

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

**Серія
прикладна математика**

ВИПУСК 1

**ЗБІРНИК
НАУКОВИХ
ПРАЦЬ**

Рівне-2003

“Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика” публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

“Волинский математический вестник. Серия прикладная математика”.
The **“Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series”**.

Редакційна колегія

Барановський С.В. (<i>секретар</i>)	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Недашківський М.О.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О. (<i>технічний секретар</i>)
Войтович М.М.	Прикарпатський А.К.
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Дейнека В.С.	Скопецький В.В. (<i>головний редактор</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Зарівняк І.С.	Турбал Ю.В.
Каштан С.С. (<i>технічний секретар</i>)	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Шинкаренко Г.А.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем механіки і математики НАНУ ім. Я.С.Підстригача, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

УДК 539.3

Батишкіна Ю.В.**ЧАСТКОВЕ ПІДСИЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В
НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ ДВОМА ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ
СТРИЖНЯМИ**

Пропонується наближений метод розв'язку задачі про часткове підсилення криволінійного отвору двома тонкими пружними стрижнями змінної жорсткості в нескінченній ізотропній пластині. Подаючи компоненти деформації контуру отвору пластинки у вигляді інтегральних співвідношень з ядрами Гільберта, отримано систему чотирьох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь відносно контактних зусиль, які визначаються методом граничної колокації.

Однією з важливих задач сучасного машинобудування є підвищення надійності та довговічності машин та механізмів. Відомо [1 – 3], що одним із способів зниження концентрації напружень поблизу отворів в деталях машин є потовщення деякої зони навколо них. Підсилення отворів виконують у вигляді суцільних потовщень, а в деяких випадках, враховуючи особливості деталей чи з метою економії матеріалу – часткових. Дослідження останніх у науковій літературі проведено недостатньо через значну складність таких задач та розмаїття як форм отвору так і можливих розміщень підсилювальних стрижнів. Певної завершеності у розв'язанні цієї проблеми досягнуто у випадку часткових підсилень кругових отворів [4, 5]. Часткове підсилення криволінійних отворів в пластинках несиметричними і симетричними відносно осі симетрії отвору стрижнями сталого поперечного перерізу досліджено в роботах [6, 7]. Базуючись на результатах роботи [6], одержимо розв'язок задачі про часткове підсилення криволінійного отвору в пластині двома пружними стрижнями змінної жорсткості.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину товщиною $2h$ з криволінійним отвором, обмеженим гладким контуром Γ , у вигляді правильного N – кутника із закругленими кутами. Введемо полярну систему відліку (r, δ) так, щоб полюс знаходився в центрі отвору, а полярна вісь співпадала з віссю Ox . Із серединною площиною пластинки сумістимо комплексну площину $z = x + iy$. Декартову систему координат

Оху оберемо так, як показано на рис. 1.

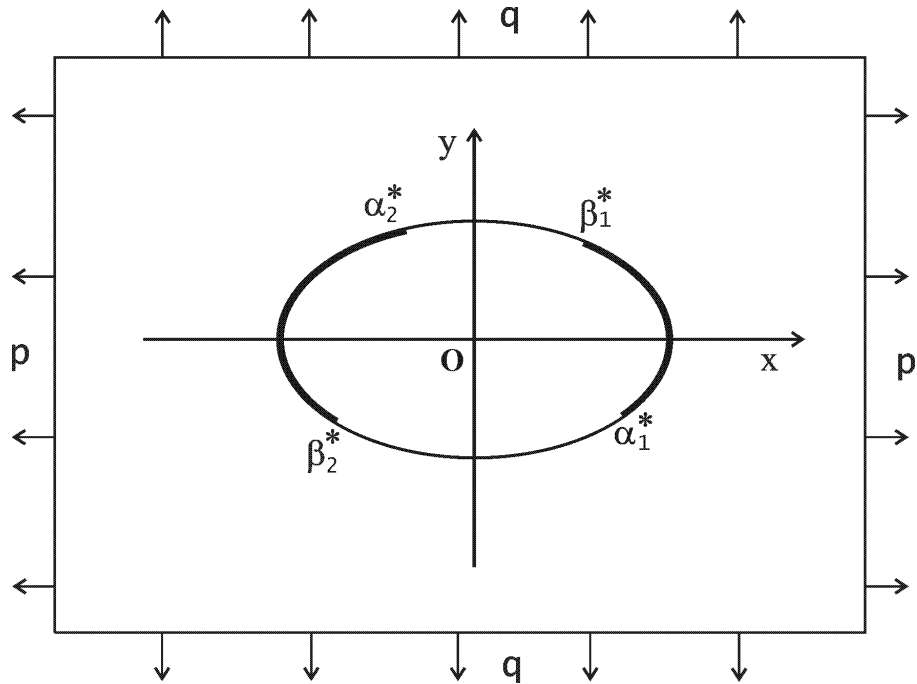


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Нехай контур отвору Γ на ділянках $\Gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де $\Gamma_1 \equiv [\alpha_1^*, \beta_1^*]$, $\Gamma_2 \equiv [\alpha_2^*, \beta_2^*]$, частково підсилений двома стрижнями загального положення змінної жорсткості на розтяг або стиск. При цьому вважаємо, що $\beta_1^* > \alpha_1^*$, $\alpha_2^* > \beta_1^*$ і точки $\delta = 0$ та $\delta = \pi$ не належить одночасно жодному з проміжків.

Стрижні будемо моделювати тонкими пружними лініями, наділеними жорсткістю на розтяг або стиск в площині пластинки. Жорсткістю на згин нехтуємо. На „нескінченності” в напрямках координатних осей на пластину діють рівномірно розподілені зусилля розтягу або стиску p і q .

Визначимо контактні зусилля T_ρ і $S_{\rho\lambda}$ в зоні підсилення, кільцеві зусилля T_λ на контурі отвору і поздовжні зусилля V_λ в підсилювальних стрижнях.

Для розв’язування задачі здійснимо конформне відображення [1]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \quad (1)$$

зовнішності одиничного кола в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка в площині $z = x + iy$, де R_0 – характерний розмір отвору (не обмежуючи загальності, покладемо $R_0 = 1$); ε – параметр, що визначає відхилення форми многокутника від кола; $N = 2, 3$; $i = \sqrt{-1}$.

Співвідношення для визначення деформацій контура отвору при заданому навантаженні мають вигляд [5, 6]:

$$\varepsilon_{\lambda}^* (\lambda) = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_{\rho}^* (\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} T_{\rho}^* (t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} S_{\rho\lambda}^* (t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_1(\lambda) \right];$$

$$V^* (\lambda) = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^* (\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} S_{\rho\lambda}^* (t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} T_{\rho}^* (t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_2(\lambda) \right]. \quad (2)$$

Тут $\varepsilon_{\lambda}^* + iV^* = (\varepsilon + iV) \omega'(\sigma)$; $T_{\rho}^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma)$; $\sigma = e^{i\lambda}$; ε_{λ} – відносна осьова пружна деформація контура Γ ; V – кут пружного повороту; E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; $\gamma' = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ($\gamma_1 \equiv [\alpha_1; \beta_1]$, $\gamma_2 \equiv [\alpha_2; \beta_2]$) – образ зони підсилення при відображенні (1);

$$P_1 = (p+q)(1+(N-1)\varepsilon \cos N\lambda) - 2(p-q)\cos 2\lambda; \quad (3)$$

$$P_2 = -(p+q)(N-1)\varepsilon \sin N\lambda + 2(p-q)\sin 2\lambda.$$

Замінімо в (2) інтеграли по контуру γ інтегралами на ділянках підсилення $\gamma' = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$\varepsilon_{\lambda}^* (\lambda) = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_{\rho}^* (\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} T_{\rho}^* (t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} T_{\rho}^* (t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} S_{\rho\lambda}^* (t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} S_{\rho\lambda}^* (t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_1(\lambda) \right]; \quad (4)$$

$$V^* (\lambda) = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^* (\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} S_{\rho\lambda}^* (t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} S_{\rho\lambda}^* (t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} T_{\rho}^* (t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} T_{\rho}^* (t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + P_2(\lambda) \right].$$

Граничні умови на кожній ділянці підсилення мають вигляд [6]

$$T_\rho = \frac{1}{\tilde{\rho}} E_0 F(s) \varepsilon_\lambda; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho} T_\rho), \quad \delta \in [\alpha_k^*; \beta_k^*], \quad k=1, 2, \quad (5)$$

де $\tilde{\rho}$ – радіус кривини отвору; $E_0 F(s)$ – змінна жорсткість стрижня;

$$F(s) = \begin{cases} F_1(s), & \lambda \in \gamma_1; \\ F_2(s), & \lambda \in \gamma_2; \end{cases}; \quad \frac{1}{\tilde{\rho}} = \frac{\Omega}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = |\omega'(\sigma)|^2; \quad \omega'(\sigma) = \alpha + i\beta; \quad \Omega = (\alpha^2 + \beta^2)(1 - N) + \alpha N;$$

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\alpha \varepsilon_\lambda^* + \beta V_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad V_\lambda = \frac{\alpha V_\lambda^* - \beta \varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad T_\rho = \frac{\alpha T_\rho^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad S_{\rho\lambda} = \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^*}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Якщо (4), (3) підставити в (5), то отримаємо систему чотирьох інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення зусиль в зоні підсилення

$$\begin{aligned} T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{E_0 F(s)}{2Eh} & \left[(1 - \nu) T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\alpha(\lambda)^2 + \beta(\lambda)^2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_1(\lambda, t) S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt + \right. \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K_4(\lambda, \tau) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tau) d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K_3(\lambda, \tau) \tilde{T}_\rho(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} K_5(\tilde{\lambda}, \tau) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda} - \tau}{2} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_2(\lambda, t) T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} K_6(\tilde{\lambda}, \tau) \tilde{T}_\rho(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda} - \tau}{2} d\tau + \\ & \left. \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}^0(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_1(\lambda, t) T_\rho^0(t) dt + \alpha(\lambda) P_1(\lambda) + \beta(\lambda) P_2(\lambda) \right) \right] = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} S_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{\partial T_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{\Omega(\lambda)} + \\ + \frac{T_\rho(\lambda) \left((\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)) (1 - 2N) + 3\alpha(\lambda)N \right) \beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)} = 0; \end{aligned}$$

$$\lambda \in [\alpha_k; \beta_k], \quad k=1, 2, \quad t \in \gamma_1, \quad \tau = t^* + \pi, \quad t^* \in \gamma_2, \quad \tilde{\lambda} = \lambda^* + \pi, \quad \lambda^* \in \gamma_2.$$

Тут

$$T_\rho = \begin{cases} T_\rho^0, & \lambda \in \gamma_1; \\ \tilde{T}_\rho, & \lambda \in \gamma_2; \end{cases}; \quad S_{\rho\lambda} = \begin{cases} S_{\rho\lambda}^0, & \lambda \in \gamma_1; \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}, & \lambda \in \gamma_2; \end{cases}$$

$$K_1(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad K_2(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t);$$

$$K_3(\lambda, \tau) = \alpha(\lambda)\alpha(\tau) + \beta(\lambda)\beta(\tau); \quad K_4(\lambda, \tau) = \alpha(\lambda)\beta(\tau) - \beta(\lambda)\alpha(\tau);$$

$$K_5(\tilde{\lambda}, \tau) = \alpha(\tilde{\lambda})\alpha(\tau) + \beta(\tilde{\lambda})\beta(\tau); \quad K_6(\tilde{\lambda}, \tau) = \alpha(\tilde{\lambda})\beta(\tau) - \beta(\tilde{\lambda})\alpha(\tau).$$

Умови рівноваги підсилювальних стрижнів запишемо у вигляді [6]

$$\int_{\alpha_k^*}^{\beta_k^*} (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = 0, \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

де θ – кут між нормаллю до контура Γ та полярною віссю, $e^{i\theta} = e^{i\lambda} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}$.

Проінтегрувавши (7) із врахуванням другої граничної умови (5), отримаємо

$$T_\rho(\beta_k^*) = T_\rho(\alpha_k^*) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

Формули для визначення кільцевих зусиль на контурі отвору на підставі [5, 6] запишемо так

$$T_\lambda(\lambda) = T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\alpha(\lambda)^2 + \beta(\lambda)^2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}^0(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_1(\lambda, t) T_\rho^0(t) dt + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_2(\lambda, t) T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} K_6(\tilde{\lambda}, \tau) \tilde{T}_\rho(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda} - \tau}{2} d\tau + \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_1(\lambda, t) S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} K_5(\tilde{\lambda}, \tau) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda} - \tau}{2} d\tau +$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K_4(\lambda, \tau) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tau) d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K_3(\lambda, \tau) \tilde{T}_\rho(\tau) d\tau + \alpha(\lambda)P_1(\lambda) + \beta(\lambda)P_2(\lambda) \right);$$

$$\lambda \in [\alpha_k; \beta_k], \quad k = 1, 2, \quad t \in \gamma_1, \quad \tau = t^* + \pi, \quad t^* \in \gamma_2, \quad \tilde{\lambda} = \lambda^* + \pi, \quad \lambda^* \in \gamma_2.$$

Поздовжня сила V_λ в перерізах стрижня визначається із співвідношення [3, 5]

$$V_\lambda = \frac{E_0 F(s)}{2Eh} (T_\lambda - \nu T_\rho). \quad (10)$$

Оскільки точне розв'язання системи (6) викликає великі математичні труднощі, то наближений розв'язок задачі будемо шукати методом граничної колокації Мультотпа-Каландія [4, 5, 8].

Заміною змінних

$$\lambda = 2 \operatorname{arctg}(a_0 S + b_0); \quad t = 2 \operatorname{arctg}(a_0 x + b_0), \quad (11)$$

$$[a_0, b_0] = \begin{cases} [a_0^0, b_0^0], & \lambda \in \gamma_1, t \in \gamma_1 \\ [\tilde{a}_0^0, \tilde{b}_0^0], & \lambda \in \gamma_2, t \in \gamma_2 \end{cases}, \quad \text{де } a_0^0 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}}{2}; \quad b_0^0 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}}{2},$$

проміжок інтегрування $[\alpha_1; \beta_1]$ зводимо до $[-1; 1]$. Якщо проміжок Γ_2 містить точку π , така заміна для перетворення $[\alpha_2; \beta_2]$ в $[-1; 1]$ не підходить, тому спочатку відобразимо $\gamma_2 = [\alpha_2; \beta_2]$ на $\gamma_3 = [\alpha_2 + \pi; \beta_2 + \pi] = [\alpha_3; \beta_3]$ заміною $t = \pi + t^*$. Після цього застосовуємо заміну змінних (11), в якій замість a_0, b_0 вибираються величини

$$\tilde{a}_0 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{2}; \quad \tilde{b}_0 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{2}.$$

На підставі (8) функція $T_\rho(\lambda)$ обмежена на кінцях зони підсилення, а $S_{\rho\lambda}(\lambda)$ – має кореневу особливість, тому наближений розв'язок системи (6) виберемо у вигляді [8]

$$T_\rho = \sqrt{1-x^2} \Phi_1(x); \quad S_{\rho\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Phi_2(x), \quad (12)$$

де $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ – обмежені і неперервні на $[-1; 1]$ функції. Ввівши нові змінні $x = \cos \varphi; S = \cos \zeta$, запишемо загальний вигляд наближеного розв'язку системи (6)

$$[T_\rho(\lambda), S_{\rho\lambda}(\lambda)] = \sum_{n=1}^{N_0} \left[A_n^0 \sin \varphi_n, \frac{B_n^0}{\sin \varphi_n}, \tilde{A}_n \sin \varphi_n, \frac{\tilde{B}_n}{\sin \varphi_n} \right] \Phi(\varphi, \varphi_n). \quad (13)$$

Тут $\Phi(\varphi, \varphi_n) = \frac{(-1)^{n+1} \cos N_0 \varphi \sin \varphi_n}{N_0 (\cos \varphi - \cos \varphi_n)}$; $\zeta_n = \varphi_n$; $\lambda = 2 \operatorname{arctg}(a_0 \cos \varphi + b_0)$;

$t = 2 \operatorname{arctg}(a_0 \cos \zeta + b_0)$; N_0 – число точок колокації; $\varphi_m = \frac{2m-1}{2N_0} \pi$,

$(m = \overline{1, N_0})$ – вузли Чебишева для інтерполяційного многочлена Лагранжа.

Величини $T_\rho(\lambda)$, $S_{\rho\lambda}(\lambda)$ в точках колокації $\varphi = \varphi_k$ мають вигляд

$$T_\rho^0(\lambda_k) = A_k^0 \sin \varphi_k; \quad S_{\rho\lambda}^0(\lambda_k) = \frac{B_k^0}{\sin \varphi_k}; \quad \lambda_k \in \gamma_1; \quad (14)$$

$$\tilde{T}_\rho(\lambda_k) = \tilde{A}_k \sin \varphi_k; \quad \tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda_k) = \frac{\tilde{B}_k}{\sin \varphi_k}, \quad \lambda_k \in \gamma_2.$$

Інтеграли з ядрами Гільберта, які входять в систему (6), в цих точках сингулярні і обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_2(\lambda_k, t) T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_2(\lambda_k, t_n) A_n^0 \sin \varphi_n \times \\ & \times \left(q_n^0 (a_0^0 \cos \varphi_n + b_0^0) - (\operatorname{ctg} \psi \sin \varphi_k - \cos \varphi_n - \cos \varphi_k) \frac{1}{\sin \varphi_n} \right); \\ & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_1(\lambda_k, t) S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_1(\lambda_k, t_n) \frac{B_n^0}{\sin \varphi_n} \times \\ & \times \left(q_n^0 (a_0^0 \cos \varphi_n + b_0^0) - \operatorname{ctg} \psi \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_k} \right); \\ & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} K_6(\tilde{\lambda}_k, \tau) \tilde{T}_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda}_k - \tau}{2} d\tau = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_6(\tilde{\lambda}_k, \tau_n) \tilde{A}_n \sin \varphi_n \times \\ & \times \left(\tilde{q}_n (\tilde{a}_0 \cos \varphi_n + \tilde{b}_0) - (\operatorname{ctg} \psi \sin \varphi_k - \cos \varphi_n - \cos \varphi_k) \frac{1}{\sin \varphi_n} \right); \quad (15) \\ & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} K_5(\tilde{\lambda}_k, \tau) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tilde{\lambda}_k - \tau}{2} d\tau = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_5(\tilde{\lambda}_k, \tau_n) \frac{\tilde{B}_n}{\sin \varphi_n} \times \\ & \times \left(\tilde{q}_n (\tilde{a}_0 \cos \varphi_n + \tilde{b}_0) - \operatorname{ctg} \psi \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_k} \right). \end{aligned}$$

Формули для обчислення $\frac{d}{d\lambda}(T_\rho(\lambda))$ в точках колокації наведено в [6].

Регулярні інтеграли з (6) на підставі [5, 6] обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_1(\lambda_k, t) T_\rho^0(t) dt &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_1(\lambda_k, t_n) A_n^0 \sin \varphi_n q_n^0; \\ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_2(\lambda_k, t) S_{\rho\lambda}^0(t) dt &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_2(\lambda_k, t_n) \frac{B_n^0}{\sin \varphi_n} q_n^0; \\ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K_3(\lambda_k, \tau) \tilde{T}_\rho(\tau) d\tau &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_3(\lambda_k, \tau_n) \tilde{A}_n \sin \varphi_n \tilde{q}_n; \\ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K_4(\lambda_k, \tau) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tau) d\tau &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_4(\lambda_k, \tau_n) \frac{\tilde{B}_n}{\sin \varphi_n} \tilde{q}_n; \\ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K_4(\lambda_k, \tau) \tilde{T}_\rho(\tau) \operatorname{tg} \frac{\lambda_k - \tau - \pi}{2} d\tau &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_4(\lambda_k, \tau_n) \tilde{A}_n \sin \varphi_n \operatorname{tg} \frac{\lambda_k - \tau_n - \pi}{2} \tilde{q}_n; \\ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} K_3(\lambda_k, \tau) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tau) \operatorname{tg} \frac{\lambda_k - \tau - \pi}{2} d\tau &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_3(\lambda_k, \tau_n) \frac{\tilde{B}_n}{\sin \varphi_n} \operatorname{tg} \frac{\lambda_k - \tau_n - \pi}{2} \tilde{q}_n; \\ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_2(\lambda_k, t) T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_2(\lambda_k, t_n) A_n^0 \sin \varphi_n \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t_n}{2} q_n^0; \\ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_1(\lambda_k, t) S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} K_1(\lambda_k, t_n) \frac{B_n^0}{\sin \varphi_n} \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t_n}{2} q_n^0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{де } q_n = \begin{cases} q_n^0 = \frac{a_0^0 \sin \varphi_n}{1 + (a_0^0 \cos \varphi_n + b_0^0)}, & t \in \gamma_1 \\ \tilde{q}_n = \frac{\tilde{a}_0 \sin \varphi_n}{1 + (\tilde{a}_0 \cos \varphi_n + \tilde{b}_0)}, & t \in \gamma_2 \end{cases}; \quad \psi = \frac{\varphi_k + (-1)^{n+k} \varphi_n}{2}.$$

Підставши формули (14) – (16) в (6) отримаємо систему лінійних

алгебраїчних рівнянь для знаходження величин $A_n^0 \sin \varphi_n$, $\frac{B_n^0}{\sin \varphi_n}$, $\tilde{A}_n \sin \varphi_n$, $\frac{\tilde{B}_n}{\sin \varphi_n}$.

Числові розрахунки проводились для різних значень N_0 до $N_0 = 48$ і практично не змінюються, починаючи з $N_0 = 24$, що свідчить про задовільну збіжність методу граничної колокації.

Досліджено вплив на напружений стан нескінченної ізотропної пластинки з трикутним отвором ($N=3$, $\varepsilon=0.1$) жорсткості підсилювальних стрижнів та напрямку зусиль розтягу (стиску) на нескінченності. На рис. 2 – 4 наведено епюри розподілу кільцевих T_λ , нормальних T_ρ та дотичних $S_{\rho\lambda}$ зусиль при $\alpha_1 = -60^\circ$; $\beta_1 = 60^\circ$; $\alpha_2 = 150^\circ$; $\beta_2 = 210^\circ$; $\nu = 0.3$; $h_0/h = 1$; $b_0/\rho = 0.05$.

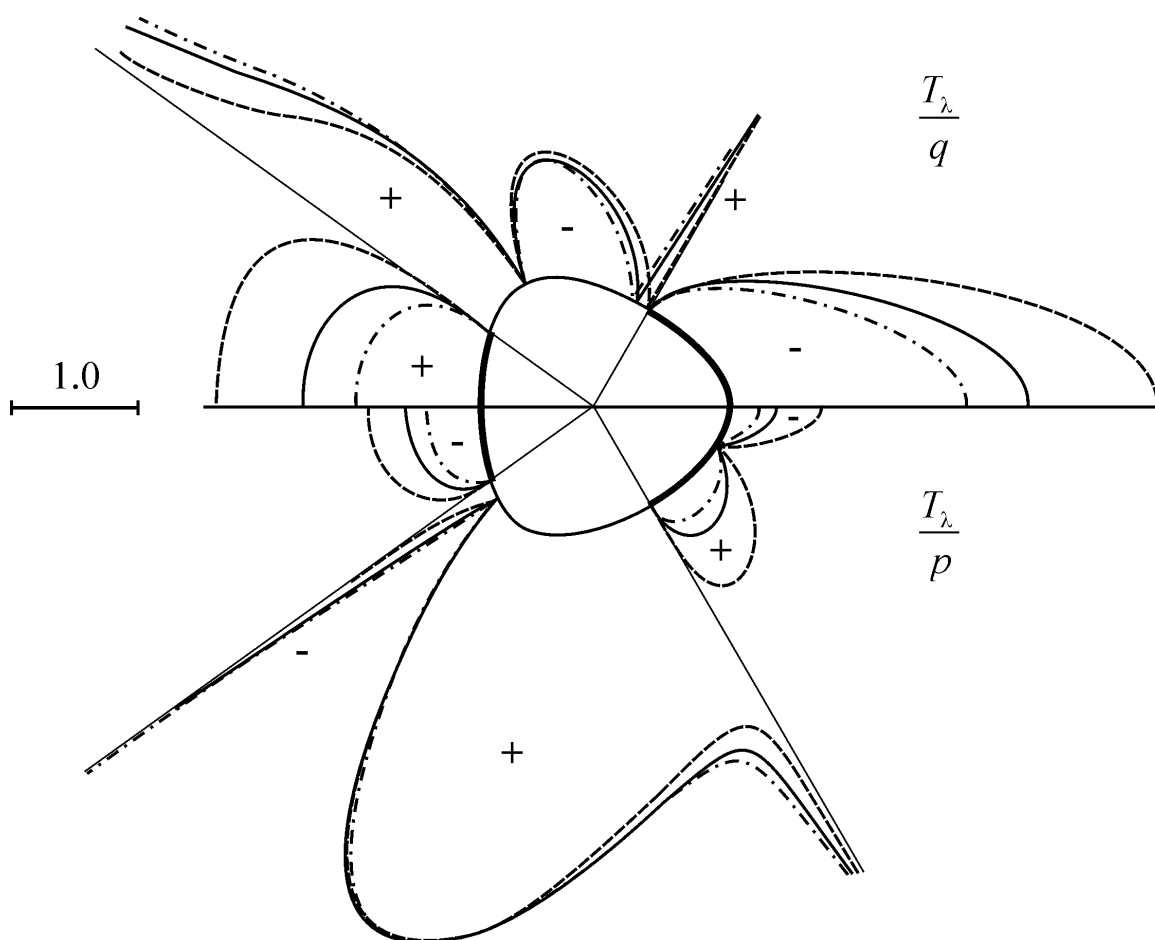


Рис. 2. Розподіл кільцевих зусиль на контурі отвору

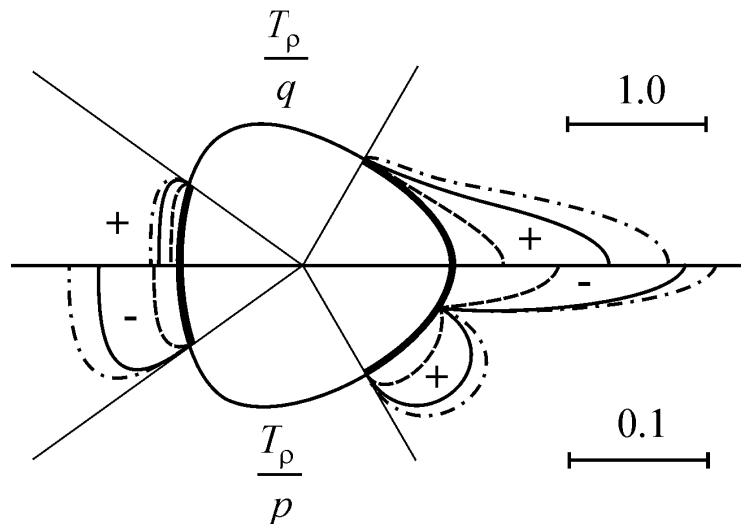


Рис. 3. Розподіл нормальних зусиль на контурі отвору

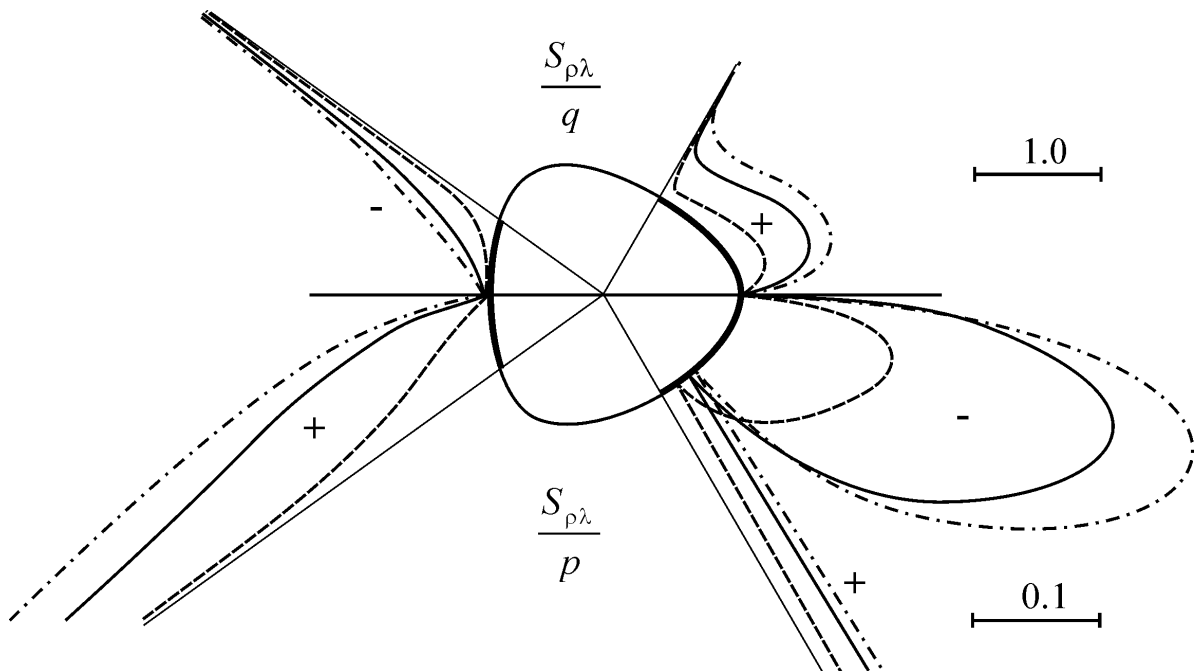


Рис. 4. Розподіл дотичних зусиль на контурі отвору

Штрихові лінії відповідають $E_0/E=1$, суцільні – $E_0/E=5$, штрихпунктирні – $E_0/E=10$.

Із наведених графіків видно, що при розміщенні підсилювальних стрижнів перпендикулярно до лінії дії зовнішніх зусиль, їх вплив незначний. При збільшенні жорсткості підсилення збільшуються контактні зусилля, залишаючись значно меншими від кільцевих.

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708с.
2. Мартинович Т.Л., Юринец В.Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с.
3. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – Киев: Наук. думка, 1964. – 384 с.
4. Сяський А.А. Термоупругая задача для пластинки с частично подкрепленным круговым отверстием // Прикл. механика. – 1984. – 20, №10. – С. 75-79.
5. Сяський А.А., Сяський В.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением // Прикладная механика. – 1983. – 19, № 5. – С. 94 – 99.
6. Батишкіна Ю.В., Сяський А.О. Часткове підкріплення криволінійного отвору в нескінченній пластинці тонким пружним стержнем // Волинський математичний вісник. – 2002. – Випуск 9. С. 4 - 11.
7. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным отверстием // Прикладная математика и механика. – 1986. – 50, №2. – С. 247–254.
8. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.

Рівненський державний гуманітарний університет

E-mail: Batyshkina@rdgu.rv.ua

Надійшла 01.10.2003

Батишкіна Ю.В. ЧАСТИЧНОЕ ПОДКРЕПЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ОТВЕРСТИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ ДВУМЯ ТОНКИМИ УПРУГИМИ СТЕРЖНЯМИ // *Предлагается приближенный метод решения задачи о частичном подкреплении криволинейного отверстия двумя тонкими упругими стержнями переменной жесткости в бесконечной изотропной пластине. Представляя компоненты деформации контура отверстия пластинки в виде интегральных соотношений с ядрами Гильберта, получена система четырех сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений относительно контактных усилий, которые определяются методом граничной коллокации.*

Batyshkina Y.V. THE PARTIAL REINFORCEMENT OF A CURVILINEAR ORIFICE IN AN INFINITE PLATE BY TWO THIN ELASTIC RODS // *The approximate method of a solution of a problem about a partial reinforcement of a curvilinear orifice by two thin elastic rods of a variable rigidity in an infinite isotropic plate is offered. Introducing components of a strain of a contour of an orifice of a plate by the way of integrated relations with cores of Hilbert the system of four singular integrally-differential equations concerning contact gains is obtained, which one are determined by a method of a boundary collocation.*

ЗМІСТ

<i>Барановський С.В., Щодро О.Є. АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ТА ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЛОКАЛЬНО ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА</i>	<i>5</i>
<i>Батишкіна Ю.В. ЧАСТКОВЕ ПІДСИЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ ДВОМА ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ СТРИЖНЯМИ</i>	<i>16</i>
<i>Бомба А.Я. ПРОСТОРОВІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”</i>	<i>27</i>
<i>Булавацький В.М., Рогаль І.В. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ ДО ЗАДАЧІ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ НАСИЧЕНОГО СОЛЬОВИМ РОЗЧИНОМ</i>	<i>36</i>
<i>Герасимчук О.Б. МЕРОМОРФНО-РЕГУЛЯРИЗУЮЧИЙ АЛГОРИТМ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА ЇХ ПРОЕКЦІЯМИ</i>	<i>46</i>
<i>Зарівняк І.С. ІМОВІРНІСТЬ НЕБЕЗПЕЧНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ ПРИ ВТРАТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ СТІЙКОСТІ ПІД ВПЛИВОМ ВИПАДКОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ І ПОЧАТКОВИХ ПРОГІНІВ ПРИКЛЕСНИХ ПОЛИЦЬ</i>	<i>53</i>
<i>Каиштан С.С. ПРО РОЗРАХУНОК ШВИДКОСТІ ФІЛЬТРАЦІЇ У СЕРЕДОВИЩАХ СХИЛЬНИХ ДО ДЕФОРМАЦІЙ ПІД ДІЄЮ ГРАДІЄНТУ КВАЗІПОТЕНЦІАЛУ</i>	<i>61</i>
<i>Ленюк М.П., Петрик М.Р. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ n-ІНТЕРФЕЙСНИХ НЕОДНОРІДНИХ І НАНОПОРИСТИХ НАПВООБМЕЖЕНИХ СЕРЕДОВИЩ</i>	<i>69</i>

<i>Мартинюк П.М., Чума А.С. ПОБУДОВА ТРИКУТНИХ СІТОК МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ</i>	<i>96</i>
<i>Пригорницький Д.О. ЧИСЕЛЬНІ ОБЕРНЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ У ТРИЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З ПОТЕНЦІАЛОМ КЕРУВАННЯ</i>	<i>107</i>
<i>Присяжнюк І.М. АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ” У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ</i>	<i>118</i>
<i>Чернуха О.Ю. ДО ОПИСУ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЇ В ШАРІ З ВИПАДКОВИМИ КУЛЬОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ</i>	<i>129</i>
<i>Шувар Б.А., Дашко О.М., Угрин С.З. ДВОСТОРОННІ НАБЛИЖЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ</i>	<i>143</i>
<i>Яджак М.С. ДО ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ СИСТОЛІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ КАСКАДНОЇ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ</i>	<i>153</i>
НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ	
<i>Парасюк О.С., Вірченко Н.О. КОРОТКО ПРО НАУКОВУ СПАДЩИНУ АКАДЕМІКА М.КРАВЧУКА</i>	<i>161</i>