

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

**Серія
прикладна математика**

ВИПУСК 1

**ЗБІРНИК
НАУКОВИХ
ПРАЦЬ**

Рівне-2003

“Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика” публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

“Волинский математический вестник. Серия прикладная математика”.
The **“Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series”**.

Редакційна колегія

Барановський С.В. (<i>секретар</i>)	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Недашківський М.О.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О. (<i>технічний секретар</i>)
Войтович М.М.	Прикарпатський А.К.
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Дейнека В.С.	Скопецький В.В. (<i>головний редактор</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Зарівняк І.С.	Турбал Ю.В.
Каштан С.С. (<i>технічний секретар</i>)	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Шинкаренко Г.А.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем механіки і математики НАНУ ім. Я.С.Підстригача, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

УДК 518.61.001.573

Пригорницький Д.О.**ЧИСЕЛЬНІ ОБЕРНЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА
КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ У ТРИЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З
ПОТЕНЦІАЛОМ КЕРУВАННЯ**

Розроблено новий алгоритм чисельного розв'язування обернених нелінійних крайових задач на конформні відображення з потенціалом керування у тризв'язних областях, обмежених еквіпотенціальними лініями, за умови рівності притоку до керуючого контура та витоку з нього. Наведені результати чисельних розрахунків за розробленим алгоритмом.

Вступ. Для побудови динамічної сітки та поля швидкості із паралельним розрахунком інших характеристик (витрат, перетоків тощо) квазіпотенційних полів у роботах [1 – 3, 6] для одно- та двозв'язних фізичних областей широко використовувався метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень). При перенесенні даної методики на випадок тризв'язної фізичної області автори наштотувалися на певні труднощі. Особливістю розв'язання такого роду задач у загальному є те, що залежно від співвідношення заданих на ділянках границі області потенціалів, область комплексного потенціалу G_{ω} будується неоднозначно, і, поряд із побудовою алгоритму чисельного розв'язання відповідної нелінійної оберненої задачі у кожному із конкретних випадків, виникає проблема безпосереднього переходу до оберненої задачі, адже, не відомо, яку із конфігурацій області G_{ω} слід вибирати. У роботах [4 – 5] розв'язано проблему обернення крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями з керуванням на внутрішньому контурі, в загальному: розроблено "алгоритм вибору" одного з 23-х можливих випадків залежно від значень потенціалу керування φ_0 ($-\infty < \varphi_0 < +\infty$). Питання ж як розв'язувати задачу у кожному з наведених випадків залишилося відкритим.

У пропонованій роботі сформульовано задачу побудови та реалізації алгоритму розв'язання такого роду задач за умови рівності притоку до

внутрішнього контура L_0 – носія керуючого потенціалу та витоку з нього.

Загальна постановка задачі. Розглянемо (рис.1) у деякій трив'язній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\}$ (внутрішнім), $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ (зовнішнім), $L_0 = \{z: f_0(x, y) = 0\}$ (внутрішнім, що є носієм керуючого потенціалу), процес руху частинок (зокрема, фільтрації у пористому пласті, руху заряджених частинок у провідній пластинці, і т.ін.), який описується за допомогою рівняння руху $v = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі чи закон Ома) та рівняння нерозривності $\text{div } v = 0$, де $v = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість руху частинок, κ – коефіцієнт провідності (фільтрації, тощо), $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал поля ($\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$). Значення потенціалів φ_* та φ^* вважатимемо фіксованими, а невідомий (керуючий) параметр φ_0 будемо шукати за умови рівності перетоків з L_* в L_0 та з L_0 в L^* .

Поставлену задачу будемо розв'язувати шляхом підбору такого значення потенціалу керування, за якого буде досягнута рівність перетоків до та з керуючого контура. Для цього задамо деяке допустиме значення потенціалу керування (таке, за якого мають місце всі три перетоки у заданій області [4 – 5]), знайдемо, як розв'язок деякої проміжної задачі за спеціально розробленим алгоритмом, величини перетоків до (Q_*^0) та з (Q_0^*) керуючого контура (при цьому значення потенціалу керування вважатимемо відомим, а невідомими вважатимемо значення перетоків між контурами, що обмежують область G_z), обчислимо різницю $Q_*^0 - Q_0^*$ цих перетоків, на основі якої підправимо обране значення потенціалу керування і т.д., доки не досягнемо рівності нулю модуля різниці перетоків із заданою точністю. Підправляти значення керуючого потенціалу будемо використовуючи монотонно-зростаючий характер залежності різниці перетоків від значення керуючого потенціалу.

Використання проміжної задачі зумовлене питанням можливої нерациональності створення окремого алгоритму для розв'язання поставленої задачі. Так проміжна задача вже включає у себе випадки-аналоги (2.4) та (2.6) з [5], і з незначною надбудовою в алгоритмі свого розв'язання, описаною вище, може бути використана також і при

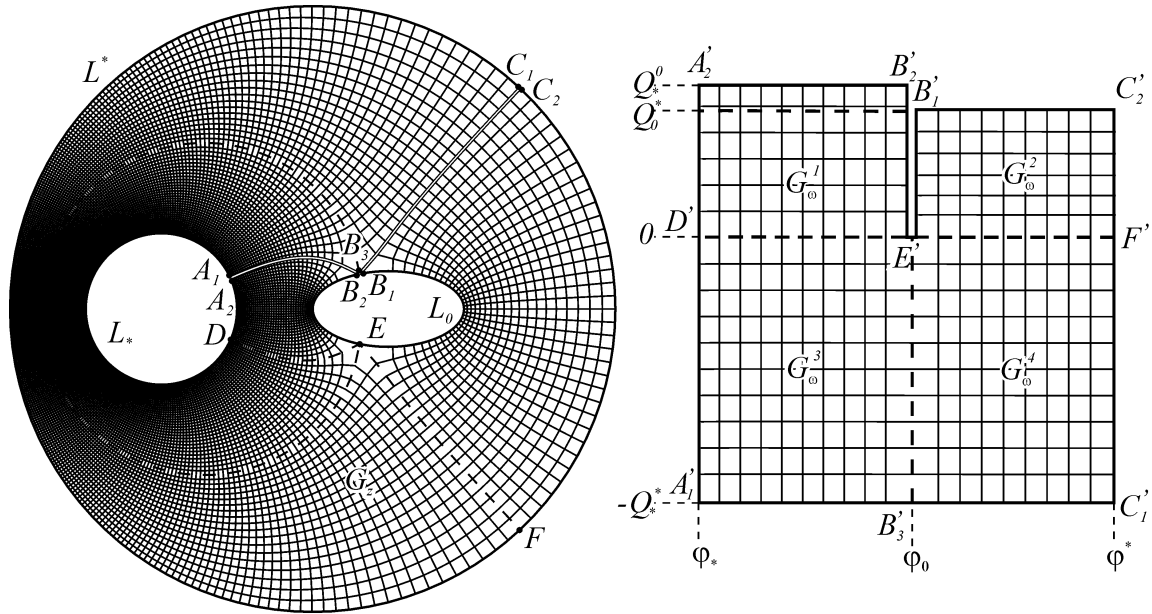


Рис.1. Область G_z та відповідна їй конфігурація області комплексного потенціалу G_ω

розв'язанні поставленої нами вихідної задачі (аналога (2.5) з [5]).

Для розв'язання проміжної задачі знаходження перетоків між контурами, що обмежують задану область, за заданим значенням потенціалу керування, аналогічно, як у [1 – 3], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно спряжену до $\phi = \phi(x, y)$), здійснивши умовні розрізи $AB = A_1B_3 = A_2B_2$ та $BC = B_3C_1 = B_1C_2$ вздовж відповідних ліній течії, що проходять через точку розділу потоків $B = B_1 = B_2 = B_3$ (рис. 1), перейдемо до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z)$, утвореної при цьому, однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (AB \cup BC)$ на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega^1 \cup G_\omega^2 \cup G_\omega^3 \cup G_\omega^4 \cup D'E' \cup E'F' \cup E'B'_3$ ($G_\omega^1 = \{\omega = \phi + i\psi : \phi_* < \phi < \phi_0, 0 < \psi < Q_*^0\}$, $G_\omega^2 = \{\omega = \phi + i\psi : \phi_0 < \phi < \phi^*,$

$0 < \psi < Q_0^*$ }, $G_\omega^3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $G_\omega^4 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, -Q_*^* < \psi < 0\}$, $D'E' = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi_0, \psi = 0\}$, $E'F' = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, \psi = 0\}$, $E'B'_3 = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi = \varphi_0, -Q_*^* < \psi < 0\}$, де D', E', F', B'_i – відповідні образи точок D, E, F, B_i) з трьома

невідомими витратами $Q_*^0 = \iint_{DA_2} -v_y dx + v_x dy$, $Q_0^* = \iint_{EB_1} -v_y dx + v_x dy$,

$$Q_*^* = \iint_{A_1D} -v_y dx + v_x dy:$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \psi_y, \quad \varphi|_{A_1A_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{B_1B_2} = \varphi_0, \quad \varphi|_{C_1C_2} = \varphi^*, \\ \varphi_y &= -\psi_x, \quad \psi|_{A_1C_1} = -Q_*^*, \quad \psi|_{A_2B_2} = Q_*^0, \quad \psi|_{B_1C_2} = Q_0^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогічно, як у [1 – 3], відповідну їй неповну обернену крайову задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин функції течії $z = z(\omega)$ запишемо у вигляді:

$$x_\varphi = y_\psi, \quad x_\psi = -y_\varphi, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_*^0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \quad -Q_*^* \leq \psi \leq Q_0^*, \\ f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_*^0, \\ f_0(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0^*, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x(\varphi, -Q_*^*) &= x(\varphi, Q_*^0), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, Q_*^0), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ x(\varphi, -Q_*^*) &= x(\varphi, Q_0^*), \quad y(\varphi, -Q_*^*) = y(\varphi, Q_0^*), \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \Delta x &= 0, \quad \Delta y = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Зауважимо, що на відрізку $\varphi = \varphi_0, \psi > 0$ функції $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ набувають різних значень залежно від того, яким точкам контура B_2EB_1 вони відповідають (B_2E чи EB_1).

Дана задача далі буде доповнена нами ще й вимогами виконання рівнянь Лапласа для функцій $x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)$ на обидвох образах “берегів” лінії розділу перетоків ABC для врахування її “роздвоєння” при переході

від області G_z до G_ω .

Алгоритм чисельного розв'язання проміжної задачі. Різницеві аналоги рівнянь (4), умов (3) та додаткових умов для граничних та приграничних вузлів у сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$, де

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1 - 1}, \\ \varphi_0 + (i - n_1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1, n}, \end{cases}$$

$$\psi_j = \begin{cases} -Q_*^* + j \cdot \Delta\psi_1, & j = \overline{0, m_1 - 1}, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_2, & j = \overline{m_1, m_1 + m_2}, \text{ для } i \leq n_1, \\ (j - m_1) \cdot \Delta\psi_3, & j = \overline{m_1, m_1 + m_3}, \text{ для } i \geq n_1, \end{cases}$$

$$\Delta\varphi_1 = (\varphi_0 - \varphi_*)/n_1, \quad \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_0)/n_2, \quad \Delta\psi_1 = Q_*^*/m_1, \quad \Delta\psi_2 = Q_*^0/m_2, \\ \Delta\psi_3 = Q_*^*/m_3, \quad n = n_1 + n_2, \quad n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 \in N, \text{ запишемо у вигляді:}$$

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j) = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,j+1} \right), \\ y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j) = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,j+1} \right), \quad (5)$$

$\alpha = 2\Delta\varphi\Delta\psi(\Delta\varphi_-^{-1}\Delta\varphi_+^{-1} + \Delta\psi_-^{-1}\Delta\psi_+^{-1})$, $\Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2$, $\Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2$, де значення $\Delta\varphi_-$, $\Delta\varphi_+$, $\Delta\psi_-$, $\Delta\psi_+$ вибираються з табл.1 в залежності від належності вузла (φ_i, ψ_j) тій чи іншій підобласті $G_\omega^{l\gamma}$ сіткової області G_ω^γ ;

$$f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1, m_1 + m_2}, \quad f_0(x_{n_1,j}, y_{n_1,j}) = 0, \quad j = \overline{m_1, m_1 + m_3}, \\ f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1 + m_2}, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m_1 + m_3}, \\ x_{i,0} = x_{i, m_1 + m_2}, \quad y_{i,0} = y_{i, m_1 + m_2}, \quad i = \overline{0, n_1}, \\ x_{i,0} = x_{i, m_1 + m_3}, \quad y_{i,0} = y_{i, m_1 + m_3}, \quad i = \overline{n_1, n}; \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial y} \right)_{n,j} (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) - \left(\frac{\partial f^*}{\partial x} \right)_{n,j} (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) = 0, \\ j = \overline{0, m_1 + m_3},$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial y}(x_{0,j}, y_{0,j})(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) - \frac{\partial f^*}{\partial x}(x_{0,j}, y_{0,j})(4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) = 0,$$

$$j = \overline{0, m_1 + m_2},$$

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)_{n_1, j} (3x_{n_1, j} + x_{n_1-2, j} - 4x_{n_1-1, j}) - \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)_{n_1, j} (3y_{n_1, j} + y_{n_1-2, j} - 4y_{n_1-1, j}) = 0,$$

$$j = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_2 - 1},$$

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)_{n_1, j} (4x_{n_1+1, j} - 3x_{n_1, j} - x_{n_1+2, j}) - \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)_{n_1, j} (4y_{n_1+1, j} - y_{n_1, j} - y_{n_1+2, j}) = 0,$$

$$j = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_3 - 1}. \quad (7)$$

Табл. 1. Структура області G_ω^γ .

$G_\omega^{l\gamma} / L_l$	i_0	j_0	n_0	m_0	m_-	$\Delta\varphi_-$	$\Delta\varphi_+$	$\Delta\psi_-$	$\Delta\psi_+$
$G_\omega^{1\gamma}$	0	m_1	n_1	m_2	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_2$	
$G_\omega^{2\gamma}$	n_1	m_1	n_2	m_3	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_3$	
$G_\omega^{3\gamma}$	0	0	n_1	m_1	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$	
$G_\omega^{4\gamma}$	n_1	0	n_2	m_1	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	
$D'E'$	0	$m_1 - 1$	n_1	2	0	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$
$E'F'$	n_1	$m_1 - 1$	n_2	2	0	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_3$
$E'B'_3$	$n_1 - 1$	0	2	m_1	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	
$A'_2 B'_2$	0	$m_1 + m_2 - 1$	n_1	2	$m_1 + m_2$	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_1$
$B'_1 C'_2$	n_1	$m_1 + m_3 - 1$	n_2	2	$m_1 + m_3$	$\Delta\varphi_2$		$\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_1$

Формули для знаходження невідомих величин Q_*^0 , Q_*^* та Q_0^* одержуємо на підставі умов “конформної подібності” елементарних сіткових чотирикутників [1 – 3] двох областей:

$$Q_*^* = m_1 \Delta\psi_1, \quad Q_*^0 = m_2 \Delta\psi_2, \quad Q_0^* = m_3 \Delta\psi_3, \quad \Delta\psi_2 = \gamma_1 \Delta\varphi_1, \quad \Delta\psi_3 = \gamma_2 \Delta\varphi_2,$$

$$\Delta\psi_1 = (n_1 \gamma_3 \Delta\varphi_1 + n_2 \gamma_4 \Delta\varphi_2) / (n_1 + n_2),$$

$$\gamma_l = \frac{1}{n_0^l m_0^l} \sum_{i=i_0^l}^{i_0^l + n_0^l - 1} \sum_{j=j_0^l}^{j_0^l + m_0^l - 1} \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}, \quad (8)$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2},$$

де $l = \overline{1,4}$, а компоненти вектора $(i_0^l, j_0^l, n_0^l, m_0^l)$ вибираються із стовпців 2 – 5 відповідного підобласті G_ω^{ly} рядка табл.1.

Задавши кількість вузлів розбиття області G_ω n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 параметри $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, що характеризують точність роботи алгоритму розв'язання відповідної (2) – (3) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{n_1,j}^{(0)}, y_{n_1,j}^{(0)}, x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (6)) та початкові наближення координат всіх внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, знаходимо за формулою (8) початкові наближення величин Q_*^0, Q_*^* та Q_0^* . Далі уточнюємо координати внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ із заданою точністю ε_1 (k – номер загальної ітерації) за допомогою ітераційних схем (9) типу “хрест” в кожній з підобластей G_ω^{ly} при $i = \overline{i_0 + 1, i_0 + n_0 - 1}, j = \overline{j_0 + 1, j_0 + m_0 - 1}$ (див. табл.1):

$$x_{i,j}^{(k)} = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} x_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} x_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} x_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} x_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} \right),$$

$$y_{i,j}^{(k)} = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-} y_{i-1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+} y_{i+1,j}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_-} y_{i,j-1}^{(k-1)} + \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi_+} y_{i,\{j+1\}}^{(k-1)} \right), \quad (9)$$

де $\{j\} = \begin{cases} j, & j \neq j_0 + m_0, \\ j - m_-, & j = j_0 + m_0, \end{cases}$ m_- – параметр корекції індексів, введений

для врахування “роздвоєння” лінії розділу перетоків ABC при переході від області G_z до G_ω .

Після цього, як і в [1 – 2], “підправляємо” граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (7), наприклад, методом Ньютона. Якщо величина зміщення граничних вузлів за проведену k -ту загальну

ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ ((i, j) – індекси

координат граничних вузлів) більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення

внутрішніх вузлів. В іншому випадку знаходимо нові наближення величин Q_*^0 , Q_*^* та Q_0^* за формулами (8). Якщо найбільша із змін за абсолютною величиною шуканих величин за останню проведену ітерацію більша за ε_3 , то знову повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, в протилежному випадку – обчислюємо нев’язку “конформності” отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1 , δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2) в G_ω :

$$\delta_1 = \max_{(i,j) \in \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{yl}} \left| \gamma_l(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{(i,j) \in \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{yl}} \left| \gamma_l(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|.$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв’язку (зменшити нев’язку δ), збільшуємо параметри розбиття області n_1 , n_2 , m_1 , m_2 , m_3 та розв’язуємо задачу повторно (оптимальність співвідношення між ними досягається аналогічно до [7] шляхом оптимізації відповідних функціоналів).

Як і в [1 – 5], обґрунтування побудованого алгоритму, що базується на почерговому “замороженні” шуканих параметра конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області, проводиться з використанням ідей методу блочної ітерації [1-5,8].

Програмна реалізація алгоритму та чисельні приклади. Вище описаний алгоритм чисельного розв’язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп’ютерної програми для ПК IBM PC/AT, що використовує набір мультимедійних інструкцій SSE процесорів Pentium III та Athlon XP. Для перевірки його коректності проведена серія чисельних експериментів на тестовому прикладі при $L_* = \{x + iy : x = x_*(t) = -2 + \cos(t), y = y_*(t) = \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x = x^*(t) = 4 \cos(t), y = y^*(t) = 4 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, $L_0 = \{x + iy : x = x_0(t) = 1 + \cos(t), y = y_0(t) = \sin(t)/2, 0 \leq t < 2\pi\}$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$. Для знаходження значення потенціалу керування φ_0 , при якому досягається

рівність витрат Q_*^0 та Q_0^* , чисельно за алгоритмом, описаним вище, була розв'язана проміжна задача при різних допустимих значеннях потенціалу керування. Результати обчислень для $n = 50$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-4}$ наведені в табл.2 (n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 вибиралися з умови найбільшої

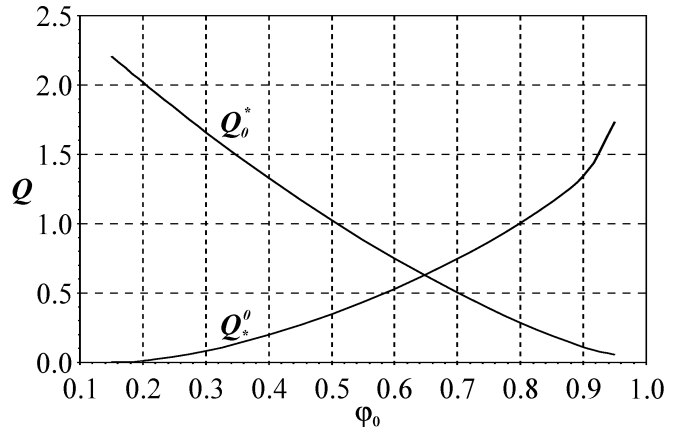


Рис.2. Графік залежності шуканих витрат від потенціалу керування

подібності побудованої сітки до квадратної). Графік залежності витрат від φ_0 зображений на рис.2. Далі, використовуючи метод поділу відрізка пополам, на проміжку $[0.6, 0.7]$ було знайдене шукане значення потенціалу керування $\varphi_0 \approx 0.64875$. При цьому були отримані наступні результати: $Q_*^0 \approx Q_0^* \approx 0.6375$, $Q_*^* \approx 5.4394$. Відповідна динамічна сітка зображена на рис.1.

Табл.2. Результати розрахунків для різних значень потенціалу керування.

φ_0	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	Q_*^0	Q_0^*	Q_*^*	δ
0.15	8	42	283	2	118	0.004	2.205	5.314	0.523
0.20	10	40	268	2	101	0.012	2.018	5.358	0.311
0.30	15	35	272	4	83	0.081	1.656	5.431	0.350
0.40	20	30	273	10	66	0.200	1.327	5.469	0.395
0.50	25	25	274	17	51	0.349	1.025	5.480	0.414
0.60	30	20	273	26	38	0.527	0.750	5.464	0.407
0.70	35	15	271	37	25	0.746	0.503	5.419	0.266
0.80	40	10	267	50	14	1.006	0.286	5.338	0.167
0.90	45	5	260	67	5	1.345	0.109	5.197	0.240
0.95	47	3	251	86	3	1.733	0.054	5.073	0.462

Висновки і зауваження.

1. Описаний в роботі алгоритм із незначними змінами може бути використаний для “прямого” розв'язання вихідної задачі без

необхідності розв'язування серії проміжних задач.

2. Запропонований алгоритм є особливо ефективним у випадках, коли:

а) внутрішні контури L_* та L_0 малі (напр., свердловини) і важко побудувати рівномірну динамічну сітку у фізичній області;

б) при вивченні різних процесів на даного роду ідеальних конвективних фонах, коли є смисл переходити від області G_z до відповідної області комплексного потенціалу.

3. У перспективі планується розробка нами універсального алгоритму розв'язання такого роду модельних задач, що охоплює всеможливі варіанти формування течії в залежності від значень потенціалу керування φ_0 ($-\infty < \varphi_0 < +\infty$), та його модифікація стосовно моделювання відповідних нелінійних процесів в неоднорідних та анізотропних середовищах з урахуванням взаємовпливу градієнтів напору та характеристик середовища.

1. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в двозв'язних областях // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки.- 2001.- Вип. 3.- С. 188-195.
2. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О., Скопечкий В.В. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки.- 2003.- Вип. 1.- С. 126-135.
3. Бомба А.Я., Каштан С.С., Кузьменко А.П. Про застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1998.- Вип. 5.- С.16-25.
4. Бомба А.Я., Каштан С.С. Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика.- 2000.- Вип. 2.- С. 3-15.
5. Бомба А.Я., Каштан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях з потенціалом керування // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика.- 2003.- Вип. 6.- С. 18-27.
6. Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 1967.- Т.7, № 5.- С. 1031-1059.
7. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей.- Киев, 1991.- 56 с.- (Препринт АН Украины. Ин-т математики, 91.57).
8. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.- М.: Мир, 1975.- 558 с.

Рівненський державний гуманітарний університет
E-mail: Prigornitsky@rdgu.rv.ua

Надійшла 01.10.2003

Пригорницький Д.А. ЧИСЛЕННЫЕ ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ТРЁХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С ПОТЕНЦИАЛОМ УПРАВЛЕНИЯ // *Разработан новый алгоритм численного решения обратных нелинейных краевых задач на конформные отображения с потенциалом управления в трёхсвязных областях, ограниченных эквипотенциальными линиями, при условии равенства притока к управляющему контуру и вытока из него. Приведены результаты численных расчетов за разработанным алгоритмом.*

Prigornitsky D.O. NUMERICAL INVERSIONS OF ONE CLASS BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL MAPPINGS IN TREBLY-CONNECTED AREAS WITH CONTROL POTENTIAL // *The new algorithm of numerical solution of inverse nonlinear boundary value problems on conformal mappings with a control potential in trebly-connected areas, bounded by equipotential lines, under condition of equality of inflow to a controlling outline and outflow from it is designed. The results of numerical calculations by designed algorithm are submitted.*

ЗМІСТ

Барановський С.В., Щодро О.Є. АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ТА ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЛОКАЛЬНО ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА	5
Батишкіна Ю.В. ЧАСТКОВЕ ПІДСИЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ ДВОМА ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ СТРИЖНЯМИ	16
Бомба А.Я. ПРОСТОРОВІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”	27
Булавацький В.М., Рогаль І.В. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ ДО ЗАДАЧІ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ НАСИЧЕНОГО СОЛЬОВИМ РОЗЧИНОМ	36
Герасимчук О.Б. МЕРОМОРФНО-РЕГУЛЯРИЗУЮЧИЙ АЛГОРИТМ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА ЇХ ПРОЕКЦІЯМИ	46
Зарівняк І.С. ІМОВІРНІСТЬ НЕБЕЗПЕЧНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ ПРИ ВТРАТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ СТІЙКОСТІ ПІД ВПЛИВОМ ВИПАДКОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ І ПОЧАТКОВИХ ПРОГІНІВ ПРИКЛЕСНИХ ПОЛИЦЬ	53
Каиштан С.С. ПРО РОЗРАХУНОК ШВИДКОСТІ ФІЛЬТРАЦІЇ У СЕРЕДОВИЩАХ СХИЛЬНИХ ДО ДЕФОРМАЦІЙ ПІД ДІЄЮ ГРАДІЄНТУ КВАЗІПОТЕНЦІАЛУ	61
Ленюк М.П., Петрик М.Р. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ n -ІНТЕРФЕЙСНИХ НЕОДНОРІДНИХ І НАНОПОРИСТИХ НАПВООБМЕЖЕНИХ СЕРЕДОВИЩ	69

<i>Мартинюк П.М., Чума А.С. ПОБУДОВА ТРИКУТНИХ СІТОК МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ</i>	<i>96</i>
<i>Пригорницький Д.О. ЧИСЕЛЬНІ ОБЕРНЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ У ТРИЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З ПОТЕНЦІАЛОМ КЕРУВАННЯ</i>	<i>107</i>
<i>Присяжнюк І.М. АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ "КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ" У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ</i>	<i>118</i>
<i>Чернуха О.Ю. ДО ОПИСУ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЇ В ШАРІ З ВИПАДКОВИМИ КУЛЬОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ</i>	<i>129</i>
<i>Шувар Б.А., Дашко О.М., Угрин С.З. ДВОСТОРОННІ НАБЛИЖЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ</i>	<i>143</i>
<i>Яджак М.С. ДО ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ СИСТОЛІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ КАСКАДНОЇ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ</i>	<i>153</i>
НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ	
<i>Парасюк О.С., Вірченко Н.О. КОРОТКО ПРО НАУКОВУ СПАДЩИНУ АКАДЕМІКА М.КРАВЧУКА</i>	<i>161</i>