

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

**СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

Збірник наукових праць

Випуск 2 (11)

Рівне-2004

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Редакційна колегія

Барановський С.В. (<i>секретар</i>)	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Недашківській М.О.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пономаренко Л.А.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О. (<i>технічний секретар</i>)
Гаращенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Дейнека В.С.	Скопецький В.В. (<i>головний редактор</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С. (<i>технічний секретар</i>)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

Зміст

<i>Наші вітання СКОПЕЦЬКОМУ ВАСИЛЮ ВАСИЛЬОВИЧУ</i>	<i>5</i>
Барановський С.В., Бомба А.Я., Скопецький В.В. <i>Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформацій русла на ділянках планового розширення та повороту русла</i>	<i>7</i>
Бомба А.Я., Каштан С.С. <i>Методи фіктивних ділянок та квазі-конформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач в областях з вільними межами</i>	<i>17</i>
Вальковський В.О., Соловей І.А. <i>До проблеми оптимальної синхронної реалізації обчислень на клітинних автоматах</i>	<i>29</i>
Власюк А.П., Мартинюк П.М. <i>Фільтраційна консолідація неоднорідного масиву ґрунту в неізотермічних умовах з урахуванням впливу переносу солей</i>	<i>39</i>
Возняк О.Г. <i>Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь</i>	<i>54</i>
Гайвась Б.І. <i>Про вплив електроосмосу на двостороннє конвективне осушення пористого шару</i>	<i>74</i>
Дейнека О.Ю. <i>Періодичні розв'язки системи телеграфних рівнянь</i>	<i>86</i>
Ємець Є.М. <i>Про еквівалентність задач цілочислового програмування та задач оптимізації на полірозміщеннях</i>	<i>91</i>
Ємець О.О. <i>Розв'язок безумовної задачі евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією</i>	<i>95</i>
Ємець Ол-ра О. <i>Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин</i>	<i>101</i>
Ємець О.О., Черненко О.О. <i>Математичне моделювання деяких економічних проблем задачами оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною функцією цілі</i>	<i>107</i>
Зарівняк І.С. <i>Імовірність критичного стану клеєних швів шарової пластини з початковими неправильностями</i>	<i>113</i>
Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М. <i>Моделювання процесів конвективно-дифузійного переносу у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації</i>	<i>121</i>
Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. <i>Чисельно-аналітичний розв'язок просторових крайових задач з вільною межею для одного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних</i>	<i>130</i>
Мандзак Т.І., Савула Я.Г. <i>Пониження вимірності математичної</i>	

<i>моделі адвекції-дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій</i>	140
Мартинюк П.М. <i>Про зменшення затрат машинного часу при розв'язуванні нелінійних крайових задач методом скінченних елементів</i>	148
Міца О.В. <i>Моделювання та оптимізація розподілу показника заломлення неоднорідних плівок при розв'язанні задачі просвітлення</i>	161
Петрик М.Р., Ленюк М.П. <i>Математичне моделювання адсорбційного масопереносу з спектральним параметром для неоднорідних n-інтерфейсних обмежених нанопористих середовищ</i>	168
Поліщук О.Д. <i>Розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа в R^3 для розімкненої поверхні за допомогою потенціалу подвійного шару</i>	189
Пригорницький Д.О. <i>Нелінійні обернення модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей</i>	196
Присяжнюк І.М. <i>Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії із запізнюючим аргументом</i>	212
Романова Н.Г. <i>Задача оптимізації дробово-лінійної цільової функції на поліпереставленнях: властивості її комбінаторного многогранника</i>	223
Савула Я.Г., Винницька Л.І. <i>Застосування генетичного алгоритму до оптимізації сіток в процесі числового розв'язування задачі адвекції-дифузії-реакції</i>	233
Скопецький В.В., Булавацький В.М. <i>Математичне моделювання фільтраційного ущільнення ґрунтових масивів за умов насичення сольовими розчинами та нерівноважності дифузійного процесу</i>	240
Сяський А.О., Бабич С.М. <i>Математична модель шліцьового з'єднання храпового типу для передачі обертального руху</i>	248
Чілікіна Т.В. <i>Розв'язування одного класу задач нелінійної комбінаторної оптимізації на переставленнях</i>	257
НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ-МЕХАНІКИ	
Я.С. ПІДСТРИГАЧ – <i>видатний вчений, стратег і організатор науки</i>	263

УДК 519.63.4.001.57+517.54

Бомба А.Я., Каштан С.С.**МЕТОДИ ФІКТИВНИХ ДІЛЯНОК ТА КВАЗІКОНФОРМНИХ
ВІДОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В
ОБЛАСТЯХ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ**

Методологія квазіконформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач разом із запропонованим методом "фіктивних областей" дозволяє ефективно вирішувати не менш актуальну проблему врахування суфозійних явищ при розрахунку фільтраційного режиму в середовищах з вільними межами (кривими депресії). В якості прикладу проведено розрахунки на побудову гідродинамічної сітки, знаходження повної витрати, положення кривої депресії та інших характеристик ґрунтової греблі на непроникній основі з врахуванням взаємовпливу градієнтів напору та характеристик середовища.

Вступ. Аналіз досліджень. Як відомо (див., напр., [1-6]), перевищення діючими градієнтами деякого їх критичного значення зумовлює втрату фільтраційної міцності ґрунту за рахунок переміщення дрібних його частинок (суфозії), що, в свою чергу, викликає зміни коефіцієнта фільтрації. У роботі [1] проведено математичне моделювання нелінійних процесів осесиметричної фільтрації з урахуванням суфозійних явищ. Зокрема, отримані розв'язки відповідних нелінійних задач з післядією руху води до дрени (свердловини) та із зволожувача в ґрунт, а також аналітичні вирази для знаходження фільтраційної витрати, встановлено співвідношення між характеристиками недеформованого середовища та середовища, що деформується в залежності від гідродинамічної дії фільтраційного потоку та конструктивних параметрів дренажу; розв'язана задача фільтрації у випадку формування збурених зон змінним коефіцієнтом фільтрації із врахуванням нерівномірного заповнення порового простору суфозійними частинками у випадку осесиметричної фільтрації. У роботі [2] проведено відповідні розрахунки у випадках, коли область фільтрації має складну геометричну форму, а саме – в системі горизонтального дренажу за умов суфозійно-фільтраційного взаємовпливу. У роботі [3] перенесено результати [4-6] на випадки областей (середовищ) з вільними межами, а саме при розрахунках фільтраційного режиму в ґрунтовій греблі на непроникній основі з урахуванням фільтраційно-

суфозійних явищ. У цій роботі йдеться про поєднання методів фіктивних ділянок та квазіконформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач для ефективного вирішення актуальної проблеми врахування суфозійних явищ при розрахунку фільтраційного режиму в середовищах з кривими депресії (вільними межами).

Постановка задачі. Розглянемо процес фільтрації в ґрунтовій греблі на непроникній основі – випадок відсутності шару води у нижньому б'єфі, тобто, коли вихід фільтраційного потоку відбувається лише через проміжок височування. Відповідну фізичну область фільтрації G_z ($z = x + iy$) (аналогічно до [3, 7, 8]) зображено на рис. 1, де $AB = \{z: m_1 y - x = 0, 0 \leq x \leq l_1\}$, $C_0D = \{z: m_2 y + x - l_1 - b - l_2 = 0\}$, $CD = \{z: y = 0, l_1 + b + l_2 \leq x \leq x_*\}$, $DA = \{z: y = 0, 0 \leq x \leq l_1 + b + l_2\}$, BC_0C – вільна (невідома) поверхня (крива депресії), C_0D – проміжок височування, AD – непроникна основа греблі, $H_{\bar{A}}$ та H – відповідно висота греблі та напір на неї, b – ширина гребеня, $m_1 = \frac{l_1}{H_{\bar{A}}}$ та $m_2 = \frac{l_2}{H_{\bar{A}}}$ – коефіцієнти закладання верхового та низового укосів, CDC_0 – фіктивна ділянка розглядуваної області фільтрації, x_* – шукана абсциса точки C .

Як і раніше, процес фільтрації рідини описуватимемо рівнянням руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } h$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$ [9], де $\vec{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$ – швидкість фільтрації, $\kappa = \kappa(\text{grad } h)$ –

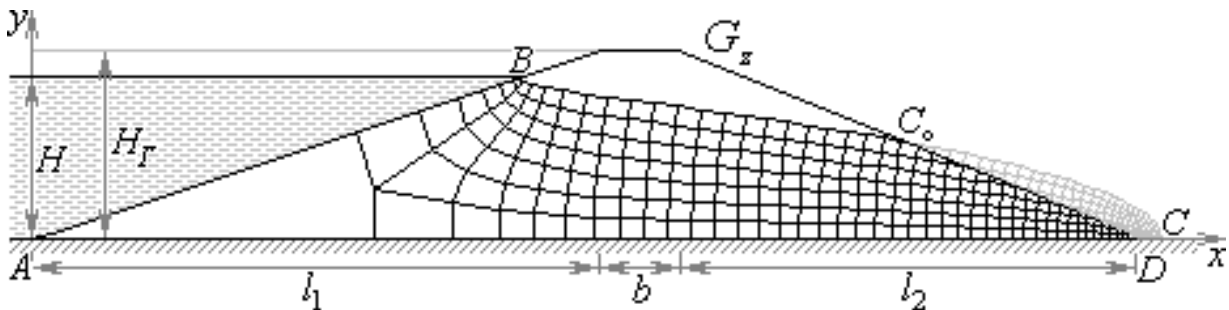


Рис. 1. Схема області фільтрації

обмежена неперервно-диференційована в області G_z функція, що характеризує провідність середовища та його схильність до деформації,

$h = h(x, y)$ – напір в точці (x, y) , $h|_{BC,C} = h|_{BC,D} = y$, $\varphi = 1 - \frac{h}{H}$ – квазіпотенціал поля, такий, що $\varphi|_{AB} = 0$, $\varphi|_{CD} = 1$, $\frac{d\varphi}{dn}|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn}|_{DA} = 0$, n – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області.

Задача на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ розглядуваної області G_z на відповідну область квазікомплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : 0 < \varphi < 1, 0 < \psi < Q\}$ ($\psi = \psi(x, y)$ – функція течії квазікомплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$) з невідомим параметром – повною питомою витратою $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ ($Q = Q_*/l$, де Q_* – повна витрата, l – довжина греблі) матиме вигляд [3]

$$\kappa(\text{grad } \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(\text{grad } \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = 0, \quad \varphi|_{CD} = 1, \quad \psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \quad (2)$$

Запишемо обернену до (1) – (2) задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{array} \right. \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 y(0, \psi) - x(0, \psi) = 0, \quad y(1, \psi) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ y(\varphi, Q) = H(1 - \varphi), \quad y(\varphi, 0) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 1. \end{array} \right. \quad (4)$$

Тоді, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ у дивергентній формі мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0. \quad (5)$$

Різницева задача. Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов "квазіконформної подібності в малому" відповідних чотирикутників, у відповідній рівномірній сітковій області

$$G_{\omega}^{\gamma} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \quad \varphi_i = \Delta \varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}; \quad \psi_j = \Delta \psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n+1}; \right.$$

$$\left. \Delta \varphi = \frac{1}{m+1}, \quad \Delta \psi = \frac{Q}{n+1}, \quad \gamma = \frac{\Delta \varphi}{\Delta \psi}, \quad m, n \in \mathbf{N} \right\} \text{ запишемо у вигляді [10]}$$

$$\begin{cases} \left(a_{i+1,j} x_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) x_{i,j} + a_{i,j} x_{i-1,j} \right) + \\ + \gamma^2 \left(b_{i,j+1} x_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) x_{i,j} + b_{i,j} x_{i,j-1} \right) = 0, \\ \left(a_{i+1,j} y_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) y_{i,j} + a_{i,j} y_{i-1,j} \right) + \\ + \gamma^2 \left(b_{i,j+1} y_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) y_{i,j} + b_{i,j} y_{i,j-1} \right) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} m_1 y_{0,j} - x_{0,j} = 0, \quad y_{m+1,j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ y_{i,n+1} = H(1 - \varphi_i), \quad y_{i,0} = 0, \quad i = \overline{0, m+1}; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} (x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = 0, \\ x_{i,1} - x_{i,0} = 0, \quad i = \overline{0, m+1}; \\ y_{1,j} - y_{0,j} + m_1(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \quad x_{m,j} - x_{m+1,j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}; \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} \gamma_{i,j}, \quad (9)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}},$$

де
$$\kappa_{i,j} = \kappa \left(\frac{2\Delta \varphi}{J_{i,j}} \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2} \right),$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}),$$

$$a_{i,j} = \frac{1}{\kappa_{i-\frac{1}{2},j}}, \quad b_{i,j} = \kappa_{i,j-\frac{1}{2}}, \quad x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j).$$

Алгоритм числового розв'язання. Розв'язок різницевої задачі (6) – (9) у цьому випадку побудуємо так. Задаємо кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі. Задаємо початкові наближення ряду величин. А саме: початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались рівності (7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Задання початкового наближення конформного інваріанта γ проведемо за формулою (9), в якій використовуємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$. Далі проводимо уточнення: внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) з допомогою ітераційного методу Зейделя [11] за формулами, отриманими шляхом розв'язання (6) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу та на основі ідей методу блочної ітерації [12] використаємо лише перший ітераційний крок); величини γ за формулою (9) та витрати Q за формулою $Q = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{n+1}{m+1}$; координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (7), (8). Далі перевіряємо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами

$$\begin{aligned} \max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon, \\ \left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad \left| D^{(k+1)} - D^{(k)} \right| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

де $D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j})^2}}$ – усереднене

значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^y .

Якщо умови (10) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = |1 - D|$. Дана нев'язка характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику рівне одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності).

У випадку якщо не виконується, наприклад, лише одна із умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m, n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо параметри розбиття m і n та розв'язуємо різницеву задачу (6) – (9) заново. Оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [13, 14] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана.

Числова реалізація методу здійснювалась з використанням декількох модельних залежностей коефіцієнта фільтрації від градієнта потенціалу (напору), зокрема

$$\kappa = \kappa(|grad\varphi|) = \begin{cases} \kappa_0 + \mu(I - I_{kp}), & \text{ї } \delta \text{è } I > I_{kp}, \\ \kappa_0, & \text{ї } \delta \text{è } I \leq I_{kp}, \end{cases} \quad (11)$$

де $\mu > 0$ – параметр, що характеризує ступінь впливу градієнту напору на коефіцієнт фільтрації.

Результати розрахунку. Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при розбитті області фільтрації $m \times n = 50 \times 6$, точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, діапазоні значень діючих градієнтів потенціалу $[0,0013; 1,8723]$, $\kappa_0 = 2,5$ м/добу, $\mu = 200$, $I_{\delta\delta} = 0,0175$, $H = 12$ м, $H_{\bar{A}} = 14$ м, $l_1 = 42$ м, $b = 6$ м,

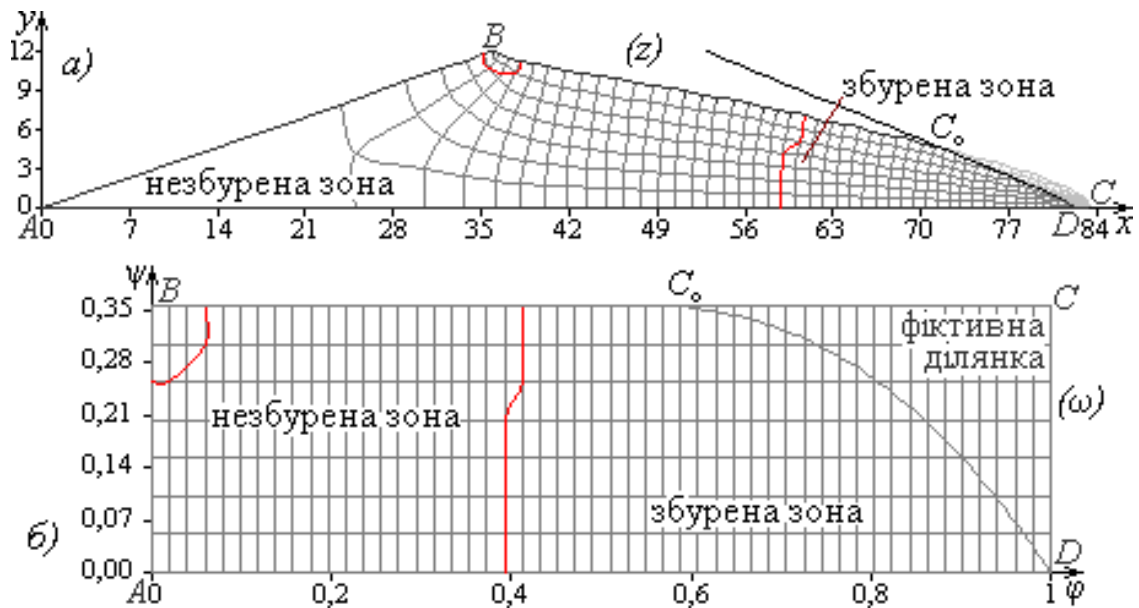


Рис. 2. Збурена та незбурена зони у фізичній області (а) та області комплексного потенціалу (б).

$l_2 = 35$ м, отримано гідродинамічну сітку руху та зони збурення, які зображені на рисунку 2 (на рис. 1 зображена відповідна динамічна сітка на початковій стадії процесу, тобто при $\mu = 0$).

За $k = 1355$ ітерацій на початковій стадії знайдена повна фільтраційна витрата $Q = 0,2948 \text{ м}^3/\text{с}$ за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 2,0 \text{E} - 3$, що має місце в околах деяких граничних вузлів, де криволінійні елементарні чотирикутники найбільше відхиляються від прямокутників. В результаті ж врахування взаємовпливу градієнту потенціалу та коефіцієнта фільтрації за вказаним вище законом нами одержано збільшення шуканої витрати Q на 20,9%, тобто, від 0,2948 на початковій стадії до $0,3564 \text{ м}^3/\text{с}$ на стадії стабілізації.

Графіки розподілу градієнту напору та коефіцієнта фільтрації на стадії стабілізації процесу зображено відповідно на рисунках 3 та 4.

Графіки розподілу градієнту напору та коефіцієнта фільтрації вздовж вільної кривої BC зображено відповідно на рисунках 5 та 6.

Положення вільної кривої BC на початковій стадії та на стадії стабілізації зображено на рисунку 7. При цьому зауважимо, що абсциса точки C на початковій стадії рівна 83,94, а на стадії стабілізації – 83,36.

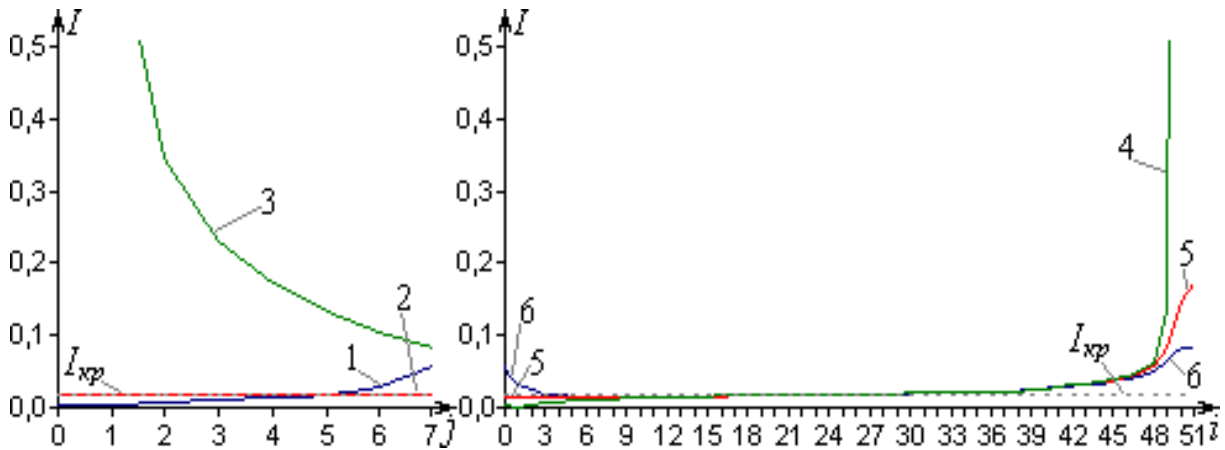


Рис. 3. Розподіл градієнту напору вздовж кривих:

1 – $\varphi = 0$, 2 – $\varphi = 0.5$, 3 – $\varphi = 1$, 4 – $\psi = 0$, 5 – $\psi = Q/2$, 6 – $\psi = Q$.

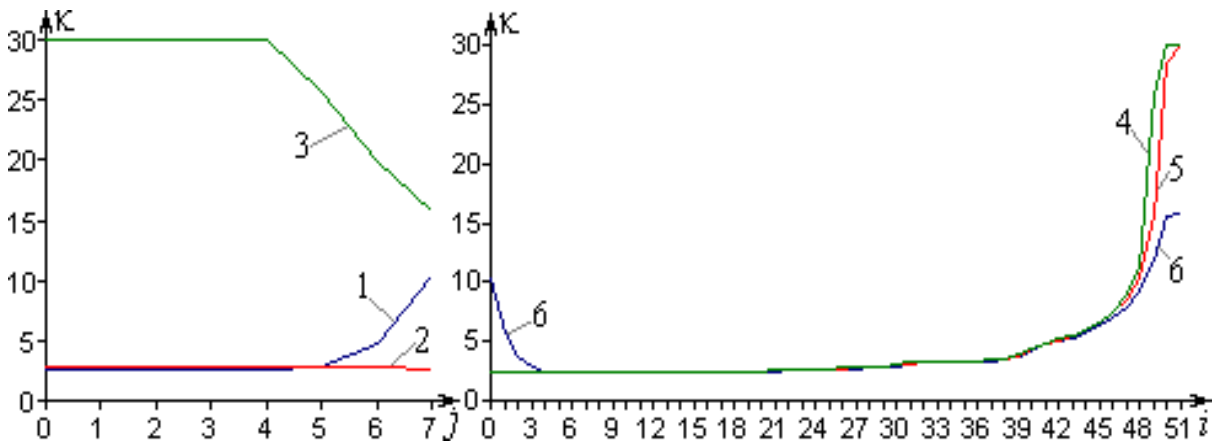


Рис. 4. Розподіл коефіцієнту фільтрації вздовж кривих:

1 – $\varphi = 0$, 2 – $\varphi = 0.5$, 3 – $\varphi = 1$, 4 – $\psi = 0$, 5 – $\psi = Q/2$, 6 – $\psi = Q$.

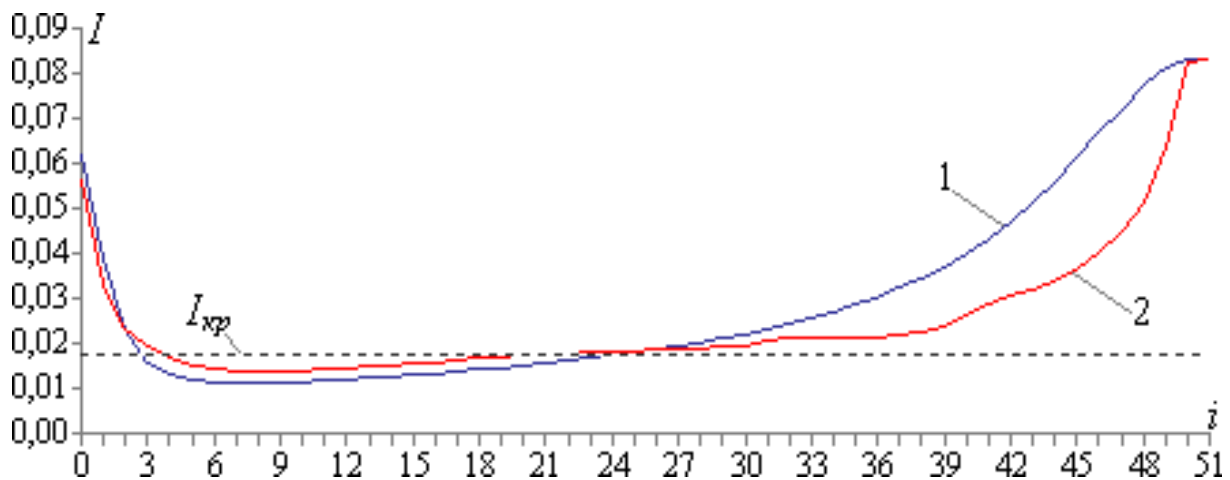


Рис. 5. Розподіл градієнту напору на вільній кривій BC,

1 – початкова стадія (деформації відсутні), 2 – стадія стабілізації.

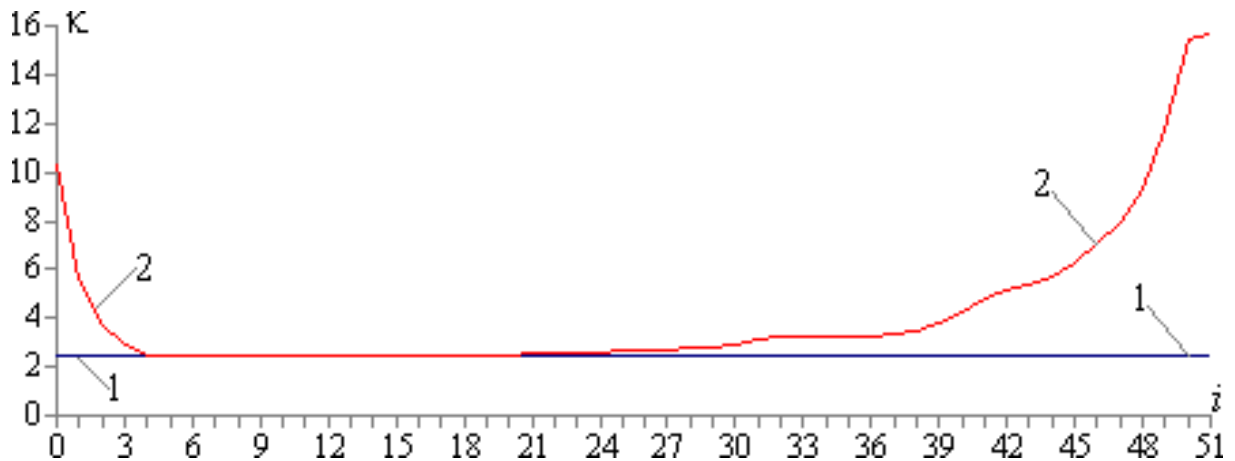


Рис. 6. Розподіл коефіцієнта фільтрації потенціалу на вільній кривій BC ,
1 – початкова стадія (деформації відсутні), 2 – стадія стабілізації.

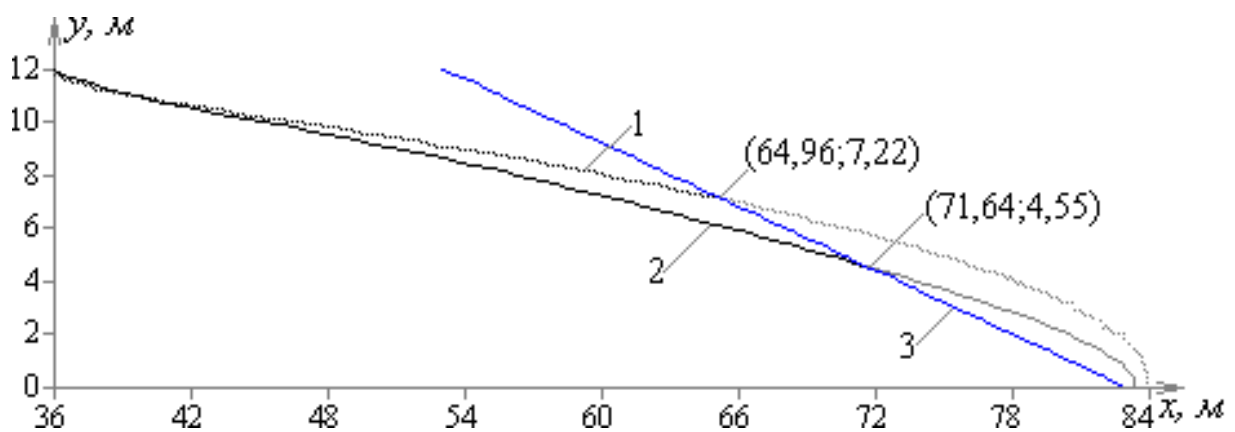


Рис. 7. Положення вільної кривої BC ,
1 – початкова стадія, 2 – стадія стабілізації, 3 – низовий укіс.

Метод “фіктивних областей”. У випадку, якщо розглядається такого роду процес у деякій криволінійній області $G_z = ABC_*D$ ($ABC_*D \in A\tilde{B}\tilde{C}D$) з вільною кривою BC_* та проміжком типу височування C_*C_0 (рис. 8, а)), наприклад, за умов $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{DC_0} = \varphi^*$, $\psi|_{AD} = 0$, $\psi|_{BC_*} = Q$, $\varphi|_{BC_*C_0} = y$, $\varphi_x = \psi_y$, $\varphi_y = -\psi_x$, де параметри φ_* і φ^* , рівняння кривих AD , $A\tilde{B}$, $D\tilde{C}$ та координати точок B та C_0 є заданими [9, 15 – 17]. Особливістю постановки такої задачі (з точки зору конформних відображень) полягає в тому, що відповідна область комплексного потенціалу G_ω – не є прямокутник. Однією із ділянок її границі є деяка (невідомо) крива C_*C_0 , що відповідає проміжку височування (рис. 8, б)).

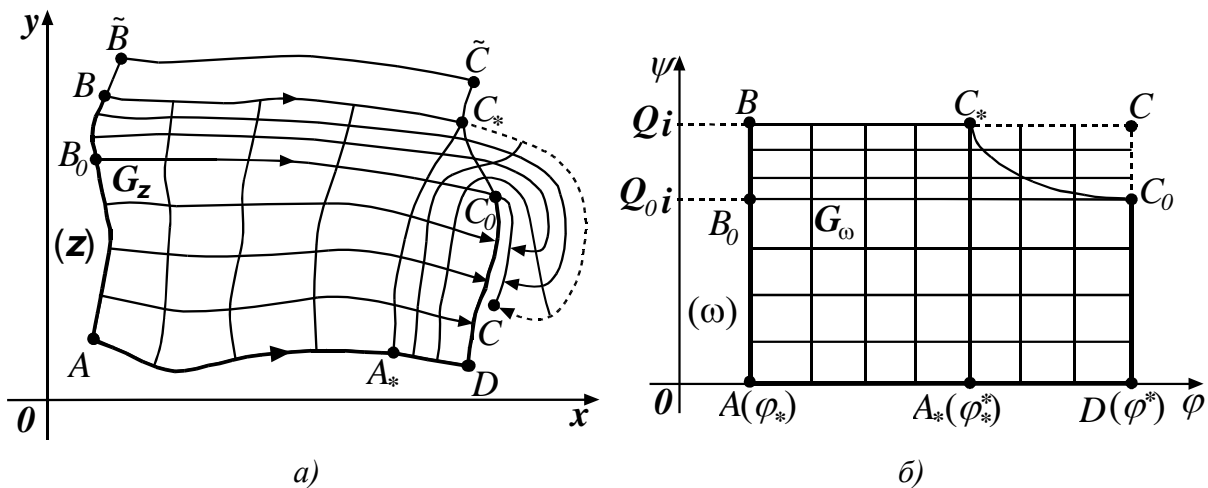


Рис. 8. Область фільтрації G_z з вільною кривою і проміжком височування (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω (б)

Доповнивши дану область G_ω до відповідного прямокутника G_ω^* (із невідомими параметрами Q , Q_0 , φ_*^*) та умовно відобразивши даний прямокутник за допомогою аналітичної функції $z = z(\omega)$ – характеристичної функції течії, в площині (z) матимемо деяку область G_z^* як аналітичне продовження області G_z (шляхом прилучення до останньої деякої фіктивної області C_*CC_0). Тепер комплексний потенціал $\omega = \omega(z)$ (характеристичну функцію $z = z(\omega)$) знаходимо шляхом конформного відображення $G_z^* \rightarrow G_\omega^*$ ($G_\omega^* \rightarrow G_z^*$). При знаходженні початкового наближення такого відображення вільна крива BC_*C певним чином задається, а розв’язок знаходиться на основі розробленого нами (описаного вище) вище алгоритму. Уточнення (на кожному ітераційному кроці) координат вільної кривої здійснюється традиційно [4 – 6]. В результаті матимемо динамічну сітку в розширеній області G_z^* . Здійснивши відповідні інтерполяційні та екстраполяційні операції, знайдемо значення потенціалу φ та функції течії ψ у деяких вузлових точках ділянки височування і відповідну їй криву C_*C_0 області G_ω^* . Аналогічно до вище викладеного будемо алгоритми розв’язків відповідних нелінійних задач з післядією.

Зауважимо, що даний підхід (конструкція) дозволяє пояснити парадокс Герсеванова [18].

Висновки. Таким чином, розроблений нами підхід до розв'язання задач з післядією дозволяє враховувати зворотній вплив градієнтів потенціалу на характеристики ґрунту греблі не починаючи розв'язання відповідної задачі “з нуля”. Із результатів числових розрахунків бачимо, що врахування зміни коефіцієнта фільтрації за вказаними вище законами приводить до зміни фільтраційної витрати. Встановлення динаміки зміни положення кривої депресії дозволяє визначити ступінь деформаційних процесів в масиві низової призми та прогнозувати їх наслідки для роботи греблі.

1. *Хлапук М.М., Бомба А.Я., Сидорчук Б.П.* Про моделювання взаємовпливу фільтрації та механічної суфозії // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Вісник УДАВГ.- Рівне, 1998.- С.157-166.
2. *Бомба А.Я., Гутіна Ж.С., Каштан С.С., Хлапук М.М.* Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу // Вісник Українського державного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць.- №4 (23).- Рівне: УДУВГП, 2003.- С.108-115.
3. *Бомба А.Я., Гутіна Ж.С., Каштан С.С., Хлапук М.М.* Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтових греблях // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць.- №3 (27).- Рівне: НУВГП, 2004.- С.105-112.
4. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації // Математичні методи та фізико-механічні поля.- 2002.- 45, №2.- С.49-57.
5. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник.- 2001.- Вип. 8.- С.9-22.
6. *Каштан С.С.* Про моделювання поля швидкості фільтрації за умов взаємовпливу градієнта потенціалу і характеристик анізотропного середовища // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип.9.- С.32-40.
7. *Глуценко А.А., Кузьменко А.П.* Приближенное аналитическое решение одной краевой задачи теории фильтрации // Вычислительная и прикладная математика.- 1980.- Вып. 40.- С.45-53.
8. *Кузьменко А.П.* Про фільтраційний розрахунок неоднорідної земляної греблі на проникній основі // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво.- 1992.- Вип. 19.- С.75-78.
9. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод.- М.: Гостехиздат, 1952.- 676с.
10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем.- Москва: Наука, 1977.- 656с.
11. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики.- Киев: Наукова думка, 1980.-

334с.

12. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.- Москва: Мир, 1975.- 558с.
13. Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 1967.- 7, №5. -С.1031-1059.
14. Прокопов Г.П. О расчете разностных сеток, близких к ортогональным, в областях с криволинейными границами: Препр. / ИПМ АН СССР.- 1974.- № 17.- 36с.
15. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.- М.: Гостехиздат, 1953.- 616 с.
16. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. – М.: Высшая школа, 1991.-447 с.
17. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод.- М.-Л.: Изд- во АН СССР, 1948.- 144 с.
18. Герсеванов Н.М. Основы динамики грунтовой массы.- М.-Л.: ОНТИ, 1937.-242 с.

Рівненський державний гуманітарний університет

E-mail: AVomba@mail.ru

Kashtan@rdgu.rv.ua

Надійшла 21.10.2004

Бомба А.Я., Каштан С.С. МЕТОДЫ ФИКТИВНЫХ УЧАСТКОВ И КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ // *Методология квазиконформных отображений решения нелинейных краевых задач вместе с предложенным методом “фиктивных областей” позволяет эффективно решать не менее актуальную проблему учета суффозионных явлений при расчете фильтрационного режима в средах со свободными границами (кривыми депрессии). В качестве примера проведены расчеты на построение гидродинамической сетки, нахождения полного расхода, положения кривой депрессии и других характеристик грунтовой дамбы на непроницаемой основе с учетом взаимовлияния градиентов напора и характеристик среды.*

Bomba A.Ya., Kashtan S.S. METHODS OF FICTITIOUS AREAS AND QUASICONFORMAL DISPLAYS OF DECISION OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN AREAS WITH FREE SCOPES // *Methodology of quasiconformal reflections of decision of nonlinear regional tasks together with the offered method of “fictitious areas” allows effectively to decide no less the issue of the day consideration of the souffozion phenomena at computation of the filtration mode in environments with free scopes (by the curves of depression). As an example the computations are conducted on construction of hydrodynamic net, finding of the full charge, location curve depression and other characteristics in an earth dam on an impenetrable basis are lead in view of interference of gradients pressure and characteristics of environment.*