

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК  
СЕРІЯ  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 3 (12)**

Рівне-2005

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика"**.  
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. ( <i>відповідальний редактор</i> )	Недашківській М.О.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пономаренко Л.А.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О.
Гарашенко Ф.Г.	Присяжнюк І.М.
Гарбарчук В.І.	Савула Я.Г.
Дейнека В.С.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопечкий В.В. ( <i>головний редактор</i> )
Каштан С.С. ( <i>секретар</i> )	Сяський А.О.
Климяк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол №10 від 28.05.2005 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

### Зміст

<i>Барановський С.В., Бринда І.В. Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформації поверхні дна криволінійного каналу.....</i>	5
<i>Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. Моделювання багатосекторної економічної динаміки зростання з лагами .....</i>	16
<i>Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Каітан С.С. Застосування методу “фіктивних областей” та методології квазіконформних відображень при моделюванні нелінійно-суфозійних процесів в середовищах з вільними межами .....</i>	28
<i>Бомба А.Я., Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М. Розв'язування задач типу “конвекція-масообмін” з урахуванням зворотного впливу .....</i>	38
<i>Булавацький В.М. Спроцена математична модель для опису процесу фільтраційної консолідації ґрунтових масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації .....</i>	45
<i>Глинська М.Л. Математичне моделювання неізотермічного адсорбційного масопереносу для обмежених нанопористих середовищ .....</i>	53
<i>Головач Ю.Ю. Розширення функціональності динамічного детектора помилки переповнення буферу .....</i>	63
<i>Ємець О.О., Черненко О.О. Моделі задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях .....</i>	71
<i>Климюк Ю.Є. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу модельних просторових нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія-масообмін” .....</i>	80
<i>Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. Розрахунок фільтрації під гідротехнічними спорудами у випадку багатоступеневого перепаду методом декомпозиції області .....</i>	94

<b>Литвин О.М., Нечуйвітер О.П.</b> Застосування сплайн-інтерлінації функцій до загального методу побудови оптимальних за порядком точності кубатурних формул обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій .....	101
<b>Міца О.В., Матяшовська Б.О., Шумило Н.Я.</b> Дослідження впливу похибок параметрів шарів вузькосмугових та широко-смугових фільтрів на стійкість спектральних характеристик ...	113
<b>Мороз І.П.</b> Математичне моделювання процесу проходження електромагнітних хвиль через діелектричну хвилеводну систему з керуючим елементом на $p$ - $i$ - $n$ -структурі .....	124
<b>Поліщук О.Д.</b> Розв'язання задач з похилою похідною для рівняння Лапласа в $R^3$ за допомогою потенціалу простого шару .....	134
<b>Присяжнюк І.М.</b> Асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії за умов малого масообміну .....	146
<b>Сяський В.А.</b> Односторонній контакт двозв'язного штамп з кутовими точками і криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці .....	161
<b>Турбал Ю.В.</b> Деякі властивості позитивних напівтраєкторій Жюліа .....	175
<b>Фундак Л.І., Цегелик Г.Г.</b> Новий підхід до побудови апарату не-класичних мажорант і діаграм Ньютонa функцій та його застосування .....	186
 <b>З історії математики, механіки, інформатики</b>	
<i>Академік Микола Боголюбов (до 95-річчя від дня народження) .....</i>	201
<i>Ігор Володимирович Скрипник .....</i>	208
<i>Олег Миколайович Романів .....</i>	210

УДК 518.001.57

**Барановський С.В., Бринда І.В.**

**ПРО АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО  
КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ТА  
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМАЦІЙ ПОВЕРХНІ ДНА  
КРИВОЛІНІЙНОГО КАНАЛУ**

*На основі розробленого методу асимптотичного наближення розв'язку одного класу нелінійних сингулярно збурених задач для рівнянь конвективної дифузії в областях із вільними межами, пропонується підхід до моделювання і дослідження процесів деформації незв'язного піщаного дна русла криволінійного каналу прямокутного поперечного перерізу водною течією.*

**Вступ.** У роботах [1-4] на основі відомої дифузійної теорії перенесення наносів запропоновано підхід до моделювання та дослідження процесів деформації незв'язного однорідного піщаного дна для окремих випадків планової конфігурації русла при її взаємодії з водною течією, а також методику розв'язання відповідних сингулярно збурених задач для параболічних рівнянь в областях з вільними межами. Перевагою такого підходу є можливість ефективного прогнозування не тільки максимальної глибини вирви розмиву, але і її форми та зони відкладення частинок з урахуванням транспортування наносів. У пропонованій роботі така методика математичного моделювання процесу деформації русла при взаємодії з водною течією розвинена на випадки криволінійних каналів прямокутних поперечних перерізів.

**Постановка задачі.** При побудові математичної моделі процесу деформації русла відповідно до відомої дифузійної теорії перенесення наносів [5-7] приймалось припущення, що відрив, вертикальний підйом, перенесення та осідання частинок ґрунту під впливом водної течії можна розглядати як їх дифузію у рідину з деяким “фіктивним” коефіцієнтом в області із змінною в часі ділянкою границі (поверхнею дна  $\Gamma_3 = \{(x, y, z, t) : z = l(x, y, t), t \geq 0\}$ ). Вважаючи також, що перенесення

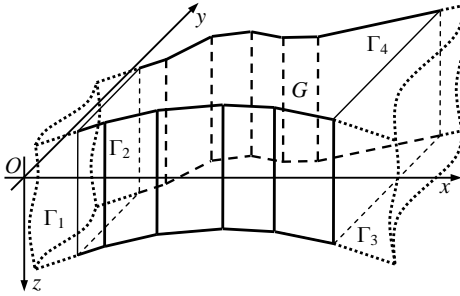


Рис. 1. Область  $G$  – криволінійний канал прямокутного поперечного перерізу

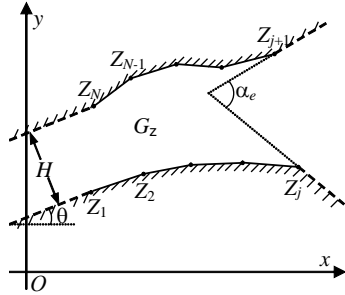


Рис. 2. Область  $G_z$  – планова конфігурація русла

частинок у рідині здійснюється переважно за рахунок конвекції, аналогічно до [1-3], приходимо в області  $G$  (див. рис. 1) до такої модельної задачі:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( D(x, y, z, V) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - u(x, y, z, l) \frac{\partial c}{\partial x} - v(x, y, z, l) \frac{\partial c}{\partial y} - \\ - (w(x, y, z, l) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$c(x, y, z, 0) = \bar{c}(x, y, z); \quad \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{\Gamma_4} = 0, \quad c|_{\Gamma_3} = c_*; \quad (2)$$

$$\left( \varepsilon D(x, y, z, V) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(x, y, z, l) + w_{0n})c \right) \Big|_{\Gamma_3} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad l(x, y, 0) = l_0, \quad (3)$$

де  $c(x, y, z, t)$  – концентрація частинок ґрунту в точці  $(x, y, z)$  у момент часу  $t$ ,  $w_0$  – швидкість осідання частинок в стоячій воді,  $c_*$  – концентрація частинок ґрунту на поверхні дна,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – бічні поверхні каналу (береги русла);  $\Gamma_3, \Gamma_4$  – нижня та верхня поверхні каналу (відповідно дно русла та поверхня рідини);  $\bar{n}$  – вектор нормалі до границі області, орієнтований в її середину,  $\varepsilon$  – малий параметр. Тут  $\varepsilon D$  – “фіктивний” коефіцієнт дифузії, що пов’язаний з інтенсивністю проникнення частинок ґрунту в рідину і який приймався, згідно з гіпотезою про коефіцієнт турбулентного обміну [5, 7], пропорційним

осередненій швидкості течії:  $\varepsilon D = \lambda V^\beta$ . Рівняння (3) описує умову балансу маси наносів на вільній ділянці границі області (поверхні дна),  $l_0(x, y)$  – початкове положення поверхні дна. Концентрацію частинок у початковий момент часу, відповідно до дифузійної теорії [5,7] змулення дрібних наносів, задавався у вигляді

$$\bar{c}(x, y, z) = c_* e^{-\frac{\gamma(l_0 - z)}{\varepsilon D}}.$$

При визначенні осередненої швидкості течії  $V(u, v, w)$  використовувались побудовані на основі залежності показникового вигляду для вертикального розподілу компонент  $u, v, w$  з урахуванням впливу зміни положення поверхні дна модельні співвідношення, які мають вигляд [1-4]:

$$u(x, y, z, t) = \frac{u_0(x, y)l_0}{(1 + \alpha)^m l(x, y, t)} \left( \frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m; \quad (4)$$

$$v(x, y, z, t) = \frac{v_0(x, y)l_0}{(1 + \alpha)^m l(x, y, t)} \left( \frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m; \quad (5)$$

$$w(x, y, z, t) = \frac{l_0(l'_x(x, y, t)u_0(x, y) + l'_y(x, y, t)v_0(x, y))}{(1 + \alpha)^m l^2(x, y, t)} \left( \frac{l(x, y, t) - z}{l(x, y, t)} + \alpha \right)^m, \quad (6)$$

де  $\alpha$  – мале число,  $u_0, v_0$  – компоненти вектора швидкості рідини на її поверхні. Приймалось також припущення, що русло складається з настільки дрібних частинок, що впливом на кінематичні та турбулентні характеристики течії при їх змуленні можна знехтувати.

Вважаючи, що розподіл компонент швидкості  $u_0, v_0$  водної течії на поверхні рідини близький до відповідного випадку потенціального руху, співвідношення для цих компонент визначаються на основі послідовності конформних відображень: області  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : 0 \leq \text{Im } \omega \leq 1\}$  на півплощину  $G_\zeta = \{\zeta = \xi + i\eta : \text{Im } \omega \geq 0\}$  та  $G_\zeta$  на область  $G_z$  ( $z = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ ) (рис. 2), які реалізуються співвідношеннями [8, 9, 10]

$$\zeta = \exp[\pi(i - \omega)], \quad \frac{dZ}{d\zeta} = \frac{M}{\zeta} \left( \prod_{j=1}^N (\zeta - b_j)^{-\alpha_j/\pi} \right) \zeta^{-\alpha_e/\pi},$$

де  $M = -(1/\pi)He^{i\theta}$  – комплексна константа, яка пов’язана з шириною каналу та його орієнтацією відносно осі  $Ox$  (див. рис. 2),  $\alpha_j$  – кути повороту при переході кожної кутової точки,  $b_j$  – полюси у  $G_\zeta$ , що відповідають кутовим точкам у  $G_z$ .

При числовій реалізації цього відображення використовувалась змішана маршева схема другого порядку, в якій використовується аналітичне інтегрування у кожному полюсі. Ця схема може бути подана у вигляді [8]:

$$\frac{Z_{k+1} - Z_k}{\omega_{k+1} - \omega_k} = \frac{-\pi M}{\zeta_{k+\frac{1}{2}}^{\alpha_e/\pi}} \prod_{j=1}^N \frac{(\zeta_{k+1} - b_j)^{1-\alpha_j/\pi} - (\zeta_k - b_j)^{1-\alpha_j/\pi}}{(1-\alpha_j/\pi)(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}, \quad (7)$$

$$\zeta_{k+1} - \zeta_k = -\pi \zeta_{k+\frac{1}{2}} (\omega_{k+1} - \omega_k).$$

Для відшукування невідомих положень полюсів  $b_j$  використовувалась ітераційна процедура згідно співвідношень

$$\omega_j^{v+1} = \omega_{j-1}^{v+1} + \frac{|Z_j^c - Z_{j-1}^c|}{|Z_j^v - Z_{j-1}^v|} (\omega_j^v - \omega_{j-1}^v), \quad b_j^{v+1} = \exp[\pi(i - \omega_j^{v+1})], \quad (8)$$

де  $v$  – номер ітерації,  $Z_j^c$  – відомі кутові точки у фізичній площині.

Переходячи від області  $G$  до відповідної області  $G_* = \{(\varphi, \psi, z, t) : -\infty < \varphi < +\infty, 0 \leq \psi \leq 1, 0 \leq z \leq l(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t), t > 0\}$ , перепишемо задачу (1)-(3) у вигляді:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( D(V(\varphi, \psi, z, l)) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{(u_0^2(\varphi, \psi) + v_0^2(\varphi, \psi)) l_0}{(1 + \alpha)^m l(\varphi, \psi, t)} \times \quad (9)$$

$$\times \left( \frac{l(\varphi, \psi, t) - z}{l(\varphi, \psi, t)} + \alpha \right)^m \frac{\partial c}{\partial \varphi} - (w(\varphi, \psi, z, l) + w_0) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t};$$

$$c(\varphi, \psi, z, 0) = \bar{c}(\varphi, \psi, z); \quad c(\varphi, \psi, z, t) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_*, \quad (10)$$



$$\left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c(\varphi, \psi, z, t)}{\partial \psi} \right|_{\psi=l} = 0; \quad (11)$$

$$\left( \varepsilon D(V(\varphi, \psi, z, l)) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(\varphi, \psi, z, l) + w_{0n})c \right) \Big|_{z=l(\varphi, \psi, t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad l(\varphi, \psi, 0) = l_0. \quad (12)$$

Ввівши нові змінні  $s, h, r$ , які пов'язанні із  $\varphi, \psi, z$  співвідношеннями:  $s = \varphi, h = \psi, r = l_0 z / l(\varphi, \psi, t)$ , перепишемо рівняння (9)-(11) та рівності (4)-(6) відповідно у вигляді:

$$\varepsilon \frac{l_0^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( D \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{(u_0^2 + v_0^2) l_0}{(1 + \alpha)^m l} \left( \frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0 w_0}{l} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (13)$$

$$c(s, h, r, 0) = \bar{c}(s, h, r); \quad c(s, h, r, t) \Big|_{r=l_0} = c_*, \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial h} \right|_{h=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c(s, h, r, t)}{\partial h} \right|_{h=l} = 0, \quad (15)$$

$$u(s, h, r, t) = \frac{u_0}{(1 + \alpha)^m} \left( \frac{l_0 - z}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l}; \quad (16)$$

$$v(s, h, r, t) = \frac{v_0}{(1 + \alpha)^m} \left( \frac{l_0 - z}{l_0} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l};$$

$$w(s, h, r, t) = \frac{l_0 (u_0^2 + v_0^2) l_s^l}{(1 + \alpha)^m l^2} \left( \frac{l_0 - r}{l_0} + \alpha \right)^m. \quad (17)$$

**Асимптотичне наближення розв'язку.** Провівши дискретизацію часу  $t$  з настільки малим кроком  $\Delta t$ , щоб на кожному із проміжків  $[t_k, t_{k+1}]$  можна було б знехтувати зміною вільної ділянки границі, у випадку сильної узгодженості початкової та граничних умов [11-13], покроково в областях  $G_{*k} = \{(s, h, r, t): -\infty < s < +\infty, -\infty < h < +\infty, 0 < r < l_0, t_k < t < t_{k+1}\}$ , розв'язок задачі (10)-(11) шукався наближено у вигляді асимптотичного ряду:

$$c_{k+1} = c_{0,k+1} + \varepsilon c_{1,k+1} + P_{0,k+1} + \varepsilon P_{1,k+1} + \dot{I}_{k+1} + R, \quad (18)$$

де  $c_{k+1} = c(s, h, r, t)$  для  $t_k < t < t_{k+1}$ ,  $R = O(\varepsilon^2)$  – залишковий член,  $P_{i,k+1}(s, h, \eta, t)$  – примежові функції в околі  $r = l_0$  ( $z = l(x, y, t_k)$ ),  $\eta$  – розтягнута змінна ( $i=0,1$ ),  $\tilde{I}_{k+1}$  – примежові функції в околі  $r = 0$ ,  $c_{i,k+1}(s, h, r, t)$  – члени регулярної частини асимптотики (тут взято тільки нульовий та перший члени асимптотики лише з метою зменшення об'єму викладок, інші ж члени, при додаткових вимогах узгодженості початкової та граничних умов, знаходяться аналогічно) [11-13]. При цьому члени регулярної частини асимптотики (18) для кожного часового етапу запишуться у вигляді [11-13]:

$$c_{0,k+1} = \begin{cases} c_k(f_{-1}(f, g_k - t - t_k), g_{-1,k}(f, g_k - t - t_k)) & \text{ї дїє } t < t_k + g_k, \\ 0 & \text{ї дїє } t > t_k + g_k, \end{cases}$$

$$f(s, h, r) = \frac{l_0((l_0 - r)/l_0 + \alpha)^{m+1}}{(m+1)w_0(1+\alpha)^m} + \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{u_0^2(\tilde{s}, h) + v_0^2(\tilde{s}, h)},$$

$$g_k(s, h, r) = \frac{l(s, h, t_k)r}{l_0 w_0};$$

$$c_{1,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(f_{-1}(f, g_k - t - t_k + \tilde{t}), g_{-1,k}(f, g_k - t - t_k + \tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t},$$

$$F(s, h, r, t) = -\frac{l_0^2}{l^2(s, h, t_k)} \frac{\partial}{\partial r} \left( D_k \frac{\partial c_{0,k+1}}{\partial r} \right); D_k = D(V(s, h, r, l(s, h, t_k))).$$

Тут  $f_{-1}, g_{-1,k}$  – функції, які отримуються в результаті розв'язання

$$\text{відносно змінних } s, r \text{ системи нелінійних рівнянь } \begin{cases} \Theta_1 = f(s, h, r), \\ \Theta_2 = g(s, h, r). \end{cases}$$

Розкладаючи в околі  $r = l_0$  коефіцієнти біля похідних у рівнянні

$$(13) \text{ в скінченні ряди Тейлора та вводячи змінну } \eta \left( \eta = \frac{l_0 - r}{\varepsilon} \right),$$

аналогічно до [1-4, 11, 12], знаходимо вирази для примежових функцій  $P_{i,k}(s, h, \eta, t)$  ( $i = 0, 1$ ) на кожному часовому етапі:

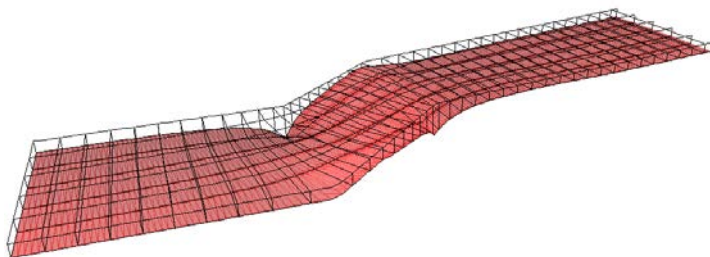
$$\begin{aligned}
 P_{0,k+1}(s, h, \eta, t) &= (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) \cdot e^{-\frac{w_0}{D_k(s, h, l_0)} \frac{l(s, h, t_k)}{l_0} \eta}, \\
 P_{1,k+1}(s, h, \eta, t) &= \left[ \frac{(c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) l(s, h, t_k)}{2l_0^2 D_k^2(s, h, l_0)} \left( \frac{l'_s(s, h, t_k) (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h))}{(1 + \alpha)^m l(s, h, t_k)} \times \right. \right. \\
 &\times l_0 \alpha^m D_k(s, h, l_0) - \frac{l_0 D'_{k_s}(s, h, l_0) (u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} - w_0 l_0 D'_{k_s}(s, h, l_0) \left. \right) \eta^2 + \\
 &+ \frac{1}{l_0 w_0} \left( \frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m l(s, h, t_k)} \frac{(l'_s(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k) D'_{k_s}(s, h, l_0))}{D_k(s, h, l_0)} \times \right. \\
 &\times (c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)) + \left. \left( \frac{(u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)) l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial s} + l(s, h, t_k) \times \right. \right. \\
 &\left. \left. \times \frac{\partial c_{0,k+1}(s, h, l_0, t)}{\partial t} \right) \right) \eta - c_{1,k+1}(s, h, l_0, t) \left. \right] \cdot e^{-\frac{w_0}{D_k(s, h, l_0)} \frac{l(s, h, t_k)}{l_0} \eta}.
 \end{aligned}$$

Функції  $P_{k+1}$  у даному випадку близькі до нуля, а тому віднесемо їх до залишкового члену  $R$ . У загальному ж випадку вони знаходяться аналогічно до того, як це зроблено, наприклад, у роботі [12].

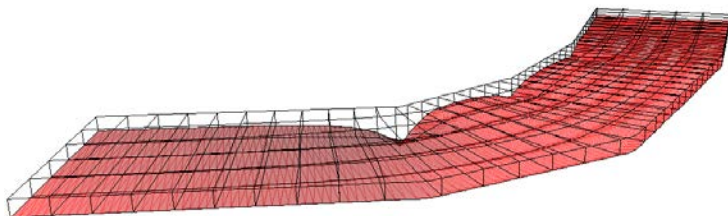
Використовуючи отриманий розв'язок  $c_{k+1}(s, h, r, t)$  та рівняння (12), положення границі  $l(s, h, t_k)$  визначимо за формулою:

$$\begin{aligned}
 l(s, h, t_{k+1}) &= l(s, h, t_k) + \frac{\Delta t}{c_* \sqrt{1 + [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] [l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)]}} \times \\
 &\times \left\{ -\frac{\varepsilon D_k(s, h, l_0) l_0}{l(s, h, t_k)} \{ [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] [l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)] + 1 \} \times \right. \\
 &\times \frac{\partial}{\partial r} [c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1}) + \varepsilon c_{1,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})] - w_0 \{ [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] \times \\
 &\times [l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)] + 1 \} [c_* - c_{0,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1}) - \varepsilon c_{1,k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})] - \\
 &\left. - w_0 c_* + \frac{\varepsilon D_k(s, h, l_0) [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)]}{l(s, h, t_k) w_0} [l_s'^2(s, h, t_k) + l_h'^2(s, h, t_k)] \times \right.
 \end{aligned}$$

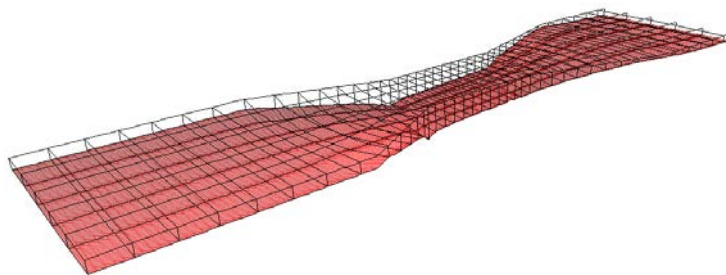
$$\times \left( \frac{[u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} [c_* - c_{0, k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})] \times \right. \\ \times \frac{l'_s(s, h, t_k) D_k(s, h, l_0) - l(s, h, t_k) D'_{ks}(s, h, l_0)}{D_k(s, h, l_0)} + [u_0^2(s, h) + v_0^2(s, h)] \times \\ \left. \times \frac{l_0 \alpha^m}{(1 + \alpha)^m} \cdot \frac{\partial c_{0, k+1}(s, h, l_0, t_{k+1})}{\partial s} + l(s, h, t_k) \frac{\partial c_{0, k+1}(s, l_0, t_{k+1})}{\partial t} \right) \Bigg\} .$$



a)



б)



в)

Рис. 3. Розрахункові поверхні дна для різних випадків планової конфігурації русла

**Результати числового експерименту.** На рис. 3 подані розрахункові поверхні дна для різних випадків планових конфігурацій русла при швидкості набігаючого потоку –  $u_{\infty} = 0.8$  м/с, глибині –  $l_0 = 1$  м та діаметрі частинок однорідного ґрунту –  $d = 0.5$  мм. На рисунках видно формування вирви розмиву в областях підвищення швидкості та зон відкладення наносів. Зокрема, на рис. 3 в) видно пониження розрахункової поверхні дна русла в області його звуження.

Значимо, що порівняльний аналіз отриманих в результаті числового експерименту розрахункових поверхонь дна для різних випадків планових конфігурацій русла з відомими даними натурних та експериментальних спостережень підтверджує адекватність пропонованої методики математичного моделювання. Потрібно також зауважити, що така методика є найбільш прийнятною у випадках, коли руслоформуючі наноси переносяться течією переважно у зваженому стані, тобто коли [14]  $w_0/v_* < 3.15$ , де  $v_*$  – динамічна швидкість.

**Висновки.** Подана в роботі методика математичного моделювання процесу деформації поверхні дна криволінійного каналу дозволяє ефективно розраховувати не лише глибину та форму вирв розмиву, зон відкладення частинок, а також прогнозувати розвиток процесу в часі з урахуванням транспортування наносів. Підвищення рівня достовірності отримуваних результатів прогнозування руслових деформацій на основі такого підходу, а, отже, і розширення кола практичного застосування відповідних математичних моделей пов'язане, в першу чергу, з більш адекватним моделюванням водної течії з урахуванням її в'язкості, що є предметом майбутніх досліджень.

1. *Барановський С.В., Щодро О.Є.* Асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних сингулярно збурених задач для рівнянь конвективної дифузії та проблеми моделювання процесів локально зосереджених деформацій русла // Волинський математичний вісник. Серія Прикладна математика.- Вип. 1 (10).- Рівне: РДГУ, 2003.- С. 5-15.
2. *Барановський С.В, Бомба А.Я., Скопецький В.В.* Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформацій русла на ділянках

- планового розширення та повороту русла // Волинський математичний вісник. Серія Прикладна математика.- Вип. 2 (11).- Рівне: РДГУ, 2004.- С. 35-42.
3. *Барановський С.В.* Про математичне моделювання процесів деформації незв'язного піщаного дна біля окремих типів гідротехнічних споруд // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 1999.- Т. 4, число 2.- С. 36-40.
  4. *Барановський С.В., Бомба А.Я.* Покрокова асимптотика розв'язання одного класу сингулярно збурених нелінійних задач з вільними поверхнями // Математичні методи і фізико-механічні поля.- Львів.- 1999.- Т. 42, № 2.- С. 46-51.
  5. *Маккавеев В.М.* К теории турбулентного режима и взвешивания наносов // Известия ГГИ: 1931.- №32.- С. 5-26.
  6. *Шамов Г.И.* Речные наносы.- Л.: Гидрометеиздат, 1959.- 378 с.
  7. *Караушев А.В.* Теория и методы расчета речных наносов.- Л.: Гидрометеиздат, 1973.
  8. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т.2.: Пер. с англ.- М.: Мир, 1991.- 552 с.
  9. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного.- 4-е изд., исправ.- М.: Наука, 1973.
  10. *Патрашев А.Н.* Гидромеханика.- М.: Военно-морское изд-во, 1953.- 720 с.
  11. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
  12. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса // Киевский ун-т.- Киев, 1986.- 20с.- Рус.- Деп. в УкрНИИТИ, №286-Ук86.
  13. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1990.
  14. *Никитин И.К.* Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области.- К.: Изд. АН УССР, 1963.- 142 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

*Надійшла 01.03.2005*

**Барановский С.В., Брында И.В.** ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИЙ ПОВЕРХНОСТИ ДНА КРИВОЛИНЕЙНОГО КАНАЛА // *На основе разработанного метода асимптотического приближения решений одного класса нелинейных сингулярно возмущенных задач для уравнений конвективной диффузии в областях со свободными границами, предлагается подход к моделированию и исследованию процессов деформаций несвязного песчаного дна русла криволинейного канала прямоугольного поперечного сечения водным потоком.*

**Baranovsky S.V., Brynda I.V.** ABOUT ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF ONE CLASS NONLINEAR “CONVECTION-DIFFUSION” PROBLEMS AND MODELING OF DEFORMATION PROCESSES OF THE BOTTOM’S SURFACE OF CURVILINEAR CHANNEL // *On the basis of developed method of asymptotic approximation of solutions of one class nonlinear singular perturbed problems for the “convection-diffusion” equations in the areas with the free borders, the approach to modeling and research of deformation processes of the inconsistent sandy channel’s bottom of rectangular cross-section with the water stream was offered.*