

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

**Серія
прикладна математика**

ВИПУСК 1

**ЗБІРНИК
НАУКОВИХ
ПРАЦЬ**

Рівне-2003

“Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика” публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

“Волинский математический вестник. Серия прикладная математика”.
The **“Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series”**.

Редакційна колегія

Барановський С.В. (<i>секретар</i>)	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Недашківський М.О.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О. (<i>технічний секретар</i>)
Войтович М.М.	Прикарпатський А.К.
Гарщенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Дейнека В.С.	Скопецький В.В. (<i>головний редактор</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Зарівняк І.С.	Турбал Ю.В.
Каштан С.С. (<i>технічний секретар</i>)	Чикрій А.О.
Кратко М.І.	Шваб'юк В.І.
Кузьменко А.П.	Шинкаренко Г.А.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики НАН України ім. В.М.Глушкова, Інституту прикладних проблем механіки і математики НАНУ ім. Я.С.Підстригача, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

УДК 518.001.57

Барановський С.В., Щодро О.Є.**АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ТА ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЛОКАЛЬНО ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА**

Розроблений метод наближення розв'язку одного класу нелінійних сингулярно збурених задач для рівнянь конвективної дифузії в областях із вільними межами – математичних моделей процесів локально зосереджених деформації русла при обтіканні циліндричних перешкод водним потоком.

Вступ. Однією з головних причин порушення нормальної роботи та руйнування таких гідротехнічних споруд, як мостові опори, заплавні і руслові опори високовольтних ліній електропередач є розмив основ їх фундаментів, викликаний розвитком значних місцевих руслових деформацій [1, 2]. Тому дослідження цих процесів та створення на основі математичного та комп'ютерного моделювання нових ефективних методів прогнозування параметрів розмиву поблизу такого роду споруд і на сьогодні є досить важливим та актуальним.

Приймаючи до уваги той факт, що в основі руслових процесів лежить взаємодія турбулентного потоку і русла, виражена, зокрема, в обміні наносами за рахунок їх постійного відкладення та зваження [3, 4], на основі відомої дифузійної теорії перенесення наносів запропонована математична модель процесу деформації незв'язного піщаного русла, в якій відрив, вертикальний підйом, перенесення та відкладення частинок ґрунту під впливом водного потоку розглядається як їх дифузія у рідину з деяким “фіктивним” коефіцієнтом в області із змінною в часі ділянкою границі (поверхнею дна) [5 – 7]. Зауважимо, що така дифузійна модель була раніше запропонована [3] для розрахунку розподілу наносів в потоці за умови незмінності положення поверхні дна. Окремі приклади застосування ідей дифузійної теорії для розрахунку процесів деформації русла за рахунок відкладення зважених наносів у водосховищах та відстійниках можна знайти в роботі [8].

В даній роботі подана математична модель процесу деформації дрібнопіщаного однорідного дна русла, що виникає поблизу поодинокій незатопленої циліндричної перешкоди (наприклад, мостової опори) при її обтіканні водним потоком. Використовуючи залежність показникового виду для вертикального розподілу компонент u, v, w осередненої швидкості потоку $\vec{V}(u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ [9], подамо далі їх, з врахуванням впливу зміни положення поверхні дна ($z = l(x, y, t)$), у вигляді:

$$u(x, y, z, t) = \frac{u_0(x, y)l_0}{(1 + \alpha)^m l(x, y, t)} \left(\frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m; \quad (1)$$

$$v(x, y, z, t) = \frac{v_0(x, y)l_0}{(1 + \alpha)^m l(x, y, t)} \left(\frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m; \quad (2)$$

$$w(x, y, z, t) = \frac{l_0(l'_x(x, y, t)u_0(x, y) + l'_y(x, y, t)v_0(x, y))}{(1 + \alpha)^m l^2(x, y, t)} \left(\frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m. \quad (3)$$

Тут α – мале число, u_0, v_0 – компоненти вектора швидкості рідини на її поверхні. Будемо надалі також вважати, що русло складається з настільки дрібних частинок, що впливом на кінематичні та турбулентні характеристики потоку при їх змуленні можна знехтувати.

Постановка задачі. Розглядаючи відрив частинок ґрунту з поверхні дна та їх наступний вертикальний підйом у рідині під впливом турбулентного потоку як дифузію з деяким фіктивним «коефіцієнтом» та вважаючи, що перенесення частинок у потоці здійснюється переважно за рахунок конвекції, аналогічно до [5 – 7], приходимо в області $G = \{(x, y, z, t) : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 < z < l(x, y, t), t > 0\} \setminus \{(x, y, z, t) : x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < l(x, y, t), t > 0\}$ із змінною в часі ділянкою границі $z = l(x, y, t)$ до наступної модельної задачі:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(D(x, y, z, l, V) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - u(x, y, z, l, V) \frac{\partial c}{\partial x} - v(x, y, z, l, V) \frac{\partial c}{\partial y} - \\ - (w(x, y, z, l, V) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t} \end{aligned} \quad (4)$$

$$c(x, y, z, 0) = \bar{c}(x, y, z); \left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{x^2+y^2=R^2} = 0, c|_{z=l(x,y,t)} = c_*; \quad (5)$$

$$\left(\varepsilon D(x, y, z, l, V) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(x, y, z, l, V) + w_{0n})c \right) \Big|_{z=l(x,y,t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad l(x, y, 0) = l_0, \quad (6)$$

де $c(x, y, z, t)$ – концентрація частинок в точці (x, y, z) у момент часу t , w_0 – швидкість осідання частинок в стоячій воді, c_* – концентрація частинок ґрунту на поверхні дна, R – радіус мостової опори, \vec{n} – вектор нормалі до границі області, орієнтований в її середину. Тут εD – “фіктивний” коефіцієнт дифузії, який пов’язаний з інтенсивністю проникнення частинок ґрунту в рідину, ε – малий параметр. Рівняння (6) описує умову балансу маси наносів на вільній ділянці границі області (поверхні дна), l_0 – початкове положення поверхні дна. Концентрацію частинок у початковий момент часу, відповідно до дифузійної теорії змулення дрібних наносів, задамо у вигляді [3, 8, 10]:

$$\bar{c}(x, y, z) = c_* e^{-\frac{\gamma(l_0-z)}{\varepsilon D}}.$$

Вважаючи, що розподіл компонент швидкості u_0, v_0 водного потоку на поверхні рідини близький до відповідного випадку потенціального руху, у першому наближенні можемо задати їх як і у випадку обтікання циліндричної перешкоди (мостової опори) необмеженим потенціальним потоком, при якому не враховується зона відриву потоку за спорудою. З метою врахування цього явища замінимо обтікання циліндричної перешкоди потенціальним потоком відповідним обтіканням деякого профілю Жуковського. Тоді, здійснивши конформне відображення області $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : -\infty < \varphi < +\infty, -\infty < \psi < +\infty\} \setminus \{\omega = \varphi + i\psi : -R < \varphi < +R, \psi = 0\}$ на зовнішність профілю Жуковського (див., наприклад, [11, 12]) при відповідності $-R_0 \rightarrow -2v_\infty R_0, R_0 \rightarrow 2v_\infty R_0, \infty \rightarrow \infty$, яке реалізується функцією

$$z = \frac{v_\infty}{2} \left(\omega + \sqrt{\omega - 4v_\infty^2 R_0^2} + \frac{R^2}{\omega + \sqrt{\omega - 4v_\infty^2 R_0^2}} \right)$$

знайдемо співвідношення для компонент швидкості u_0, v_0 , які після розділення дійсної і уявної частини приймуть вигляд:

$$u_0 = \frac{u_1}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}, \quad v_0 = \frac{v_1}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}, \quad u_1 = v_\infty \left(1 - \frac{R_0^2 (X_1^2 - Y_1^2)}{(X_1^2 + Y_1^2)} \right), \quad v_1 = \frac{v_\infty R_0^2 X_1 Y_1}{X_1^2 + Y_1^2},$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(1 - R^2 \frac{(X_1 + R - R_0)^2 - Y_1^2}{((X_1 + R - R_0)^2 + Y_1^2)^2} \right), \quad v_2 = R^2 \frac{(X_1 + R - R_0) Y_1}{((X_1 + R - R_0)^2 + Y_1^2)^2},$$

$$Y_1 = \frac{\psi + Y_2}{2v_\infty}, \quad X_1 = \frac{\varphi + X_2}{2v_\infty}, \quad X_2 = \frac{X_3}{2Y_2}, \quad Y_2 = \sqrt{\frac{-X_3 \pm \sqrt{X_3^2 + Y_3^2}}{2}},$$

$$X_3 = \varphi^2 - \psi^2 - 4R_0^2 v_\infty^2, \quad Y_3 = 2\varphi\psi.$$

Тут φ, ψ – відповідно потенціал та функція течії даного фіктивно ідеального горизонтального потоку, $z = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ – точка фізичної області, u_∞ – значення швидкості ідеального горизонтального потоку в нескінченності, R_0 – параметр, що характеризує розмір зони відриву потоку.

Переходячи від області G до відповідної області $G_* = \{(\varphi, \psi, z, t) : -\infty < \varphi < +\infty, -\infty < \psi < +\infty, 0 < z < l(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), t > 0\} \setminus \{(\varphi, \psi, z, t) : \psi = 0, -2u_\infty R < \varphi < 2u_\infty R, 0 < z < l(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), t > 0\}$, перепишемо задачу (4)-(5) у вигляді:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(D(V(\varphi, \psi, z, l(\varphi, \psi, t))) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{(u_0^2(\varphi, \psi) + v_0^2(\varphi, \psi)) l_0}{(1 + \alpha)^m l(\varphi, \psi, t)} \left(\frac{l(\varphi, \psi, t) - z}{l(\varphi, \psi, t)} + \alpha \right)^m \times$$

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi} - (w(\varphi, \psi, z, l(\varphi, \psi, t)) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (7)$$

$$c(\varphi, \psi, z, 0) = \bar{c}(\varphi, \psi, z); \quad \left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad c(\varphi, \psi, z, t) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_*,$$

$$\left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial \psi} \right|_{\substack{\psi=0, \\ -2u_\infty R < \varphi < 2u_\infty R}} = 0; \quad (8)$$

$$\left(\varepsilon D(V(\varphi, \psi, z, l(\varphi, \psi, t))) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(\varphi, \psi, z, l(\varphi, \psi, t)) + w_{0n}) c \right) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_* \frac{dl}{dt};$$

$$l(\varphi, \psi, 0) = l_0, \quad (9)$$

Ввівши нові змінні s, h, r , які пов'язанні із φ, ψ, z співвідношеннями:

$$\varepsilon \frac{l_0^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{(u_0^2 + v_0^2) l_0}{(1 + \alpha)^m l} \left(\frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0 w_0}{l} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (10)$$

$$c(s, h, r, 0) = \bar{c}(s, h, r); \quad \left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad c(s, h, r, t) \Big|_{r=l_0} = c_*,$$

$$\left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial h} \right|_{h=0} = 0; \quad -2u_\infty R < s < 2u_\infty R \quad (11)$$

$$u(s, h, r, t) = \frac{u_0}{(1 + \alpha)^m} \left(\frac{l_0 - z}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l}; \quad v(s, h, r, t) = \frac{v_0}{(1 + \alpha)^m} \left(\frac{l_0 - z}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l}; \quad (12)$$

$$w(s, h, r, t) = \frac{l_0 (u_0^2 + v_0^2) l_s}{(1 + \alpha)^m l^2} \left(\frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m, \quad (13)$$

Асимптотичне наближення розв'язку. Провівши дискретизацію часу t з настільки малим кроком Δt , щоб на кожному із проміжків $[t_k, t_{k+1}]$ можна було б знехтувати зміною вільної ділянки границі, у випадку сильної узгодженості початкової та граничних умов [5, 7, 13], покроково в областях $G_{*k} = \{(s, h, r, t) : -\infty < s < +\infty, -\infty < h < +\infty, 0 < r < l_0, t_k < t < t_{k+1}\}$, розв'язок задачі (10)-(11) шукатимемо наближено у вигляді асимптотичного ряду:

$$c_{k+1} = c_{0,k+1} + \varepsilon c_{1,k+1} + P_{0,k+1} + \varepsilon P_{1,k+1} + \Pi_{k+1} + R, \quad (14)$$

де $c_{k+1} = c(s, h, r, t)$ для $t_k < t < t_{k+1}$, $R = O(\varepsilon^2)$ – залишковий член, $P_{i,k+1}(s, h, \eta, t)$ – примежові функції в околі $r = l_0$ ($z = l(x, y, t_k)$), η – розтягнута змінна ($i=0,1$), Π_{k+1} – примежові функції в околі $r = 0$, $c_{i,k+1}(s, h, r, t)$ – члени регулярної частини асимптотики (тут взято тільки нульовий та перший члени асимптотики лише з метою зменшення об'єму викладок, інші ж члени, при додаткових вимогах узгодженості початкової та граничних умов, знаходяться аналогічно) [13, 14]. При цьому члени регулярної частини асимптотики (14) для кожного часового етапу запишуться у вигляді [7, 13, 14]:

$$c_{0,k+1} = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f, g_k - t - t_k), g_{-1,k}(f, g_k - t - t_k)) & \text{при } t < t_k + g_k, \\ 0 & \text{при } t > t_k + g_k, \end{cases} \quad (15)$$

$$f(s, h, r) = \frac{l_0}{(m+1)w_0(1+\alpha)^m} \left(\frac{l_0-r}{l_0} + \alpha \right)^{m+1} + \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{u_0^2(\tilde{s}, h) + v_0^2(\tilde{s}, h)},$$

$$g_k(s, h, r) = \frac{l(s, h, t_k)r}{l_0 w_0} \quad (16)$$

$$c_{1,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f, g_k - t - t_k + \tilde{t}), g_{-1,k}(f, g_k - t - t_k + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (17)$$

$$F(s, h, r, t) = -\frac{l_0^2}{l^2(s, h, t_k)} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_k \frac{\partial c_{0,k+1}}{\partial r} \right); \quad D_k = D(V(s, h, r, l(s, h, t_k))). \quad (18)$$

Тут $f_{-1}, g_{-1,k}$ – функції, які отримуються в результаті розв’язання відносно змінних s, r системи нелінійних рівнянь: $\begin{cases} \Theta_1 = f(s, h, r) \\ \Theta_2 = g(s, h, r) \end{cases}$.

Розкладаючи в околі $r = l_0$ коефіцієнти біля похідних у рівнянні (10)

в скінченні ряди Тейлора та вводячи змінну η ($\eta = \frac{l_0-r}{\varepsilon}$), аналогічно до [5 – 7, 13], знаходимо вирази для прилежових функцій $P_{i,k}(s, h, \eta, t)$ ($i=0,1$) на кожному часовому етапі:

$$P_{0,k+1}(s, h, \eta, t) = (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) \cdot e^{-\frac{w_0}{D_k(s, h, l_0)} \frac{l(s, h, t_k)}{l_0} \eta}, \quad (19)$$

$$P_{1,k+1}(s, h, \eta, t) = \left[\frac{(c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t))l(s, h, t_k)}{2l_0^2 D_k^2(s, h, l_0)} \left(\frac{l'_s(s, h, t_k)D_k(s, h, l_0)(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m l(s, h, t_k)} - \frac{l_0 D'_{k_s}(s, h, l_0)(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))\alpha^m}{(1+\alpha)^m} - w_0 l_0 D'_{k_s}(s, h, l_0) \right) \eta^2 + \frac{1}{l_0 w_0} \left(\frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m l(s, h, t_k)} (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) \frac{(l'_s(s, h, t_k)D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k)D'_{k_s}(s, h, l_0))}{D_k(s, h, l_0)} + \left(\frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m} \times \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial s} + l(s, h, t_k) \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial t} \right) \right) \eta - c_{1,k+1}(s, h, l_0, t) \right] \times e^{-\frac{w_0}{D_k(s, h, l_0)} \frac{l(s, h, t_k)}{l_0} \eta}. \quad (20)$$

Функції P_{k+1} у даному випадку близькі до нуля, а тому віднесемо їх до залишкового члену R . У загальному ж випадку вони знаходяться аналогічно до того, як це зроблено, наприклад, в роботі [13].

Використовуючи отриманий розв’язок $c_{k+1}(s, h, r, t)$ та рівність (9), визначимо положення границі $l(s, h, t_k)$ за формулою:

$$\begin{aligned}
I(s, h, t_{k+1}) = & I(s, h, t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))(I_s^2(s, h, t_k) + I_h^2(s, h, t_k))}} \times \\
& \times \left[-\frac{\varepsilon D_k(s, h, l_0) l_0}{I(s, h, t_k)} \times ((u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))(I_s^2(s, h, t_k) + I_h^2(s, h, t_k)) + 1) \frac{\partial}{\partial r} (c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1}) + \right. \\
& + \varepsilon c_{1,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})) - w_0 ((u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))(I_s^2(s, h, t_k) + I_h^2(s, h, t_k)) + 1) \times \\
& \times (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1}) - \varepsilon c_{1,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})) - w_0 c_* + \\
& + \frac{\varepsilon D_k(s, h, l_0) (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))(I_s^2(s, h, t_k) + I_h^2(s, h, t_k))}{I(s, h, t_k) w_0} \left(\frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} \times \right. \\
& \times (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})) \frac{I_s(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - I(s, h, t_k) D_{ks}(s, h, l_0)}{D_k(s, h, l_0)} \\
& \left. \left. + (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) \times \frac{l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} \cdot \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})}{\partial s} + I(s, h, t_k) \frac{\partial c_{0,k+1}(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} \right) \right].
\end{aligned}$$

Для остаточної визначеності поставленої модельної задачі необхідно встановити співвідношення для “фіктивного” коефіцієнта дифузії, який пов’язаний з інтенсивністю проникнення частинок ґрунту в рідину, а тому має залежати як від характеристик турбулентного потоку, так і від параметрів частинок, з яких складається поверхня дна. Зауважимо, що в дифузійній теорії перенесення зважених наносів пропонуються різні форми залежності для такого коефіцієнта. Зокрема, згідно гіпотези Маккавеєва про коефіцієнт турбулентного обміну [3, 10], пропонується приймати його пропорційним осередненій швидкості потоку. При використанні такої форми залежності у запропонованій моделі отримаємо максимальне пониження розрахункового положення поверхні дна в області, де найбільші значення осередненої швидкості потоку. Проте, у випадку обтікання циліндричних мостових опор використання такої гіпотези для “фіктивного” коефіцієнта дифузії при дослідженні процесу деформації русла можливе лише в початкові проміжки часу, коли формування вирви розмиву розпочинається біля бічних сторін опори, де найбільші значення осередненої швидкості потоку. Поглиблення, які утворюються на початку процесу розмиву поступово “рухаються” до передньої стінки і згодом з’єднуються перед перешкодою [1, 4]. Таке явище пояснюється тим, що набігаючий потік сповільнюється перед

опорою, енергія його руху переходить в потенціальну, що спричиняє підвищення інтенсивності турбулентності в цій зоні, а, отже, і інтенсивність зваження частинок з поверхні дна. З метою врахування впливу на інтенсивність “проникнення” частинок в рідину такого фактору сповільнення та підвищення швидкості потоку перед опорою, пропонуємо задавати “фіктивний” коефіцієнт дифузії залежним не лише від значення швидкості потоку, але і від його градієнту у вигляді наступного модельного співвідношення:

$$\varepsilon D = \chi \lambda^{\alpha} V^{\beta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (22)$$

де χ , λ , α , β – деякі числа (параметри), які підбираються за результатами експериментальних досліджень.

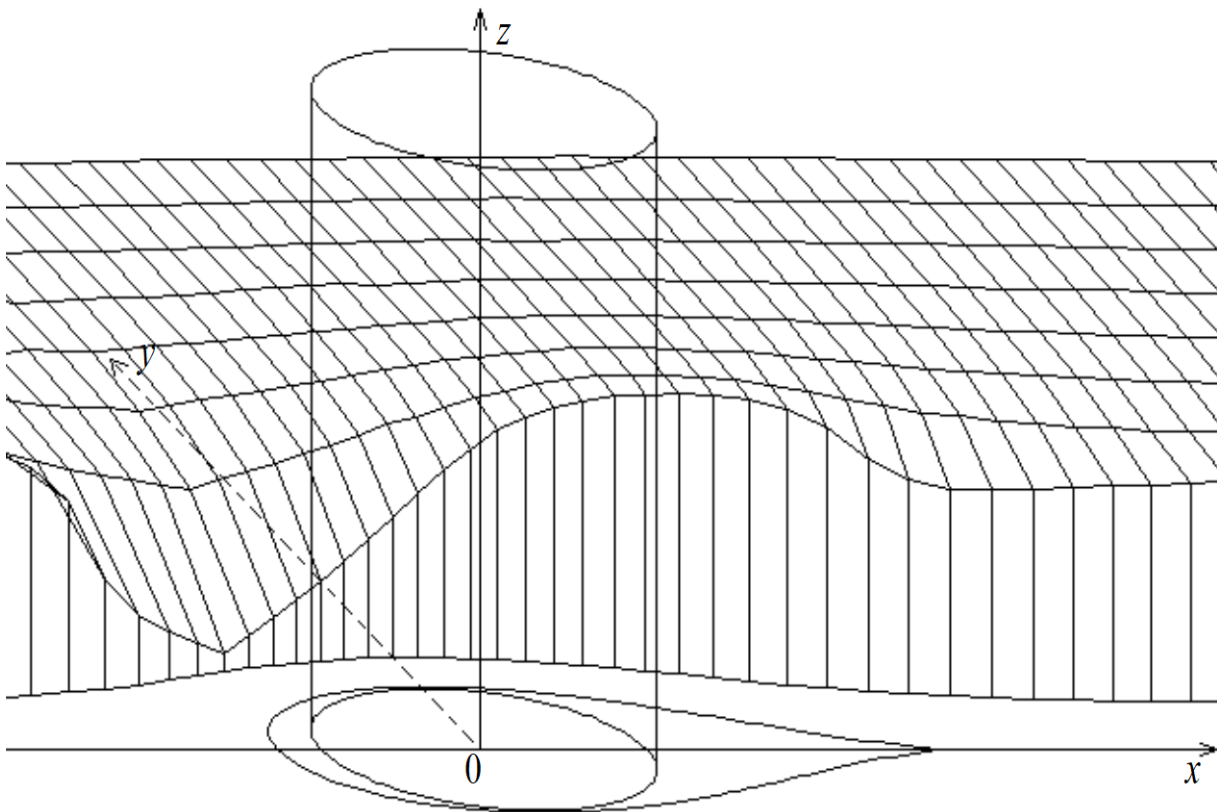


Рис. 1. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу циліндричної мостової опори

Результати чисельного експерименту. На рис. 1 зображено розрахункову конфігурацію поверхні дна поблизу циліндричної мостової опори при швидкості набігаючого потоку – $u_{\infty} = 1 \text{ м/с}$, радіусі опори – $R = 1 \text{ м}$, глибині

набігаючого потоку – $l_0 = 1$ м, ґрунт приймався однорідним з діаметром частинок $d = 1$ мм. На рис. 2, 3 відповідно зображені графіки залежності прогнозованої глибини вирви розмиву від швидкості набігаючого потоку та від діаметра частинок однорідного ґрунту.

Зауважимо, що наближений розв'язок вихідної задачі може бути знайдений і методом скінченних різниць.

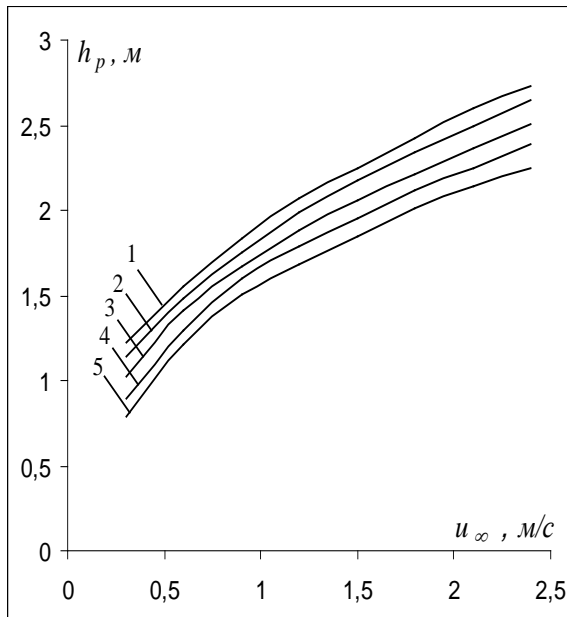


Рис. 2. 1 – $d = 0,5$ мм; 2 – $d = 1,0$ мм;
3 – $d = 1,5$ мм, 4 – $d = 2,0$ мм;
5 – $d = 2,5$ мм.

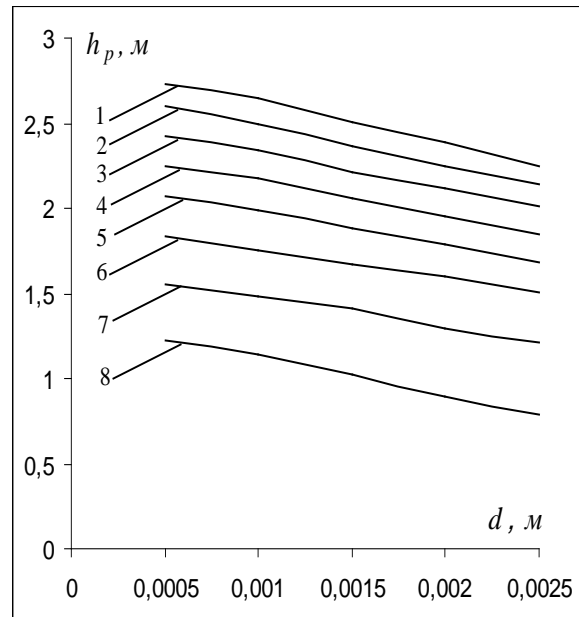


Рис. 3. 1 – $u_\infty = 0,3$ м/с; 2 – $u_\infty = 0,6$ м/с;
3 – $u_\infty = 0,9$ м/с; 4 – $u_\infty = 1,2$ м/с;
5 – $u_\infty = 1,5$ м/с; 6 – $u_\infty = 1,8$ м/с;
7 – $u_\infty = 2,1$ м/с; 8 – $u_\infty = 2,4$ м/с.

Висновки. Порівняльний аналіз розрахункової форми вирви розмиву, залежностей максимальної глибини розмиву від швидкості набігаючого потоку та середнього діаметру частинок ґрунту з відповідними даними натурних та експериментальних спостережень [1, 2] підтверджує адекватність запропонованої моделі: зона максимального пониження поверхні дна розміщена перед опорою, а за нею – зона активного відкладення наносів. Використання запропонованої вище методики математичного моделювання процесу деформації дна русла дозволяє розраховувати не лише максимальну глибину вирви розмиву, але і її форму та зону відкладення частинок з урахуванням транспортування

наносів, а також прогнозувати розвиток процесу в часі.

Зауважимо, що запропонована методика математичного моделювання стосується випадків, коли руслоформуючі наноси переносяться потоком переважно у зваженому стані. За І.Нікітіним [15] область зважених руслоформуючих та транзитних наносів для рівномірного турбулентного потоку знаходиться в межах $w_0/v_* < 3,15$, де v_* – динамічна швидкість [15].

1. Журавлев М.М. Местный размыв у опор мостов. - М.: Транспорт, 1984. - 113 с.
2. Бегам Л.Г., Цыпин В.Ш. Надежность мостовых переходов через водотоки.- М.: Транспорт, 1984. - 253 с.
3. Маккавеев В.М. К теории турбулентного режима и взвешивания наносов. / Известия ГГИ, 1931, №32, с.5-26.
4. Щодро А.Е. Физические основы расчетов местного размыва у речных гидротехнических сооружений // Гидравлика и гидротехника. - Київ: Техніка. - 1998. - Вып. 59. - С. 100-107.
5. Бомба А.Я., Барановський С.В., Щодро О.Є. Покрокова асимптотика розв'язку сингулярно збурених задач конвективної дифузії в скінченних областях з вільними межами та проблеми моделювання планових деформацій дна русла // Вісник УДАВГ. - Рівне: Вид-во УДАВГ. - 1998. - № 1. - С. 21-27.
6. Барановський С.В. Про математичне моделювання процесів деформації незв'язного піщаного дна біля окремих типів гідротехнічних споруд // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 1999. – Т. 4, число 2. – С. 36-40.
7. Барановський С.В., Бомба А.Я. Покрокова асимптотика розв'язання одного класу сингулярно збурених нелінійних задач з вільними поверхнями // Математичні методи і фізико-механічні поля. - Львів. - 1999. Т. 42, № 2. - С. 46-51.
8. Шапов Г.И. Речные наносы. - Л.: Гидрометеиздат, 1959. - 378 с.
9. Талмаза В.Ф., Крошкин А.Н. Гидроморфометрические характеристики горных рек. - Фрунзе: Кыргызстан, 1968. -204с.
10. Караушев А.В. Теория и методы расчета речных наносов. – Л.: Гидрометеиздат, 1973.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – 4-е изд., исправ. – М.: Наука, 1973.
12. Патрашев А.Н. Гидромеханика. М.: Военно-морское изд-во, 1953. - 720 с.
13. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі //Укр.мат.журн.- 1982 - т.4, №4.- с.493-496.
14. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.
15. Никитин И.К. Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области. - К.: Изд. АН УССР, 1963. - 142 с.

Український державний університет
водного господарства і природокористування, Рівне

Надійшла 01.03.2003

Барановский С.В., Щодро О.Е. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ И ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ЛОКАЛЬНО СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ РУСЛА // *Разработан метод приближения решений одного класса нелинейных сингулярно возмущенных задач для уравнений конвективной диффузии в областях со свободными границами – математических моделей процессов локально сосредоточенных деформаций русла при обтекании цилиндрических препятствий водным потоком.*

Baranovsky S.V., Schodro O.E. THE ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF ONE CLASS NONLINEAR SINGULAR PERTURBED PROBLEMS FOR THE CONVECTIVE DIFFUSION EQUATIONS AND THE PROBLEMS OF MODELLING OF CHANNEL'S LOCALLY CONCENTRATED DEFORMATION PROCESSES // *The method of approximation of solutions of one class nonlinear singular perturbed problems for the convective diffusion equations in areas with free boundaries - mathematical models of channel's locally concentrated deformation processes under conditions of streamline of cylindrical hindrances by the water flow is designed.*

ЗМІСТ

Барановський С.В., Щодро О.Є. АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ТА ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЛОКАЛЬНО ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА	5
Батишкіна Ю.В. ЧАСТКОВЕ ПІДСИЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ ДВОМА ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ СТРИЖНЯМИ	16
Бомба А.Я. ПРОСТОРОВІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ”	27
Булавацький В.М., Рогаль І.В. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ ДО ЗАДАЧІ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ НАСИЧЕНОГО СОЛЬОВИМ РОЗЧИНОМ	36
Герасимчук О.Б. МЕРОМОРФНО-РЕГУЛЯРИЗУЮЧИЙ АЛГОРИТМ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЗА ЇХ ПРОЕКЦІЯМИ	46
Зарівняк І.С. ІМОВІРНІСТЬ НЕБЕЗПЕЧНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ ПРИ ВТРАТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ СТІЙКОСТІ ПІД ВПЛИВОМ ВИПАДКОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ І ПОЧАТКОВИХ ПРОГІНІВ ПРИКЛЕСНИХ ПОЛИЦЬ	53
Каиштан С.С. ПРО РОЗРАХУНОК ШВИДКОСТІ ФІЛЬТРАЦІЇ У СЕРЕДОВИЩАХ СХИЛЬНИХ ДО ДЕФОРМАЦІЙ ПІД ДІЄЮ ГРАДІЄНТУ КВАЗІПОТЕНЦІАЛУ	61
Ленюк М.П., Петрик М.Р. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ n -ІНТЕРФЕЙСНИХ НЕОДНОРІДНИХ І НАНОПОРИСТИХ НАПВООБМЕЖЕНИХ СЕРЕДОВИЩ	69

<i>Мартинюк П.М., Чума А.С. ПОБУДОВА ТРИКУТНИХ СІТОК МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ</i>	<i>96</i>
<i>Пригорницький Д.О. ЧИСЕЛЬНІ ОБЕРНЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ У ТРИЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ З ПОТЕНЦІАЛОМ КЕРУВАННЯ</i>	<i>107</i>
<i>Присяжнюк І.М. АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ” У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ</i>	<i>118</i>
<i>Чернуха О.Ю. ДО ОПИСУ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЇ В ШАРІ З ВИПАДКОВИМИ КУЛЬОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ</i>	<i>129</i>
<i>Шувар Б.А., Дашко О.М., Угрин С.З. ДВОСТОРОННІ НАБЛИЖЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ</i>	<i>143</i>
<i>Яджак М.С. ДО ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ СИСТОЛІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ КАСКАДНОЇ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ</i>	<i>153</i>
НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ	
<i>Парасюк О.С., Вірченко Н.О. КОРОТКО ПРО НАУКОВУ СПАДЩИНУ АКАДЕМІКА М.КРАВЧУКА</i>	<i>161</i>