

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК**

**СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

Збірник наукових праць

Випуск 2 (11)

Рівне-2004

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Редакційна колегія

Барановський С.В. (<i>секретар</i>)	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Недашківській М.О.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пономаренко Л.А.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О. (<i>технічний секретар</i>)
Гаращенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Дейнека В.С.	Скопецький В.В. (<i>головний редактор</i>)
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каштан С.С. (<i>технічний секретар</i>)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

Зміст

<i>Наші вітання СКОПЕЦЬКОМУ ВАСИЛЮ ВАСИЛЬОВИЧУ</i>	5
Барановський С.В., Бомба А.Я., Скопецький В.В. Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформацій русла на ділянках планового розширення та повороту русла	7
Бомба А.Я., Каштан С.С. Методи фіктивних ділянок та квазі-конформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач в областях з вільними межами	17
Вальковський В.О., Соловей І.А. До проблеми оптимальної синхронної реалізації обчислень на клітинних автоматах	29
Власюк А.П., Мартинюк П.М. Фільтраційна консолідація неоднорідного масиву ґрунту в неізотермічних умовах з урахуванням впливу переносу солей	39
Возняк О.Г. Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь	54
Гайвась Б.І. Про вплив електроосмосу на двостороннє конвективне осушення пористого шару	74
Дейнека О.Ю. Періодичні розв'язки системи телеграфних рівнянь	86
Ємець Є.М. Про еквівалентність задач цілочислового програмування та задач оптимізації на полірозміщеннях	91
Ємець О.О. Розв'язок безумовної задачі евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією	95
Ємець Ол-ра О. Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин	101
Ємець О.О., Черненко О.О. Математичне моделювання деяких економічних проблем задачами оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною функцією цілі	107
Зарівняк І.С. Імовірність критичного стану клеєних швів шарової пластини з початковими неправильностями	113
Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М. Моделювання процесів конвективно-дифузійного переносу у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації	121
Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. Чисельно-аналітичний розв'язок просторових крайових задач з вільною межею для одного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних	130
Мандзак Т.І., Савула Я.Г. Пониження вимірності математичної	

<i>моделі адвекції-дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій</i>	140
Мартинюк П.М. <i>Про зменшення затрат машинного часу при розв'язуванні нелінійних крайових задач методом скінченних елементів</i>	148
Міца О.В. <i>Моделювання та оптимізація розподілу показника заломлення неоднорідних плівок при розв'язанні задачі просвітлення</i>	161
Петрик М.Р., Ленюк М.П. <i>Математичне моделювання адсорбційного масопереносу з спектральним параметром для неоднорідних n-інтерфейсних обмежених нанопористих середовищ</i>	168
Поліщук О.Д. <i>Розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа в R^3 для розімкненої поверхні за допомогою потенціалу подвійного шару</i>	189
Пригорницький Д.О. <i>Нелінійні обернення модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей</i>	196
Присяжнюк І.М. <i>Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії із запізнюючим аргументом</i>	212
Романова Н.Г. <i>Задача оптимізації дробово-лінійної цільової функції на поліпереставленнях: властивості її комбінаторного многогранника</i>	223
Савула Я.Г., Винницька Л.І. <i>Застосування генетичного алгоритму до оптимізації сіток в процесі числового розв'язування задачі адвекції-дифузії-реакції</i>	233
Скопецький В.В., Булавацький В.М. <i>Математичне моделювання фільтраційного ущільнення ґрунтових масивів за умов насичення сольовими розчинами та нерівноважності дифузійного процесу</i>	240
Сяський А.О., Бабич С.М. <i>Математична модель шліцьового з'єднання храпового типу для передачі обертального руху</i>	248
Чілікіна Т.В. <i>Розв'язування одного класу задач нелінійної комбінаторної оптимізації на переставленнях</i>	257
НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ-МЕХАНІКИ	
Я.С. ПІДСТРИГАЧ – <i>видатний вчений, стратег і організатор науки</i>	263

УДК 518.61.001.573

Пригорницький Д.О.**НЕЛІНІЙНІ ОБЕРНЕННЯ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА
КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ТРИЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ**

Систематизовано підхід до розв'язування модельних задач на конформні відображення для тризв'язних областей, обмежених екіпотенціальними лініями. Відповідні постановки модельних задач сформульовані з точки зору оптимізації певних функціоналів (величин втоків, витоків, перетоків тощо) відносно значення одного з граничних потенціалів, як параметра керування.

Вступ. У роботах [1-8] для побудови динамічної сітки потенціальних і квазіпотенціальних полів, розрахунку різного роду профілів, зокрема крилових [7,8], із одночасним знаходженням інших характеристик (витрат, перетоків і т. ін.) широко використовувався метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень). Зокрема у роботах [1-5] розглядалися відповідні модельні крайові задачі для випадку двозв'язної фізичної області, обмеженої екіпотенціальними лініями. При поширенні розробленої методики на випадки областей більш складної геометрії (тризв'язні) автори наштотувалися на певні труднощі, адже у цих випадках область комплексного (квазікомплексного) потенціалу G_{ω} будується неоднозначно [9, 10] і, одночасно із побудовою алгоритму чисельного розв'язування конкретної нелінійної оберненої задачі, виникає проблема вибору відповідної конфігурації області G_{ω} з усіх можливих 23 варіантів. У роботах [9, 10] ця проблема описана в загальному, а у [11, 12] для окремих випадків формування течії розроблені алгоритми розв'язування відповідних модельних задач.

У цій роботі пропонується систематизований підхід до постановок такого роду задач та побудови алгоритмів їх розв'язування. При цьому, на відміну від [9, 10], ми розглядатимемо випадки, для яких значення потенціалу φ^* зовнішнього контура L^* більше за потенціал φ_* одного із внутрішніх межових контурів L_* (рис.1-3). Особливий інтерес для нас представлятимуть випадки (називатимемо їх „ключовими” або “оптимальними”, всі інші – „проміжними”), які характеризуються такими

значеннями керуючого потенціалу φ_0 (задається на одному з внутрішніх межових контурів області), при яких за додаткових умов досягається мінімум (чи максимум) величини одного з перетоків між контурами області.

Загальна постановка задачі. У тризв'язній криволінійній області G_z ($z=x+iy$), обмеженій замкненими гладкими контурами $L_* = \{z = x + iy : f_*(x, y) = 0\}$, $L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, розглянемо модельну крайову задачу на знаходження потенціалу φ : $\Delta\varphi = 0$, $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, $-\infty < \varphi_0 < +\infty$, де φ_0 – керуючий потенціал (L_0 – відповідний контур-носій керуючого потенціалу).

Як відомо, шляхом введення функції течії $\psi = \psi(x, y)$ (комплексно-спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$) та умовного розрізу Γ області G_z вздовж однієї з ліній розділу течії, ця задача зводиться до конформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області $G_z \setminus \Gamma$ (при невідомих ділянках її границі) на відповідну область комплексного потенціалу G_ω або до задачі на обернене конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$, $G_\omega \rightarrow G_z \setminus \Gamma$ при відповідності кутових точок з одночасним обчисленням невідомих параметрів-витрат [1-5, 9-12].

В залежності від співвідношення граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0 область комплексного потенціалу G_ω набуває різної геометричної конфігурації. На основі евристичних міркувань з наступним логічним обґрунтуванням нами встановлено 23 можливі випадки формування течії, які зображені на рис.1–3. Кожен із можливих випадків (їх надалі “іменуватимемо” як $p.q$, де p – номер відповідного рисунка, $p = \overline{1,3}$, q – порядковий номер випадку на рисунку) характеризується тим чи іншим набором перетоків між контурами, що обмежують модельну область. Так, наприклад, для випадків 1.1 та 1.2 характерним є те, що L_0 є лінією витоку, а контури L^* та L_* – лініями втоку. Випадок 1.2 є ключовим у тому

розумінні, що точка H розгалуження потоків співпадає із деякою точкою A внутрішнього контуру L_* , а величина перетоку від L_0 до L_* (надалі позначатимемо: $L_0 \rightarrow L_*$, де L_0 – контур-джерело, а L_* – контур-приймач) є мінімальною за умови відсутності перетоку $L_* \rightarrow L^*$.

При подальшому зростанні потенціалу керування φ_0 (випадки 1.3–1.5), до двох наявних перетоків додається третій ($L_* \rightarrow L^*$). Особливістю випадку 1.4 є те, що сумарний потік через контур L_* дорівнює нулю.

На рис. 1.6-1.8, 2.1, 2.2 зображені ситуаційні стани у випадках відсутності перетоків між внутрішніми контурами. Випадок 1.6 є ключовим у тому розумінні, що точка H розгалуження перетоків (рис. 1.6) співпадає з деякою точкою A внутрішнього контуру L_* (при цьому величина перетоку $L_* \rightarrow L^*$ досягає свого мінімального значення, а $L_0 \rightarrow L^*$ – максимального). Особливістю випадку 1.8 є те, що потенціали внутрішніх контурів рівні, а ключового випадку 2.2 – те, що точка H розгалуження потоків співпадає з деякою точкою B внутрішнього контуру L_0 (при цьому величина перетоку $L_* \rightarrow L^*$ є максимальною, а $L_0 \rightarrow L^*$ – мінімальною за умови відсутності перетоку між внутрішніми контурами).

На рис. 2.3-2.5 зображені ситуаційні стани за умов наявності перетоків $L_* \rightarrow L_0$ та $L_0 \rightarrow L^*$. Особливістю випадку 2.4 є те, що загальний потік через L_0 дорівнює нулю.

За умови відсутності перетоку $L^* \rightarrow L_0$ (2.6–2.7, 3.1–3.3) випадки 2.6 і 3.3 є ключовими у тому розумінні, що точка H розгалуження потоків співпадає в першому випадку з точкою B внутрішнього контуру L_0 (при цьому величина перетоку $L_* \rightarrow L_0$ досягає свого мінімального значення), а у другому – з точкою C зовнішнього контуру L^* (величина перетоку $L_* \rightarrow L_0$ досягає свого максимального значення).

Далі зображені у певному сенсі “зворотні” відносно 1.1–1.8 ситуаційні стани. Так, на рис 3.4–3.6 зображені випадки наявності трьох перетоків (“зворотних” по відношенню до 1.3–1.5). При цьому, особливістю 3.5 є рівність величин витоку в контур L^* та витоку з нього. Випадок 3.7 є ключовим за умов відсутності перетоку з L_* до L^* у тому

розумінні, що точка H розгалуження потоків співпадає з точкою C зовнішнього контуру L^* , а величина перетоку $L_* \rightarrow L_0$ досягає свого локального мінімуму.

У кожному з 23-х випадків формування течії, область комплексного потенціалу є многокутником, сторони якого паралельні осям координат. Неповна визначеність геометричної конфігурації області комплексного потенціалу G_ω (а саме, її залежність від співвідношення величин граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0) зумовлює необхідність побудови як алгоритмів числового розв'язання задачі для кожного із зазначених випадків окремо, так і “алгоритму вибору”, призначеного для вибору одного з описаних вище випадків. Головним моментом при вирішенні цієї проблеми в цілому є розв'язування в першу чергу ключових (оптимізаційних) задач ($q = \overline{1,6}$), що визначаються додатковою умовою на знаходження того із значень потенціалу керування $\varphi_0 = \varphi_k^q$, при якому досягається мінімум або максимум величини одного із перетоків. Таких допоміжних задач під час виконання “алгоритму вибору” необхідно буде розв'язати у “найгіршому” випадку не більше двох, а після вибору конкретного випадку необхідно буде розв'язати додатково ще одну “проміжну” задачу для того, щоб отримати розв'язок вихідної задачі. При цьому зауважимо, що “проміжні” задачі 1.3–1.5, 2.3–2.5 та 3.4–3.6 можуть бути розв'язані “погрупово” (за спільним для групи випадків алгоритмом), зважаючи на геометричну „подібність” (в певному сенсі) відповідних областей комплексного потенціалу.

Алгоритм вибору. Нехай задані геометрична конфігурація фізичної області G_z (криві L_* , L^* , L_0) та значення граничних потенціалів φ_* , φ^* , φ_0 . Тоді загальний алгоритм вибору конкретного випадку з можливих можна записати у вигляді послідовності таких кроків:

- 1) Якщо $\varphi_0 = \varphi_*$ або $\varphi_0 = \varphi^*$, то маємо відповідно конкретні випадки 1.8 та 3.1. Інакше – продовжуємо виконання алгоритму.
- 2) Якщо $\varphi_0 < \varphi_*$, то переходимо до п.8. Якщо $\varphi_0 > \varphi^*$, то переходимо до п.13.

- 3) У випадку, коли $\varphi_0 - \varphi_* > \varphi^* - \varphi_0$, переходимо до п.6.
- 4) Розв'язуємо задачу 2.2. Зокрема, знаходимо відповідне ключове значення φ_k^3 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^3$, то маємо випадок 2.2. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^3$, то маємо випадок 2.1.
- 5) Знаходимо ключове значення φ_k^4 як результат розв'язання оптимізаційної задачі 2.6. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^4$, то маємо випадок 2.6. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^4$, то маємо випадок 2.7. При $\varphi_0 < \varphi_k^4$ маємо один з випадків 2.3–2.5.
- 6) Розв'язуємо задачу 2.6 та знаходимо відповідне ключове значення φ_k^4 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^4$, то маємо випадок 2.6. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^4$, то маємо випадок 2.7.
- 7) Розв'язуємо задачу 2.2. Зокрема, знаходимо відповідне ключове значення φ_k^3 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^3$, то маємо випадок 2.2. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^3$, то маємо випадок 2.1. При $\varphi_0 > \varphi_k^3$ маємо один з випадків 2.3–2.5.
- 8) У випадку, коли $\varphi_* - \varphi_0 \gg \varphi^* - \varphi_*$, переходимо до п.11.
- 9) Розв'язуємо задачу 1.6 та знаходимо відповідне ключове значення φ_k^2 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^2$, то маємо випадок 1.6. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^2$, то маємо випадок 1.7.
- 10) Знаходимо ключове значення φ_k^1 як результат розв'язання оптимізаційної задачі 1.2. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^1$, то маємо випадок 1.2. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^1$, то маємо випадок 1.1. При $\varphi_0 > \varphi_k^1$ маємо один з випадків 1.3–1.5.
- 11) Знаходимо φ_k^1 як результат розв'язання оптимізаційної задачі 1.2. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^1$, то маємо випадок 1.2. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^1$, то маємо випадок 1.1.
- 12) Розв'язуємо задачу 1.6, зокрема, знаходимо відповідне ключове

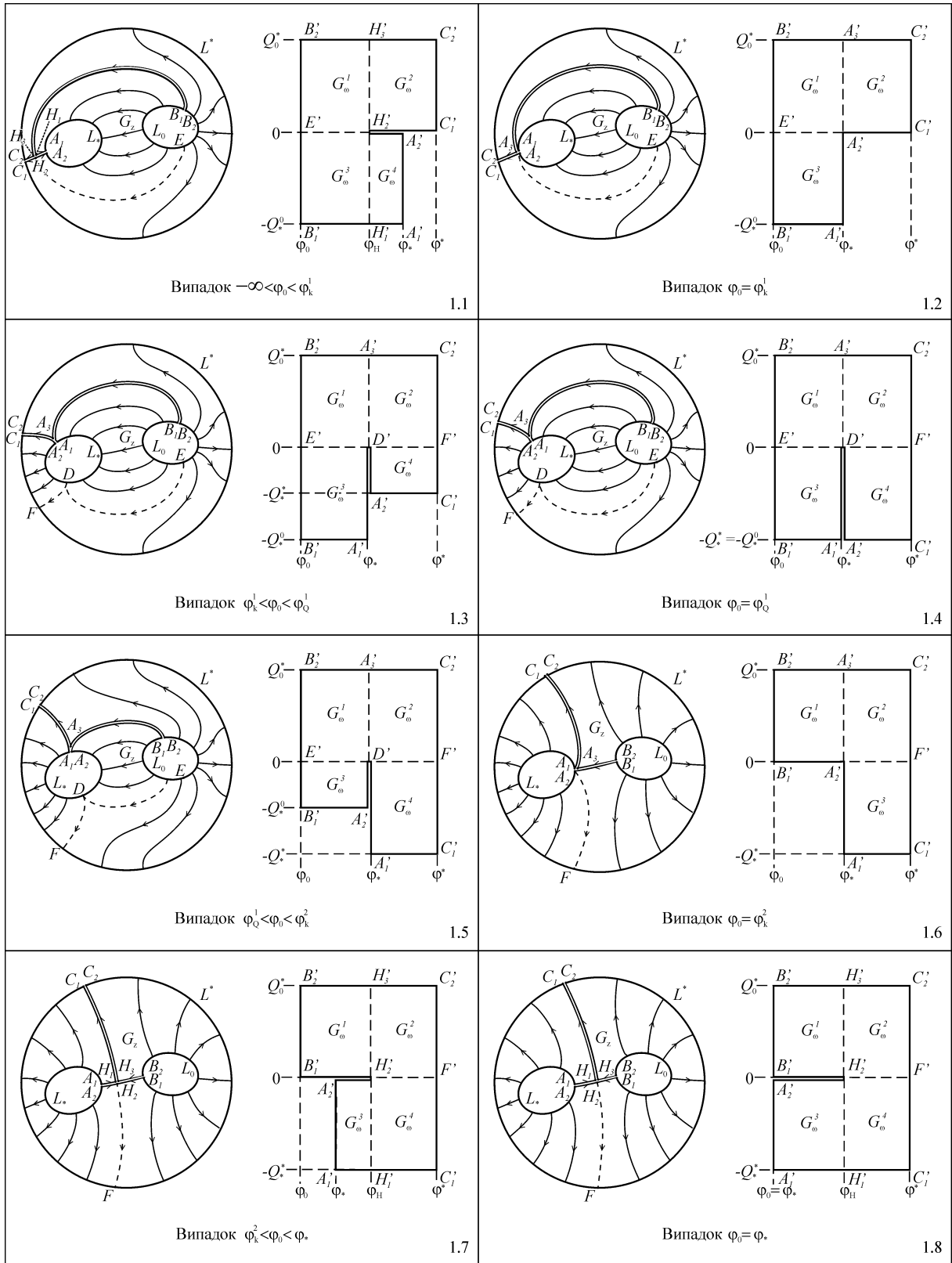


Рис. 1. Всеможливі випадки для $-\infty < \varphi_0 \leq \varphi_* < \varphi^*$

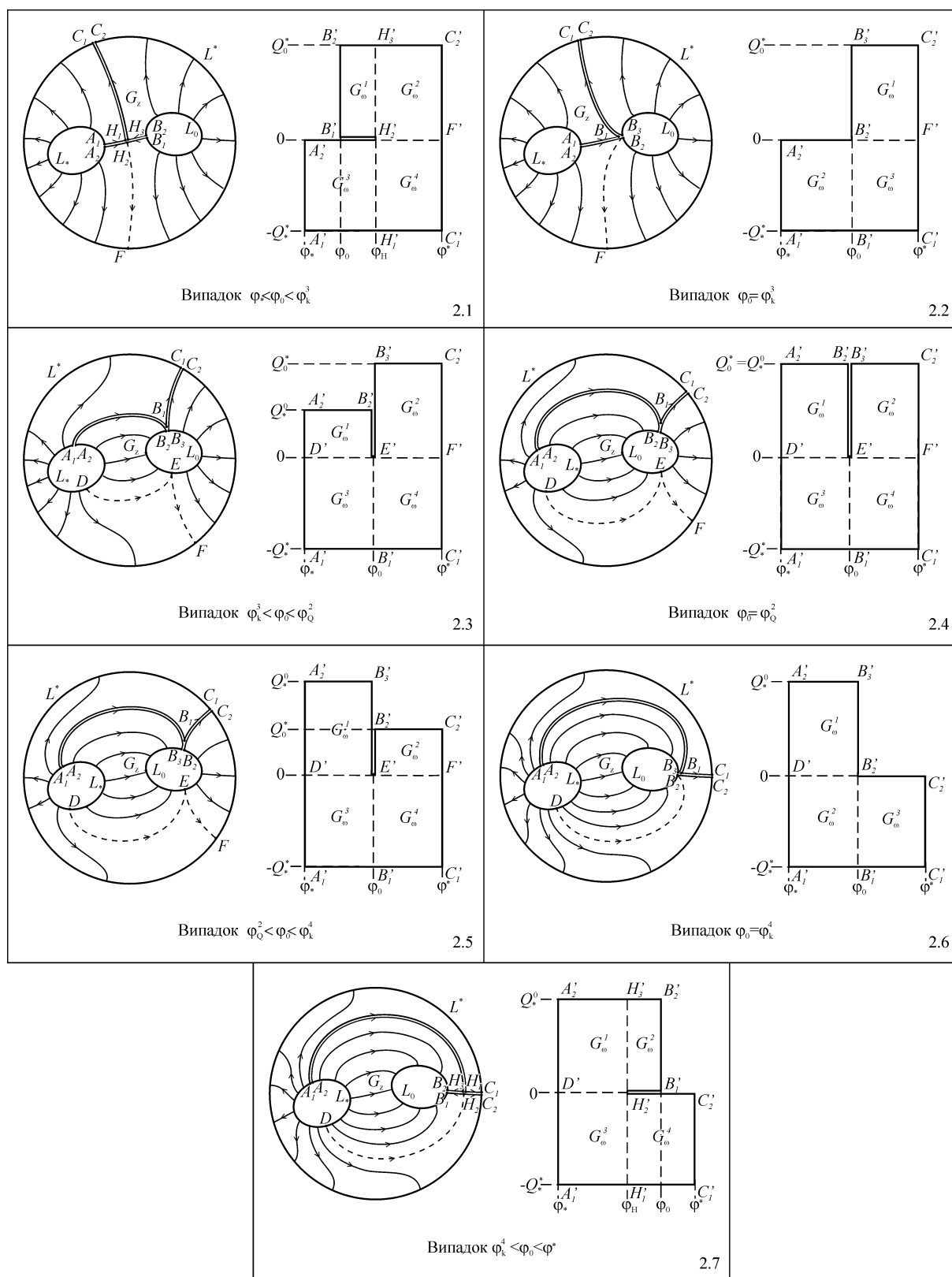


Рис. 2. Всеможливі випадки для $\varphi_* < \varphi_0 < \varphi^*$

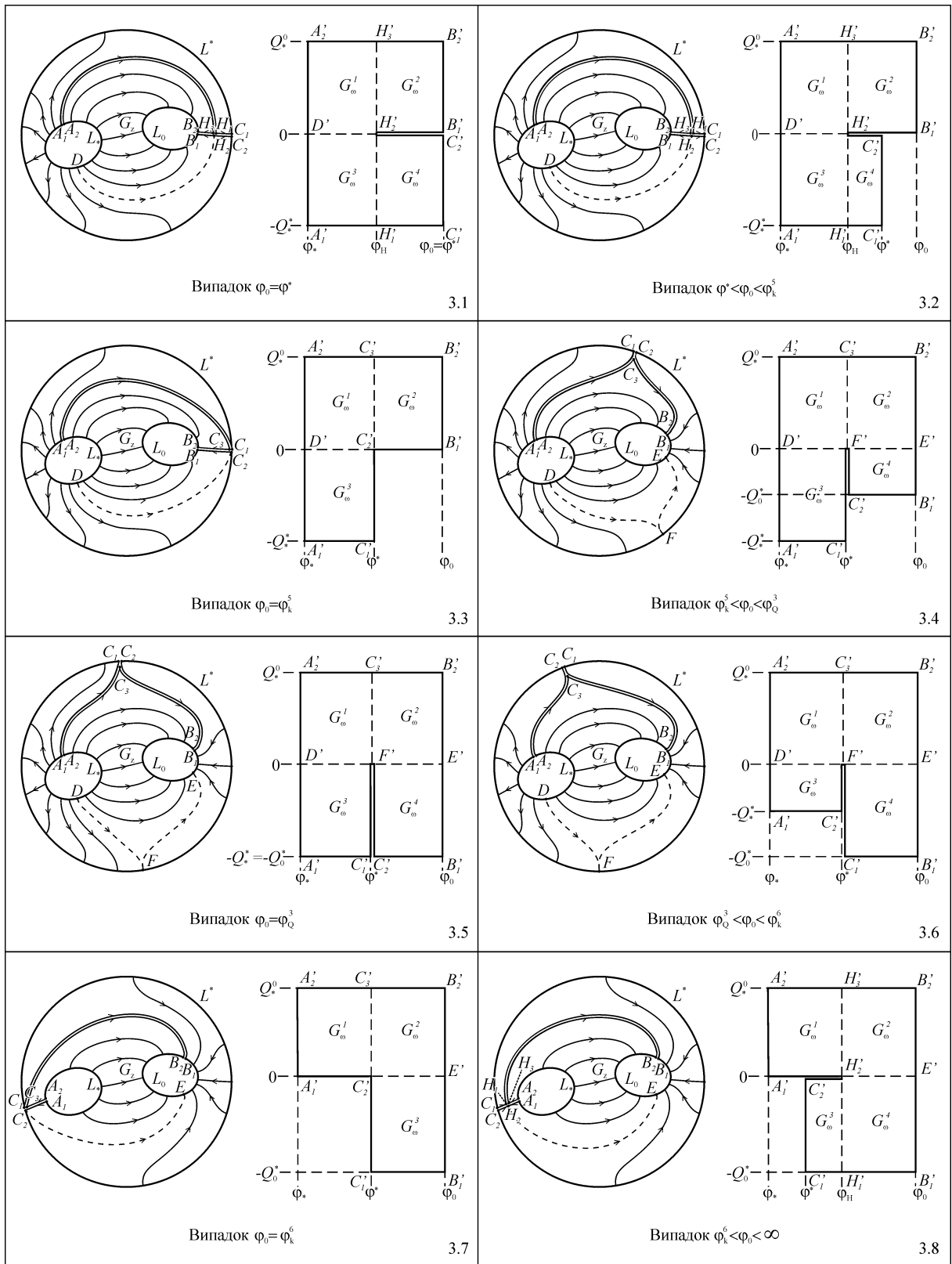


Рис. 3. Все можливі випадки для $\varphi_* < \varphi^* \leq \varphi_0 < \infty$

значення φ_k^2 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^2$, то маємо випадок 1.6. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^2$, то маємо випадок 1.7. При $\varphi_0 < \varphi_k^2$ маємо один з випадків 1.3–1.5.

13) У випадку, коли $\varphi_0 - \varphi^* \gg \varphi^* - \varphi_*$, переходимо до п.16.

14) Знаходимо ключове значення φ_k^5 як результат розв'язання відповідної оптимізаційної задачі 3.3. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^5$, то маємо випадок 3.3. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^5$, то маємо випадок 3.2.

15) Розв'язуємо задачу 3.7 та знаходимо відповідне ключове значення φ_k^6 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^6$, то маємо випадок 3.7. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^6$, то маємо випадок 3.8. При $\varphi_0 < \varphi_k^6$ маємо один з випадків 3.4–3.6.

16) Розв'язуємо задачу 3.7, зокрема, знаходимо відповідне ключове значення φ_k^6 . Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^6$, то маємо випадок 3.7. Якщо $\varphi_0 > \varphi_k^6$, то маємо випадок 3.8.

17) Знаходимо ключове значення φ_k^5 як результат розв'язання відповідної оптимізаційної задачі 3.3. Якщо $\varphi_0 = \varphi_k^5$, то маємо випадок 3.3. Якщо $\varphi_0 < \varphi_k^5$, то маємо випадок 3.2. При $\varphi_0 > \varphi_k^5$ маємо один з випадків 3.4–3.6.

Різницеві аналоги ключових та проміжних задач. Загальний алгоритм їх розв'язування. Алгоритми розв'язування, як проміжних так і ключових задач, для вибраних конкретних випадків формування течії були нами розроблені у [9-12]. Всі вони ґрунтуються на ідеї почергової параметризації граничних вузлів, внутрішніх вузлів динамічної сітки, параметрів конформності та потенціалу керування. Після переходу до відповідних різницевих задач в кожному з окремих випадків система рівнянь, яку необхідно розв'язати, ділиться на три групи рівнянь, кожній з яких відповідає певна група невідомих. До першої групи невідомих належать значення шуканих функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ у внутрішніх

вузлах сіткової області $G_\omega^\gamma = \bigcup_{k=1}^K G_{\omega,k}^\gamma$ ($x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ відповідно), де $G_{\omega,k}^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_k^L + (i - i_k^0) \frac{\varphi_k^R - \varphi_k^L}{n_k}, \psi_j = j_k^0 \Delta \psi_k^- + (j - j_k^0) \frac{Q_k}{m_k}, i = \overline{i_k^0, i_k^0 + n_k}, j = \overline{j_k^0, j_k^0 + m_k}\}$, $i_k^0, j_k^0, n_k, m_k, \varphi_k^L, \varphi_k^R, \Delta \psi_k^-, Q_k$ – значення, які беруться з відповідної конкретному випадку таблиці (див. табл.1, табл.2 та табл.3 для випадків 1.3, 1.6 та 1.7 відповідно), причому використовуються тільки ті рядки таблиці для яких стовпчик $Q_k \neq '-'$.

Першій групі невідомих відповідають апроксимовані рівняння Лапласа:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \alpha_k^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi_k}{\Delta \psi_k^-} x_{i-1,j} + \frac{\Delta \varphi_k}{\Delta \psi_k^+} x_{i+1,j} + \frac{\Delta \psi_k}{\Delta \varphi_k^-} x_{i,j-1} + \frac{\Delta \psi_k}{\Delta \varphi_k^+} x_{i,\{j+1\}} \right), \\ y_{i,j} &= \alpha_k^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi_k}{\Delta \psi_k^-} y_{i-1,j} + \frac{\Delta \varphi_k}{\Delta \psi_k^+} y_{i+1,j} + \frac{\Delta \psi_k}{\Delta \varphi_k^-} y_{i,j-1} + \frac{\Delta \psi_k}{\Delta \varphi_k^+} y_{i,\{j+1\}} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\alpha_k = 2\Delta \varphi_k \Delta \psi_k ((\Delta \varphi_k^- \Delta \varphi_k^+)^{-1} + (\Delta \psi_k^- \Delta \psi_k^+)^{-1})$, $\Delta \varphi_k = (\Delta \varphi_k^- + \Delta \varphi_k^+)/2$, $\Delta \psi_k = (\Delta \psi_k^- + \Delta \psi_k^+)/2$, $\Delta \varphi_k^-, \Delta \varphi_k^+, \Delta \psi_k^-, \Delta \psi_k^+$ – кроки локальної сітки

(беруться з таблиці), $\{j\} = \begin{cases} j, & j < j_k^0 + m_k, \\ j - m_k^-, & j \geq j_k^0 + m_k. \end{cases}$ Друга група невідомих –

це значення $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ у граничних вузлах сіткової області G_ω^γ , які визначаються при розв'язуванні рівнянь (2)–(3) належності вузлів до границі області, рівнянь ортогональності (4)–(5) та рівнянь періодичності (6):

$$L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0) = 0, \quad j = \overline{j_k^0 + 1, j_k^0 + m_k - 1}, \quad (2)$$

$$R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0) = 0, \quad j = \overline{j_k^0 + 1, j_k^0 + m_k - 1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0)}{\partial y} (4x_{i_k^0+1,j}^0 - 3x_{i_k^0,j}^0 - x_{i_k^0+2,j}^0) - \frac{\partial L_k(x_{i_k^0,j}^0, y_{i_k^0,j}^0)}{\partial x} \times$$

$$\times(4y_{i_k^0+1,j}^0 - 3y_{i_k^0,j}^0 - y_{i_k^0+2,j}^0) = 0, \quad j = \overline{j_k^0 + 1, j_k^0 + m_k - 1}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0)}{\partial y} (3x_{i_k^0+n_k,j}^0 + x_{i_k^0+n_k-2,j}^0 - 4x_{i_k^0+n_k-1,j}^0) -$$

$$- \frac{\partial R_k(x_{i_k^0+n_k,j}^0, y_{i_k^0+n_k,j}^0)}{\partial x} (3y_{i_k^0+n_k,j}^0 + y_{i_k^0+n_k-2,j}^0 - 4y_{i_k^0+n_k-1,j}^0) = 0,$$

$$j = \overline{j_k^0 + 1, j_k^0 + m_k - 1}, \quad (5)$$

$$x_{i,J_k^0} = x_{i,J_k^0+m_k^-}, \quad y_{i,J_k^0} = y_{i,J_k^0+m_k^-}, \quad i = \overline{i_k^0, i_k^0 + n_k}, \quad \text{для } m_k \neq 0, \quad m_k > m_k^-. \quad (6)$$

До останньої третьої групи невідомих відносяться величини перетоків між контурами (витрати) та ключові потенціали (останні лише у випадку, якщо розв'язуються ключові задачі). Відповідні їм рівняння будуються на основі умов конформної подібності елементарних сіткових чотирикутників фізичної області та відповідних їм у області комплексного потенціалу [1-4] і записуються у вигляді:

$$Q_k = \gamma_k m_k (\varphi_k^R - \varphi_k^L), \quad \gamma_k = \frac{1}{n_k m_k} \sum_{i=i_k^0}^{i_k^0+n_k-1} \sum_{j=j_k^0}^{j_k^0+m_k-1} \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}, \quad (7)$$

$$\text{де } a_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}.$$

Табл.1. Параметри області комплексного потенціалу для випадку 1.3

k	i_k^0	j_k^0	n_k	m_k	m_k^-	$\Delta\varphi_k^-$	$\Delta\varphi_k^+$	$\Delta\psi_k^-$	$\Delta\psi_k^+$	L_k	R_k	φ_k^L	φ_k^R	Q_k	u_k
1	$-n_1$	0	n_1	m_3	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_3$	f_0	-	φ_0	φ_*	Q_0^*	Q_0^*
2	1	0	n_2	m_3	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_3$	-	f^*	φ_*	φ^*	Q_0^*	Q_0^*
3	$-n_1$	$-m_1$	n_1	m_1	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_1$	f_0	f_*	φ_0	φ_*	Q_0^0	Q_0^0
4	1	$-m_2$	n_2	m_2	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_2$	f_*	f^*	φ_*	φ^*	Q_0^*	-
5	$-n_1$	-1	n_1	2	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_3$	f_0	f_*	-	-	-	-
6	1	-1	n_2	2	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_3$	f_*	f^*	-	-	-	-
7	$-n_1$	$m_3 - 1$	n_1	2	$m_1 + m_3$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_1$	f_0	f_*	-	-	-	-
8	1	$m_3 - 1$	n_2	2	$m_2 + m_3$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_2$	f_*	f^*	-	-	-	-
9	-1	0	3	m_3	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_3$	-	-	-	-	-	-

Табл.2. Параметри області комплексного потенціалу для випадку 1.6

k	i_k^0	j_k^0	n_k	m_k	m_k^-	$\Delta\varphi_k^-$	$\Delta\varphi_k^+$	$\Delta\psi_k^-$	$\Delta\psi_k^+$	L_k	R_k	φ_k^L	φ_k^R	Q_k	u_k
1	$-n_2$	0	n_1	$m_2 + 1$	m_2	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_2$	f_0	-	φ_0	φ_*	Q_0^*	Q_0^*
2	0	0	n_2	m_2	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_2$	-	f^*	φ_*	φ^*	Q_0^*	Q_0^*
3	0	$-m_1$	n_2	m_1	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_1$	-	f^*	φ_*	φ^*	Q_0^*	φ_0
4	0	-1	n_2	2	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$	-	f^*	-	-	-	-
5	0	$m_2 - 1$	n_2	2	$m_1 + m_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_1$	-	f^*	-	-	-	-
6	-1	0	2	$m_2 + 1$	m_2	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_2$	-	-	-	-	-	-

Табл.3. Параметри області комплексного потенціалу для випадку 1.7

k	i_k^0	j_k^0	n_k	m_k	m_k^-	$\Delta\varphi_k^-$	$\Delta\varphi_k^+$	$\Delta\psi_k^-$	$\Delta\psi_k^+$	L_k	R_k	φ_k^L	φ_k^R	Q_k	u_k
1	$-n_3$	1	n_3	$m_2 + 1$	m_2	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_2$	f_0	\circ	φ_0	φ_H	Q_0^*	Q_0^*
2	0	1	n_2	m_2	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_2$	-	f^*	φ_H	φ^*	Q_0^*	Q_0^*
3	$-n_1$	$-m_1$	n_1	$m_1 + 1$	m_1	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_1$	f_*	\circ	φ_*	φ_H	Q_0^*	φ_H
4	0	$-m_1$	n_2	m_1	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_1$	-	f^*	φ_H	φ^*	Q_0^*	-
5	0	-1	n_2	3	0	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$	\circ	f^*	-	-	-	-
6	0	m_2	n_2	2	$m_1 + m_2 + 1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_1$	\circ	f^*	-	-	-	-
7	-1	$-m_1$	2	m_1	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_1$	-	-	-	-	-	-
8	-1	1	2	m_2	0	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_2$	-	-	-	-	-	-

Загальна схема алгоритму розв'язування ключових та проміжних задач така:

0. Задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z :

$$L_* = \{z = x + iy : f_*(x, y) = 0\}, \quad L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}, \quad L_0 = \{z : f_0(x, y) = 0\};$$

кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного потенціалу

$$G_\omega = \bigcup_{k=1}^K G_\omega^k \text{ деякої сіткової області } G_\omega^\gamma \text{ (параметри } n_1, m_1, n_2, m_2, n_3,$$

m_3 – їх кількість залежить від конкретного випадку, що розглядається, див., для прикладу [11,12]); параметри необхідної точності роботи алгоритму $\varepsilon_i, i = \overline{1,3}$ та ступінь конформності δ_* відображення, яке ми хочемо побудувати.

1. Задаємо початкове наближення шуканих координат граничних вузлів

$$x_{i,j}^{(0)} \text{ та } y_{i,j}^{(0)}, \text{ так щоб виконувалися умови (2)–(6).}$$

2. Задаємо початкові наближення шуканих координат внутрішніх вузлів

$$\text{динамічної сітки } (x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)}), \text{ початкові наближення витрат } Q_k^{(0)} \text{ і}$$

керуючого потенціалу $\varphi_0^{(0)}$ (для цього розв'язуються рівняння (7) відносно невідомих, які у таблиці наведені у окремому стовпчику u_k).
Покладаємо $t := 0$ (t – номер загальної ітерації алгоритму).

3. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки $(x_{i,j}^{(t)}, y_{i,j}^{(t)})$ за ітераційними схемами (1), враховуючи при цьому періодичність шуканих функцій (6). Найкраще проводити корекцію координат внутрішніх вузлів, використовуючи багатосіткові методи [14,15], які дозволяють значно ефективніше використовувати процесорний час. Достатньо провести або одну або невелику кількість ітерацій багатосіткового методу, адже алгоритм передбачає багаторазове виконання цієї операції.
4. “Підправляємо” граничні вузли, розв'язуючи систему рівнянь ортогональності ліній течії до границі області та рівнянь належності вузла до границі області (2)–(5), одним з модифікованих методів Ньютона.
5. Знаходимо нові наближення $Q_k^{(t)}$, $\varphi_k^{(t)}$ величин Q_k , φ_k , розв'язуючи систему рівнянь (7).
6. Якщо зміни невідомих величин Q_k і φ_k за останню проведену ітерацію більші за ε_3 , то переходимо до п.3.
7. Знаходимо величину зміщення вузлів на границі за проведену t -ту загальну ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$. Якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до п.3.
8. Перевіряємо максимальне зміщення за нормою \mathfrak{R}_2 внутрішніх вузлів за останню проведену ітерацію алгоритму. Якщо вона більша за ε_1 , то продовжуємо ітераційний процес з п.3.
9. Обчислюємо параметр конформності отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область із розрізом вздовж лінії розділу течії, а саме знаходимо максимальну нев'язку δ рівнянь Коші-Рімана, записаних у внутрішніх вузлах сіткової області G_ω^γ . Якщо $\delta \geq \delta_*$,

то збільшуємо кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ (для цього збільшуємо параметри n_k , m_k , не забуваючи при цьому обрати таке співвідношення між ними, щоб сітка G_ω^γ була максимально близька до квадратної) та переходимо до п.3, інакше – кінець роботи алгоритму: задача розв'язана із необхідною точністю.

Висновки. Наведені у роботі алгоритм вибору та узагальнений алгоритм розв'язування задач у часткових випадках формування течії у сукупності дозволяють розв'язувати весь спектр модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Приклади адаптації алгоритму для конкретних випадків були наведені в [12] (у роботі розглядалася ключова задача) та [10] (приклади розв'язання проміжних задач).

Описаний підхід до розв'язування задач на конформні відображення, які є модельними для задач теорії фільтрації у випадку однорідного ізотропного середовища, з успіхом може бути застосований також і до розв'язування відповідних задач із врахуванням неоднорідності та анізотропності реального середовища, а також явищ зміни провідних характеристик останнього під впливом фільтраційних процесів.

1. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О., Скопецький В.В. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення з післядією // Доповіді Національної академії наук України. – 2004. – № 3. – С. 62-68.
2. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О., Скопецький В.В. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки. – 2003. – Вип. 1. – С. 126-135.
3. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в двозв'язних деформівних середовищах // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 3-10.
4. Пригорницький Д.О. Модифікація алгоритму чисельного розв'язання одного класу нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в двозв'язних деформівних середовищах // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип. 9. – С. 60-66.

5. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в двозв'язних областях // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки. – 2001. – Вип. 3. – С. 188-195.
6. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей. – Киев, 1991. – 56 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т математики, № 91.57).
7. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1994. – 437 с.
8. Ильинский Н.Б., Поташев А.В., Таюрская Г.Р. Построение прямой однородной решетки профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1989. – № 3. – С. 35–38.
9. Бомба А.Я., Каштан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях з потенціалом керування // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 18–27.
10. Бомба А.Я., Каштан С.С. Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 2. – С. 3–15.
11. Пригорницький Д.О. Алгоритм чисельного розв'язання одного класу нелінійних модельних крайових задач на конформні відображення для трив'язних областей // Волинський математичний вісник. – 2003. – Вип. 10. – С. 107-117.
12. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О. Наближення розв'язків одного класу обернених крайових задач на конформні відображення в багатозв'язних областях з потенціалом керування // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2003. – 46, № 4. – С. 155-162.
13. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
14. Trottenberg U., Oosterlee C., Schuller A. Multigrid. – San Diego, CA: Academic Press, 2001.
15. Wesseling P. An Introduction to Multigrid Methods. – Chichester: John Wiley & Sons Inc., 1992.
16. Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – 7, № 5. – С. 1031–1059.

Рівненський державний гуманітарний університет
E-mail: science@prigornitsky.com

Надійшла 01.04.2004

Пригорницький Д.А. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЩЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ТРЬОХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ // В работе систематизирован подход к решению модельных задач на конформные отображения для трьохсвязных областей. Построен обций алгоритм их численного решения.

Prigornitsky D.O. NONLINEAR INVERSIONS OF MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON CONFORMAL MAPPINGS FOR THE TRIPLY-CONNECTED AREAS //

An approach to solving of model boundary value problems on conformal mappings for the triply-connected areas is systematized. Also the algorithm for finding of their solutions is built.