

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 2 (11)**

Рівне-2004

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика"**.  
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

*Редакційна колегія*

Барановський С.В. ( <i>секретар</i> )	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. ( <i>відповідальний редактор</i> )	Недашківській М.О.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пономаренко Л.А.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О. ( <i>технічний секретар</i> )
Гаращенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Дейнека В.С.	Скопецький В.В. ( <i>головний редактор</i> )
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С. ( <i>технічний секретар</i> )	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

**Зміст**

<i>Наші вітання СКОПЕЦЬКОМУ ВАСИЛЮ ВАСИЛЬОВИЧУ .....</i>	<i>5</i>
<b>Барановський С.В., Бомба А.Я., Скопецький В.В.</b> <i>Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформацій русла на ділянках планового розширення та повороту русла .....</i>	<i>7</i>
<b>Бомба А.Я., Каштан С.С.</b> <i>Методи фіктивних ділянок та квазі-конформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач в областях з вільними межами .....</i>	<i>17</i>
<b>Вальковський В.О., Соловей І.А.</b> <i>До проблеми оптимальної синхронної реалізації обчислень на клітинних автоматах .....</i>	<i>29</i>
<b>Власюк А.П., Мартинюк П.М.</b> <i>Фільтраційна консолідація неоднорідного масиву ґрунту в неізотермічних умовах з урахуванням впливу переносу солей .....</i>	<i>39</i>
<b>Возняк О.Г.</b> <i>Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь .....</i>	<i>54</i>
<b>Гайвась Б.І.</b> <i>Про вплив електроосмосу на двостороннє конвективне осушення пористого шару .....</i>	<i>74</i>
<b>Дейнека О.Ю.</b> <i>Періодичні розв'язки системи телеграфних рівнянь .....</i>	<i>86</i>
<b>Ємець Є.М.</b> <i>Про еквівалентність задач цілочислового програмування та задач оптимізації на полірозміщеннях .....</i>	<i>91</i>
<b>Ємець О.О.</b> <i>Розв'язок безумовної задачі евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією .....</i>	<i>95</i>
<b>Ємець Ол-ра О.</b> <i>Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин .....</i>	<i>101</i>
<b>Ємець О.О., Черненко О.О.</b> <i>Математичне моделювання деяких економічних проблем задачами оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною функцією цілі .....</i>	<i>107</i>
<b>Зарівняк І.С.</b> <i>Імовірність критичного стану клеєних швів шарової пластини з початковими неправильностями .....</i>	<i>113</i>
<b>Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М.</b> <i>Моделювання процесів конвективно-дифузійного переносу у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації .....</i>	<i>121</i>
<b>Кузьменко А.П., Кузьменко В.М.</b> <i>Чисельно-аналітичний розв'язок просторових крайових задач з вільною межею для одного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних .....</i>	<i>130</i>
<b>Мандзак Т.І., Савула Я.Г.</b> <i>Пониження вимірності математичної</i>	

<i>моделі адвекції-дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій</i> .....	140
<b>Мартинюк П.М.</b> <i>Про зменшення затрат машинного часу при розв'язуванні нелінійних крайових задач методом скінченних елементів</i> .....	148
<b>Міца О.В.</b> <i>Моделювання та оптимізація розподілу показника заломлення неоднорідних плівок при розв'язанні задачі просвітлення</i> .....	161
<b>Петрик М.Р., Ленюк М.П.</b> <i>Математичне моделювання адсорбційного масопереносу з спектральним параметром для неоднорідних n-інтерфейсних обмежених нанопористих середовищ</i> .....	168
<b>Поліщук О.Д.</b> <i>Розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа в <math>R^3</math> для розімкненої поверхні за допомогою потенціалу подвійного шару</i> .....	189
<b>Пригорницький Д.О.</b> <i>Нелінійні обернення модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей</i> .....	196
<b>Присяжнюк І.М.</b> <i>Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії із запізнюючим аргументом</i> .....	212
<b>Романова Н.Г.</b> <i>Задача оптимізації дробово-лінійної цільової функції на поліпереставленнях: властивості її комбінаторного многогранника</i> .....	223
<b>Савула Я.Г., Винницька Л.І.</b> <i>Застосування генетичного алгоритму до оптимізації сіток в процесі числового розв'язування задачі адвекції-дифузії-реакції</i> .....	233
<b>Скопецький В.В., Булавацький В.М.</b> <i>Математичне моделювання фільтраційного ущільнення ґрунтових масивів за умов насичення сольовими розчинами та нерівноважності дифузійного процесу</i> .....	240
<b>Сяський А.О., Бабич С.М.</b> <i>Математична модель шліцьового з'єднання храпового типу для передачі обертального руху</i> .....	248
<b>Чілікіна Т.В.</b> <i>Розв'язування одного класу задач нелінійної комбінаторної оптимізації на переставленнях</i> .....	257
<b>НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ-МЕХАНІКИ</b>	
<b>Я.С. ПІДСТРИГАЧ</b> – <i>видатний вчений, стратег і організатор науки</i> .....	263

УДК 518.001.57

**Барановський С.В., Бомба А.Я., Скопецький В.В.**

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ  
НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ТА МОДЕЛЮВАННЯ  
ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА НА ДІЛЯНКАХ ПЛАНОВОГО  
РОЗШИРЕННЯ ТА ПОВОРОТУ РУСЛА

*На основі розробленого методу асимптотичного наближення розв'язку одного класу нелінійних сингулярно збурених задач для рівнянь конвективної дифузії в областях із вільними межами, пропонується підхід до моделювання і дослідження процесів деформації русла водним потоком на ділянках планового розширення і повороту русла.*

**Вступ.** Приймаючи до уваги той факт, що в основі руслових процесів лежить взаємодія турбулентного потоку і русла, виражена, зокрема, в обміні наносами за рахунок їх постійного відкладення та змулення [1-4, 8], на основі відомої дифузійної теорії перенесення наносів в роботах [5-7] запропонована математична модель процесу деформації незв'язного піщаного русла, в якій відрив, вертикальний підйом, перенесення та відкладення частинок ґрунту під впливом водного потоку розглядається як їх дифузія у рідину з деяким “фіктивним” коефіцієнтом в області із змінною в часі ділянкою границі (поверхнею дна). Зауважимо, що така дифузійна модель була раніше запропонована [3] для розрахунку розподілу наносів в потоці за умови незмінності положення поверхні дна. Окремі приклади застосування ідей дифузійної теорії для розрахунку процесів деформації русла за рахунок відкладення зважених наносів у водосховищах та відстійниках можна знайти в роботі [8].

В цій роботі подана математична модель процесу деформації дрібнопіщаного однорідного дна турбулентним водним потоком на ділянках планового розширення та повороту русла. Використовуючи залежність показникового вигляду для вертикального розподілу компонент  $u, v, w$  осередненої швидкості потоку  $\vec{V}(u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$  [9], подамо далі їх, з врахуванням впливу зміни положення поверхні дна ( $z = l(x, y, t)$ ), у вигляді:

$$u(x, y, z, t) = \frac{u_0(x, y)l_0}{(1 + \alpha)^m l(x, y, t)} \left( \frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m; \quad (1)$$

$$v(x, y, z, t) = \frac{v_0(x, y)l_0}{(1 + \alpha)^m l(x, y, t)} \left( \frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m; \quad (2)$$

$$w(x, y, z, t) = \frac{l_0 (l'_x(x, y, t)u_0(x, y) + l'_y(x, y, t)v_0(x, y))}{(1 + \alpha)^m l^2(x, y, t)} \left( \frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m. \quad (3)$$

Тут  $\alpha$  – мале число,  $u_0, v_0$  – компоненти вектора швидкості рідини на її поверхні. Будемо надалі також вважати, що русло складається з настільки дрібних частинок, що впливом на кінематичні та турбулентні характеристики потоку при їх замуленні можна знехтувати.

**Постановка задачі.** Розглядаючи відрив частинок ґрунту з поверхні дна та їх наступний вертикальний підйом у рідині під впливом турбулентного потоку як дифузію з деяким “фіктивним” коефіцієнтом та вважаючи, що перенесення частинок у потоці здійснюється переважно за рахунок конвекції, аналогічно до [5-7], приходимо в області  $G = \{(x, y, z, t) : -\infty < x \leq 0, 0 \leq y \leq H, 0 < z < l(x, y, t), t > 0\} \cup \{(x, y, z, t) : 0 < x < +\infty, x \cdot \operatorname{tg}(\pi\alpha) \leq y \leq H + x \cdot \operatorname{tg}(\pi\alpha), 0 < z < l(x, y, t), t > 0\}$  із змінною в часі ділянкою границі  $z = l(x, y, t)$  до наступної модельної задачі:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( D(x, y, z) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - u(x, y, z) \frac{\partial c}{\partial x} - v(x, y, z) \frac{\partial c}{\partial y} - (w(x, y, z) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (4)$$

$$c(x, y, z, 0) = \bar{c}(x, y, z); \quad \left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{x^2 + y^2 = R^2} = 0, \quad c|_{z=l(x, y, t)} = c_*; \quad (5)$$

$$\left( \varepsilon D(x, y, z) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(x, y, z) + w_{0n})c \right) \Big|_{z=l(x, y, t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad l(x, y, 0) = l_0, \quad (6)$$

де  $c(x, y, z, t)$  – концентрація частинок в точці  $(x, y, z)$  у момент часу  $t$ ,  $w_0$  – швидкість осідання частинок в стоячій воді,  $c_*$  – концентрація частинок ґрунту на поверхні дна,  $H$  – ширина набігаючого потоку (рис.1),  $\vec{n}$  – вектор нормалі до границі області, орієнтований в її середину. Тут  $\varepsilon D$  – “фіктивний” коефіцієнт дифузії, який пов’язаний з інтенсивністю

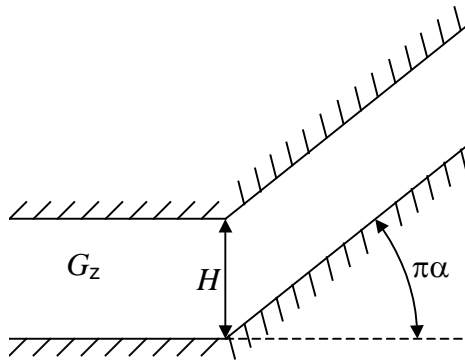


Рис. 1. Планова конфігурація русла на ділянці його повороту

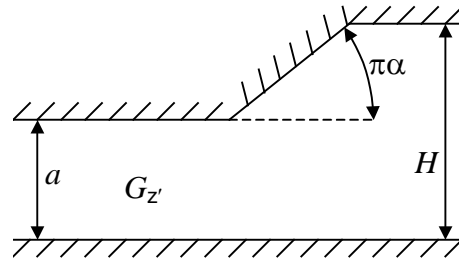


Рис. 2. Планова конфігурація русла на ділянці його розширення

проникнення частинок ґрунту в рідину,  $\varepsilon$  – малий параметр. Рівняння (6) описує умову балансу маси наносів на вільній ділянці границі області (поверхні дна),  $l_0$  – початкове положення поверхні дна. Концентрацію частинок у початковий момент часу, відповідно до дифузійної теорії змулення дрібних наносів, задамо у вигляді [3, 8, 10]:

$$\bar{c}(x, y, z) = c_* e^{-\frac{\gamma(l_0 - z)}{\varepsilon D}}.$$

Важливим питанням при використанні запропонованої моделі деформації дна русла є встановлення модельного співвідношення для “фіктивного” коефіцієнта дифузії, який пов’язаний з інтенсивністю проникнення частинок ґрунту в рідину, а тому має залежати як від характеристик турбулентного потоку, так і від параметрів частинок, з яких складається поверхня дна. Зауважимо, що в дифузійній теорії перенесення змулених наносів пропонуються різні форми залежності для такого коефіцієнта. Зокрема, згідно гіпотези Маккавеева про коефіцієнт турбулентного обміну [3, 10], пропонується приймати його пропорційним осередненій швидкості потоку. В загальному випадку таку залежність можна представити у вигляді:

$$\varepsilon D = \alpha V^\beta,$$

де  $\alpha$ ,  $\beta$  – деякі числа (параметри), які підбираються за результатами експериментальних досліджень.

Вважаючи, що розподіл компонент швидкості  $u_0, v_0$  (див. (1)-(3)) водного потоку на поверхні рідини близький до відповідного випадку потенціального руху, знайдемо співвідношення для цих компонент, здій-

снівши конформне відображення області  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : 0 \leq \text{Im } \omega \leq 1\}$  на область  $G_z (z = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi))$  (див. рис. 1) при відповідності  $-\infty \rightarrow -\infty$ ,  $0 \rightarrow 0$ ,  $\infty \rightarrow \infty$ , яке реалізується функцією

$$z = H \cos \alpha \pi \int_0^\omega \left\{ \frac{1 - e^{\pi\omega}}{(\cos \alpha \pi)^{1/\alpha} + e^{\pi\omega}} \right\}^\alpha d\omega.$$

Зауважимо, що у випадку дослідження процесів деформації дна на ділянці розширення русла його планову конфігурацію можна представити у вигляді області  $G_z$  (рис. 2). Тоді, аналогічно до випадку повороту русла, відповідне конформне відображення області  $G_\omega$  на область  $G_z$  буде реалізуватись функцією

$$z' = ia + \int_0^\omega \left\{ \frac{He^{\pi\omega/a} + a}{a(e^{\pi\omega/a} + 1)} \right\}^\alpha d\omega.$$

Переходячи від області  $G$  до відповідної області  $G_* = \{(\varphi, \psi, z, t) : -\infty < \varphi < +\infty, 0 \leq \psi \leq 1, 0 \leq z \leq l(\varphi, \psi, t), t > 0\}$ , перепишемо задачу (4)-(5) у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( D(V(\varphi, \psi, z, l)) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{(u_0^2(\varphi, \psi) + v_0^2(\varphi, \psi)) l_0}{(1 + \alpha)^m l(\varphi, \psi, t)} \left( \frac{l(\varphi, \psi, t) - z}{l(\varphi, \psi, t)} + \alpha \right)^m \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \\ - (w(\varphi, \psi, z, l) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} c(\varphi, \psi, z, 0) = \bar{c}(\varphi, \psi, z); \quad \left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad c(\varphi, \psi, z, t) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_*, \\ \left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial \psi} \right|_{\substack{\psi=0, \\ -2u_\infty R < \varphi < 2u_\infty R}} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left( \varepsilon D(V(\varphi, \psi, z, l)) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(\varphi, \psi, z, l) + w_{0n}) c \right) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad l(\varphi, \psi, 0) = l_0. \quad (9)$$

Ввівши нові змінні  $s, h, r$ , які пов'язанні із  $\varphi, \psi, z$  співвідношеннями:

$$s = \varphi, \quad h = \psi, \quad r = \frac{l_0 z}{l(\varphi, \psi, t)},$$



перепишемо рівняння (7), (8) та рівності (1)-(3) відповідно у вигляді:

$$\varepsilon \frac{l_0^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( D \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{(u_0^2 + v_0^2) l_0}{(1 + \alpha)^m l} \left( \frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0 w_0}{l} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (10)$$

$$c(s, h, r, 0) = \bar{c}(s, h, r); \quad \left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad c(s, h, r, t) \Big|_{r=l_0} = c_*,$$

$$\left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial h} \right|_{h=0} = 0; \quad -2u_\infty R < s < 2u_\infty R \quad (11)$$

$$u(s, h, r, t) = \frac{u_0}{(1 + \alpha)^m} \left( \frac{l_0 - z}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l}; \quad (12)$$

$$v(s, h, r, t) = \frac{v_0}{(1 + \alpha)^m} \left( \frac{l_0 - z}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l}; \quad (13)$$

$$w(s, h, r, t) = \frac{l_0 (u_0^2 + v_0^2) l'_s}{(1 + \alpha)^m l^2} \left( \frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m. \quad (14)$$

**Асимптотичне наближення розв'язку.** Провівши дискретизацію часу  $t$  з настільки малим кроком  $\Delta t$ , щоб на кожному із проміжків  $[t_k, t_{k+1}]$  можна було б знехтувати зміною вільної ділянки границі, у випадку сильної узгодженості початкової та граничних умов [5, 7, 13], покроково в областях  $G_{*k} = \{(s, h, r, t) : -\infty < s < +\infty, -\infty < h < +\infty, 0 < r < l_0, t_k < t < t_{k+1}\}$ , розв'язок задачі (10)-(11) шукатимемо наближено у вигляді асимптотичного ряду:

$$c_{k+1} = c_{0,k+1} + \varepsilon c_{1,k+1} + P_{0,k+1} + \varepsilon P_{1,k+1} + \dot{I}_{k+1} + R, \quad (15)$$

де  $c_{k+1} = c(s, h, r, t)$  для  $t_k < t < t_{k+1}$ ,  $R = O(\varepsilon^2)$  – залишковий член,  $P_{i,k+1}(s, h, \eta, t)$  – примежові функції в околі  $r = l_0$  ( $z = l(x, y, t_k)$ ),  $\eta$  – розтягнута змінна ( $i=0,1$ ),  $\dot{I}_{k+1}$  – примежові функції в околі  $r = 0$ ,  $c_{i,k+1}(s, h, r, t)$  – члени регулярної частини асимптотики (тут взято тільки нульовий та перший члени асимптотики лише з метою зменшення об'єму викладок, інші ж члени, при додаткових вимогах узгодженості початкової та граничних умов, знаходяться аналогічно) [13, 14]. При цьому члени регулярної частини асимптотики (15) для кожного часового етапу

запишуться у вигляді [7,13,14]:

$$c_{0,k+1} = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f, g_k - t - t_k), g_{-1,k}(f, g_k - t - t_k)), & \text{і дè } t < t_k + g_k; \\ 0, & \text{і дè } t > t_k + g_k; \end{cases} \quad (16)$$

$$f(s, h, r) = \frac{l_0}{(m+1)w_0(1+\alpha)^m} \left( \frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^{m+1} + \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{u_0^2(\tilde{s}, h) + v_0^2(\tilde{s}, h)}, \quad g_k(s, h, r) = \frac{l(s, h, t_k)r}{l_0 w_0}; \quad (17)$$

$$c_{1,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f, g_k - t - t_k + \tilde{t}), g_{-1,k}(f, g_k - t - t_k + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (18)$$

$$F(s, h, r, t) = -\frac{l_0^2}{l^2(s, h, t_k)} \frac{\partial}{\partial r} \left( D_k \frac{\partial c_{0,k+1}}{\partial r} \right); \quad D_k = D(V(s, h, r, l(s, h, t_k))). \quad (19)$$

Тут  $f_{-1}, g_{-1,k}$  – функції, які отримуються в результаті розв’язання відносно

змінних  $s, r$  системи нелінійних рівнянь:  $\begin{cases} \Theta_1 = f(s, h, r), \\ \Theta_2 = g(s, h, r). \end{cases}$

Розкладаючи в околі  $r = l_0$  коефіцієнти біля похідних у рівнянні (10)

в скінченні ряди Тейлора та вводячи змінну  $\eta$  ( $\eta = \frac{l_0 - r}{\varepsilon}$ ), аналогічно до

[5-7, 13], знаходимо вирази для примежових функцій  $P_{i,k}(s, h, \eta, t)$  ( $i = 0, 1$ )

на кожному часовому етапі:

$$P_{0,k+1}(s, h, \eta, t) = (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) \cdot e^{-\frac{w_0}{D_k(s, h, l_0)} \frac{l(s, h, t_k)}{l_0} \eta}, \quad (20)$$

$$P_{1,k+1}(s, h, \eta, t) = \left[ \frac{(c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) l(s, h, t_k)}{2l_0^2 D_k^2(s, h, l_0)} \left( \frac{l'_s(s, h, t_k) (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))}{(1+\alpha)^m l(s, h, t_k)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times l_0 \alpha^m D_k(s, h, l_0) - \frac{l_0 D'_{k_s}(s, h, l_0) (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) \alpha^m}{(1+\alpha)^m} - w_0 l_0 D'_{k_s}(s, h, l_0) \right) \eta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{l_0 w_0} \left( \frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) l_0 \alpha^m}{(1+\alpha)^m l(s, h, t_k)} \frac{l'_s(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k) D'_{k_s}(s, h, l_0)}{D_k(s, h, l_0)} \right) \times \right]$$

$$\begin{aligned} & \times (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) + \left( \frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial s} + l(s, h, t_k) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial t} \right) \eta - c_{1,k+1}(s, h, l_0, t) \times e^{-\frac{w_0}{D_k(s, h, l_0)} \frac{l(s, h, t_k)}{l_0} \eta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Функції  $\check{I}_{k+1}$  у даному випадку близькі до нуля, а тому віднесемо їх до залишкового члену  $R$ . У загальному ж випадку вони знаходяться аналогічно до того, як це зроблено, наприклад, в роботі [13].

Використовуючи отриманий розв'язок  $c_{k+1}(s, h, r, t)$  та рівність (9), визначимо положення границі  $l(s, h, t_k)$  за формулою:

$$\begin{aligned} l(s, h, t_{k+1}) = & l(s, h, t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)][l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)]}} \times \\ & \times \left\{ -\frac{\varepsilon D_k(s, h, l_0) l_0}{l(s, h, t_k)} \{ [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)][l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)] + 1 \} \times \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial r} [c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1}) + \varepsilon c_{1,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})] - w_0 \{ [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] \times \\ & \times [l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)] + 1 \} [c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1}) - \\ & - \varepsilon c_{1,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})] - w_0 c_* + \frac{\varepsilon D_k(s, h, l_0) [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)]}{l(s, h, t_k) w_0} \times \\ & \times [l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)] \times \left( \frac{[u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} [c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})] \times \right. \\ & \times \frac{l_s'(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k) D_{ks}'(s, h, l_0)}{D_k(s, h, l_0)} + [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] \times \\ & \left. \left. \times \frac{l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} \cdot \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})}{\partial s} + l(s, h, t_k) \frac{\partial c_{0,k+1}(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

**Результати чисельного експерименту.** На рис. 3 зображено розрахункову конфігурацію поверхні дна на ділянці повороту русла при швидкості набігаючого потоку –  $u_\infty = 0.5$  м/с, ширині набігаючого потоку –  $H = 1$  м, глибині набігаючого потоку –  $l_0 = 1$  м, ґрунт приймався однорідним з діаметром частинок  $d = 0.5$  мм. На рис. 4, 5 відповідно

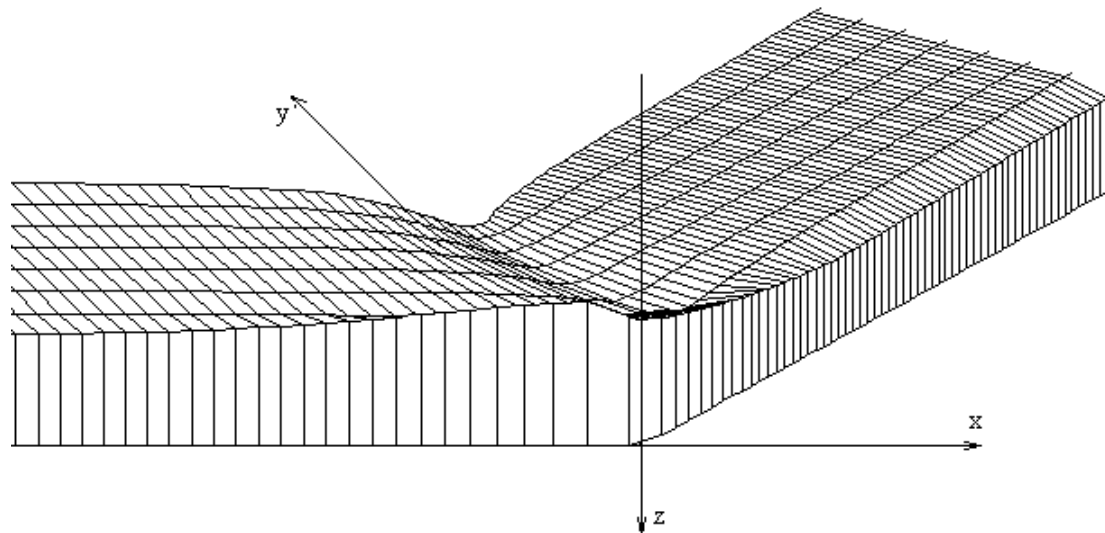


Рис. 3. Розрахункова конфігурація поверхні дна на ділянці повороту русла

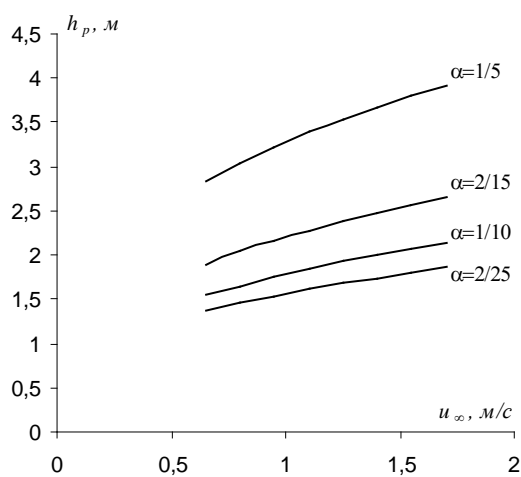


Рис.4. Розрахункова залежність максимальної глибини вирви розмиву від швидкості набігаючого потоку

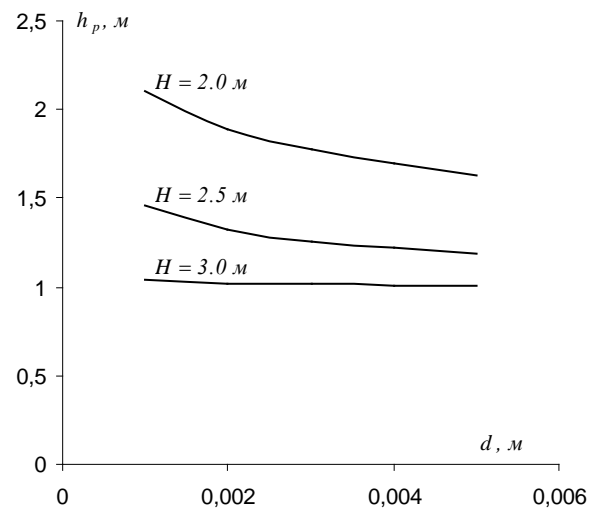


Рис.5. Розрахункова залежність максимальної глибини вирви розмиву від середнього діаметра частинок ґрунту

зображені графіки залежності прогнозованої глибини вирви розмиву від швидкості набігаючого потоку та від діаметра частинок однорідного ґрунту.

На рис. 6 зображено розрахункову конфігурацію поверхні дна на ділянці планового розширення русла при  $u_{\infty} = 1.0 \text{ м/с}$ ,  $a = 1 \text{ м}$  (див. рис. 2),  $l_0 = 1 \text{ м}$ ,  $d = 0.5 \text{ мм}$ .

Зауважимо, що наближений розв'язок вихідної задачі може бути знайдений і методом скінчених різниць.

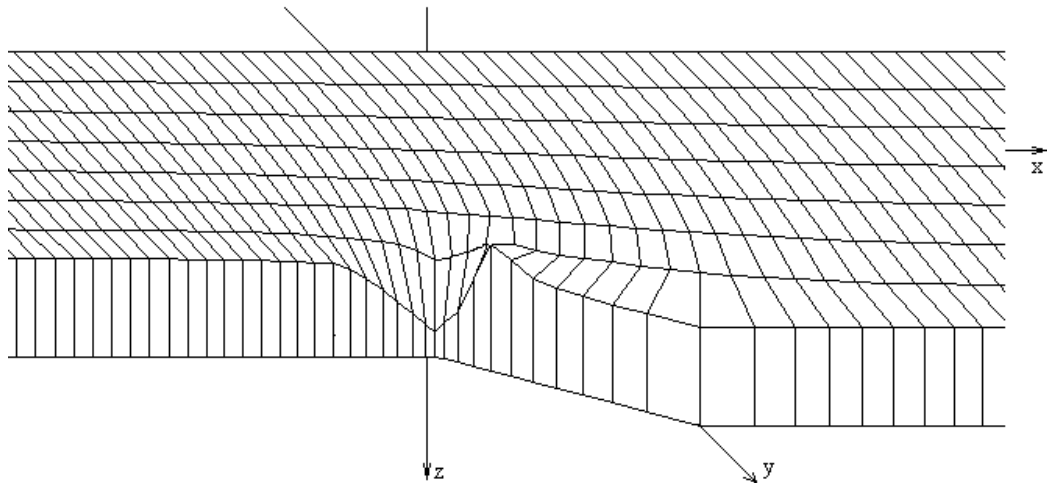


Рис. 6. Розрахункова конфігурація поверхні дна на ділянці планового розширення русла

**Висновки.** Порівняльний аналіз розрахункової форми вирви розмиву, залежностей максимальної глибини розмиву від швидкості набігаючого потоку та середнього діаметру частинок ґрунту з відповідними даними натурних та експериментальних спостережень підтверджує адекватність запропонованої моделі. Використання запропонованої вище методики математичного моделювання процесу деформації дна русла дозволяє розраховувати не лише максимальну глибину вирви розмиву, але і її форму та зону відкладення частинок з урахуванням транспортування наносів, а також прогнозувати розвиток процесу в часі.

Зауважимо, що запропонована методика математичного моделювання стосується випадків, коли руслоформуючі наноси переносяться потоком переважно у зваженому стані. За І. Нікітіним область зважених руслоформуючих та транзитних наносів для рівномірного турбулентного потоку знаходиться в межах  $w_0/v_* < 3,15$ , де  $v_*$  – динамічна швидкість [15].

1. Журавлев М.М. Местный размыв у опор мостов. - М.: Транспорт, 1984. - 113 с.
2. Бегам Л.Г., Цыпин В.Ш. Надежность мостовых переходов через водотоки. - М.: Транспорт, 1984. - 253 с.
3. Маккавеев В.М. К теории турбулентного режима и взвешивания наносов. / Известия ГГИ, 1931, №32, с.5-26.
4. Щодро А.Е. Физические основы расчетов местного размыва у речных гидротехнических сооружений // Гидравлика и гидротехника. - Київ: Техніка. - 1998. - Вып. 59. - С. 100-107.
5. Бомба А.Я., Барановський С.В., Щодро О.Є. Покрокова асимптотика розв'язку

- сингулярно збурених задач конвективної дифузії в скінченних областях з вільними межами та проблеми моделювання планових деформацій дна русла // Вісник УДАВГ. - Рівне: Вид-во УДАВГ. - 1998. - № 1. - С. 21-27.
6. *Барановський С.В.* Про математичне моделювання процесів деформації незв'язного піщаного дна біля окремих типів гідротехнічних споруд // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 1999. – Т. 4, число 2. – С. 36-40.
  7. *Барановський С.В., Бомба А.Я.* Покрокова асимптотика розв'язання одного класу сингулярно збурених нелінійних задач з вільними поверхнями // Математичні методи і фізико-механічні поля. - Львів. - 1999. – Т. 42, № 2. - С. 46-51.
  8. *Шамов Г.И.* Речные наносы. - Л.: Гидрометеиздат, 1959. - 378 с.
  9. *Талмаза В.Ф., Крошкин А.Н.* Гидроморфометрические характеристики горных рек. - Фрунзе: Кыргызстан, 1968. -204с.
  10. *Караушев А.В.* Теория и методы расчета речных наносов. – Л.: Гидрометеиздат, 1973.
  11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – 4-е изд., исправ. – М.: Наука, 1973.
  12. *Патрашев А.Н.* Гидромеханика. – М.: Военно-морское изд-во, 1953. - 720 с.
  13. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр.мат.журн.- 1982. - т.4, №4.- с.493-496.
  14. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.
  15. *Никитин И.К.* Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области. - К.: Изд. АН УССР, 1963. - 142 с.

Рівненський державний гуманітарний університет,  
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, м. Київ

*Надійшла 22.07.2004*

**Барановский С.В., Бомба А.Я., Скопецкий В.В.** ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИЙ РУСЛА НА УЧАСТКАХ ПЛАНОВОГО РАСШИРЕНИЯ И ПОВОРОТА РУСЛА // *На основе разработанного метода асимптотического приближения решений одного класса нелинейных сингулярно возмущенных задач для уравнений конвективной диффузии в областях со свободными границами, предлагается подход к моделированию и исследованию процессов деформаций русла водным потоком на участках планового расширения и поворота русла.*

**Baranovsky S.V., Bomba A.Ya., Skopecy V.V.** ABOUT ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF ONE CLASS NONLINEAR CONVECTIONAL DIFFUSION PROBLEMS AND MODELLING OF DEFORMATION PROCESSES OF THE CHANNEL ON AREAS OF SCHEDULED EXPANSION AND TURN OF THE CHANNEL // *The approach to modelling and research of deformation processes of a channel by a water stream on areas of scheduled expansion and turn of a channel is offered on the basis of the developed method of asymptotic approximation of solutions of one class nonlinear singular indignant problems for the equations of convectional diffusion in areas with free borders.*