

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 2 (11)**

Рівне-2004

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика"**.  
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

*Редакційна колегія*

Барановський С.В. ( <i>секретар</i> )	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. ( <i>відповідальний редактор</i> )	Недашківській М.О.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пономаренко Л.А.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О. ( <i>технічний секретар</i> )
Гаращенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Дейнека В.С.	Скопецький В.В. ( <i>головний редактор</i> )
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С. ( <i>технічний секретар</i> )	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

**Зміст**

<i>Наші вітання СКОПЕЦЬКОМУ ВАСИЛЮ ВАСИЛЬОВИЧУ .....</i>	<i>5</i>
<b>Барановський С.В., Бомба А.Я., Скопецький В.В.</b> <i>Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформацій русла на ділянках планового розширення та повороту русла .....</i>	<i>7</i>
<b>Бомба А.Я., Каштан С.С.</b> <i>Методи фіктивних ділянок та квазі-конформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач в областях з вільними межами .....</i>	<i>17</i>
<b>Вальковський В.О., Соловей І.А.</b> <i>До проблеми оптимальної синхронної реалізації обчислень на клітинних автоматах .....</i>	<i>29</i>
<b>Власюк А.П., Мартинюк П.М.</b> <i>Фільтраційна консолідація неоднорідного масиву ґрунту в неізотермічних умовах з урахуванням впливу переносу солей .....</i>	<i>39</i>
<b>Возняк О.Г.</b> <i>Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь .....</i>	<i>54</i>
<b>Гайвась Б.І.</b> <i>Про вплив електроосмосу на двостороннє конвективне осушення пористого шару .....</i>	<i>74</i>
<b>Дейнека О.Ю.</b> <i>Періодичні розв'язки системи телеграфних рівнянь .....</i>	<i>86</i>
<b>Ємець Є.М.</b> <i>Про еквівалентність задач цілочислового програмування та задач оптимізації на полірозміщеннях .....</i>	<i>91</i>
<b>Ємець О.О.</b> <i>Розв'язок безумовної задачі евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією .....</i>	<i>95</i>
<b>Ємець Ол-ра О.</b> <i>Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин .....</i>	<i>101</i>
<b>Ємець О.О., Черненко О.О.</b> <i>Математичне моделювання деяких економічних проблем задачами оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною функцією цілі .....</i>	<i>107</i>
<b>Зарівняк І.С.</b> <i>Імовірність критичного стану клеєних швів шарової пластини з початковими неправильностями .....</i>	<i>113</i>
<b>Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М.</b> <i>Моделювання процесів конвективно-дифузійного переносу у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації .....</i>	<i>121</i>
<b>Кузьменко А.П., Кузьменко В.М.</b> <i>Чисельно-аналітичний розв'язок просторових крайових задач з вільною межею для одного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних .....</i>	<i>130</i>
<b>Мандзак Т.І., Савула Я.Г.</b> <i>Пониження вимірності математичної</i>	

<i>моделі адвекції-дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій</i> .....	140
<b>Мартинюк П.М.</b> <i>Про зменшення затрат машинного часу при розв'язуванні нелінійних крайових задач методом скінченних елементів</i> .....	148
<b>Міца О.В.</b> <i>Моделювання та оптимізація розподілу показника заломлення неоднорідних плівок при розв'язанні задачі просвітлення</i> .....	161
<b>Петрик М.Р., Ленюк М.П.</b> <i>Математичне моделювання адсорбційного масопереносу з спектральним параметром для неоднорідних n-інтерфейсних обмежених нанопористих середовищ</i> .....	168
<b>Поліщук О.Д.</b> <i>Розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа в <math>R^3</math> для розімкненої поверхні за допомогою потенціалу подвійного шару</i> .....	189
<b>Пригорницький Д.О.</b> <i>Нелінійні обернення модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей</i> .....	196
<b>Присяжнюк І.М.</b> <i>Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії із запізнюючим аргументом</i> .....	212
<b>Романова Н.Г.</b> <i>Задача оптимізації дробово-лінійної цільової функції на поліпереставленнях: властивості її комбінаторного многогранника</i> .....	223
<b>Савула Я.Г., Винницька Л.І.</b> <i>Застосування генетичного алгоритму до оптимізації сіток в процесі числового розв'язування задачі адвекції-дифузії-реакції</i> .....	233
<b>Скопецький В.В., Булавацький В.М.</b> <i>Математичне моделювання фільтраційного ущільнення ґрунтових масивів за умов насичення сольовими розчинами та нерівноважності дифузійного процесу</i> .....	240
<b>Сяський А.О., Бабич С.М.</b> <i>Математична модель шліцьового з'єднання храпового типу для передачі обертального руху</i> .....	248
<b>Чілікіна Т.В.</b> <i>Розв'язування одного класу задач нелінійної комбінаторної оптимізації на переставленнях</i> .....	257
<b>НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ-МЕХАНІКИ</b>	
<b>Я.С. ПІДСТРИГАЧ</b> – <i>видатний вчений, стратег і організатор науки</i> .....	263

УДК 518.61.001.573

**Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М.****МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИFUЗІЙНОГО ПЕРЕНОСУ У ВИПАДКУ МНОГОЧЛЕННОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ КОЕФІЦІЄНТА ДИFUЗІЇ ВІД КОНЦЕНТРАЦІЇ**

*На основі плоскої крайової задачі на конформне відображення внутрішньої області криволінійного чотирикутника на прямокутну побудовано асимптотичне наближення розв'язку плоскої нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі в криволінійному чотирикутнику, обмеженому двома еквіпотенціальними лініями та двома лініями течії, у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації. Наводяться результати числових досліджень.*

**Вступ.** У роботах [1-3], ґрунтуючись на відомій публікації Вішика В.Й., Люстерника Л.А. [4], розроблено асимптотичний метод розв'язання типових крайових та змішаних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях (прямокутник, півсмуга і т. ін.) з урахуванням різного рівня гладкості початкової і граничних умов та їх узгодженості у кутових точках. В роботах [5-6] показано, що найбільш ефективною методикою розв'язання двовимірних задач для рівнянь конвективної дифузії при фільтрації підземних вод є перетворення цих рівнянь у нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу. Використання згаданої методики сумісно з аналітичними і чисельно-аналітичними методами дало можливість отримати точні або наближені аналітичні розв'язки найбільш типових плоских задач типу “конвекція-фільтрація” в багатозв'язних областях [7-9], задач гетеродифузії [10-11], нелінійних задач із запізненням [12]. У цій роботі розглянуто розв'язання плоскої нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації.

**Постановка задачі.** Для області  $G = G_\tau \times (0, \infty)$ , де  $G_\tau = ABCD$  ( $\tau = (x, y)$ ) – одностов'язна чотирикутна криволінійна область, обмежена еквіпотенціальними лініями  $AB = \{\tau : f_1(x, y) = 0\}$ ,  $CD = \{\tau : f_2(x, y) = 0\}$  та

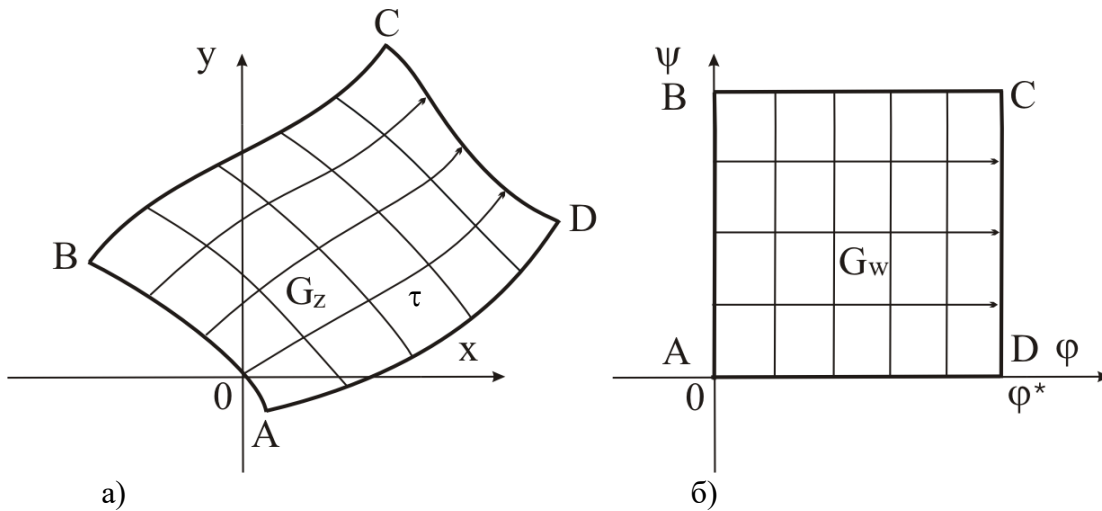


Рис. 1. Просторова фізична область  $G_z$  (а) та відповідна область комплексного потенціалу  $G_w$  (б)

лініями течії  $AD = \{\tau : f_3(x, y) = 0\}$ ,  $BC = \{\tau : f_4(x, y) = 0\}$  (рис. 1а), розглянемо нелінійну модельну задачу конвективної дифузії:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \text{ div } \vec{v} = 0,$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \varphi|_{DC} = \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{AD \cup BC} = 0, Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy; \quad (1)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial C}{\partial x} \left( \left( a_0 + \sum_{s=1}^{\lambda} \varepsilon^s a_s C^s \right) \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial C}{\partial y} \left( \left( a_0 + \sum_{s=1}^{\lambda} \varepsilon^s a_s C^s \right) \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right) - v_x \frac{\partial C}{\partial x} - v_y \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (2)$$

$$C|_{AB} = c_*(M, t), C|_{CD} = c^*(M, t), C|_{AD} = c_{**}(M, t), C|_{BC} = c^{**}(M, t), \quad (3)$$

$$C(M, \tilde{t}) = c_0^0(M, \tilde{t}), \quad (4)$$

де  $\vec{v}(v_x(x, y), v_y(x, y))$  – вектор, а  $\varphi = \varphi(x, y)$  – потенціал швидкості фільтрації ( $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$ ,  $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ ) в точці  $\tau = (x, y)$ ,  $C(x, y, t)$  – концентрації розчинних в потоці речовин в точці  $\tau = (x, y)$  в момент часу  $t$ ;  $\varepsilon$  – малий параметр ( $\varepsilon > 0$ ),  $\lambda$  – довільне натуральне число,  $M, n$  – біжуча точка та нормаль до відповідної кривої,  $c_*(M, t), c^*(M, t), c_{**}(M, t), c^{**}(M, t), c_0^0(M, \tilde{t})$  – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках області  $G$ . Крім цього вважаємо,

що функція  $c_0^0(x, y, t)$  при  $t=0$  задовольняє умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв'язку  $C = C(x, y, t)$ .

Нехай задача (1) шляхом конформного відображення [10]  $G_\tau \mapsto G_w$  (або  $G_w \mapsto G_\tau$ ) є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей  $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ . Здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi)$  у рівнянні (2) та умовах (3), (4), приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області  $G_w$ :

$$\begin{aligned} & \varepsilon v^2(\varphi, \psi) \left( \left( a_0 + \sum_{s=1}^{\lambda} \varepsilon^s a_s C^s \right) \cdot (C_{\varphi\varphi} + C_{\psi\psi}) + \right. \\ & \left. + \left( \varepsilon a_1 + \sum_{s=2}^{\lambda} s \varepsilon^s a_s C^{s-1} \right) (C_\varphi^2 + C_\psi^2) \right) - v^2(\varphi, \psi) \cdot C_\varphi = C_t, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C(\varphi_*, \psi, t) &= c_*(\psi, t), \quad C(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t), \quad C(\varphi, \varrho_*, t) = c_{**}(\varphi, t), \\ C(\varphi, \varrho^*, t) &= c^{**}(\varphi, t), \quad C(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi). \end{aligned} \quad (6)$$

**Розв'язання задачі.** Розв'язок задачі (5) з точністю  $O(\varepsilon^2)$  шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$\begin{aligned} C(\varphi, \psi, t) &= C_0(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \cdot C_1(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \cdot \check{I}_i(\xi, \psi, t) + \\ &+ \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} \cdot P_i(\varphi, \eta, t) + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{A}_i(\varphi, \mu, t) + R_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (7)$$

де  $C_i(\varphi, \psi, t)$  ( $i = \overline{0, 1}$ ) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема:  $C_0$  – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу);  $C_1$  – поправка, яка враховує “вплив” дифузії всюди у заданій області (за виключенням деякої її приграничної ділянки),  $R_2(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$  – залишковий член,  $\check{I}_i(\xi, \psi, t)$  ( $i = \overline{0, 2}$ ) – функції типу пограншару в околі  $\varphi = \varphi^*$ ,  $P_i(\varphi, \eta, t)$ ,  $\tilde{A}_i(\varphi, \mu, t)$  – функції типу пограншару відповідно в околах

$\psi = Q_*$ ,  $\psi = Q^*$ , що враховують вплив “бічних джерел забруднень” ( $c^*$ ,  $c_{**}$ ,  $c^{**}$ ),  $\xi = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$ ,  $\eta = \frac{\psi - Q_*}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\mu = \frac{Q^* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$  – відповідні регуляризуючі перетворення.

Підставивши (7) в (6) та застосувавши стандартну “процедуру прирівнювання”, аналогічно до [1-3,6] для знаходження функцій  $C_0$  та  $C_1$  приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{0\varphi} + C_{0t} = 0, \\ C_0(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi), C_0(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{1\varphi} + C_{1t} = g(\varphi, \psi, t), \\ C_1(\varphi, \psi, 0) = 0, C_1(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{cases}$$

де  $g(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \cdot a_0 \cdot \left( \frac{\partial^2 C_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial \psi^2} \right)$ .

В результаті їх розв’язання маємо:

$$C_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ c_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$C_1(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g(s, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(s, \psi))}{v^2(s, \psi)} ds, & t \geq f(\varphi, \psi), \\ \int_0^t g(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi), \psi, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де  $f(\varphi, \tilde{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \tilde{\psi})}$  – час проходження виділеної частинки вздовж лінії

течії  $\psi(x, y) = \tilde{\psi}$  від точки  $(x(\varphi_*, \tilde{\psi}), y(\varphi_*, \tilde{\psi}))$  до точки  $(x(\varphi, \tilde{\psi}), y(\varphi, \tilde{\psi}))$ ,  $f^{-1}$  – функція обернена до функції  $f$  стосовно змінної  $\varphi$ .



Функції типу пограншару  $\check{I} = \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \cdot \check{I}_i$  призначені для усунення

нев'язок, внесених побудованою регулярною частиною  $C_0 + \varepsilon \cdot C_1$  в околі границі виходу фільтраційного потоку  $\varphi = \varphi^*$ . Для їх знаходження маємо задачі [6]:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \check{I}_{0\xi\xi} + \check{I}_{0\xi} = 0, \check{I}_{0\xi} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \\ \check{I}_0(0, \varphi, t) = \check{n}^*(\psi, t) - C_0(\varphi^*, \psi, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot \check{I}_{1\xi\xi} + \check{I}_{1\xi} = v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot d_1(\xi, \psi, t), \\ \check{I}_1(0, \psi, t) = -C_1(\varphi^*, \psi, t), \check{I}_1(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot \check{I}_{2\xi\xi} + \check{I}_{2\xi} = v^{-2}(\varphi^*, \psi) \cdot d_2(\xi, \psi, t), \\ \check{I}_2(0, \psi, t) = 0, \check{I}_2(\xi, \psi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0, \end{cases}$$

де  $d_1(\xi, \psi, t) = \frac{\partial \check{I}_0}{\partial t} - v^2(\varphi^*, \psi) \cdot a_1 \cdot \check{I}_0 \cdot \check{I}_{0\xi\xi} - v^2(\varphi^*, \psi) \cdot a_1 \cdot \check{I}_{0\xi}^2$ ,  $d_2(\xi, \psi, t) =$   
 $= \check{I}_{1t} + \frac{2v' \cdot \xi \cdot d_1(\xi, \psi, t)}{v(\varphi^*, \psi)} - v^2(\varphi^*, \psi) \cdot a_1 \cdot \check{I}_0 \check{I}_{1\xi\xi} + 2vv' \cdot \xi \cdot a_1 \cdot (\check{I}_0 \check{I}_{0\xi\xi} + \check{I}_{0\xi}^2) -$   
 $- v^2(\varphi^*, \psi) \cdot (a_2 \cdot \check{I}_{0\xi\xi} (\check{I}_0^2 + 2\check{I}_0 C_0) + a_1 \cdot \check{I}_{0\xi\xi} \check{I}_1 + \check{I}_{0\psi\psi} + 2a_1 \cdot \check{I}_{1\xi}^2 + 2a_2 \cdot \check{I}_{0\xi}^2 \check{I}_0).$

Функція  $P = \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} \cdot P_i$  (яка є функцією типу пограншару) призначена для

усунення невязок в околах граничних ліній течії  $\psi = Q_*$ . Аналогічно до [6-9], для її знаходження в результаті проведення стандартної процедури “прирівнювання” [2] приходимо до таких задач :

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*) \cdot (a_0 \cdot \mathcal{D}_{0\eta\eta} + \mathcal{D}_{0\varphi}) = \mathcal{D}_{0t}, P_0(\varphi, \eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \\ P_0(\varphi, Q_*, t) = c^{**}(\varphi, t) - C_0(\varphi, Q_*, t) - \check{I}_0(\varphi, Q_*, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*) \cdot (a_0 \cdot \mathcal{D}_{1\eta\eta} + \mathcal{D}_{1\varphi}) = \mathcal{D}_{1t} + U_1(\varphi, \eta, t), \\ P_1(\varphi, Q_*, t) = 0, P_1(\varphi, \eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*) \cdot (a_0 \cdot \mathcal{D}_{2\eta\eta} + \mathcal{D}_{2\varphi}) = \mathcal{D}_{2t} + U_2(\varphi, \eta, t), \\ P_2(\varphi, Q_*, t) = -C_1 - \dot{I}_1, \quad P_2(\varphi, \eta, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

де  $U_1(\varphi, \eta, t) = -v^{-2}(\varphi, Q_*) \cdot P_{0t}$ ,  $U_2(\varphi, \eta, t) = -2v'v^{-1} \cdot \eta \cdot (P_{1t} + U_1) - (vv'' + v'^2) \times$   
 $\times v^{-2} \cdot P_{0t} - v^2(\varphi, Q_*) \cdot (a_0 \cdot P_{0\varphi\varphi} + a_1 \cdot P_0 \cdot P_{0\eta\eta} + a_1 \cdot (P_{0\eta}^2 + 2 \cdot (P_{0\eta} \cdot \dot{I}_0(\xi, Q_*, t) +$   
 $+ P_0 \cdot C_0(\varphi, Q_*, t)))$ . Задачі для погранфункцій  $\tilde{A}(\varphi, \mu, t) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{A}_i$

знаходяться аналогічно.

**Числові розрахунки.** Приведемо результати розрахунку розглянутого вище процесу “конвекції-дифузії” на ідеальному фільтраційному фоні, породженому особливими точками  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 4$  (відповідно витік і втік однакових інтенсивностей  $Q_0 = 2\pi$ ), комплексний потенціал якого –  $w = (Q_0/2\pi) \cdot \ln((z - z_1)/(z - z_2))$ , при  $\varphi_* = -1.4$ ,  $\varphi^* = 1.4$ ,  $AD = \{z : \psi(x, y) = 5\pi/6\}$ ,  $BC = \{z : \psi(x, y) = 3\pi/2\}$ . На рис.2 а), б) зображені рівномірна сітка області комплексного потенціалу  $G_w$  та відповідна

динамічна сітка в  $G_z$ :  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 20$ ,  $\psi(x, y) = \overline{\psi}_j = (Q_* \cdot j) / 10$ ,  $i = \overline{0, 20}$ ,  $j = \overline{0, 10}$ , величина швидкості фільтрації

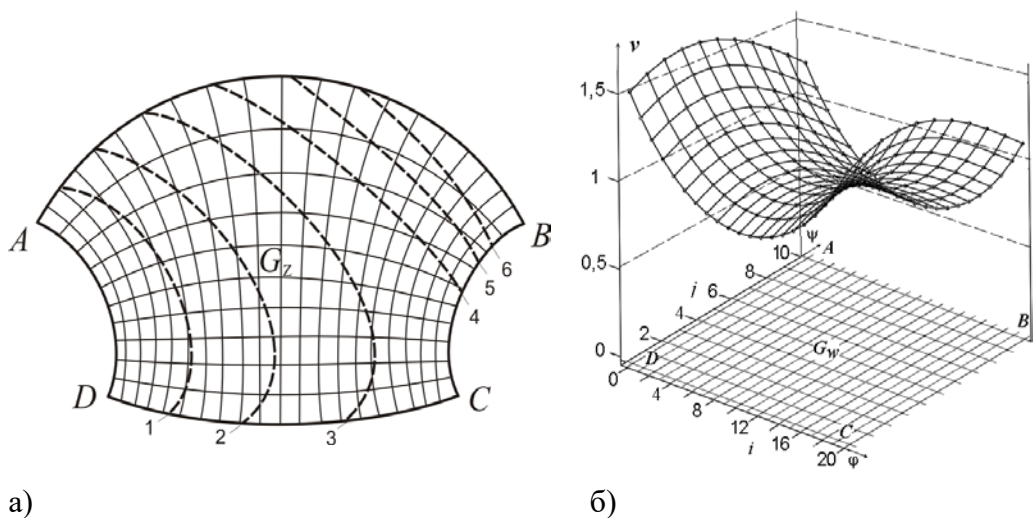


Рис. 2. Фізична область  $G_z$  (а) і поле швидкостей відносно відповідної їй області комплексного потенціалу  $G_w$  (б)

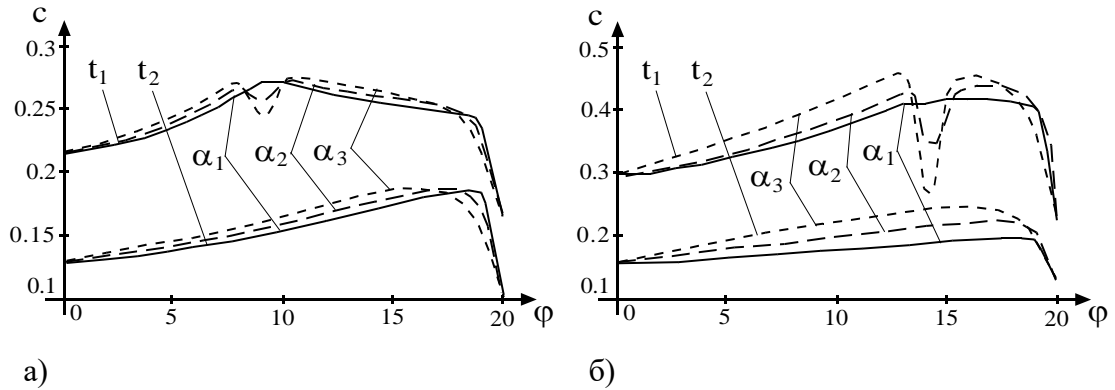


Рис. 3. Розподіл концентрації речовини вздовж ліній течії  $\psi_1 = 3.456$  (а) та  $\psi_2 = 4.294$  (б) в моменти часу  $t_1 = 1.659$ ,  $t_2 = 6.802$  при  $\alpha = 1, 10, 20$

$v = \left( (dz/dw) \overline{(dz/dw)} \right)^{-1/2}$  у вузлах  $(\varphi_i, \psi_j)$  і лінії фронту конвективного переносу  $f(\varphi, \psi) = t_k$ ,  $k = \overline{1, 6}$  при  $t_1 = 0.3492$ ,  $t_2 = 0.8882$ ,  $t_3 = 1.6592$ ,  $t_4 = 2.6492$ ,  $t_5 = 3.7584$ ,  $t_6 = 4.8258$  (криві 1-6 відповідно).

На рис. 3 зображено розподіл концентрацій  $C(\varphi, \psi, t)$  розчинних речовин при величині малого параметра  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_i = \alpha/(i+1)$ , початковій  $c_0^0(\varphi, \psi) = 5/((\varphi+1.4)^2 + \psi^2)$  та граничних умовах  $c_*(\psi, t) = 5/(y^2 + 3t)$ ,  $c^*(\psi, t) = 5/(\psi^2 + 3t + 7.84)$ ,  $c_{**}(\varphi, t) = 5/((\varphi+1.4)^2 + 3t + (5\pi/6)^2)$ ,  $c^{**}(\varphi, t) = 5/((\varphi+1.4)^2 + 3t + (3\pi/2)^2)$ .

**Висновки і зауваження.** Конструкція побудованого розв'язку (7) нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі в криволінійному чотирикутнику, обмеженому двома еквіпотенціальними лініями та двома лініями течії, у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації дає можливість автономно доповнювати (збурювати) основну його частину відповідними “дифузійними поправками” і поправками в околах виходу фільтраційної течії та граничних ліній течії.

Якщо початкова та граничні умови недостатньо узгодженні або недостатньо гладкі, то тут можливою є процедура згладження негладкостей розв'язків вироджених задач вздовж характеристик, що виходять із кутових (ребрових) точок області  $G_w \times (0, \infty)$  [5], та побудова кутових функцій [1].

У перспективі запропоновану методику можна перенести на випадки розв'язання відповідних просторових сингулярно збурених задач для

багатозв'язних областей [7-9], задач гетеродифузії [10-11], а також нелінійних задач із запізненням [12].

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая школа, 1980. – 208с.
2. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн. – 1982. – Т.4, №4. – С. 493-496.
3. *Bobisud L.E.* Parabolic Equations with a Small Parameter and discontinuous Data // Journal of mathematical analysis and applications. – 1969. – Vol. 26, №1. – P. 208-220.
4. *Вишик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. – 1957. – 12, вып. 5. – С. 3-122.
5. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса. – К.: Киевский ун-т, 1986. – Деп. в УкрНИИТИ, №286-Ук86.
6. *Бомба А.Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу “фільтрація-дифузія” за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип. 9. – С.12-21.
7. *Присяжнюк І.М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” у многозв'язних областях // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. - 2003. - Вип. 1. - С. 118–128.
8. *Бомба А.Я., Пригорницький Д.А., Присяжнюк І.М.* Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях // Компьютерная математика. – 2004. – №1. – С. 152-159.
9. *Бомба А.Я., Скопецкий В.В., Присяжнюк І.М.* Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях // Компьютерная математика. – 2004. – №2. – С. 99-104.
10. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
11. *Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O.* Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in manyphases continuum systems / In mat.: II Szkola Geomechaniki (miedz. konf.). – Gliwice: Polit. Slaska, 1995. – P. 343-351.
12. *Бомба А.Я., Присяжнюк І.М.* Асимптотичне розв'язання розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” із запізненням // Доповіді НАН України. – 2005. – №3. – С.60-66.

Рівненський державний гуманітарний університет  
E-mail: klimyuk@ukr.net

Надійшла 17.08.2005

**Климюк Ю.Е., Присяжнюк І.М.** МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНО-ДИФУЗНОГО ПЕРЕНОСА В СЛУЧАЕ МНОГОЧЛЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФфуЗИИ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ // На основе плоской краевой задачи на конформное отображение внутренней области криволинейного четырехугольника на прямоугольную построено асимптотическое приближение решения плоской нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи в криволинейном четырехугольнике, ограниченном двумя эквипотенциальными линиями и двумя линиями течения, в случае многочленной зависимости коэффициента диффузии от концентрации. Приводятся результаты численных исследований.

**Klymyuk YU. E., Prysjazhnjuk I. M.** THE MODELING OF "CONVECTION-DIFFUSION" MIGRATION IN THE CASE OF POLYNOMIAL DEPENDENCE OF DIFFUSION COEFFICIENT FROM CONCENTRATION. *Asymptotic approximation of the solution of planar nonlinear singular indignant boundary problem for the system of nonlinear equations of three component convectional diffusion in curvilinear tetragon, bounded by the two equipotential lines and two lines of current on the basis of the flat boundary value problem on conformal mapping of the internal area of a curvilinear quadrangle on the rectangular is constructed in the case of polynomial dependence of diffusion coefficient from concentration. Results of numerical researches are presented.*