РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 2 (11)

Рівне-2004

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ.

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

Наші вітання СКОПЕЦЬКОМУ ВАСИЛЮ ВАСИЛЬОВИЧУ 5

Барановський С.В., Бомба А.Я., Скопецький В.В. *Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформацій русла на ділянках планового розширення та повороту русла* 7

Бомба А.Я., Каштан С.С. *Методи фіктивних ділянок та квазіконформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач в областях з вільними межами* 17

Вальковський В.О., Соловей І.А. *До проблеми оптимальної синхронної реалізації обчислень на клітинних автоматах* 29

Власюк А.П., Мартинюк П.М. *Фільтраційна консолідація неоднорідного масиву ґрунту в неізотермічних умовах з урахуванням впливу переносу солей* 39

Возняк О.Г. *Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь* 54

Гайвась Б.І. *Про вплив електроосмосу на двостороннє конвективне осушення пористого шару* 74

Дейнека О.Ю. *Періодичні розв'язки системи телеграфних рівнянь* 86

Ємець Є.М. *Про еквівалентність задач цілочислового програмування та задач оптимізації на полірозміщеннях* 91

Ємець О.О. *Розв'язок безумовної задачі евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією* 95

Ємець Ол-ра О. *Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин* 101

Ємець О.О., Черненко О.О. *Математичне моделювання деяких економічних проблем задачами оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною функцією цілі* 107

Зарівняк І.С. *Імовірність критичного стану клеєних швів шарової пластини з початковими неправильностями* 113

Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М. *Моделювання процесів конвективно-дифузійного переносу у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації* 121

Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. *Чисельно-аналітичний розв'язок просторових крайових задач з вільною межею для одного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних* 130

Мандзак Т.І., Савула Я.Г. *Пониження вимірності математичної* *моделі адвекції-дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій* 140

Мартинюк П.М. *Про зменшення затрат машинного часу при розв'язуванні нелінійних крайових задач методом скінченних елементів* 148

Міца О.В. *Моделювання та оптимізація розподілу показника заломлення неоднорідних плівок при розв'язанні задачі просвітлення* 161

Петрик М.Р., Ленюк М.П. *Математичне моделювання адсорбційного масопереносу з спектральним параметром для неоднорідних n-інтерфейсних обмежених нанопористих середовищ* 168

Поліщук О.Д. *Розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа в R^3 для розімкненої поверхні за допомогою потенціалу подвійного шару* 189

Пригорницький Д.О. *Нелінійні обернення модельних крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей* 196

Присяжнюк І.М. *Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії із запізнюючим аргументом* 212

Романова Н.Г. *Задача оптимізації дробово-лінійної цільової функції на поліпереставленнях: властивості її комбінаторного многогранника* 223

Савула Я.Г., Винницька Л.І. *Застосування генетичного алгоритму до оптимізації сіток в процесі числового розв'язування задачі адвекції-дифузії-реакції* 233

Скопецький В.В., Булавацький В.М. *Математичне моделювання фільтраційного ущільнення грунтових масивів за умов насичення сольовими розчинами та нерівноважності дифузійного процесу* 240

Сяський А.О., Бабич С.М. *Математична модель шліцьового з'єднання храпового типу для передачі обертального руху* 248

Чілікіна Т.В. *Розв'язування одного класу задач нелінійної комбінаторної оптимізації на переставленнях* 257

НАШІ ЗЕМЛЯКИ – МАТЕМАТИКИ-МЕХАНІКИ

Я.С. ПІДСТРИГАЧ – *видатний вчений, стратег і організатор науки* 263

УДК 518.61.001.573

Присяжнюк І.М.

ЧИСЕЛЬНО-АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ІЗ ЗАПІЗНЮЮЧИМ АРГУМЕНТОМ

Звівши розв'язування задачі із відхиленням аргументу до розв'язування задач без відхилення, побудовано алгоритм асимптотичного наближення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" із запізненням. Приводяться результати числових досліджень.

Вступ. Розробкою ефективних асимптотичних методів для розв'язування сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь типових крайових та мішаних задач у прямокутних областях з урахуванням різного рівня гладкості початкової та граничних умов, а також їх узгодженості у кутових (реброви) точках займалось багато відомих вітчизняних та зарубіжних математиків, основні результати досліджень яких в цьому напрямі викладено в працях [1 – 5]. В роботах [6 – 11], спираючись на результати публікації [1], модифіковано відповідні алгоритми стосовно розв'язання задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних криволінійних областях, обмежених двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями (одна із яких може бути вільною), у випадках переважання конвективних складових процесу над дифузійними, що приводить до появи у відповідному параболічному рівнянні малого параметра при старших похідних. Ці ж алгоритми успішно застосовано і до розв'язування таких задач в двозв'язних областях, обмежених двома еквіпотенціальними лініями (внутрішнім та зовнішнім гладкими замкненими контурами). У роботі [12] отримано асимптотичний розклад розв'язку сингулярно-збуреної задачі типу "конвекція-дифузія" у чотиризв'язній області. В основі методики розв'язання таких задач лежить ідея переходу від координат фізичної області фільтрації до відповідної області комплексного потенціалу – прямокутника чи смуги (при цьому вихідна задача в кільці переходить у відповідну періодичну задачу для прямокутника чи смуги).

Актуальною є проблема розв’язання сингулярно збурених нелінійних крайових задач конвективної дифузії. У цій роботі йдеться про асимптотичне розвинення розв’язків таких задач із запізнюючим аргументом (математичних моделей процесів екоенергосистем з урахуванням зворотного впливу).

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу конвективної дифузії із запізненням для області $G = G_z \times (0,\infty)$, де G_z=$ABCD$ – однозв’язна чотирикутна криволінійна область (пористий пласт), обмежена чотирма гладкими ортогональними між собою в точках перетину кривими AB=$\{z$=x+iy: $f_1(x,y)$=$0\}$, BC=$\{z$: $f_2(x,y)$=$0\}$, CD=$\{z$: $f_3(x,y)$=$0\}$, DA=$\{z$: $f_4(x,y)$=$0\}$:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(h(c(x,y,t-\tau))\right)\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(h(c(x,y,t-\tau))\right)\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)-v_x\frac{\partial c}{\partial x}-v_y\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t},\quad (1)$$

$$c\big|_{AB}=c_*\left(M,t\right),\ c\big|_{CD}=c^*\left(M,t\right),\ c\big|_{AD}=c_{**}\left(M,t\right),\ c\big|_{BC}=c^{**}\left(M,t\right),$$
$$c(M,\tilde{t})=c_0^0\left(M,\tilde{t}\right)\ (-\tau\le\tilde{t}\le 0),\quad (2)$$

$$(v_x,v_y)=grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi=0,\ \varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,$$
$$\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{BC}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{DA}=0,\ Q=\int\limits_{AB}-v_y dx+v_x dy,\quad (3)$$

де $c(x,y,t)$ – концентрація розчинної речовини в точці (x,y) в момент часу t, M, n – біжуча точка та нормаль до відповідної кривої, ε – малий параметр, $\tau>0$ – запізнення, φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z. $h(c(x,y,t)-\tau)$, $c_*\left(M,t\right)$, $c^*\left(M,t\right)$, $c_{**}\left(M,t\right)$, $c^{**}\left(M,t\right)$, $c_0^0\left(M,t\right)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах (зокрема в кутових точках) області G. Крім цього вважаємо, що функція $c_0^0(x,y,t)$ при $t=-\tau$ та $t=0$ задовольняє умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв’язку $c=c(x,y,t)$ при $t=\tau k\ (k=1,2,...)$ [13].

Припустимо, що задача (3), шляхом конформного відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$), де $G_w=\left\{w=\varphi+i\psi:\varphi_*<\varphi<\varphi^*,0<\psi<Q\right\}$ –

відповідна G_z область комплексного потенціалу, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$), є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей $\left(v_x(x, y), v_y(x, y)\right)$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (1) та умовах (2), приходимо до відповідної "дифузійної задачі" для області G_w:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\cdot\Big(h(c(\varphi,\psi,t-\tau))\cdot\big(c_{\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\big)+c_{\varphi}(\varphi,\psi,t)h_{\varphi}(\varphi,\psi,t-\tau)+$$
$$+c_{\psi}(\varphi,\psi,t)h_{\psi}(\varphi,\psi,t-\tau)\Big)-v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{\varphi}(\varphi,\psi,t)=c_t(\varphi,\psi,t),$$
$$c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\ c\left(\varphi^*,\psi,t\right)=c^*(\psi,t),\ c(\varphi,0,t)=c_{**}(\varphi,t),$$
$$c(\varphi,Q,t)=c^{**}(\varphi,t),\ c(\varphi,\psi,\tilde{t})=c_0^0(\varphi,\psi,\tilde{t}),\ -\tau\le\tilde{t}\le 0. \tag{4}$$

Асимптотика розв'язку. Розв'язок задачі із запізненням τ (4) шукаємо як об'єднання розв'язків задач без запізнення на кожному із часових проміжків $[(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\cdot\Big(h_{k\tau}(\varphi,\psi,t)\cdot\big(c^{[k]}{}_{\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+c^{[k]}{}_{\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\big)+\big(c^{[k]}{}_{\varphi}(\varphi,\psi,t)h_{k\tau\varphi}(\varphi,\psi,t)+$$
$$+c^{[k]}{}_{\psi}(\varphi,\psi,t)h_{k\tau\psi}(\varphi,\psi,t)\big)\Big)-v^2(\varphi,\psi)\cdot c^{[k]}{}_{\varphi}(\varphi,\psi,t)=c^{[k]}{}_{t}(\varphi,\psi,t),$$
$$c^{[k]}(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\ c^{[k]}\left(\varphi^*,\psi,t\right)=c^*(\psi,t),\ c^{[k]}(\varphi,Q_*,t)=c_{**}(\varphi,t),$$
$$c^{[k]}\left(\varphi,Q^*,t\right)=c^{**}(\varphi,t),\ c^{[k]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau)=\gamma_k(\varphi,\psi,(k-1)\tau), \tag{5}$$

де $h_{k\tau}(\varphi,\psi,t)=h\left(c^{[k]}(\varphi,\psi,t-\tau)\right)=h\left(\gamma_k(\varphi,\psi,t-\tau)\right)$,

$$\gamma_k(\varphi,\psi,t)=\left[\begin{array}{l} c^{[k-1]}(\varphi,\psi,t),\ k=2,3,\ldots,\\ c_0^0(\varphi,\psi,t),\ k=1.\end{array}\right.$$

Розв'язок кожної із задач (5) з точністю $O(\varepsilon^{N+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичного ряду:

$$c^{[k]}(\varphi,\psi,t)=\left(c_0^{[k]}(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)\right)+\sum_{i=0}^{N+1}\ddot{I}\,{}_i^{[k]}(\xi,\psi,t)\varepsilon^i+$$
$$+\sum_{i=0}^{N+1}P_{i/2}^{[k]}(\varphi,\eta,t)\varepsilon^{i/2}+\sum_{i=0}^{N+1}\overline{P}_{i/2}^{[k]}(\varphi,\mu,t)\varepsilon^{i/2}+R^{[k]}(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \tag{6}$$

де $c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{0,N}$) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема: $c_0^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{1,N}$) – поправки, які враховують "вплив" дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її пригpаничної ділянки); $\ddot{I}_i^{[k]}(\xi,\psi,t)$ – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході фільтраційного потоку), $P_{i/2}^{[k]}(\varphi,\eta,t)$, $\overline{P}_{i/2}^{[k]}(\varphi,\mu,t)$ – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi=Q_*$, $\psi=Q^*$ ($Q^*-Q_*=Q$), що враховують вплив "бічних джерел забруднень" (c^*, c_{**}, c^{**}), $\xi=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\eta=\dfrac{\psi-Q_*}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\mu=\dfrac{Q^*-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні регуляризуючі перетворення, $R^{[k]}(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ – залишковий член.

Підставивши (6) в (5) та застосувавши стандартну "процедуру прирівнювання", аналогічно до [6-9,12] для знаходження функцій $c_0^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ та $c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{1,N}$) приходимо до таких задач:

$$\left[\begin{array}{l} v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{0\ \varphi}^{[k]}(\varphi,\psi,t)+c_{0\ t}^{[k]}(\varphi,\psi,t)=0,\\ c_0^{[k]}(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\\ c_0^{[k]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau)=\overline{\gamma}^{[k]}(\varphi,\psi), \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{i\ \varphi}^{[k]}(\varphi,\psi,t)+c_{i\ t}^{[k]}(\varphi,\psi,t)=g_i^{[k]}(\varphi,\psi,t),\\ c_i^{[k]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau)=\overline{\overline{\gamma}}_i^{[k]}(\varphi,\psi),\\ c_i^{[k]}(\varphi_*,\psi,t)=0. \end{array}\right.$$

Тут

$$g_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)\Big(h_{k\tau}(\varphi,\psi,t)\cdot\Big(c_{i-1\varphi\varphi}^{[k]}(\varphi,\psi,t)+c_{i-1\psi\psi}^{[k]}(\varphi,\psi,t)\Big)+$$
$$+c_{i-1\varphi}^{[k]}(\varphi,\psi,t)h_{k\tau\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{i-1\psi}^{[k]}(\varphi,\psi,t)h_{k\tau\psi}(\varphi,\psi,t)\Big),$$

$$\overline{\gamma}^{[k]}(\varphi,\psi)=\left[\begin{array}{l} c_0^{[k-1]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau),\ k=2,3,\ldots,\\ c_0^0(\varphi,\psi,0),\ k=1, \end{array}\right.$$

$$\overline{\overline{\gamma}}_i^{[k]}(\varphi,\psi)=\left[\begin{array}{l} c_i^{[k-1]}(\varphi,\psi,(k-1)\tau),\ k=2,3,\ldots,\\ 0,\ k=1. \end{array}\right.$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0^{[k]}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} c_*\big(\psi,t-f(\varphi,\psi)\big), & t\ge f(\varphi,\psi),\\ \overline{\gamma}^{[k]}\Big(f^{-1}\big(f(\varphi,\psi)-t\big),\psi\Big), & t< f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$c_i^{[k]}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} \displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_i^{[k]}\big(s,\psi,t-f(\varphi,\psi)+f(s,\psi)\big)}{v^2(s,\psi)}ds, & t\ge f(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_{(k-1)\tau}^{t} g_i^{[k]}\big(f(\varphi,\psi)-t+\tilde{t},\psi,\tilde{t}\big)d\tilde{t}+\overline{\overline{\gamma}}_i^{[k]}(\varphi,\psi), & t< f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

де $f(\varphi,\tilde{\psi})=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\tilde{\psi})}$ – час проходження виділеної частинки вздовж відповідної лінії течії $\psi(x,y)=\tilde{\psi}$ від точки $(x(\varphi_*,\tilde{\psi}),y(\varphi_*,\tilde{\psi}))$ до точки $(x(\varphi,\tilde{\psi}),y(\varphi,\tilde{\psi}))$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція v^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Функція типу пограншару $\ddot{I}^{[k]}=\sum\limits_{i=0}^{N+1}\ddot{I}_i^{[k]}(\xi,\psi,t)\varepsilon^i$ призначена для усунення нев'язки, внесеної побудованою регулярною частиною $\overline{c}^{[k]}=\sum\limits_{i=0}^{N}c_i^{[k]}\varepsilon^i$ в околі границі виходу фільтраційного потоку $\varphi=\varphi^*$, а саме, повинна виконуватись умова $\overline{c}^{[k]}+\ddot{I}^{[k]}\Big|_{\varphi=\varphi^*}=c^*+O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$. Аналогічно до [6 – 9, 12] для знаходження функцій $\ddot{I}_i^{[k]}(\xi,\psi,t)$ $i=\overline{0,N+1}$ маємо задачі:

$$\begin{cases} h_{k\tau}\ddot{I}_{0\xi\xi}^{[k]}+\ddot{I}_{0\xi}^{[k]}=0,\\ \ddot{I}_0^{[k]}(0,\varphi,t)=\tilde{n}^*(\psi,t)-\tilde{n}_0^{[k]}(\varphi_*,\psi,t),\\ \ddot{I}_0^{[k]}\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\end{cases}\qquad(7)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\left(h_{k\tau}\ddot{I}_{1\xi\xi}^{[k]}+\ddot{I}_{1\xi}^{[k]}\right)=\ddot{I}_{0t}^{[k]}+v^2(\varphi^*,\psi)\cdot\xi\cdot h_{k\tau\xi}(\varphi^*,\psi,t)\cdot\ddot{I}_{0\xi\xi}^{[k]}+\\ +v^2(\varphi^*,\psi)\cdot h_{k\tau\varphi}(\varphi^*,\psi,t)\cdot\ddot{I}_{0\xi}^{[k]},\\ \ddot{I}_1^{[k]}(0,\varphi,t)=-\tilde{n}_1^{[k]}(\varphi_*,\psi,t),\\ \ddot{I}_1^{[k]}\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\end{cases}\qquad(8)$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\left(h_{k\tau}\ddot{I}_{i\xi\xi}^{[k]} + \ddot{I}_{i\xi}^{[k]}\right) = d_i^{[k]}, \\ \ddot{I}_i^{[k]}(0,\varphi,t) = \zeta_i^{[k]}, \\ \ddot{I}_i^{[k]} \underset{\xi\to\infty}{\to} 0, i = \overline{2, N+1}, \end{cases} \tag{9}$$

де

$$\zeta_i^{[k]} = \begin{bmatrix} -\tilde{n}_i^{[k]}(\varphi_*,\psi,t),\ i = \overline{2,N}\ , \\ 0,\ i = N+1, \end{bmatrix}$$

$$d_i^{[k]}(\xi,\psi,t) = \frac{\partial \ddot{I}_{i-1}^{[k]}}{\partial t} - \sum_{l+j=1}^{i}\left(V_l \cdot H_{k\tau j}\frac{\partial^2 \ddot{I}_{i-(j+l)}^{[k]}}{\partial \xi^2}\right) - \sum_{l+j=0}^{i-2}\left(V_l \cdot H_{k\tau j}\frac{\partial^2 \ddot{I}_{i-2-(j+l)}^{[k]}}{\partial \psi^2}\right) +$$

$$+\sum_{l+j=0}^{i-1}\left(V_l \cdot \left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial \varphi}\right)_j \frac{\partial \ddot{I}_{i-1-(j+l)}^{[k]}}{\partial \xi}\right) - \sum_{l+j=0}^{i-2}\left(V_l \cdot \left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial \psi}\right)_j \frac{\partial \ddot{I}_{i-2-(j+l)}^{[k]}}{\partial \psi}\right) - \sum_{l=1}^{i}\left(V_l \cdot \frac{\partial \ddot{I}_{i-l}^{[k]}}{\partial \xi}\right).$$

Тут $H_{k\tau j}$, $\left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial \varphi}\right)_j$, $\left(\frac{\partial H_{k\tau}}{\partial \psi}\right)_j$ – коефіцієнти при j-тих степенях ε в розкладі $h_{k\tau}(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi,t)$, $h_{k\tau\varphi}(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi,t)$, $h_{k\tau\psi}(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi,t)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, V_l – коефіцієнт при l-тому степені ε в розкладі $v^2(\varphi^* - \xi\varepsilon,\psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

Розв'язок задач (7) – (9) шукаємо аналогічно [6 – 12]. Зокрема:

$$\ddot{I}_0^{[k]}(\xi,\psi,t) = \left(c^*(\psi,t) - c_0^{[k]}\left(\varphi^*,\psi,t\right)\right)\cdot e^{-\xi h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*,\psi,t)},$$

$$\ddot{I}_1^{[k]}(\xi,\psi,t) = -\xi\cdot\left(K_1^{[k]}(\psi,t) + K_2^{[k]}(\psi,t)\cdot\left(h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*,\psi,t) + \xi/2\right)\right)\cdot e^{-\xi h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*,\psi,t)},$$

де

$$K_1^{[k]}(\psi,t) = v^{-2}(\varphi^*,\psi)\cdot\left(\frac{\partial c^*(\psi,t)}{\partial t} - \frac{\partial c_0(\varphi^*,\psi,t)}{\partial t} - \frac{\partial h_{k\tau}^{-1}(\varphi^*,\psi,t)}{\partial t}\times\right.$$

$$\left.\times\left(c^*(\psi,t) - c_0(\varphi^*,\psi,t)\right)\right) - \frac{h_{k\tau\varphi}(\varphi^*,\psi,t)}{h_{k\tau}(\varphi^*,\psi,t)}\left(c^*(\psi,t) - c_0(\varphi^*,\psi,t)\right),$$

$$K_2^{[k]}(\psi,t) = \xi\frac{\partial h_{k\tau}(\varphi^*,\psi,t)}{\partial \xi}\cdot h_{k\tau}^{-2}(\varphi^*,\psi,t)\cdot\left(c^*(\psi,t) - c_0(\varphi^*,\psi,t)\right).$$

Функції $P_i^{[k]}(\varphi,\eta,t) = \sum_{i=0}^{N+1} P_{i/2}^{[k]}\varepsilon^{i/2}$, $\overline{P}_i^{[k]}(\varphi,\mu,t) = \sum_{i=0}^{N+1}\overline{P}_{i/2}^{[k]}\varepsilon^{i/2}$ призначені для усунення неузгодженностей в околах граничних ліній течії $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$ відповідно. Крім цього, вони повинні бути функціями типу пограншару стосовно змінних η, μ: $P_i^{[k]} \xrightarrow[\eta\to\infty]{} 0$, $\bar{P}_i^{[k]} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0$, тобто повинні бути близькими до нуля поза деяким околом $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$ відповідно (щоб не “зіпсувати” вже побудоване наближення розв’язку). Наприклад, для знаходження $P_0^{[k]}$, $P_{1/2}^{[k]}$, $P_{i/2}^{[k]}$ $i = \overline{2, N+1}$ маємо задачі:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*)\left(h_{k\tau}(\varphi, Q_*, t)P_{0\eta\eta}^{[k]} + P_{0\varphi}^{[k]}\right) = P_{0t}^{[k]},\ P_0^{[k]} \underset{\eta\to\infty}{\to} 0, \\ P_0^{[k]}\left(\varphi, Q_*, t\right) = c_{**}\left(\varphi, t\right) - \sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i c_i^{[k]}\left(\varphi, Q_*, t\right) - \sum\limits_{i=0}^{N+1} \ddot{I}\,{}_i^{[k]}\left(\xi, Q_*, t\right)\varepsilon^i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*)\left(h_{k\tau}(\varphi, Q_*, t)P_{1/2\eta\eta}^{[k]} + P_{1/2\varphi}^{[k]}\right) = P_{1/2t}^{[k]} - \eta\dfrac{2v'(\varphi, Q_*)}{v(\varphi, Q_*)}P_{0t}^{[k]} - \\ -\eta \cdot v^2(\varphi, Q_*) \cdot h_{k\tau\eta}(\varphi, Q_*, t) \cdot P_{0\eta\eta}^{[k]} - v^2(\varphi, Q_*) \cdot h_{k\tau\psi}(\varphi, Q_*, t) \cdot P_{0\eta}^{[k]}, \\ P_{1/2}^{[k]} \underset{\eta\to\infty}{\to} 0,\ P_{1/2}^{[k]}\left(\varphi, Q_*, t\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi, Q_*)\left(h_{k\tau}(\varphi, Q_*, t)P_{i/2\eta\eta}^{[k]} + P_{i/2\varphi}^{[k]}\right) = P_{i/2t}^{[k]} - U_{i/2}^{[k]}(\varphi, \eta, t), \\ P_{i/2}^{[k]} \underset{\eta\to\infty}{\to} 0,\ P_{i/2}^{[k]}\left(\varphi, Q_*, t\right) = 0,\ i = \overline{2, N+1}, \end{cases}$$

де

$$U_{i/2}^{[k]}(\varphi, \eta, t) = \sum_{l+j=0}^{i-2}\left(V_{*l/2} \cdot H_{k\tau j/2}^{*}\frac{\partial^2 P_{(i-2-(j+l))/2}^{[k]}}{\partial\varphi^2}\right) +$$

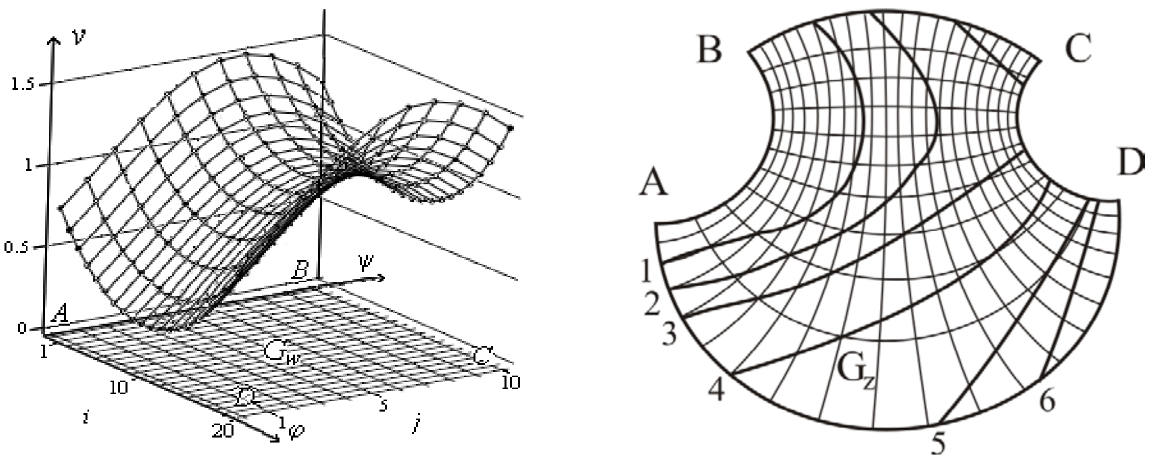
$$+\sum_{l+j=1}^{i}\left(V_{*l/2} \cdot H_{k\tau j/2}^{*}\frac{\partial^2 P_{(i-(j+l))/2}^{[k]}}{\partial\eta^2}\right) - \sum_{l+j=0}^{i-2}\left(V_{*l/2} \cdot \frac{\partial H_{k\tau j/2}^{*}}{\partial\varphi}\frac{\partial P_{(i-2-(j+l))/2}^{[k]}}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+\sum_{l+j=0}^{i-1}\left(V_{*l/2} \cdot \frac{\partial H_{k\tau j/2}^{*}}{\partial\psi}\frac{\partial P_{(i-1-(j+l))/2}^{[k]}}{\partial\eta}\right) + \sum_{l=1}^{i}\left(V_{*l/2} \cdot \frac{\partial P_{(i-l)/2}^{[k]}}{\partial\varphi}\right).$$

Тут $H_{k\tau j/2}^{*}$, $\left(\dfrac{\partial H_{k\tau}^{*}}{\partial\varphi}\right)_{j/2}$, $\left(\dfrac{\partial H_{k\tau}^{*}}{\partial\psi}\right)_{j/2}$ – коефіцієнти при $j/2$ степенях ε в розкладі $h_{k\tau}(\varphi, Q^* + \eta\sqrt{\varepsilon}, t)$, $h_{k\tau\varphi}(\varphi, Q^* + \eta\sqrt{\varepsilon}, t)$, $h_{k\tau\psi}(\varphi, Q^* + \eta\sqrt{\varepsilon}, t)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\psi = Q^*$, $V_{*l/2}$ – коефіцієнти при $l/2$

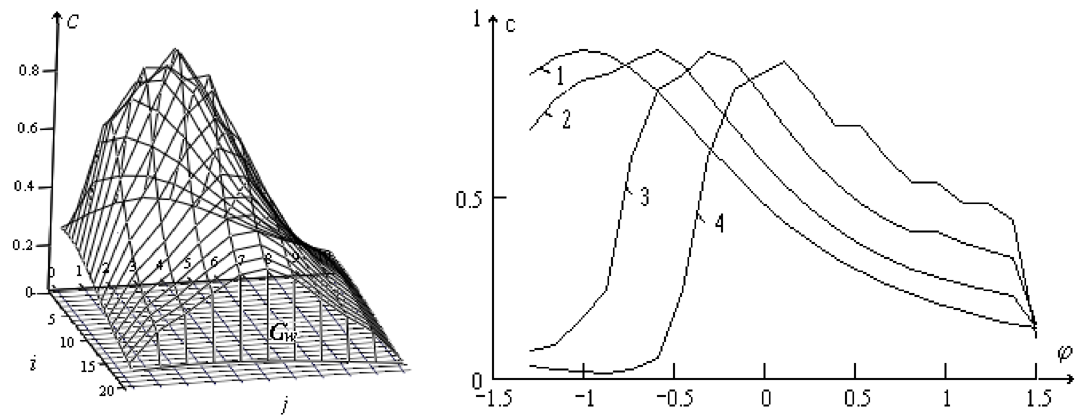
степенях ε в розкладі $v^2(\varphi, Q^* + \eta\sqrt{\varepsilon}, t)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = Q^*$. Задачі для погранфункцій $\overline{P}^{[k]}(\varphi, \mu, t) = \sum_{i=0}^{N+1} \overline{P}_{i/2}^{[k]} \varepsilon^{i/2}$ знаходяться аналогічно. Розв'язки записаних вище задач отримуються шляхом зведення рівнянь вигляду $\alpha(\varphi)\dfrac{\partial^2 \ddot{I}}{\partial \eta^2} - \delta(\varphi)\dfrac{\partial \ddot{I}}{\partial \varphi} = \sigma(t)\dfrac{\partial \ddot{I}}{\partial t} + q(\varphi, \eta, t)$ з допомогою заміни $f(s, \psi) = f(\varphi, \psi) - t$ до рівнянь із сталими коефіцієнтами $a(s)\dfrac{\partial^2 \ddot{I}}{\partial \eta^2} = \dfrac{\partial \ddot{I}}{\partial t} + q_0(s, \eta, t)$ (де s – параметр).

Числові розрахунки. Наведемо результати розрахунку процесу "конвекція-дифузія" на ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого – $w = (Q_0 / 2\pi) \cdot \ln((z - z_1)/(z - z_2))$, при $\varphi_* = -1.3$, $\varphi^* = 1.5$, $AD = \{z : \psi(x, y) = =1.047\}$, $BC = \{z : \psi(x, y) = 4.189\}$. На рис.1 а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z: $\varphi(x, y) = \overline{\varphi}_i \overset{df}{=} \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i)/10$, $\psi(x, y) = \overline{\psi}_j \overset{df}{=} (Q_* \cdot j)/20$, $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,20}$, величину швидкості фільтрації $v = \left((dz/dw)\overline{(dz/dw)}\right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j), та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi) = t_k, k = \overline{1,6}$, при $t_1 = 0.849$, $t_2 = 1.521$, $t_3 = 2.427$, $t_4 = 5.135$, $t_5 = 13.505$, $t_6 = 17.212$ (криві 1 – 6 відповідно).



а) *б)*

Рис. 1. Величина швидкостей над полем комплексного потенціалу G_w (а) та відповідна динамічна сітка G_z із лініями фронту конвективного переносу (б)



а) *б)*

Рис.2. Розподіл концентрації забруднюючої речовини

Розподіл концентрації $c(\varphi,\psi,t)$ розчинної речовини при $t=1.146$, $\tau=1.632$, $h(c(\varphi,\psi,t))=2\cdot c(\varphi,\psi,t)$, $c_0^0(\varphi,\psi)=(1+(\varphi+1)^2+(\psi-2)^2)^{-1}$, $c_*(\psi,t)=(1.09+t^4+(\psi-2)^2)^{-1}$, $c^*(\psi,t)=(7.25+(\psi-2)^2+t^4)^{-1}$, $c_{**}(\varphi,t)=$
$=\left(1+(\varphi+1)^2+t^4+(\psi_0-2)^2\right)^{-1}$, $c^{**}(\varphi,t)=\left(1+(\varphi+1)^2+t^4+(\psi_{10}-2)^2\right)^{-1}$ зображено на рис. 2, а. А на рис. 2, б зображено розподіл концентрації речовини вздовж лінії течії $\psi=\psi_2$ в моменти часу $t_1=0$, $t_2=0.7145$, $t_3=1.8804$, $t_4=2.9508$ (криві 1-4 відповідно).

Висновки та зауваження. Розроблений вище підхід можна використати при розв'язанні відповідних задач у випадках більш складної структури коефіцієнта дифузії (наприклад, $D=\varepsilon\left(1+\mu\cdot h(c(x,y,t))\right)$, $\varepsilon\cdot(1+$ $+\mu\int\limits_0^t c(x,y,\tau)d\tau)$, $\varepsilon\cdot(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon^i a_i c^i)$ де μ, a_i – довільні дійсні числа), а також за умови $\tau=0$ (підсилення нелінійності). В перспективі також його застосування до розв'язання задач гетеродифузного масопереносу [14 – 15].

У випадку не достатньої узгодженості [6 – 7] функцій $c_*\left(M,t\right)$, $c^*\left(M,t\right)$, $c_{**}\left(M,t\right)$, $c^{**}\left(M,t\right)$, $c_0^0\left(M,t\right)$ між собою на ребрах (зокрема в кутових точках) області G допустимою є процедура побудови кутових погранфункцій [11].

1. *Вишик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.- Успехи математических наук.- 1957.- 12, вып. 5.- С. 3-122.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.- М.: Наука, 1973.- 273 с.
3. *Aronson D.G.* Linear parabolic equations containing a small parameter // J.Rational Mech. Anal.- 1956.- №5.- P. 1003-1014.
4. *Bobisud L.E.* Parabolic Equations wits a Small Paramer and discontinuons Data. // Jornal of mathematical analysis and opplications.- 1969.-Vol. 26, №1.-P. 208-220.
5. *Eckhaus W., Dejager E.M.* Asumptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic tupe // Arch. Rat. Mech. Anal.- 1966.- №23.- P. 26-86.
6. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
7. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса. - В кн.: Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения. М.: Наука, 1988.- С. 115-120.
8. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса. К.: Киевский ун-т, 1986.- Деп. в УкрНИИНТИ, № 286-Ук86.
9. *Бомба А.Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу "фільтрація-дифузія" за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.12-21.
10. *Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде.- К.: 1985.- 17 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.72).
11. *Власюк А.П.* Некоторые задачи фильтрации и массопереноса растворимых веществ в неоднородных анизотропных пористых средах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05.- К., 1986.- 166 с.
12. *Присяжнюк. І.М.* Асимптотичний метод розвязування сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" у многозвязних областях // Волинський

математичний вісник. - 2003. - Вип. 10. - С. 25-36.
13. *Єльсгольц Л.Є., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.- М: Наука, 1971.- 296 с.
14. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
15. *Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O.* Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in manyphases continuum systems / In mat.: II Szkola Geomechaniki (miedz. konf.).-Gliwice: Polit. Slaska, 1995.-P. 343-351.

Рівненський державний гуманітарний університет
E-mail: Igorrec@ua.fm

Надійшла 25.08.2004

Присяжнюк И.М. ЧИСЕЛЬНО АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ИЗ ЗАПАЗДУЮЩИМ АРГУМЕНТОМ // *Применив подход сведения решения задачи с отклонением аргумента к решению задач без отклонения, построен алгоритм асимптотического приближения решений сингулярно возмущённых нелинейных краевых задач типа "конвекция-диффузия" с запаздыванием. Наведены результаты числовых расчётов.*

Prysjazhnjuk I.M. NUMERICAL ASYMPTOTIC EXPANSION FOR RESOLVING NONLINEAR SINGULAR PERTURBED BOUNDARY-VALUE "CONVECTION-DIFFUSION" PROBLEMS WITH DELAY // *The approach of the reduction of the decision of a task with a deviation of argument to the decision of tasks without a deviation is applied. The algorithm on asymptotic expansion for resolving nonlinear singular perturbed boundary-value "convection-diffusion" problems with delay is constructed. Numerical results are presented.*