, існування такої функції $u \in W_2^2([-1,1]\times[-1,1])$, слід якої співпадає з даними функціями, заданими на сторонах квадрата. На противагу цьому , із умови (4.3) і узгодженості крайових умов, як буде показано пізніше, слідуватиме існування функції із вказаною гладкістю.

Зауваження 4.3. Як відомо , при однорідних крайових умовах, із умови 4.0 слідує умова 4.2 (теорема існування узагальненого розв'язку) і , автоматично, умова 4.1 в описаному вище смислі. Цей висновок матиме місце і при неоднорідних крайових умовах. При неоднорідних умовах, із умов 4.0,4.3,4.4 слідуватимуть умови 4.1,4.2.

Таким чином, наш аналіз показує, що порівняно із можливим самим загальним випадком класичного розв'язку маємо умову 3.3 на точний розв'язок. У випадку узагальненого розв'язку такою умовою є 4.3. Проте, з огляду на такий агрегат наближення, якими є многочлени ці умови не виглядають надто суворими. Більше того, було б добре мати і кращу гладкість невідомого точного розв'язку. Коли ж в практичній задачі розв'язок має невисоку гладкість, то доцільно наближати розв'язок кусково-многочленними функціями.

5.Інтегро-проекційні рівняння. В цьому розділі наведемо дві теореми про представлення точного і апроксимаційного розв'язків, які дозволяють ефективно наближено розв'язувати крайову задачу (2.1)-(2.3).В сформульованих нижче теоремах і пізніше будемо часто користуватися слідую чими позначеннями.

Означення 5.1. Через $\pi_{xy} : L_2([-1,1]\times[-1,1]) \to \tilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$ позначимо ортогональну проекцію, де $\tilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$ підпростір тих функцій $g = g(x,y)$ із $L_2([-1,1]\times[-1,1])$, для яких мають місце рівності $\int_{-1}^{1} g(x,y)dx = \int_{-1}^{1} g(x,y)dy = 0$.

Зауваження 5.1. Із означення 5.1 слідує, що якщо функція залежить лише від однієї змінної, або є сумою двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної, то проекція π_{xy} від такої функції дорівнює нулеві, іншими словами $\pi_{xy}(g(x)+h(y))=0$, якими б не були функції $g = g(x), h = h(y)$, при умові, звичайно, що вони належать області визначення оператора π_{xy}. Цей факт часто буде використовуватись без спеціальних посилань на нього. Зокрема, він використовується при доведенні теореми 5.1.

Означення 5.2. Через $\pi_x : L_2[-1,1] \to \tilde{L}_2[-1,1]$ позначимо ортогональну проекцію, де $\tilde{L}_2[-1,1]$ підпростір простору $L_2[-1,1]$, до якого належать ті і тільки ті функції $g = g(x)$, які ортогональні в $L_2[-1,1]$ одиниці. Цю проекцію можна продовжити на простір $L_2([-1,1]\times[-1,1])$, поклавши $\pi_x(g)(x,y) = g(x,y) - 0.5\int_{-1}^{1} g(x,y)dy$, де $g = g(x,y)$.

Зауваження 5.2. У випадку, коли функція $g = g(y)$ залежить від y і не залежить від x, тоді $\pi_x(g)=0$.

Відмітимо, що проекцію π_{xy} можна представити у вигляді суперпозиції лінійних відображень π_x та π_y, що і запишемо у вигляді $\pi_{xy} = \pi_x \pi_y$.

<u>Теорема</u> <u>5.1.</u> Якщо виконані умови 3.1-3.4 у випадку класичного розв'язку, чи умови 4.1-4.4 у випадку узагальненого розв'язку, то

(і) точний розв'язок задачі (2.1)-(2.3) можна представити у вигляді

$$u(x,y) = \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{y} u''(x_1,y_1)dy_1 + R(x,y), \tag{5.1}$$

де

$$R(x,y)=0.5\left(\psi_2(y_1)-\psi_1(y_1)\right)\Big|_{y_1=-1}^{y}(x+1)+$$

$$0.5\left(\varphi_2(x_1)-\varphi_1(x_1)\right)\Big|_{x_1=-1}^{x}(y+1)+ \tag{5.2}$$

$$\psi_1(y)+\psi_1(x)-0.25c(x+1)(y+1)-a,$$

а $u''=u''(x,y)\in L_2([-1,1]\times[-1,1])$ є точним розв'язком задачі

$$-\pi_{xy}\left(\int_{-1}^{y}dy_1\int_{-1}^{y_1}u''(x,y_2)dy_2+\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{x_1}u''(x_2,y)dx_2\right)=q(x,y), \tag{5.3}$$

$$\int_{-1}^{1}u''(x,y)dx=0,\int_{-1}^{1}u''(x,y)dy=0\,, \tag{5.4}$$

де

$$q(x,y)=\overline{F}(x,y)-\frac{3y^2-6y-1}{12}\overline{\varphi}_1(x)+\frac{3y^2+6y-1}{12}\overline{\varphi}_2(x)-$$
$$.\ \frac{3x^2-6x-1}{12}\overline{\psi}(y)+\frac{3x^2+6x-1}{12}\overline{\psi}_2(y), \tag{5.5}$$
$$\overline{F}=\pi_{xy}F,F=F(x,y)=\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{y}f(x_1,y_1)dy_1,$$
$$\overline{\varphi}_i(x)=\pi_x\partial_x\varphi_i(x),\overline{\psi}_i(y)=\pi_y\partial_y\psi_i(y).$$

(ii)Функція u'' є неперервною ($u''\in C([-1,1]\times[-1,1])$) у випадку класичного розв'язку і сумовною з квадратом ($u''\in L_2([-1,1]\times[-1,1])$) у випадку узагальненого розв'язку.

Доведення теореми 5.1. Доведення даної теореми проведемо у випадку узагальненого розв'язку. У випадку класичного розв'язку доведення проводиться аналогічно і в основному зводиться до заміни просторів типу W_2^2, L_2 на простори C^2, C і т.д.

Припустимо, що $u=u(x,y)$ узагальнений розв'язок задачі (2.1)-(2.3) і для нього виконані умови 4.1-4.4. Тоді, із (2.2)-(2.3) слідує, що його можна представити у вигляді

$$u(x,y)=\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{y}\tilde{u}(x_1,y_1)dy_1+\psi_1(y)+\varphi_1(y)-a\Rightarrow\tilde{u}=\partial_x\partial_y u\,, \tag{5.6}$$

де $a=u(-1,-1)$. Оскільки, $u\in W_2^2([-1,1]\times[-1,1])$ на основі умови 4.2, то на підставі теорем вкладення $\tilde{u}=\partial_x\partial_y u\in L_2([-1,1]\times[-1,1])$.

Диференціюючи співвідношення (5.6), отримаємо

$$u_x(x,y)=\int_{-1}^{y}\tilde{u}(x_1,y_1)dy_1+\partial_x\varphi_1(x),$$
$$u_y(x,y)=\int_{-1}^{x}\tilde{u}(x_1,y)dx_1+\partial_y\psi_1(y). \tag{5.7}$$

Підставимо (5.7) в (2.1) і отримаємо

$$-\partial_x\left(\int_{-1}^{y}\tilde{u}(x,y_1)dy_1+\partial_x\varphi_1(x)\right)-\partial_y\left(\int_{-1}^{x}\tilde{u}(x_1,y)dx_1+\partial_y\psi_1(y)\right)=f(x,y)\,. \tag{5.8}$$

Замінимо в (5.8) x_1 на x_2, x на x_1, y_1 на y_2, y на y_1 і проінтегруємо одержану рівність по x_1 в межах від -1 до x, та по y_1 в межах від -1 до y. Будемо мати

$$-\int_{-1}^{y}dy_1\int_{-1}^{y_1}\tilde{u}(x,y_2)dy_2-\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{x_1}\tilde{u}(x_2,y)dx_2+$$
$$+\left[\int_{-1}^{y}dy_1\int_{-1}^{y_1}\tilde{u}(-1,y_2)dy_2+\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{x_1}\tilde{u}(x_2,-1)dx_2\right]+ \tag{5.9}$$
$$+\left[\int_{-1}^{y}(\partial_x\varphi_1(-1)-\partial_x\varphi_1(x))dy_1+\int_{-1}^{x}(\partial_y\psi_1(-1)-\partial_y\psi_1(y))dx_1\right]=F(x,y)$$

Застосувавши до обох частин (5.9) проекцію π_{xy}, одержимо

$$-\pi_{xy}\left(\int_{-1}^{y}dy_1\int_{-1}^{y_1}\tilde{u}(x,y_2)dy_2+\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{x_1}\tilde{u}(x_2,y)dx_2\right)= \tag{5.10}$$
$$=F(x,y)+\overline{\varphi}_1(x)y+\overline{\psi}_1(y)x.$$

у відповідності з позначеннями (5.5).

Функцію $\tilde{u}=\tilde{u}(x,y)$ представимо у вигляді

$$\tilde{u}(x,y)=u''(x,y)+\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\psi}(y)+0.25c, \tag{5.11}$$

де

$$\int_{-1}^{1}u''(x,y)dx=0,\int_{-1}^{1}u''(x,y)dy=0,$$
$$\int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}(x)dx=0,\int_{-1}^{1}\tilde{\psi}(y)dy=0 \tag{5.12}$$

Можливість представлення (5.11) слідує із представлення функції $\tilde{u}$ через ряд Фур'є-Лежандра в силу належності її до простору $L_2([-1,1]\times[-1,1])$.

Проінтегруємо (5.11) по квадрату $[-1,1]\times[-1,1]$ і отримаємо

$$c=\int_{-1}^{1}dy_1\int_{-1}^{1}\tilde{u}(x_1,y_1)dx_1. \tag{5.13}$$

Звідси і із (5.6) слідує, що

$$c=\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}\partial_x\partial_y u dx=u(1,1)+u(-1,-1)-u(-1,1)-u(1,-1). \tag{5.14}$$

Виразимо $\tilde{\varphi},\tilde{\psi}$ через відомі величини. Для цього проінтегруємо (5.11) по x в межах від –1 до 1. Отримаємо,

$$\int_{-1}^{1}\tilde{u}(x,y)dx=2\tilde{\psi}(y)+0.5c. \tag{5.15}$$

Аналогічно,

$$\int_{-1}^{1}\tilde{u}(x,y)dy=2\tilde{\varphi}(x)+0.5c \tag{5.16}$$

Із (5.16), врахувавши (2.2),(1.6), отримаємо

$$\tilde{\varphi}(x)=0.5\int_{-1}^{1}\tilde{u}(x,y)dy-0.25c=0.5(\partial_x\varphi_2(x)-\partial_x\varphi_1(x))-0.25c \tag{5.17}$$

Аналогічно,

$$\tilde{\psi}(y)=0.5\int_{-1}^{1}\tilde{u}(x,y)dx-0.25c=0.5(\partial_y\psi_2(y)-\partial_y\psi_1(y))-0.25c. \tag{5.18}$$

Підставимо (5.17) та (5.18) в (5.11) і отримаємо представлення вигляду

$$\begin{aligned}&\tilde{u}(x,y) = u''(x,y) + 0.5(\partial_y \psi_2(y) - \partial_y \psi_1(y)) + \\ &+ 0.5(\partial_x \varphi_2(x) - \partial_x \varphi_1(x)) - 0.25c\end{aligned} \tag{5.19}$$

Одержане представлення (5.19) підставимо в (5.6) і отримаємо представлення (5.1), якщо виконаємо нескладні інтегрування. Тим самим будемо мати представлення (5.2) для R. Щоб завершити доведення пункту (і) теореми, потрібно показати, що функція $u'' = \pi_{xy}\tilde{u}(x,y)$ із представлення (5.11) є розв'язком рівняння (5.3). Для цього замінимо функцію $\tilde{u}$ на u'' на підставі формули (5.19). В результаті отримаємо рівняння, якому повинна задовольняти функція u'':

$$\begin{aligned}&-\pi_{xy}\Big(\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} u''(x_2,y)dx_2 + \int_{-1}^{y} dy_1 \int_{-1}^{y_1} u''(x,y_2)dy_2\Big) = \\ &\pi_{xy}\big[F(x,y) + \partial_x \varphi_1(x)(y+1) + \partial_y \psi(y)(x+1)\big] + \\ &\pi_{xy}\left[0.5\partial_x(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\frac{(y+1)^2}{2} + 0.5(\psi_2(y) - \psi_1(y))\frac{(x+1)^2}{2}\right]\end{aligned} \tag{5.20}$$

Тут враховано, що $\int_{-1}^{y} dy_1 \int_{-1}^{y_1} 0.5\partial_x(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dy_2 = 0.5\partial_x(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\frac{(y+1)^2}{2}$ та аналогічне співвідношення для $\psi_i(y)$.

Замітивши, що $\pi_x\left[(x+1)^2\right] = (x+1)^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+1)^2 dx = \frac{3x^2 + 6x - 1}{3}$, із (5.20) отримаємо для u'' рівняння (5.3). При цьому ми звичайно враховуємо (5.12).

На початку доведення теореми ми відразу показали, що $\tilde{u} \in L_2([-1,1]\times[-1,1])$. Із смислу формули (5.11) слідує, що u'' належить цьому ж простору і таким чином пункт (іі) теореми доведено.

Теорему 1.1 доведено.

Зауваження 5.3. Теорема 5.1 дає можливість звести задачу Діріхле (2.1)-(2.3) з неоднорідними крайовими умовами до задачі для інтегро-проекційного рівняння (5.3) з умовами (5.4), які мають ортогональний характер. Конкретно в цій задачі під ортогональним характером умов ми розуміємо те, що серед розв'язків рівняння шукається такий, який при фіксованій одній із незалежних змінних, відносно іншої, ортогональний одиниці. Припустимо, що $\theta_i(x), i = 0,1,...$ ортогональний базис в просторі $L_2[-1,1]$, причому $\theta_0(x) = 1, x \in [-1,1]$. Тоді, розв'язок рівняння із (1.12), який задовольняє умовам ортогональності одиниці можна шукати у вигляді

$$u'' = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\theta_i(x)\theta_j(y). \tag{5.21}$$

Відмітимо відразу, що на відміну від можливого загального випадку тут індекси змінюються від одиниці, а не від нуля (в цьому якраз і полягає роль умов ортогональності (5.4)). Припустимо, що ряд (5.21) збігається в просторі $L_2([-1,1]\times[-1,1])$. Тоді він в цьому просторі представляє функцію, яка задовольняє умовам (5.4). І таким чином, задачу (5.3),(5.4) природно розв'язувати з допомогою ортогональних рядів. Наприклад, можна використати двомірні тригонометричні ряди для розв'язування побудованої задачі для інтегро-проекційного рівняння (5.3). Враховуючи, що розв'язок даного рівняння, як правило неперіодичний, можна скористатись рядами Фур'є-Лежандра. І в одному, і в іншому випадку двомірний базис будується шляхом тензорного добутку одномірних базисів, причому відповідний одномірний базис містить функцію тотожно рівну одиниці. Відмітимо також, що як в одному, так і в іншому випадку кожний елемент одномірного базису добре інтегрується. В подальшому описаний тут підхід буде поглиблено.

6. Дискретизація задачі для інтегро-проекційного рівняння. Реалізуючи ідею зауваження 5.3 і розуміючи, що машинні обчислення нам не реалізувати без дискретизації, опишемо схему наближеного розв'язування задачі (5.3),(5.4) на основі використання квазіспектральних многочленів.

Означення 6.1. Через π^n позначимо оператор взяття часткової суми ряду Фур'є-Лежандра. Під цим терміном в одномірному випадку ми розуміємо відображення, яке ставить довільній функції $v = v(x, y)$, яка має представлення рядом Фур'є-Лежандра вигляду

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i P_i(x) \tag{6.1}$$

n-у часткову суму $\pi^n v = \sum_{i=0}^{n} v_i P_i(x)$. цього ряду. І аналогічно в двомірному випадку - розуміємо відображення, яке ставить у відповідність довільній функції $v = v(x, y)$, яка має представлення рядом Фур'є-Лежандра вигляду

$$v = \sum_{i,j=0}^{\infty} v_{ij} P_i(x) P_j(y), \tag{6.2}$$

n-у часткову суму $\pi^n v = \sum_{i,j=0}^{n} v_{ij} P_i(x) P_j(y)$ цього ряду.

Означення 6.2. Через π_x^n позначимо оператор, який відображає довільну функцію $v = v(x)$, яка має представлення рядом Фур'є-Лежандра вигляду (6.1) скінчену суму $\pi^n v = \sum_{i=1}^{n} v_i P_i(x)$.

Означення 6.3. Через π_{xy}^n позначимо оператор, який переводить довільну функцію $v = v(x, y)$, яка має представлення рядом Фур'є-Лежандра вигляду (6.2), в скінчену суму $\pi_{xy}^n v = \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij} P_i(x) P_j(y)$.

Означення 6.4. Через $\widetilde{\mathrm{M}}^n = \widetilde{\mathrm{M}}^n([-1,1] \times [-1,1])$ позначимо простір всіх многочленів степеня не вище n і таких, що задовольняють співвідношенням вигляду (5.4):

$$\int_{-1}^{1} p\,dx = 0, \int_{-1}^{1} p\,dy = 0,\ p = p(x, y) \in \widetilde{\mathrm{M}}^n \tag{6.3}$$

В фактах 6.1-6.6 сформульовані необхідні нам твердження, які стосуються головним чином властивостей квазіспектральних многочленів та многочленів Лежандра.

Факт 6.1. Проекція π_{xy}^n є суперпозицією проекцій π_{xy} та π^n. Вона є ортогональною проекцією простору $L_2([-1,1] \times [-1,1])$ на його власний підпростір $\widetilde{\mathrm{M}}^n$.

Факт 6.2. Ортогональний базис простору $\widetilde{\mathrm{M}}^n$ утворюють попарні добутки многочленів Лежандра вигляду $P_i(x)P_j(y)(i, j = 1,\ldots,n)$, або попарні добутки квазіспектральних многочленів вигляду $K_i(x)K_j(y)(i, j = 1,\ldots,n)$.

Факт 6.3. Кожний з многочленів $K_i(x), i = 1,\ldots,n$ задовольняє співвідношення вигляду

$$\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x} K_i(x_2)\,dx_2 = -\lambda_i K_i(x) + \tau_i' P_{n+1}(x) + \tau_i'' P_{n+2}(x), \tag{6.4}$$

де $\lambda_i > 0, \tau_i', \tau_i''$ деякі числа, $P_{n+1} = P_{n+1}(x), P_{n+2} = P_{n+2}(x)$ многочлени Лежандра. Якщо до обох частин (6.3) застосувати ортогональну проекцію π_x^n, то замість (6.4) отримаємо співвідношення

$$\pi_x^n \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} K_i(x_2)dx_2 = -\lambda_i K_i(x). \tag{6.5}$$

Факт 6.4. Квазіспектральні многочлени $K_i = K_i(x), i = 0,...,n$ утворюють ортонормований базис простору $\mathrm{M}^n[-1,1]$ всіх многочленів, степінь яких не вищий n, тобто $\int_{-1}^{1} K_i(x)K_j(x)dx = 0, i \neq j, \int_{-1}^{1} (K_i(x))^2 = 1.$

Факт 6.5. Шляхом інтегрування за частинами із (6.5) слідує, що первісні квазіспектральних многочленів K_i ортогональні, точніше

$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x} K_i(x_1)dx_1\right)\left(\int_{-1}^{x} K_j(x_1)\right)dx = 0, i \neq j$ для $i = 1,...,n; j = 1,...,n$. Таким же способом із (6.5) можна отримати, що $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x} K_i(x_1)dx_1\right)\left(\int_{-1}^{x} K_j(x_1)\right)dx = \lambda_i, i = j.$

Факт 6.6. Можна поповнити базис K_i квазіспектральних многочленів до ортонормованого базису в просторі всіх многочленів від однієї змінної $\mathrm{M}^n[-1,1]$, степінь яких не перевищує n. Для цього покладемо $K_0(x) = 1/\sqrt{2}$.

Тепер на основі сформульованих фактів ми в змозі описати і проаналізувати схему дискретизації задачі Діріхле (2.1)-(2.3).

Схема дискретизації задачі (5.3),(5.4):

- Замінимо функцію $\hat{u} = \hat{u}(x, y)$ на алгебраїчний многочлен $\hat{u}_n = \hat{u}_n(x, y)$, який задовольняє умовам (5.4) і має по кожній з обох змінних степінь, яка не перевищує n.
- Застосуємо до обох частин рівняння (5.3) ортогональну проекцію π_{xy}^n.

Зауваження 6.1. Для того, щоб задовольнити умовам (5.4) можна взяти многочленне наближення у вигляді

$$\hat{u}_n = \hat{u}_n(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{ij} K_i(x)K_j(y). \tag{6.6}$$

Після цього коефіцієнти $\hat{u}_{ij}$ можна знайти з необхідності наближено задовольнити рівняння (5.3).

Сформулюємо твердження, яке дає точне представлення наближеного розв'язку інтеро-проекційного рівняння (5.3) у випадку, коли права частина є многочленом.

<u>Твердження 6.1.</u> *Точний розв'язок дискретного рівняння вигляду*

$$-\pi_{xy}^n\left(\int_{-1}^{y} dy_1 \int_{-1}^{y_1} \hat{u}_n(x, y_2)dy_2 + \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \hat{u}_n(x_2, y)dx_2\right) = q_n(x, y), \tag{6.7}$$

де $q_n = q_n(x,y) = \sum_{i,j}^{n} q_{ij} K_i(x)K_j(y) \in \tilde{\mathrm{M}}_n$, *при умові*

$$\hat{u}_n = \hat{u}_n(x, y) \in \tilde{\mathrm{M}}^n. \tag{6.8}$$

має вигляд

$$\hat{u}_n = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{q_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} K_i(x)K_j(y). \tag{6.9}$$

Доведення твердження 6.1. На підставі властивості (6.5) квазіспектральних многочленів шляхом простих обчислень легко переконатися, що при підстановці (6.6) в (6.7) отримаємо тотожність. При цьому доведеться скористатися означеннями і простими властивостями проекцій описаними в зауваженнях на початку цього пункту.

Твердження 6.2. *$n-$ну часткову суму $\pi^n f$ ряду Фур'є-Лежандра довільної функції $f = f(x,y) \in L_2([-1,1]\times[-1,1])$ можна обчислити за формулою вигляду*

$$\pi^n f = \sum_{i,j=0}^{n} \bar f_{ij} K_i(x) K_j(y), \bar f_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f K_i(x) K_j(y) dx dy \tag{6.10}$$

і як наслідок, ортогональну проекцію $\pi_{xy}^n f$ за формулою вигляду

$$\pi_{xy}{}^n f = \sum_{i,j=1}^{n} \bar f_{ij} K_i(x) K_j(y). \tag{6.11}$$

Доведення твердження 6.2. Довільну функцію $f = f(x), x \in [-1,1]$, яка належить простору $L_2[-1,1]$ можна представити у вигляді

$$f = f^1 + \bar f, \tag{6.12}$$

де

$$f^1 = \sum_{i=0}^{n} f_i P_i(x),\ \bar f = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i P_i(x),\ f_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} f P_i(x) dx \tag{6.13}$$

вважаючи, що многочлени Лежандра $P_i(x)$ стандартизовані умовою $P_i(1) = 1$.

Враховуючи, що квазіспектральні многочлени $K_i(x), i = 0,...,n$ є ортонормованими і в сукупності з многочленами Лежандра $P_i(x), i = n+1,...,\infty$ утворюють ортогональний базис простору $L_2[-1,1]$, цю ж функцію f можна представити у вигляді

$$f = f^2 + \bar f, \tag{6.14}$$

де

$$f^2 = \sum_{i=0}^{n} \hat f_i^2 K_i(x),\ \hat f_i^2 = \int_{-1}^{1} \bar f K_i(x) dx, i = 1,...,n. \tag{6.15}$$

Відразу отримуємо, що $f^1 = f^2$. Це означає, що у випадку однієї змінної проекція $\pi^n f = f^1, \pi^n f = f^2$ є комбінацією многочленів Лежандра (6.13), або К-многочленів (6.15). Ці міркування узагальнюються на випадок двох змінних. У цьому випадку має місце формула (6.10). Наслідком формули (6.10) є формула (6.11).
Лема доведена.

Означення 6.5. Через $h_j, g_j, j = 1,...,n$ позначимо числа вигляду

$$h_j = \int_{-1}^{1}(3x^2 - 6x - 1) K_j(x) dx, g_j = \int_{-1}^{1}(3x^2 + 6x - 1) K_j(x) dx.$$

Твердження 6.3. *Проекцію $q_n = \pi_{xy}^n q$ правої частини рівняння (5.3) можна обчислити за формулою*

$$q_n = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} K_i(x) K_j(y), \tag{6.16}$$

де $$q_{ij} = F_{ij} - 12^{-1}\left(\varphi_{1i} h_j - \varphi_{2i} g_j + \psi_{1j} h_i - \psi_{2j} g_i\right), \tag{6.17}$$

$$F_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F K_i(x) K_J(y) dx dy,. \tag{6.18}$$

$$\varphi_{ki} = \int_{-1}^{1} \partial_x \varphi_k(x) K_i(x) dx, \psi_{kj} = \int_{-1}^{1} \partial_y \psi_k(y) K_j(y) dy. \tag{6.19}$$

$$i, j = 1,...,n; k = 1,2.$$

В сформульованому твердженні функції F,φ_k,ψ_k *такі ж, що й використані при формулюванні задачі Діріхле (2.1),(2.3).*

Доведення леми 6.3. Для того, щоб довести лему достатньо врахувати вид функції q, який дається формулою (5.5) і застосувати лему 6.3.

Означення 6.6. *Дискретизацією задачі (5.3)-(5.4) будемо називати задачу (6.7)-(6.8), якщо* $q_n = \pi^n_{xy} q$.

7. Наближення розв'язків із $\widetilde{W}_2^1$ інтегрального рівняння. В попередньому пункті ми описали як дискретизувати задачу Діріхле. При цьому виникла необхідність наближеного розв'язання інтегральних рівнянь. В цьому пункті ми отримаємо формули для представлення наближеного розв'язку через квазіспектральні многочлени.

Означення 7.1. Через $\langle u,v\rangle$ позначимо скалярний добуток функцій u,v, визначений формулою

$$\langle u,v\rangle = (u,v)_{\widetilde{W}_2^1} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\int_{-1}^{x} u(x_1,y)\,dx_1\right)\left(\int_{-1}^{x} v(x_1,y)\,dx_1\right)+\left(\int_{-1}^{y} u(x,y_1)\,dy_1\right)\left(\int_{-1}^{y} v(x,y_1)\,dy_1\right)\right]dxdy. \quad (7.1)$$

Поповнимо, введений нами раніше, простір $\widetilde{L}_2 = \widetilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$ відносно даного скалярного добутку і отримаємо гільбертів простір, який позначимо через $\widetilde{W}_2^1 = \widetilde{W}_2^1([-11]\times[-1,1])$.

Зауваження 7.1. При формулюванні означення 7.1 нами було враховано, що для кожного елементу $u \in \widetilde{L}_2$ величина $\langle u\rangle = \sqrt{\langle u,u\rangle}$, яку ми називатимемо нормою u, є визначеною і скінченою. З цього слідує, що простір $\widetilde{L}_2$ є підпростором простору $\widetilde{W}_2^1$. Зауважимо також, що простір многочленів $\widetilde{\mathrm{M}}^n$ (означення 6.4) є підпростором обох розглянутих нами просторів. При цьому, попарні добутки многочленів Лежандра $P_i(x)P_j(x),(i,j=1,...,n)$ утворюють ортогональний базис в $\widetilde{\mathrm{M}}^n$ відносно скалярного добутку, індукованого простором $\widetilde{L}_2$, а попарні добутки квазіспектральних многочленів $K_i(x)K_j(y),(i,j=1,...,n)$ відносно скалярного добутку, індукованого і одним, і іншим просторами. Точніше останній факт сформульовано в наступному твердженні

<u>***Твердження 7.1.***</u> Для довільних $(i,j)\neq(k,l)$ мають місце співвідношення

$$\langle K_i(x)K_j(y),K_k(x)K_l(y)\rangle = 0,(i,j,k,l=1,...,n),$$

$$\langle K_i(x)K_j(y),K_i(x)K_j(y)\rangle = \lambda_i+\lambda_j,(i,j=1,...,n)$$

Доведення твердження. Із означення 7.1 скалярного добутку $\langle,\rangle$ і тверджень, сформульованих у факті 6.5 про ортогональність квазіспектральних многочленів і їхніх первісних , шляхом простих обчислень отримуємо ортогональність і норму елементів ортогонального базису в $\widetilde{\mathrm{M}}^n$, побудованого із квазіспектральних многочленів відносно даного скалярного добутку.

Означення 7.2. Для довільної функції $f\in\widetilde{L}_2$, коефіцієнти Фур'є по системі квазіспектральних многочленів $K_i(x)K_j(y)(i,j=0,1,...)$ відносно скалярного добутків $\langle,\rangle = \langle,\rangle_{\widetilde{W}_2^1}, (,)_{L_2} = (,)$ будемо позначати через $\hat{f}_{ij},\bar{f}_{ij}$, відповідно, при цьому визначаючи ці коефіцієнти лише для $i,j=1,...,n$. Наприклад, $\hat{f}_{ij} = \langle f, K_i(x)K_j(y)\rangle$.

Означення 7.3. Для довільної функції $f\in\widetilde{L}_2$ коефіцієнти Фур'є по системі многочленів Лежандра $P_i(x)P_j(y)(i,j=0,1,...)$ будемо позначати через $\widetilde{f}_{ij}$.

В останньому означенні введені коефіцієнти так званого ряду Фур'є-Лежандра.

Твердження 7.2. Припустимо, що $u \in \widetilde{W}_2^1, q \in \widetilde{L}_2$ довільні функції, що задовольняють рівняння

$$-\pi_{xy}\left(\int_{-1}^{y} dy_1 \int_{-1}^{y_1} u(x,y_2)dy_2 + \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} u(x_2,y)dx_2\right) = q(x,y). \quad (7.2)$$

Тоді для довільної функції $p \in \widetilde{L}_2$ має місце співвідношення вигляду

$$\langle u, p\rangle = (q, p). \quad (7.3)$$

Доведення. Помножимо ліву і праву частини (7.2) на функцію p, проінтегруємо за частинами і отримаємо (7.3). При цьому довелося врахувати, що інтеграли із змінною верхнею межею від p по кожній змінній інтегровані в квадраті. Наприклад,

$$\left\|\int_{-1}^{x} p dx_1\right\|_{L_2[-1,1]} \le \|x+1\|_{L_2[-1,1]} \|p\|_{L_2[-1,1]}, \quad (7.4)$$

тобто інтеграл із змінною верхньою межею по x інтегрований в квадраті. Таким чином, функція p є елементом простору $\widetilde{W}_2^1$ в якому визначений скалярний добуток $\langle , \rangle$.

Твердження 7.3. *Припустимо, що $u \in \widetilde{W}_2^1, q \in \widetilde{L}_2$ такі функції, що має місце рівність (7.2). Тоді, коефіцієнт Фур'є $\hat{u}_{ij}$ функції u в $\widetilde{W}_2^1$ та коефіцієнт Фур'є $\overline{q}_{ij}$ в $\widetilde{L}_2$ функції q зв'язані між собою співвідношенням*

$$\hat{u}_{ij} = \overline{q}_{ij} / (\lambda_i + \lambda_j)(i, j = 1,...,n). \quad \textit{(7.5)}$$

Доведення. Застосуємо твердження (7.2) при $p = K_i(x)K_j(y)$ і отримаємо співвідношення вигляду

$$\langle u, K_i(x)K_j(y)\rangle = (q, K_i(x)K_j(y)). \quad (7.6)$$

Із твердження 7.1 слідує, що $\overline{q}_{ij} = (q, K_i(x)K_j(y))$,

$$\hat{u}_{ij} = \langle u, K_i(x)K_j(y)\rangle / \langle K_i(x)K_j(y)\rangle^2 = \langle u, K_i(x)K_j(y)\rangle / (\lambda_i + \lambda_j).$$

Із останніх двох формул і (7.6) слідують співвідношення (7.5), які потрібно було довести.

Зауваження 7.1. Якщо функція q в рівнянні (7.2) відома, то твердження 7.3 дає можливість знайти коефіцієнти Фур'є функції u за квазіспектральними многочленами і таким чином записати наближений розв'язок цього інтегропроекційного рівняння у вигляді

$$u_n = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\overline{q}_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} K_i(x)K_j(y) \quad (7.7)$$

Причому, формула (7.7) дає фактично відрізок ряду Фур'є в гільбертовому просторі $\widetilde{W}_2^1$ по системі квазіспектральних многочленів. Ми, звичайно , розуміємо, що систему квазіспектральних многочленів $K_i(x)K_j(y)(i, j = 1,...,n)$ можна доповнити до ортогонального базису у всьому просторі $\widetilde{W}_2^1$, використавши процес ортогоналізації Грама-Шмідта.

Сформулюємо означення про представлення многочленного наближення розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Правда, з метою практичного застосування зробимо невелике узагальнення. Замінимо рівняння (2.1) на рівняння вигляду

$$-(\alpha u_{xx} + \beta u_{yy}) = f(x,y), \quad (7.8)$$

де $\alpha > 0, \beta > 0$ деякі числа.

Означення 7.4 Многочленним наближенням розв'язку задачі Діріхле (7.8),(2.2),(2.3) будемо називати многочлен вигляду

$$u_n=\int\limits_{-1}^{x}dx_1\int\limits_{-1}^{y}S_n^{-1}\pi_{xy}^{n}\left(\int\limits_{-1}^{x_1}dx_2\int\limits_{-1}^{y_1}g(x_2,y_2)dy_2\right)+R_n(x,y), \tag{7.9}$$

де $g(x,y)=f(x,y)-\alpha\frac{y-1}{2}\partial_{xx}\varphi_1+\alpha\frac{y+1}{2}\partial_{xx}\varphi_2-\beta\frac{x-1}{2}\partial_{yy}\psi_1+\beta\frac{x+1}{2}\partial_{yy}\psi_2$, $a=u(-1,-1)$,

$$R_n(x,y)=\pi_{xy}^{n+1}\left\{\int\limits_{-1}^{x}dx_1\int\limits_{-1}^{y}\left[\frac{\psi_2'(y_1)-\psi_1'(y_1)}{2}+\frac{\varphi'(x_1)-\varphi'(x_1)}{2}-\frac{c}{4}\right]dy_1+\varphi_1(x)+\psi_1(y)-a\right\},$$

$c=u(1,1)+u(-1,-1)-u(-1,1)-u(1,-1)$, а S_n^{-1}оператор, обернений до оператора вигляду

$$S_n=S_n(u_n'')=-\pi_{xy}^{n}\left(\alpha\int\limits_{-1}^{y}dy_1\int\limits_{-1}^{y_1}u_n''(x,y_2)dy_2+\beta\int\limits_{-1}^{x}dx_1\int\limits_{-1}^{x_1}u_n''(x_2,y)dx_2\right), \tag{7.10}$$

$u_n''\in\widetilde{\mathrm{M}}^n$.

Зауваження 7.2. Очевидно, при виконанні умови $\alpha=\beta=1$ формула (7.9) є представленням наближеного розв'язку задачі Діріхле (2.1)-(2.3) для рівняння Пуассона . Ми і надалі будемо вважати виконаною цю умову, якщо не буде обумовлено протилежне.

Зауваження 7.3. Продовжуючи міркування висловлені в зауваженні 7.1 спробуємо оцінити якість наближення невідомого розв'язку u рівняння (7.2) з допомогою многочлена, який дається формулою (7.7). Із відомої нерівності Бесселя для рядів Фур'є відразу випливає, що в метриці простору $\widetilde{W}_2^1$ многочлена, який наближає краще ніж побудований (7.7) просто не існує. В таких випадках говорять що даний многочлен здійснює найкраще наближення. Але, питання про величину похибки цього наближення проведеними міркуваннями не розв'язується. Тому, перейдемо до оцінки фактичної величини похибки наближення.

8.Оцінка похибок в $\widetilde{W}_2^1$ при наближенні розв'язків інтегрального рівняння.

Наведемо спочатку відомі і необхідні нам для подальшого викладу факти.

Факт 8.1.Для інтегрування многочленів Лежандра має місце наступна формула

$$\int\limits_{-1}^{x}P_i(x)dx=\frac{P_{i+1}(x)-P_{i-1}(x)}{2i+1}, i=1,2,\dots. \tag{8.1}$$

Крім цього,

$$\|P_i\|_{L_2[-1,1]}^2=\frac{2}{2i+1}. \tag{8.2}$$

З цього класичного факту, відразу слідує наступне просте твердження.

Твердження 8.1. Для норми невизначеного інтеграла від многочлена Лежандра має місце рівність

$$\left\|\int\limits_{-1}^{x}P_i(x_1)dx_1\right\|_{L_2[-1,1]}^2=\frac{4}{(2i-1)(2i+1)(2i+3)} \tag{8.3}$$

Твердження 8.2. Для норми невизначеного інтеграла від довільної функції $p\in\widetilde{L}_2[-1,1]$ має місце нерівність вигляду

$$\left\|\int\limits_{-1}^{x}p(x_1)dx_1\right\|_{L_2[-1,1]}\le\frac{2}{\pi}\|p\|_{L_2[-1,1]}. \tag{8.4}$$

При цьому константа в (8.4) є точною.

Доведення. Довільну функцію $q=q(x), x\in[0,1], q\in L_2$, для якої

$$\int\limits_{0}^{1}q(x)dx=0, \tag{8.5}$$

можна парним чином продовжити на проміжок $[-1,0]$, тобто покласти $q(-x)=q(x), x\in[0,1]$. Отриману функцію продовжимо періодично на всю пряму, зберігши за нею попереднє позначення. Отриману функцію можна представити рядом Фур'є вигляду

$$q=\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \pi i x \ , \tag{8.6}$$

де

$$a_i = \int_{-1}^{1} q(x)\cos \pi i x dx = 2\int_{0}^{1} q(x)\cos \pi i x dx . \tag{8.7}$$

Отже, довільну функцію $q\in L_2[0,1]$, для якої має місце умова (8.5), можна представити у вигляді тригонометричного ряду (8.6), коефіцієнти якого представляються формулою (8.7). При цьому, $\|q\|^2_{L_2[0,1]} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(a_i)^2$.

Перенесемо отриманий результат з проміжку $[0,1]$ на проміжок $[-1,1]$, отримаємо, що довільну функцію $p\in L_2[-1,1]$ можна представити у вигляді

$$p=\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos\frac{\pi i(x+1)}{2}, \tag{8.8}$$

де

$$a_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p\cos\frac{\pi i(x+1)}{2}dx \tag{8.9}$$

і для її норми має місце формула

$$\|p\|^2_{L_2[-1,1]} = \sum_{i=1}^{\infty}(a_i)^2 . \tag{8.10}$$

Інтегруючи (8.8), отримаємо

$$\int_{-1}^{x} p(x_1)dx_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_i}{\pi i}\sin\frac{\pi i(x+1)}{2}. \tag{8.11}$$

Шляхом прямих обчислень отримуємо, що

$$\left\|\int_{-1}^{x} p(x_1)dx_1\right\|^2_{L_2[-1,1]} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{4(a_i)^2}{\pi^2 i^2}. \tag{8.12}$$

Із (8.10) та (8.12) відразу отримуємо твердження 8.2. При $p=\cos\frac{\pi i(x+1)}{2}$ нерівність (8.4) перетворюється в рівність, тобто константа в ній, справді, є точною.

Наступне твердження дає одне з можливих узагальнень твердження 8.2.

Твердження 8.3. Для норми невизначеного інтеграла від довільної функції $p\in \tilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$ має місце нерівність вигляду

$$\left\|\int_{-1}^{x} p(x_1)dx_1\right\|_{L_2([-1,1]\times[-1,1])} \le \frac{2}{\pi}\|p\|_{L_2([-1,1]\times[-1,1])} . \tag{8.13}$$

При цьому константа в (8.13) є точною.

Доведення. Функцію p можна представити у вигляді

$$p=\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\cos\frac{\pi i(x+1)}{2}\cos\frac{\pi j(x+1)}{2} . \tag{8.14}$$

Невизначений інтеграл від неї у вигляді

$$\int_{-1}^{x} p(x_1)dx_1 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{2a_{ij}}{\pi i} \sin\frac{\pi i(x+1)}{2} \cos\frac{\pi j(x+1)}{2}. \qquad (8.15)$$

Виразивши через коефіцієнти a_{ij} L_2-норми функції p і інтеграла від неї і порівнявши їх, ми як і в попередньому випадку отримаємо нерівність (8.13), константа в якій є точною, тобто її не можна зменшити для всього класу функцій.

Означення 8.1. Введену вище метрику $\langle\ \rangle$ прийнято називати енергетичною, а введений простір $\widetilde{W}_2^1$ енергетичним простором інтегрального оператора, який визначений з допомогою формули

$$Su = -\pi_{xy}\left(\int_{-1}^{y} dy_1 \int_{-1}^{y_1} u(x,y_2)dy_2 + \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} u(x_2,y)dx_2\right). \qquad (8.16)$$

Порівняємо норму $\langle\ \rangle$ з квадратичною.

Твердження 8.4. Для довільної функції $u \in \widetilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$ має місце нерівність вигляду

$$\langle u,u\rangle = (Su,u) \le \frac{4}{\pi}(u,u). \qquad (8.17)$$

Тут і далі $(\ )$ означає скалярний добуток в просторі L_2.

Доведення. Із означення 7.1 слідує, що

$$\langle u,u\rangle = (u,u)_{\widetilde{W}_2^1} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\int_{-1}^{x} u(x_1,y)dx_1\right)^2 + \left(\int_{-1}^{y} u(x,y_1)dy_1\right)^2\right]dxdy. \qquad (8.18)$$

Для оцінки кожного з доданків в (8.18) можна скористатися твердженням 8.3 і таким чином довести нерівність (8.17).

Твердження 8.5. Якщо для точного розв'язку рівняння (7.2) має місце включення $u \in \widetilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$, то для побудованого наближеного розв'язку u_n (7.7) в енергетичній інтегральній метриці має місце нерівність

$$\langle u-u_n\rangle \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|u-\widetilde{u}_n\|, \qquad (8.19)$$

де $\|\ \|$ означає L_2 метрику, а $\widetilde{u}_n$ n-ну часткову суму ряду Фур'є-Лежандра (означення 6.1).

Доведення. В зауваженні 7.2 було відмічено, що многочлен u_n найкращий в метриці простору $\widetilde{W}_2^1$. Тому, має місце нерівність $\langle u-u_n\rangle \le \langle u-\widetilde{u}_n\rangle$. Замітивши, що обидва многочлени $u_n, \widetilde{u}_n$ належать простору $\widetilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$, скористаємось твердженням 8.4 і отримаємо нерівність (8.19).

Означення 8.2. Візьмемо множину функцій $f \in C^\infty([-1,1]\times[-1,1])$, підпорядкованих умовам $\left|\partial_x^r u\right| \le M_1, \left|\partial_y^r u\right| \le M_2$. Замкнемо цю множину в метриці простору $\widetilde{L}_2$. Отриманий клас функцій позначимо через $\widetilde{W}_2^r(M) = \widetilde{W}_2^r([-1,1]\times[-1,1])$.

Твердження 8.6. Якщо для точного розв'язку рівняння (7.2) має місце включення $u \in \widetilde{W}_2^r(M)$, то для побудованого наближеного розв'язку $u_n, n > r$ (7.7) в енергетичній інтегральній метриці має місце оцінка

$$\langle u-u_n\rangle \le A_r M_r (n+1)^{-r}, \qquad (8.20)$$

де A_r залежить лише від r.

Доведення. Має місце нерівність вигляду (Бабенко[1])

$$\|u-\tilde{u}_n\| \le A_r M_r (n+1)^{-r}, \tag{8.21}$$

де $\tilde{u}_n$ n-на часткова сума ряду Фур'є-Лежандра функції u. Взявши її до уваги із (8.19) отримаємо (8.20).

9. Стійкість наближеного розв'язку.

Означення 9.1. *Через* $\dot{\mathrm{M}}^n$ *позначимо підпростір многочленів степеня не вище* n, *які на сторонах квадрата* $[-1,1]\times[-1,1]$ *перетворюються в нуль.*

Вивчимо детальніше оператор вигляду

$$T_n(g_n) = -\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{y} S_n^{-1}\pi_{xy}^n \left(\int_{-1}^{x_1} dx_2 \int_{-1}^{y_1} g_n(x_2,y_2)dy_2\right), \tag{9.1}$$

де $g_n \in \dot{\mathrm{M}}^n$.

Твердження 9.1. Власні числа та власні значення оператора (9.1), відповідно дорівнюють $\dot{K}_i(x)\dot{K}_j(y) = \int_{-1}^{x} K_i(x_1)dx_1 \int_{-1}^{y} K_j(y_1)dy_1$, та $\dfrac{\lambda_i\cdot\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}$, $i,j=1,...,n$.

Доведення. Дійсно,

$$T_n(\dot{K}_i(x)\dot{K}_j(y)) = -\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{y} S_n^{-1}\pi_{xy}^n \left(\int_{-1}^{x_1} dx_2 \int_{-1}^{y_1} dy_2 \int_{-1}^{x_2} dx_3 \int_{-1}^{y_2} K_i(x_3)K_j(y_3)dy_3\right).$$

Скориставшись теоремою Фубіні, і означенням квазіспектральних многочленів отримаємо

$$T_n(\dot{K}_i(x)\dot{K}_j(y)) = \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{y} S_n^{-1}\pi_{xy}^n [(\lambda_i K_i(x_1) + \tau'_{n+1}P_{n+1}(x_1) + \tau'_{n+2}P_{n+2}(x_1) +$$
$$+\tau'_0)\cdot(\lambda_j K_j(y_1) + \tau''_{n+1}P_{n+1}(y_1) + \tau''_{n+2}P_{n+2}(y_1) + \tau''_0)]$$

де $P_i = P_i(x)$ многочлени Лежандра степені i.

Виконуючи ортогональне проектування, отримаємо

$$T_n(\dot{K}_i(x)\dot{K}_j(y)) = \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{y} S_n^{-1}(\lambda_i\lambda_j K_i(x)K_j(y)).$$

Оскільки, многочлени $\dot{K}_i(x)\dot{K}_j(y)$ є власними для оператора S_n^{-1}, то

$$T_n\left(\dot{K}_i(x)\dot{K}_j(y)\right) = \left(\alpha\beta\lambda_i\lambda_j\right)/\left(\alpha\lambda_i + \beta\lambda_j\right)\dot{K}_i(x)\dot{K}_j(y).$$

Наслідок 9.1. Оператор T_n є самоспряженим (симетричним) в $\dot{\mathrm{M}}^{n+1}$.

Дійсно, $(T_n(g_n), f_n) = (T_n[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{K}(x)\dot{K}_j(y)], \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dot{K}_i(x)\dot{K}_j(y)) =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}a_{ij}b_{ij}\|\dot{K}_i\|^2\|\dot{K}_j\|^2$, де $\lambda_{ij} = (\alpha\beta\lambda_i\lambda_j)/(\alpha\lambda_i+\beta\lambda_j)$.

Наслідок 9.2. *Для норми оператора* T_n *мають місце рівності*

$$\|T_n\| = \max_{i,j}\frac{\alpha\beta\lambda_i\lambda_j}{\alpha\lambda_i+\beta\lambda_j}, \quad \|T_n^{-1}\| = \min_{i,j}\frac{\alpha\beta\lambda_i\lambda_j}{\alpha\lambda_i+\beta\lambda_j}.$$

Отриманий наслідок гарантує стійкість отриманих многочленних наближень розв'язку задачі Діріхле.

Твердження 9.2. *Спектр оператора вигляду* $T(g) = -\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{y} S^{-1}\pi_{xy} \int_{-1}^{x_1} dx_2 \int_{-1}^{y_1} g(x_2,y_2)dy_2$

співпадає з проміжком $\left[0, 2/\pi^2\right]$.

Доведення. Повне сімейство власних функцій оператора T утворюють функції вигляду $\varphi_{ij} = \sin\frac{\pi i(x+1)}{2}\sin\frac{\pi j(y+1)}{2}$, а відповідні їм власні значення дорівнюють $4/\pi^2(i^2+j^2), i, j = 1,2,...$

Дійсно, $\pi_{xy}\int_{-1}^{x_1} dx_2 \int_{-1}^{y_1} \varphi_{ij}(x_2, y_2)dy_2 =$

$$\pi_{xy}\left(\frac{4}{\pi^2 ij}\cos\frac{\pi i(x_2+1)}{2}\cos\frac{\pi j(y_2+1)}{2}\right)\Bigg|_{x_2=-1,\, y_2=-1}^{x_2=x_1,\, y_2=y_1} = \frac{4}{\pi^2 ij}\cos\frac{\pi i(x_1+1)}{2}\cos\frac{\pi j(x_2+1)}{2}.$$

Продовжуючи так далі, отримаємо $T\varphi_{ij} = \dfrac{4}{\pi^2(i^2+j^2)}\varphi_{ij}$.

А так як $\max\limits_{i,j}\dfrac{4}{\pi^2\left(i^2+j^2\right)} = \dfrac{2}{\pi^2}, \min\limits_{i,j}\dfrac{4}{\pi^2\left(i^2+j^2\right)} = 0$, то дане твердження для самоспряженого оператора T доведено.

Тепер можна уточнити наслідок 9.2.

Наслідок 9.3. *Для норми оператора* T_n *має місце оцінка* $\|T_n\| = \max\limits_{i,j}\dfrac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j} < \dfrac{2}{\pi^2}$.

Нагадаємо, що для чисел $\lambda_i, i = 1,2,...,n$ мають місце оцінки $\lambda_i < 4/(\pi^2 i^2)$.

Аналогічно, мають місце оцінки $\dfrac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j} < \dfrac{4}{\pi^2(i^2+j^2)}$.

Це слідує, наприклад, із мінімаксного принципу Куранта, який характеризує власні значення компактних операторів (Ректоріс [3]).

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа.-М.:Наука, 1986.-744с.
2. *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.-Киев:Наук.думка, 1988.-304с.
3. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике.-М.: Мир, 1985.-590с.
4. *Янчук П.С.* Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений//Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов.-Киев:Ин-т математики АН УССР.-С.112-121.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Надійшла 18.01.2000

Янчук П.С. МЕТОД МНОГОЧЛЕННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ *Получены явные формулы для многочленных приближений задачи Дирихле в прямоугольнике, которые являются наилучшими относительно энергетической метрики. Изучаются вопросы аппроксимации и устойчивости для полученных приближений.*

Janchuk P.S. THE METHOD OF POLYNOMIAL FOURIER SERIES FOR POISSON EQUATION IN RECTANGLE *In work polynomial approximation of solution of Dirichlet problem are obtained. The problems of approximation and stability are studied.*