ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

Серія
прикладна математика

ВИПУСК 1

ЗБІРНИК
НАУКОВИХ
ПРАЦЬ

Рівне-2003

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем механіки і математики НАНУ ім. Я.С.Підстригача, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

ISBN 966-7281-02-8

УДК 532.546-532.72

Присяжнюк І.М.

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ "КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ" У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

Одержано асимптотичний розклад розв'язку сингулярно збуреної задачі типу "конвекція-дифузія" у чотирьохзв'язній області, особливістю якого є процедура згладження негладкостей регулярної його складової вздовж лінії розділу течії. Приводяться результати чисельних досліджень.

Вступ. У роботах [1 – 5], спираючись на відому публікацію Вішика М.Й. та Люстерніка Л.А. [6], розроблено асимптотичний метод розв'язання типових крайових та мішаних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях (прямокутник, півсмуга і т. ін.) з урахуванням різного рівня гладкості початкової і граничних умов та їх узгодженості у кутових (реброви) точках. А в [7 – 10] відповідні алгоритми модифіковано стосовно розв'язання задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних криволінійних областях обмежених двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями (одна із яких може бути вільною), а також – задач для двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними лініями (внутрішнім та зовнішнім гладкими замкненими контурами) у випадках переважання конвективних складових процесу над дифузійними, що приводить до появи у відповідному параболічному рівнянні малого параметра при старших похідних. В основі методики розв'язання таких задач лежить ідея переходу від координат фізичної області фільтрації до відповідної області комплексного потенціалу – прямокутника чи смуги (при цьому вихідна задача в кільці переходить у відповідну періодичну задачу для прямокутника чи смуги). Актуальною є проблема розв'язання аналогічних задач для многозв'язних областей, відповідні області комплексних потенціалів яких є більш складними (об'єднання прямокутників та смуг). Метою даної роботи є побудова асимптотичного розвинення розв'язку сингулярно збуреної задачі для рівняння

С. 118 – 128

конвективної дифузії у чотирьохзв’язній спеціально заданій області.

Загальна постановка задачі. Розглянемо модельну задачу конвективної дифузії при фільтрації в нескінченній області (пористому пласті) G_z скінченої комплексної площини (z), обмеженій трьома замкнутими гладкими контурами L_1, L_2, L_3:

$$\varepsilon(c_{xx} + c_{yy}) - v_x \cdot c_x - v_y \cdot c_y = c_t, \quad z = x + iy \in G_z,$$
$$0 < t < \infty\,,\ (v_x, v_y) = grad\varphi, \tag{1}$$

$$c\big|_{L_i} = c_i^*(P,t),\ i = \overline{1,3},\ c(x,y) \to 0 \quad при \quad z \to \infty,$$
$$(x,y,t) \in G_z \times (0,\infty)\,,\ c\big|_{t=0} = c_0^0(x,y), \tag{2}$$

$$\Delta\varphi = 0\,,\ \varphi\big|_{L_i} = \varphi_i\,,\ \oint\limits_{L_i} - v_y dx + v_x dy = Q_i\,,$$
$$0 < Q_i < \infty,\ \varphi \to \infty\ при\ z \to \infty,\ \ i = \overline{1,3}, \tag{3}$$

де P – біжуча точка відповідної ділянки границі даної області ($P \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$), ε – коефіцієнт конвективної дифузії (малий параметр), φ_i – задані значення потенціалу $\varphi(x,y)$ на граничних еквіпотенціальних лініях $(-\infty < \varphi_i < \infty,\ \ i = \overline{1,3})$. $c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_0^0$ – задані достатньо гладкі та узгоджені функції [1 – 3], у випадку $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \overset{df}{=} \varphi_0$ (тоді $Q_{AA'} = Q_{BB'} = Q_{CC'} \overset{df}{=} \frac{Q_*}{3}$). Фізична область фільтрації G_z, на фоні якої відбувається конвективно-дифузійне перенесення частинок , зображена на рис.1a). На рис.1b) зображено відповідну область комплексного потенціалу G_w, де $w = \varphi + i\psi$, $\psi = \psi(x,y)$ – функція течії (комплексно спряжена до функції $\varphi = \varphi(x,y)$). Припустимо, що задача (3), з використанням конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$), є розв’язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей $\vec{v} = \left(v_x(x,y), v_y(x,y)\right)$. Тоді, шляхом переходу від змінних (x,y) до (φ,ψ) області комплексного потенціалу G_w, задачу (1) – (2) зведемо до відповідної періодичної задачі:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)(c_{\varphi\varphi}+c_{\psi\psi})-v^2(\varphi,\psi)c_{\varphi}=c_t,\ (\varphi,\psi,t)\in G_w\times(0,\infty)\overset{df}{=}\Omega,$$

$$v^2(\varphi,\psi)=\vec{v}\,\vec{\bar{v}}=v_x^2+v_y^2,$$

$$c(\varphi_1,\psi,t)=c^*(\psi,t)=\left[\begin{array}{l} c_1^*(\psi,t),\ \dfrac{2Q_*}{3}<\psi\le Q_*,\ t\in(0,\infty),\\ c_2^*(\psi,t),\ \dfrac{Q_*}{3}<\psi\le\dfrac{2Q_*}{3},\ t\in(0,\infty),\\ c_3^*(\psi,t),\ 0\le\psi\le\dfrac{Q_*}{3},\ t\in(0,\infty),\end{array}\right.$$

$$c(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi),\ c(\varphi^*,0,t)=c(\varphi^*,\frac{Q_*}{3},t)=c(\varphi^*,\frac{2Q_*}{3},t)=c(\varphi^*,Q_*,t),$$

$$c\big|_{AO}=c\big|_{A'O'},\ c\big|_{BO'}=c\big|_{B'O''},\ c\big|_{CO''}=c\big|_{C'O'''},\ c\big|_{OE_\infty}=c\big|_{O'''E'_\infty}. \qquad (4)$$

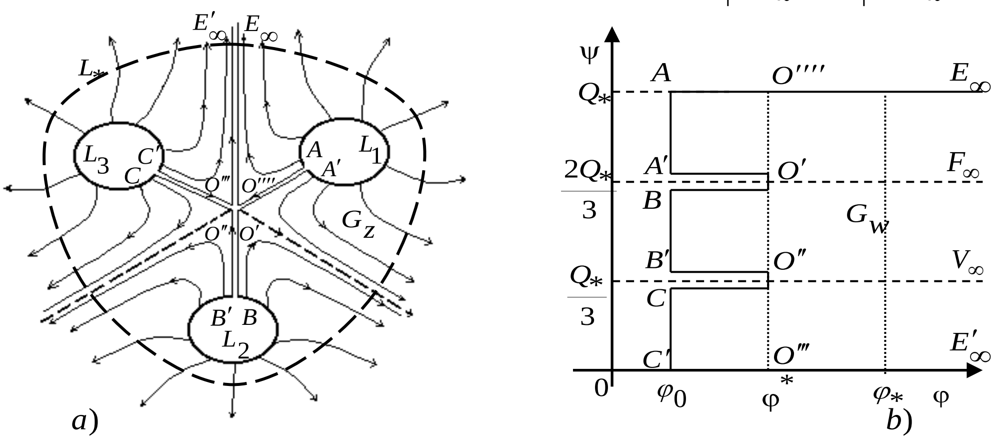


*Рис.*1. *Фізичнаобласть G_z та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w*

Асимптотика розв'язку задачі. У випадку сильної узгодженості початкової та граничних умов (див., напр., [6]), зокрема, при виконанні умов $c\big|_A=c\big|_{C'}$, $c\big|_{A'}=c\big|_B$, $c\big|_{B'}=c\big|_C$, розвязок задачі (4) шукаємо у вигляді:

$$c(\varphi,\psi,t)=\left(c_0(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i c_i\right)+r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \qquad (5)$$

де $r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ – залишковий член, $c_i(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени регулярної частини асимптотики: c_0 – розв'язок відповідної виродженої задачі (задачі конвективного переносу); $c_1,...,c_n$ – поправки, що враховують вплив дифузії.

Здійснивши підстановку (5) в (4) та застосувавши стандартну процедуру прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, для знаходження функцій $c_i(\varphi,\psi,t)$ приходимо до таких задач:

$$v^2(\varphi,\psi)c_{0\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{0t}(\varphi,\psi,t)=0,$$

$$c_0(\varphi_1,\psi,t)=c^*(\psi,t),$$

$$c_0(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi),\varphi\in(\varphi_1,\infty),\psi\in(0,Q_*), \tag{6}$$

$$v^2(\varphi,\psi)c_{i\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{it}(\varphi,\psi,t)=g_i(\varphi,\psi,t),$$

$$g_i(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c_{i-1}}{\partial\psi^2}\right),(\varphi,\psi)\in G_w,$$

$$c_i(\varphi_1,\psi,t)=0,t\in(0,\infty),\psi\in(0,Q_*),$$

$$c_i(\varphi,\psi,0)=0,\varphi\in(\varphi_*,\infty),\psi\in(0,Q_*). \tag{7}$$

В результаті їх розвязання (аналогічно [6]) матимемо:

$$c_0(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l}
c_0^1(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{ll} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi), & t\le f(\varphi,\psi)\\ c_1^*(\psi,t-f(\varphi,\psi)), & t>f(\varphi,\psi)\end{array}\right., \quad (\varphi,\psi)\in G_{w(1)},\\
c_0^2(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{ll} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi), & t\le f(\varphi,\psi)\\ c_2^*(\psi,t-f(\varphi,\psi)), & t>f(\varphi,\psi)\end{array}\right., \quad (\varphi,\psi)\in G_{w(2)},\\
c_0^3(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{ll} c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi), & t\le f(\varphi,\psi)\\ c_3^*(\psi,t-f(\varphi,\psi)), & t>f(\varphi,\psi)\end{array}\right., \quad (\varphi,\psi)\in G_{w(3)},
\end{array}\right. \tag{8}$$

$$c_i(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{g_{1i}(\tilde\varphi,\psi,\ f_1^{-1}(f_1(\tilde\varphi,\psi)+t-f_1(\varphi,\psi)))}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}d\tilde\varphi,\ t\ge f_1(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g_{1i}(f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi)-t+\tilde t),\psi,\tilde t)d\tilde t,\quad t<f_1(\varphi,\psi),\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{g_{2i}(\tilde\varphi,\psi,\ f_2^{-1}(f_2(\tilde\varphi,\psi)+t-f_2(\varphi,\psi)))}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}d\tilde\varphi,\quad t\ge f_2(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g_{2i}(f_2^{-1}(f_2(\varphi,\psi)-t+\tilde t),\psi,\tilde t)d\tilde t,\quad t<f_2(\varphi,\psi),\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{g_{3i}(\tilde\varphi,\psi,\ f_2^{-1}(f_2(\tilde\varphi,\psi)+t-f_2(\varphi,\psi)))}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}d\tilde\varphi,\ t\ge f_2(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g_{3i}(f_2^{-1}(f_2(\varphi,\psi)-t+\tilde t),\psi,\tilde t)d\tilde t,\ t<f_2(\varphi,\psi)\ ,\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{9}$$

де $f(\varphi,\tilde{\psi})=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\tilde{\psi})}$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi=\tilde{\psi}$, від точки $(\varphi_0,\tilde{\psi})$ до точки $(\varphi,\tilde{\psi})$, f^{-1} – функція оберненена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція $\frac{1}{v^2}$ – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена), $g_{ki}(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)(\frac{\partial^2 c_{i-1(k)}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c_{i-1(k)}}{\partial\psi^2})$, $(\varphi,\psi)\in G_{w(k)}$, $k=1,2,3$. $G_w=G_{w(1)}\cup G_{w(2)}\cup G_{w(3)}$, $G_{w(1)}=\{(\varphi,\psi):\varphi_1\le\varphi<\infty,$ $2Q_*/3<\psi\le Q_*\}$, $G_{w(2)}=\{(\varphi,\psi):\varphi_1\le\varphi<\infty, Q_*/3<\psi\le 2Q_*/3\}$, $G_{w(3)}=\{(\varphi,\psi):$ $G_{w(3)}=\varphi_1\le\varphi<\infty, 0\le\psi\le Q_*/3\}$.

Якщо фізична область G_z обмежена зовнішнім контуром L_*, де $\varphi\big|_{L_*}=\varphi_*$, то задавши додаткову умову $c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t)$ на цьому контурі, розв'язок задачі (4) шукатимемо у вигляді:

$$c(\varphi,\psi,t)=\left(c_0(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i c_i\right)+\pi(\varphi,\psi,t)+r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon) \tag{10}$$

де $\pi(\varphi,\psi,t)$ – функція типу пограншару в околі $\varphi=\varphi_*$ яка служить для врахування дифузійних процесів вздовж границі виходу фільтраційного потоку і знаходиться аналогічно роботі [7].

Всюди області $\Omega^*=\Omega\setminus(\Omega_0\times(0,t^*))$, де t^* довільне додатнє дійсне число, Ω_0 – обєднання довільних околів точок O',O'',O''',O'''' – образів точки $O\in G_z$ (де швидкість перетворюється в нуль), має місце така оцінка залишкового члена асимптотичного ряду (10):

$$\left|r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\right|=O(\varepsilon^{n+1}) \tag{11}$$

Дійсно, в результаті проведеної "процедури прирівнювання", для оцінки R_n маємо: $\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\cdot\left(r_{n\varphi\varphi}+r_{n\psi\psi}\right)-v^2(\varphi,\psi)\cdot r_{n\varphi}=r_{nt}+r_n^{**}(\varphi,\psi,t,\varepsilon)+$ $+\varepsilon^{n+1}\cdot r_n^*(\varphi,\psi,t)$; $r_n(\varphi_0,\psi,t,\varepsilon)=0$, $r_n(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})$, $R_n(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=$ $=O(\varepsilon^{n+1})$, де, в силу достатньої гладкості та сильної узгодженості початкової та граничних умов, R_n^* – неперервна та рівномірно обмежена в

G функція, $r_n^{**} = O(\varepsilon^{n+1})$. Отже, на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь, приходимо до оцінки (11).

У випадку недостатньої узгодженості функцій $c_1^*(\varphi,\psi,t)$, $c_2^*(\varphi,\psi,t)$, $c_3^*(\varphi,\psi,t)$ проведемо процедуру згладження відповідних негладкостей вздовж ліній течії $\psi_0 = 0\ (\psi_3 = Q_*), \psi_1 = \frac{Q_*}{3}, \psi_2 = \frac{2Q_*}{3}$. Розв'язок даної задачі у цьому випадку шукаємо у вигляді:

$$c(\varphi,\psi,t) = \tilde{c}_0(\varphi,\psi,t) + s_0(\varphi,\psi,t) + \varepsilon\tilde{c}_1(\varphi,\psi,t) + s_1(\varphi,\psi,t) + \pi(\varphi,\psi,t) + r_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon).$$

$$\tilde{c}_0(\varphi,\psi,t) = \left(\frac{\bar{c}_0(\varphi^*,\psi_0,t) + \bar{c}_0(\varphi^*,\psi_1,t) + \bar{c}_0(\varphi^*,\psi_2,t)}{3}\right)\cdot(1 - \Phi(\mathrm{K}(\varphi,\psi))) +$$

$$\bar{c}_0(\varphi,\psi,t)\cdot\Phi(\mathrm{K}(\varphi,\psi)),$$

$$\mathrm{K}(\varphi,\psi) = \frac{\sqrt{(\varphi-\varphi_*)^2 + (\psi-\psi_0)^2\cdot(\psi-\psi_1)^2\cdot(\psi-\psi_2)^2\cdot(\psi-\psi_3)^2}}{\varepsilon},$$

$$\bar{c}_0(\varphi,\psi,t) = c_0^1(\varphi,\psi,t)\cdot\frac{\left(1 - D_1((\psi-\psi_0)(\psi-\psi_1)\right)\cdot\Phi(K_0(\varphi,\psi))\cdot\Phi(K_1(\varphi,\psi)))}{2} +$$

$$+ c_0^2(\varphi,\psi,t)\ \frac{\left(1 - D_2((\psi-\psi_1)(\psi-\psi_2)\right)\cdot\Phi(K_1(\varphi,\psi))\cdot\Phi(K_2(\varphi,\psi)))}{2} + c_0^3(\varphi,\psi,t)\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(1 - D_3((\psi-\psi_2)(\psi-\psi_3)\right)\cdot\Phi(K_0(\varphi,\psi))\cdot\Phi(K_2(\varphi,\psi)))}{2}.$$

$$K_0(\varphi,\psi) = \frac{\sqrt{(\psi-\psi_1)^2 + (\varphi-\varphi^*)^2} + \sqrt{(\psi-\psi_1)^2 + (\varphi-\varphi_*)^2} - (\varphi_* - \varphi^*)}{\varepsilon};$$

$$K_1(\varphi,\psi) = \frac{\sqrt{(\psi-\psi_2)^2 + (\varphi-\varphi^*)^2} + \sqrt{(\psi-\psi_2)^2 + (\varphi-\varphi_*)^2} - (\varphi_* - \varphi^*)}{\varepsilon};$$

$$K_2(\varphi,\psi) = \frac{\sqrt{(\psi-\psi_0)^2 + (\varphi-\varphi^*)^2} + \sqrt{(\psi-\psi_0)^2 + (\varphi-\varphi_*)^2} - (\varphi_* - \varphi^*)}{\varepsilon}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\sqrt{(\psi-\psi_3)^2 + (\varphi-\varphi^*)^2}}{\varepsilon} + \frac{\sqrt{(\psi-\psi_3)^2 + (\varphi-\varphi_*)^2} - (\varphi_* - \varphi^*)}{\varepsilon}\right);$$

$$\Phi(\delta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\delta e^{\frac{-s^2}{2}}\,ds,\ D_1(\Theta) = D_3(\Theta) = \begin{cases}1, & \Theta > 0\\ -1, & \Theta \le 0\end{cases},\ D_2(\Theta) = \begin{cases}1, & \Theta \ge 0\\ -1, & \Theta < 0\end{cases}.$$

Для знаходження функції $s_0(\varphi,\psi,t) = s_{00}(\varphi,\psi,t) + \sqrt{\varepsilon}\cdot s_{01}(\varphi,\psi,t)$, аналогічно [5 – 8], відштовхуємось від наступної задачі:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left((\tilde{c}_0+s_0)_{\varphi\varphi}+(\tilde{c}_0+s_0)_{\psi\psi}\right)-v^2(\varphi,\psi)(\tilde{c}_0+s_0)_{\varphi}=(\tilde{c}_0+s_0)_{t},$$

$$\tilde{c}_0+s_0\big|_{t>0,\varphi=0}=\begin{cases} c_1(\psi,t), & \frac{2Q_*}{3}<\psi\le Q_*, \\ c_2(\psi,t), & \frac{Q_*}{3}<\psi\le\frac{2Q_*}{3}, \\ c_3(\psi,t), & 0\le\psi\le\frac{Q_*}{3}, \end{cases}$$

$$\tilde{c}_0+s_0\big|_{t=0,\varphi>0}=c_0^0(\varphi,\psi).$$

Згладження регулярної поправки c_1 асимптотики та побудова функції $s_1(\varphi,\psi,t)$ проводяться аналогічно.

Приклади та числові розрахунки. Розглянемо плоске ідеальне поле на площині $z=x+iy$, породжене трьома особливими точками – витоками $z=z_1,z_2,z_3$ однакової інтенсивності $Q=Q_*/3$ (кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від двох інших і належить колу $|z|=1$) і точкою стоку $z=\infty$. Комплексний потенціал такого поля запишемо у вигляді:

$$w=\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln(z-z_1)+\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln(z-z_2)+\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln(z-z_3)=$$

$$=\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)) \qquad (12)$$

Звідси $\quad \bar{v}(z)=\dfrac{dw}{dz}=\dfrac{Q}{2\pi}\cdot\dfrac{(z-z_2)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$

(зокрема $\bar{v}(z)=0$);

$$\varphi(x,y)=\frac{Q}{4\pi}\ln\Big((M(x,y)\cdot(x-x_3)-N(x,y)\cdot(y-y_3))^2+$$
$$+(M(x,y)\cdot(y-y_3)+N(x,y)\cdot(x-x_3))^2\Big), \qquad (13)$$

зокрема $\varphi(0,0)=\varphi^*=0$, $\psi(x,y)=\dfrac{Q}{2\pi}\left(arctg\dfrac{M(x,y)(y-y_3)+N(x,y)(x-x_3)}{N(x,y)(x-x_3)+N(x,y)(y-y_3)}+\right.$

$\left.+S(M(x,y)\cdot(x-x_3)+N(x,y)\cdot(y-y_3),M(x,y)\cdot(y-y_3)+N(x,y)\cdot(x-x_3))\right)$,

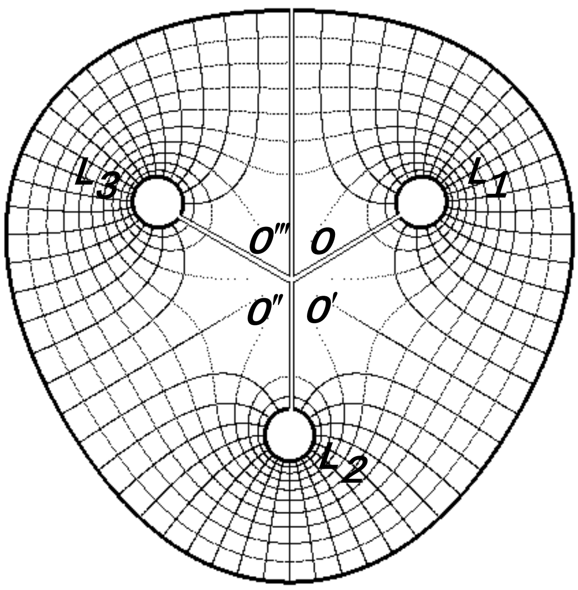
де $\quad M(x,y)=(x-x_1)(x-x_2)-(y-y_1)(y-y_2)$, $\quad N(x,y)=(x-x_2)(y-y_1)-$

$$-(y-y_2)(x-x_1),\ x_k+y_k\cdot i=z_k,\ k=\overline{1,3},\ S(x,y)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\geq 0,\ y\geq 0,\\ \pi, & \text{при} \quad x<0,\\ 2\pi, & \text{при} \quad x>0,\ y<0.\end{cases}$$

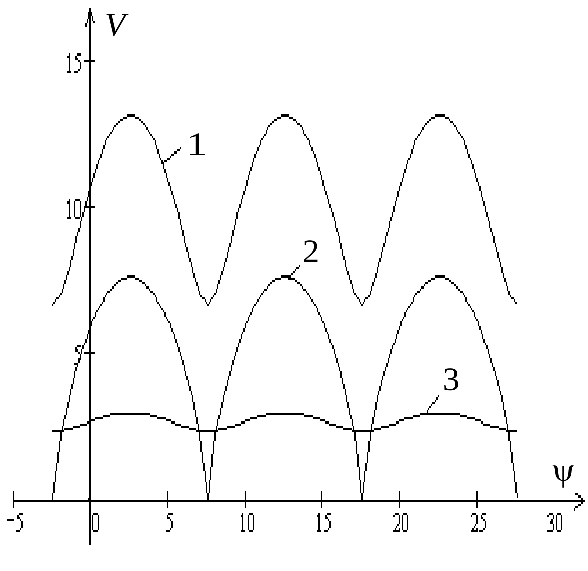
Поклавши в (13) $\varphi=\varphi_0<\varphi^*$, знайдемо рівняння відповідних басейнів витоку навколо точок z_1, z_2, z_3:

$$(M(x,y)\cdot(x-x_3)-N(x,y)\cdot(y-y_3))^2+(M(x,y)\cdot(y-y_3)+$$
$$+N(x,y)\cdot(x-x_3))^2=\exp(\frac{4\pi\varphi_0}{Q}) \tag{14}$$

(тут крива шостого порядку (14) розкладається на три замкнені криві 2-го порядку). Відповідну динамічну сітку $\varphi(x,y)=\overline{\varphi}_l$, $\psi(x,y)=\overline{\psi}_j$, при $z_1=-i$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $\varphi_0=-1.2$, $\varphi_*=2.8$, $Q=10$, $l=\overline{1,10}$, $j=\overline{1,60}$, $\overline{\varphi}_l=\varphi_0+((\varphi_*-\varphi_0)\cdot l)/10$, $\overline{\psi}_j=\frac{(Q_*\cdot j)}{60}$ зображено на рис.2a. Розподіл швидкостей вдовж еквіпотенціальних ліній при $\varphi=\varphi_0,\varphi^*,\varphi_*$ зображено на рис.2b) (криві 1 – 3 відповідно). Ілюстрації розподілу концентрації розчинної речовини при $c_0^0(\varphi,\psi)=e^{-(\varphi+1.2)}$, $c_1(\psi,t)=c_2(\psi,t)=c_3(\psi,t)=e^t$ вздовж еквіпотенціальних ліній $\varphi_1^*=-1.2$, $\varphi_2^*=0$, $\varphi_3^*=1.6$, $\varphi_4^*=2.8$ подано на рис.3.



a) *Динамічна сітка*



b) *Розподіл швидкостей* ($V=|\vec{v}|$)

*Рис.*2

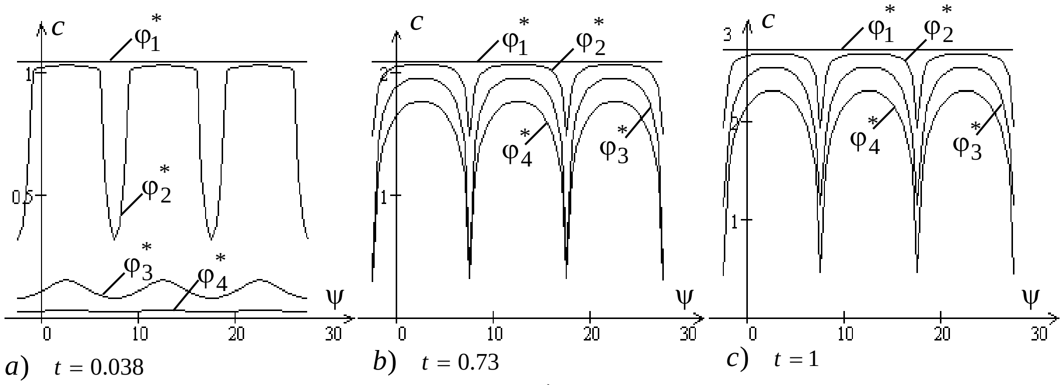


Рис.3. Розподіл концентрації

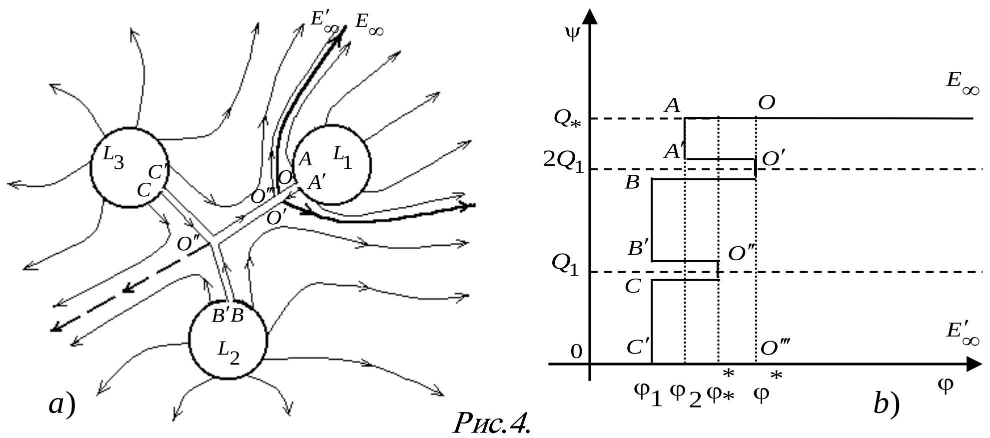


Рис.4.

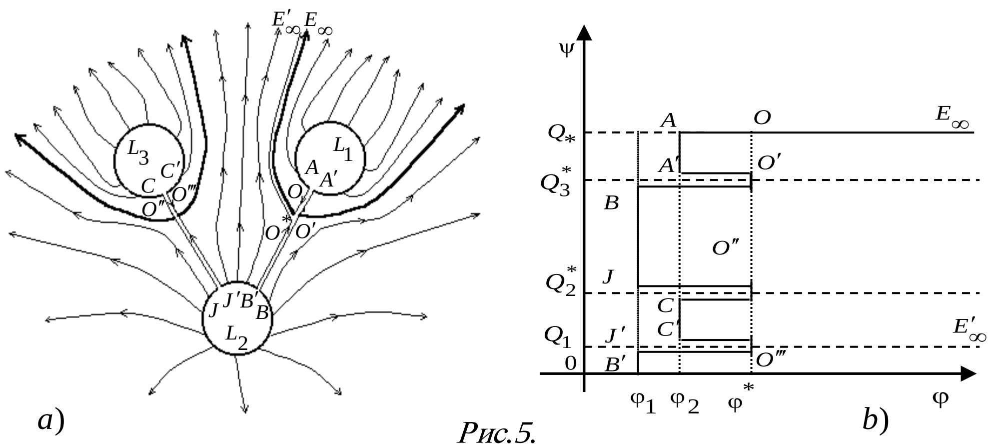


Рис.5.

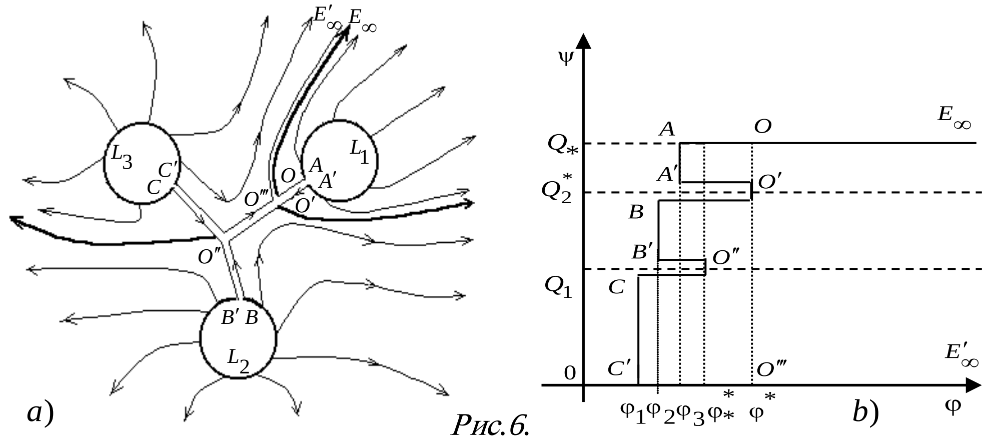


Рис.6.

Зауваження, висновки. Із вище проведених викладок бачимо, що процедура побудови асимптотики розв'язку поставленої задачі у чотирьохзв'язній області відрізняється від відповідного алгоритму у прямокутній області "багатоповерховістю" формул для запису різних членів асимптотичного ряду (у кожній із півсмуг, з яких складається область, складові розвязку представляються "своїми" формулами), а також необхідністю побудови нового типу згладжень вздовж ліній розділу течії.

В залежності від співвідношення заданих значень граничних потенціалів φ_i на контурах L_i (а, отже, й витрат Q_1, Q_2, Q_3), можливі різні випадки формування течії в області G_z та відповідних областей комплексного потенціалу G_ω. Запропонований вище підхід знаходження побудови асимптотики розвязку вище поставленої задачі можна поширити і на випадки, коли $Q_{AA'} < Q_{BB'} = Q_{CC'}$, $Q_{AA'} = Q_{CC'} < Q_{BB'}$, $Q_{AA'} < Q_{CC'} < Q_{BB'}$ (див. рис.4-6).

Якщо, початкова $c_0^0(\varphi,\psi)$ та "вхідні" граничні $c_i(\psi,t)$ $(i=1,2,3)$ умови недостатньо узгоджені (наприклад, узгоджені всього лише з точністю до неперервності), то тут, аналогічно до [1-3, 5], можливою є процедура згладження негладкостей функції $c_0(\varphi,\psi,t)$ вздовж характеристик що виходять із точок $(\varphi_0,\psi,0)$.

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990. - 208 с.
2. *Бутузов В.Ф., Нестеров А.В.* Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малым параметром при старших производных // Журн. вычисл. математики и матем. физики.- 1982.- 22, №4.- С. 865-870.
3. *Aronson D.G.* Linear parabolic equations containing a small parameter // J.Rational Mech. Anal.- 1956.- №5.- P.1003-1014.
4. *Larry Bobisud* (Communicated by A.Erdelvi) Second-Order Limar Parabolic Equations with a Small Parameter // Arch. Rat. Mech. Anabysis.- 1968.- №27.- P.385-397.
5. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн. - 1982. - Т.4, №4. - С. 493-496.
6. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Об эллиптических уравнениях, содержащих малые параметры при старших производных // ДАН.- 1957.- Т.113, №3.- С.734-737.
7. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса // В кн.: Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения.- М.: Наука. - 1988. - С. 115-120.
8. *Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых массопереноса при фильтрации в неоднородной среде.-

Препринт 85.72.- Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985.- 16с.
9. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса.- К.: Киевский ун-т, 1986.- Деп. в УкрНИИНТИ, №286-Ук86.
10. *Бомба А.Я.* Чисельно-асимптотичне наближення сингулярно збурених нелінійних задач типу "фільтрація-дифузія" за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта провідності середовища // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.12-21.
11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. - М.: Наука. - 1977. - 407 с.

Рівненський державний гуманітарний університет
E-mail: Igorrec@ua.fm

Надійшла 27.11.2003

Присяжнюк И.М. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА "КОНВЕКЦЫЯ-ДИФФУЗИЯ" В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ // *Получено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи типа " конвекция – диффузия" в четырехсвязной области, особенностью которого есть процедура сглаживания негадкостей регулярной его составляющей вдоль линии раздела потока. Приведены результаты численных исследований .*

Prysjazhnjuk I.M. ASYMPTOTIC METHOD OF THE DECISION OF THE SINGULAR INDIGNANT BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF A TYPE "CONVECTION-DIFFUSION" IN MULTIVARIABLE AREAS *// Is received the asymptotic decomposition of the decision of the singular indignant task such as " convection-diffusion " in four-coherent area, which feature is procedure of smoothing of the rough members of its regular part along a line of the division of a flow. The results of numerical researches are given.*

ЗМІСТ

Барановський С.В., Щодро О.Є. *АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ТА ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЛОКАЛЬНО ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА* 5

Батишкіна Ю.В. *ЧАСТКОВЕ ПІДСИЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ ДВОМА ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ СТРИЖНЯМИ* 16

Бомба А.Я. *ПРОСТОРОВІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”* 27

Булавацький В.М., Рогаль І.В. *ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ ДО ЗАДАЧІ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ НАСИЧЕНОГО СОЛЬОВИМ РОЗЧИНОМ* 36

Герасимчук О.Б. *МЕРОМОРФНО-РЕГУЛЯРИЗУЮЧИЙ АЛГОРИТМ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА ЇХ ПРОЕКЦІЯМИ* 46

Зарівняк І.С. *ІМОВІРНІСТЬ НЕБЕЗПЕЧНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ ПРИ ВТРАТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ СТІЙКОСТІ ПІД ВПЛИВОМ ВИПАДКОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ І ПОЧАТКОВИХ ПРОГИНІВ ПРИКЛЕЄНИХ ПОЛИЦЬ* 53

Каштан С.С. *ПРО РОЗРАХУНОК ШВИДКОСТІ ФІЛЬТРАЦІЇ У СЕРЕДОВИЩАХ СХИЛЬНИХ ДО ДЕФОРМАЦІЙ ПІД ДІЄЮ ГРАДІЄНТУ КВАЗІПОТЕНЦІАЛУ* 61

Ленюк М.П., Петрик М.Р. *МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ n-ІНТЕРФЕЙСНИХ НЕОДНОРІДНИХ І НАНОПОРИСТИХ НАПІВОБМЕЖЕНИХ СЕРЕДОВИЩ* 69

Мартинюк П.М., Чума А.С. *ПОБУДОВА ТРИКУТНИХ СІТОК МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ* *96*

Пригорницький Д.О. *ЧИСЕЛЬНІ ОБЕРНЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ У ТРИЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З ПОТЕНЦІАЛОМ КЕРУВАННЯ* *107*

Присяжнюк І.М. *АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ "КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ" У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ* *118*

Чернуха О.Ю. *ДО ОПИСУ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЇ В ШАРІ З ВИПАДКОВИМИ КУЛЬОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ* *129*

Шувар Б.А., Дашко О.М., Угрин С.З. *ДВОСТОРОННІ НАБЛИЖЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ* *143*

Яджак М.С. *ДО ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ СИСТОЛІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ КАСКАДНОЇ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ* *153*

НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ

Парасюк О.С., Вірченко Н.О. *КОРОТКО ПРО НАУКОВУ СПАДЩИНУ АКАДЕМІКА М.КРАВЧУКА* *161*