# ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

## Серія
## прикладна математика

ВИПУСК 1

ЗБІРНИК
НАУКОВИХ
ПРАЦЬ

Рівне-2003

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика"**.
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.




Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем механіки і математики НАНУ ім. Я.С.Підстригача, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.



**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua



ISBN 966-7281-02-8

УДК 532.546-532.72

**Бомба А.Я.**

# ПРОСТОРОВІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”

*Побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник. На цій основі одержано асимптотичний розклад розв’язку сингулярно збуреної крайової задачі для рівняння конвективної дифузії в криволінійному паралелепіпеді.*

В роботах [1 – 5] розглядались плоскі задачі теорії фільтрації та сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія” в чотирикутних криволінійних областях, обмежених двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями. В основі методів розв’язання таких задач закладена ідея конформного відображення даної області на відповідну область комплексного потенціалу (прямокутник із сторонами паралельними осям координат) із наступним переходом у відповідній “дифузійній складовій” до координат цієї області. В роботах [2, 3] розглядались часткові випадки просторових задач, що зводяться до плоских. Метою даної роботи є побудова просторового аналогу плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник і, на цій основі, побудова відповідного асимптотичного розкладу розвинення розв’язку сингулярно збуреної крайової задачі для рівняння конвективної дифузії в криволінійному паралелепіпеді.

**1. Загальна постановка задачі.** Для криволінійного паралелепіпеда (рис. 1) $G_{\mathrm{z}} = ABCDA_*B_*C_*D_*$, обмеженого двома еквіпотенціальними поверхнями $AA_*B_*B = \left\{\mathrm{z}:\ f_*\left(x, y, z\right) = 0\right\}$, $CC_*D_*D = \left\{\mathrm{z}:\ f^*\left(x, y, z\right) = 0\right\}$ та чотирма поверхнями течії $ABCD = \left\{\mathrm{z}:\ g_*\left(x, y, z\right) = 0\right\}$, $A_*B_*C_*D_* = \left\{\mathrm{z}:\ g^*\left(x, y, z\right) = 0\right\}$, $ADD_*A_* = \left\{\mathrm{z}:\ g_0\left(x, y, z\right) = 0\right\}$, $BCC_*B_* = \left\{\mathrm{z}:\ g^0\left(x, y, z\right) = 0\right\}$ (гладкими, взаємноортогональними між собою), розглянемо модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\vec{v} = grad\ \varphi,\ div\,\vec{v} = 0;\ \varepsilon \cdot \Delta c - \nabla c \cdot \vec{v} = \sigma(t)\frac{\partial c}{\partial t},$$

$$(x, y, z, t) \in G = G_{\mathrm{z}} \times (0, \infty); \qquad (1)$$

$$\varphi\big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\quad \varphi\big|_{DCC_*D_*} = \varphi^*,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{ADD_*A_* \cup A_*D_*C_*B_* \cup B_*C_*CB \cup ADCB} = 0; \quad (2)$$

$$c\big|_{ABB_*A_*} = c_*(M,t),\quad c\big|_{CDD_*C_*} = c^*(M,t),\ c\big|_{ADD_*A_*} = c_0(M,t),$$

$$c\big|_{BCC_*B_*} = c^0(M,t),\ c\big|_{ABCD} = c_{00}(M,t),\ c\big|_{A_*D_*C_*B_*} = c^{00}(M,t); \qquad (3)$$

$$c(x, y, z, 0) = c_0^0(x, y, z), \qquad (4)$$

де $\vec{v}\big(v_x(x,y,z), v_y(x,y,z), v_z(x,y,z),\big)$ – вектор, а $\varphi = \varphi(x,y,z)$ – потенціал швидкості фільтрації ($0 < \varphi_* \le \varphi \le \varphi^* < \infty$) в точці $\mathrm{z} = (x,y,z)$, $c = c(x,y,z,t)$ – концентрація розчинних у фільтраційному потоці речовин у точці $\mathrm{z}$ в момент часу $t$, $\varepsilon$ – коефіцієнт конвективної дифузії (малий параметр), $\sigma(t)$ – пористість, $M$ – біжуча точка відповідної поверхні, $c_*$, $c^*$, $c_0$, $c^0$, $c_{00}$, $c^{00}$, $c_0^0$ – задані достатньо гладкі, сильно узгоджені (настільки, щоб можна було будувати нижчевказані асимптотичні розвинення розв’язку із заданою точністю) між собою в околах ребер та кутових точок паралелепіпеда $G \in R^4$ функції [1 – 3, 6].

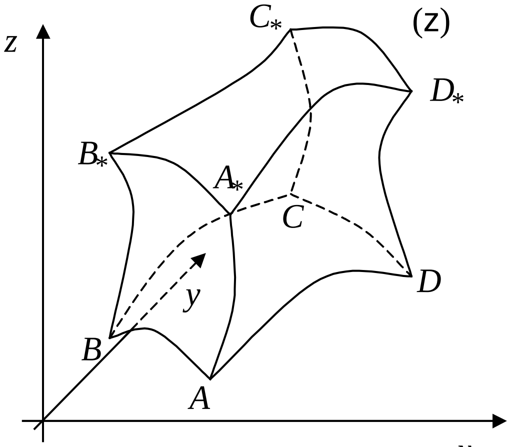


*Рис. 1. Просторова фізична область*

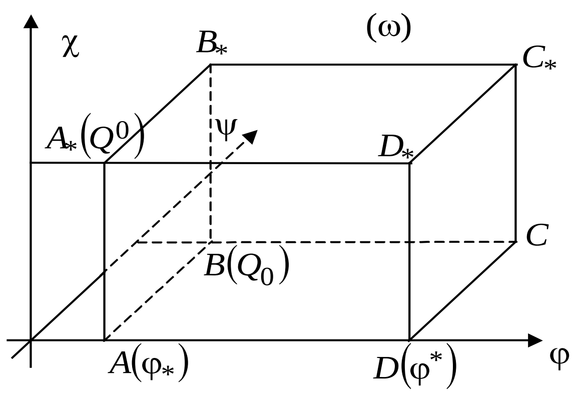


*Рис. 2. Просторова область комплексного потенціалу*

**2. Просторовий аналог конформного відображення.** Ввівши пару функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\chi = \chi(x, y, z)$ ("просторово комплексно спряжених" із функцією $\varphi = \varphi(x, y, z)$) таких, що $grad\,\psi(x, y, z) \cdot grad\,\chi(x, y, z) = 0$ та $grad\,\varphi(x, y, z) = grad\,\psi(x, y, z) \times grad\,\chi(x, y, z)$, аналогічно до [4, 5], замість крайової задачі фільтрації (1.1) – (2) прийдемо до задачі на відображення (назвемо його "просторово конформним") області $G_z$ на відповідну область $G_\omega = \left\{ \omega = (\varphi, \psi, \chi) :\ \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*,\ 0 \le \psi \le Q_0,\ 0 \le \chi \le Q^0 \right\}$, де $Q = Q_0 Q^0$ – потік через довільний поперечний переріз течії ($Q_0, Q^0$ – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний одиничні "прошарки"):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\chi}{\partial z} = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \varphi\big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi\big|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \quad \psi\big|_{ADD_*A_*} = 0, \\ \psi\big|_{BCC_*B_*} = Q_0, \quad \chi\big|_{ADCB} = 0, \quad \chi\big|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^0. \end{cases} \tag{6}$$

Тут, як і в плоскій теорії потенційних полів, отриману в результаті розв'язку задачі (5)-(6) функцію $\omega = \omega(\mathrm{z}) = \omega\big(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)\big)$ назвемо комплексним потенціалом, а обернену їй функцію $\mathrm{z} = \mathrm{z}(\omega) = \mathrm{z}\big(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)\big)$ – характеристичною функцією течії. При цьому зауважимо, що ми в даній роботі поки-що відмовляємось від записів типу $\omega = \varphi + i\psi + j\chi$, оскільки не встановлювались відповідні алгебраїчні аналогії.

Обернена до (5) – (6) задача на просторове конформне відображення $G_\omega \to G_z$ (при невідомих значеннях параметрів $Q_0, Q^0$) має вигляд:

$$I\left(x(\varphi,\psi,\chi),y(\varphi,\psi,\chi),z(\varphi,\psi,\chi)\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\chi}-\frac{\partial y}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\chi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}\right),$$

$$I\left(x(\varphi,\psi,\chi),y(\varphi,\psi,\chi),z(\varphi,\psi,\chi)\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\chi}\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\chi}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right),$$

$$I\left(x(\varphi,\psi,\chi),y(\varphi,\psi,\chi),z(\varphi,\psi,\chi)\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\chi}-\frac{\partial x}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\chi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial z}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\chi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}\right),\quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\chi}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\chi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\chi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)=0;$$

$$\begin{cases} f_*\left(x(\varphi_*,\psi,\chi),y(\varphi_*,\psi,\chi),z(\varphi_*,\psi,\chi)\right)=0,\\ f^*\left(x(\varphi^*,\psi,\chi),y(\varphi^*,\psi,\chi),z(\varphi^*,\psi,\chi)\right)=0,\\ g_*\left(x(\varphi,\psi,0),y(\varphi,\psi,0),z(\varphi,\psi,0)\right)=0,\\ g^*\left(x(\varphi,\psi,Q^0),y(\varphi,\psi,Q^0),z(\varphi,\psi,Q^0)\right)=0,\\ g_0\left(x(\varphi,0,\chi),y(\varphi,0,\chi),z(\varphi,0,\chi)\right)=0,\\ g^0\left(x(\varphi,Q_0,\chi),y(\varphi,Q_0,\chi),z(\varphi,Q_0,\chi)\right)=0, \end{cases}\quad (8)$$

де $I$ – якобіан відповідного перетворення.

Припустимо, що задача (7) – (8) є розв’язаною (нами розроблений алгоритм наближеної побудови відповідної динамічної сітки в області $G_z$, що відповідає рівномірній ортогональній сітці області $G_\omega$, але, в силу громіздкості викладок, у даній роботі його приводити не будемо). Тоді, здійснивши заміну змінних $x=x(\varphi,\psi,\chi)$, $y=y(\varphi,\psi,\chi)$, $z=z(\varphi,\psi,\chi)$ у рівнянні (1.2) та умовах (3), (4), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області $G_\omega$:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi,\chi)\cdot\left(c_{\varphi\varphi}+c_{\psi\psi}+c_{\chi\chi}\right)-v^2(\varphi,\psi,\chi)\cdot c_{\varphi}=c_t \quad (v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2); \tag{9}$$

$$c(\varphi_*,\psi,\chi,t)=c_*(\psi,\chi,t),\, c\left(\varphi^*,\psi,\chi,t\right)=c^*(\psi,\chi,t),\; c(\varphi,0,\chi,t)=c_0(\varphi,\chi,t),$$
$$c(\varphi,Q_0,\chi,t)=c^0(\varphi,\chi,t),\; c(\varphi,\psi,0,t)=c_{00}(\varphi,\psi,t),$$
$$c\left(\varphi,\psi,Q^0,t\right)=c^{00}(\varphi,\psi,t); \tag{10}$$

$$c(\varphi,\psi,\chi,0)=c_0^0(\varphi,\psi,\chi). \tag{11}$$

**3. Асимптотика розв'язку "дифузійної задачі".** Розв'язок сингулярно збуреної мішаної задачі (9) – (11) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$\begin{aligned}c(\varphi,\psi,\chi,t)=&\left(u_0(\varphi,\psi,\chi,t)+\sum_{i=1}^{n}u_i(\varphi,\psi,\chi,t)\varepsilon^i\right)+\sum_{i=0}^{n+1}\pi_i(\tilde\varphi,\psi,\chi,t)\cdot\varepsilon^i+\\&+\sum_{i=0}^{n}\tilde\pi_i(\varphi,\tilde\psi,\chi,t)\varepsilon^{i/2}+\sum_{i=0}^{n}\tilde{\tilde\pi}_i\left(\varphi,\tilde{\tilde\psi},\chi,t\right)\varepsilon^{i/2}+\sum_{i=0}^{n}\overline\pi_i(\varphi,\psi,\overline\chi,t)\varepsilon^{i/2}+\\&+\sum_{i=0}^{n}\overline{\overline\pi}_i\left(\varphi,\psi,\overline{\overline\chi},t\right)\varepsilon^{i/2}+R_n(\varphi,\psi,\chi,t,\varepsilon),\end{aligned} \tag{12}$$

де $R_n(\varphi,\psi,\chi,t,\varepsilon)$ – залишковий член, $u_i(\varphi,\psi,\chi,t)$ $(i=\overline{0,n})$ – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $u_0$ – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $u_1,\ldots,u_n$ – поправки, що враховують "вклад" дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони); $\pi_i(\tilde\varphi,\psi,\chi,t)$ – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $\tilde\pi_i(\varphi,\tilde\psi,\chi,t)$, $\tilde{\tilde\pi}_i\left(\varphi,\tilde{\tilde\psi},\chi,t\right)$, $\overline\pi_i(\varphi,\psi,\overline\chi,t)$, $\overline{\overline\pi}_i\left(\varphi,\psi,\overline{\overline\chi},t\right)$ – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q_0$, $\chi=0$, $\chi=Q^0$, що враховують вплив "бічних джерел забруднень" ($c_0$, $c^0$, $c_{00}$, $c^{00}$), $\tilde\varphi=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\tilde\psi=\dfrac{\psi}{\sqrt\varepsilon}$, $\tilde{\tilde\psi}=\dfrac{Q_0-\psi}{\sqrt\varepsilon}$, $\tilde\chi=\dfrac{\chi}{\sqrt\varepsilon}$, $\tilde{\tilde\chi}=\dfrac{Q^0-\chi}{\sqrt\varepsilon}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Аналогічно до [1 – 3, 6] після підстановки (12) в (9) – (11) та застосування стандартної "процедури прирівнювання", для знаходження функцій $u_i$ приходимо до таких задач:

$$v^2(\varphi,\psi,\chi)\cdot u_{i\varphi}+u_{it}=h_i(\varphi,\psi,\chi,t),\ u_i(\varphi_*,\psi,\chi,t)=\tilde{c}_{i*}(\psi,\chi,t),$$

$$u_i(\varphi,\psi,\chi,0)==\tilde{c}_{i0}^{\,0}(\varphi,\psi,\chi),$$

де $h_0=0$, $\tilde{c}_{0*}=c_*$, $\tilde{c}_{\mathbf{0}}^{\,0}=c_0^0$, $h_{i+1}=v^2\left(u_{i\varphi\varphi}+u_{i\psi\psi}+u_{i\chi\chi}\right)$, $\tilde{c}_{i+1*}=0$, $\tilde{c}_{i+1\,0}^{\,0}=0$ ($i=0,...,n-1$). В результаті їх розв'язання маємо

$$u_0(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases} c_*\left(\psi,\chi,t-f(\varphi,\psi,\chi)\right), & t\geq f(\varphi,\psi,\chi),\\ c_0^0\left(f^{-1}\left(f(\varphi,\psi,\chi)-t\right),\psi,\chi\right), & t<f(\varphi,\psi,\chi),\end{cases}$$

де $f(\varphi,\hat{\psi},\hat{\chi})=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\hat{\psi},\hat{\chi})}$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії, як перетину двох поверхонь $\psi(x,y,z)=\hat{\psi}$, $\chi(x,y,z)=\hat{\chi}$, від еквіпотенціальної поверхні $s=\varphi_*$ до еквіпотенціальної поверхні $s=\varphi$, $f^{-1}$– функція оберненена до функції $f$ стосовно змінної $\varphi$ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція $\frac{1}{v^2}$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена),

$$u_i(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{h_i\left(s,\psi,\chi,t-f(\varphi,\psi,\chi)+f(s,\psi,\chi)\right)}{v^2(s,\psi,\chi)}ds, & t\geq f(\varphi,\psi,\chi),\\ \int\limits_{0}^{t}h_i\left(f(\varphi,\psi,\chi)-t+\tilde{t},\psi,\chi,\tilde{t}\right)d\tilde{t}, & t<f(\varphi,\psi,\chi),\quad i=\overline{1,n}\ .\end{cases}$$

Зазначимо, що функція $\pi=\sum\limits_{i=0}^{n+1}\pi_i\varepsilon^i$ тут, як і для аналогічного двовимірного випадку, призначена для усунення нев'язки, внесеної побудованою регулярною частиною $u=\sum\limits_{i=0}^{n}u_i\varepsilon^i$ в околі границі виходу фільтраційного потоку $\varphi=\varphi^*$ (а саме, повинна виконуватись умова: $u+\pi\big|_{\varphi=\varphi^*}=c^*+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$) та повинна задовольняти даному рівнянню із точністю $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$). Крім цього, функції $\pi_i$ повинні бути функціями типу пограншару стосовно змінної $\tilde{\varphi}$: $\pi_i\xrightarrow[\tilde{\varphi}\to\infty]{}0$, тобто дані функції повинні бути близькими до нуля поза деяким околом $\varphi=\varphi^*$ (щоб не "зіпсувати" вже побудоване наближення розв'язку $u$). Для їх знаходження маємо задачі:

$$\begin{cases}\pi_{0\tilde\varphi\tilde\varphi}+\pi_{0\tilde\varphi}=0,\\ \pi_0\left(\varphi_*,\psi,\chi,t\right)=c^*\left(\psi,\chi,t\right)-u_0\left(0,\psi,\chi,t\right),\quad \pi_0\underset{\tilde\varphi\to\infty}{\to}0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\pi_{i\tilde\varphi\tilde\varphi}+\pi_{i\tilde\varphi}=d_i(\tilde\varphi,\psi,\chi,t),\quad \pi_i(\tilde\varphi,\psi,\chi,t)\underset{\tilde\varphi\to 0}{\to}0,\quad i=\overline{1,n+1},\\ \pi_i(0,\psi,\chi,t)=-u_i\left(0,\psi,\chi,t\right),\quad i=\overline{1,n},\quad \pi_{n+1}(0,\psi,\chi,t)=0,\end{cases}$$

де $d_i(\tilde\varphi,\psi,\chi,t)$ подаються через $\pi_j(\tilde\varphi,\psi,\chi,t)$ і їх похідні по $\varphi$ та $t$ ($j<i$).

Аналогічно до [1 – 3, 9] в результаті розв'язання даних задач, маємо:

$$\pi_0\left(\tilde\varphi,\psi,\chi,t\right)=\left(c^*\left(\psi,\chi,t\right)-u_0\left(0,\psi,\chi,t\right)\right)\cdot e^{\tilde\varphi};$$

$$\pi_i(\tilde\varphi,\psi,\chi,t)=\sum_{j=0}^{i+1}\alpha_{i,j}(\psi,\chi,t)\cdot\tilde\varphi^j e^{-\tilde\varphi},\ i=\overline{1,n+1},$$

де всі $\alpha_{i,j}$ подаються через $\alpha_{k,j}$ $(k<i)$ і граничні умови.

Аналогічно [1 – 3, 9], при знаходженні функцій $\tilde\pi_i\left(\varphi,\tilde\psi,\chi,t\right)$, $\tilde{\tilde\pi}_i\left(\varphi,\tilde{\tilde\psi},\chi,t\right)$, $\bar\pi_i\left(\varphi,\psi,\bar\chi,t\right)$, $\bar{\bar\pi}_i\left(\varphi,\psi,\bar{\bar\chi},t\right)$ приходимо до розв'язання крайових задач для рівнянь типу $a(x,y,t)(u_{xx}-u_y)=u_t+b(x,y,t)$.

Теорема: Має місце така оцінка залишкового члена асимптотичного ряду (12):

$$\left|R_n(\varphi,\psi,\chi,t,\varepsilon)\right|=O(\varepsilon^{n+1}). \tag{13}$$

*Доведення:* В результаті проведеної "процедури прирівнювання" для оцінки $R_n$ маємо:

$$\varepsilon v^2\left(\varphi,\psi,\chi\right)\cdot\left(R_{n\varphi\varphi}+R_{n\psi\psi}+R_{n\chi\chi}\right)-v^2\left(\varphi,\psi,\chi\right)\cdot R_{n\varphi}=R_{nt}+$$
$$+\varepsilon^{n+1}\cdot R_n^*(\varphi,\psi,\chi,\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde{\tilde\psi},\bar\chi,\bar{\bar\chi},t)+R_n^{**}(\varphi,\psi,\chi,\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde{\tilde\psi},\bar\chi,\bar{\bar\chi},t,\varepsilon);$$

$$R_n(\varphi^*,\psi,\chi,t,\varepsilon)=0,\ R_n(\varphi,0,\chi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad R_n(\varphi_*,\psi,\chi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$R_n(\varphi,Q_0,\chi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad R_n(\varphi_*,\psi,0,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$R_n(\varphi,\psi,Q^0,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),\ R_n(\varphi,\psi,\chi,0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),$$

де, в силу достатньої гладкості гладкості та сильної узгодженості початкової та граничних умов $R_n^*$ – неперервна та рівномірно обмежена в $G$ функція, $R_n^{**} = O(\varepsilon^{n+1})$. Отже, на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь приходимо до оцінки (13).

**4. Зауваження, висновки.**

**4.1.** Якщо початкова $c_0^0(\varphi,\psi,\chi)$ та "вхідна" гранична $c_*(\psi,\chi,t)$ умови недостатньо узгоджені (наприклад, узгоджені всього лише з точністю до неперервності, то тут, як і у відповідному двовимірному випадку [1 – 3, 6], допустимою є процедура згладження негладкості функції $u_0(\varphi,\psi,\chi,t)$ вздовж характеристик, що виходять із точок $(0,\psi,\chi,0)$ ($0 \le \psi \le Q_0$, $0 \le \chi \le Q^0$), наприклад:

$$\tilde{u}_0(\varphi,\psi,\chi,t) = \frac{1}{2}\left(1 - erf\left(\frac{t - f(\varphi,\psi,\chi)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) c_0^0\left(f^{-1}\left(f(\varphi,\psi,\chi) - t\right),\psi,\chi\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{t - f(\varphi,\psi,\chi)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) \cdot c_*\left(\psi,\chi,t - f(\varphi,\psi,\chi)\right).$$

**4.2.** Якщо вздовж ребра, наприклад, $(\varphi_*,0,0,t)$ області $G$ не достатньо узгодженими є функції $c_*(\psi,\chi,t)$, $c_0(\varphi,\chi,t)$, $c_{00}(\varphi,\psi,t)$, то, аналогічно [6, 9] тут можливою є побудова відповідних кутових (реброваних) функцій.

**4.3.** Із вище проведених викладок бачимо, що при розв'язанні такого роду задач успіх від перенесення розробленої методики із плоского випадку на просторовий головним чином залежить від можливості побудови відповідного "просторового конформного відображення" $G_z \to G_\omega$ (або $G_\omega \to G_z$) при відповідності кутових точок; процедура побудови асимптотики розв'язку сингулярно збуреної "дифузійної складової" поставленої задачі проводиться аналогічно (відрізняється лише громіздкістю викладок та збільшенням кількості "бічних поправок") до відповідного алгоритму у плоскому випадку.


1. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С.493-496.
2. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса // В кн.: Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения.- М.: Наука, 1988.- С.115-120.

3. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса.- К.: Киевский ун-т, 1986.- Деп. в УкрНИИНТИ, №286-Ук86.
4. *Бомба А.Я., Каштан С.С., Кузьменко А.П.* Про застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1998.- Вип. 5.- С.16-26.
5. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1999.- Вип. 6.- С.25-36.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1990.- 208с.
7. *Рауз Х.* Механика жидкости.- М.: Изд-во литературы по строительству, 1967.- 390с.
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели.- М.: Наука, 1977.- 407с.
9. *Власюк А.П.* Некоторые задачи фильтрации и массопереноса растворимых веществ в неоднородных анизотропных пористых средах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИМАН УССР.- Киев, 1986.- 15с.


Рівненський державний гуманітарний університет
*E-mail:* Bomba@rdgu.rv.ua; abomba@mail.ru

*Надійшла 14.08.2003*

**Бомба А.Я.** ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА "КОНВЕКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ" // *Построен пространственный аналог плоской краевой задачи на конформное отображение криволинейного четырехугольника на прямоугольник. На этом основании получено ассимптотческое разложение решения сингулярно возмущенной краевой задачи для уравнения конвективной диффузии в криволинейном параллелепипеде.*

**Bomba A.Y.** SPATIAL SINGULAR-PERTURBED "CONVECTION-DIFFUSION" BOUNDARY VALUE PROBLEMS // *The spatial analogue of a flat boundary value problem on conformal mapping of a curvilinear tetragon on an orthogon is constructed. On this basis the asymptotic decomposing of the singular-perturbed boundary value problem solution for convective diffusion equation in a curvilinear parallelepiped is obtained.*

# ЗМІСТ

НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ