РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 3 (12)

Рівне-2005

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол №10 від 28.05.2005 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

З історії математики, механіки, інформатики

УДК 628.315.3

Бомба А.Я., Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТИПУ "КОНВЕКЦІЯ-МАСООБМІН" З УРАХУВАННЯМ ЗВОРОТНОГО ВПЛИВУ

Побудовано розв'язок крайової задачі для системи нелінійних рівнянь трикомпонентного конвективного масопереносу з урахуванням запізненого масообміну. Наводяться результати числових розрахунків.

Вступ. Однією з найбільш ефективних методик розв'язання двовимірних задач для рівнянь конвективного масопереносу при фільтрації підземних вод є перетворення цих рівнянь у нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу [1-2]. Використання згаданої методики разом з відповідними аналітичними і числово-аналітичними методами дало можливість отримати точні або наближенні аналітичні розв'язки найбільш типових плоских задач типу "конвекція-фільтрація" в одно- та багатозв'язних областях [3-5], задач конвективної гетеродифузії [6-7], нелінійних задач із запізненням [8]. У цій роботі йдеться про розв'язання крайової задачі для системи рівнянь трикомпонентного конвективного масопереносу з урахуванням запізненого масообміну.

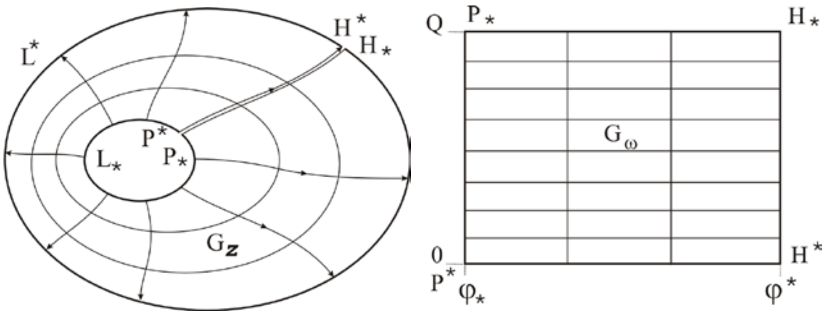
Постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0,\infty)$, де G_z $(z = x + iy)$ – двозв'язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \left\{ z:\ f_*(x,y) = 0 \right\}$ – внутрішній та $L^* = \{ z:\ f^*(x,y) = 0 \}$ – зовнішній (рис.1а), розглянемо таку модельну задачу трикомпонентного конвективного масопереносу з урахуванням запізненого масообміну:

$$\vec{v} = grad\,\varphi,\ div\,\vec{v} = 0,\ \varphi\Big|_{L_*} = \varphi_*,\quad \varphi\Big|_{L^*} = \varphi^*, \tag{1}$$

$$v_x(x,y)\cdot C_{1x}(x,y,t) + v_y(x,y)\cdot C_{1y}(x,y,t) + C_{1t}(x,y,t) =$$
$$= -a_1(x,y,t)\cdot C_1(x,y,t-\tau)\cdot C_2(x,y,t-\tau)\cdot C_3(x,y,t-\tau),$$

$$v_x(x,y)\cdot C_{2x}(x,y,t)+v_y(x,y)\cdot C_{2y}(x,y,t)+C_{2t}(x,y,t)=$$
$$=b_1(x,y,t)\cdot C_1(x,y,t-\tau)\cdot C_2(x,y,t-\tau)-b_2(x,y,t)\times$$
$$\times C_2(x,y,t-\tau)\cdot C_3(x,y,t-\tau),$$
$$v_x(x,y)\cdot C_{3x}(x,y,t)+v_y(x,y)\cdot C_{3y}(x,y,t-\tau)+C_{3t}(x,y,t)=$$
$$=d_1(x,y,t)\cdot C_1(x,y,t-\tau)\cdot C_2(x,y,t-\tau)\cdot C_3(x,y,t-\tau); \qquad (2)$$
$$C_j\Big|_{L_*}=c_j^*\left(M,\tilde{t}\right), C_j(x,y,\tilde{t})=c_j^0\left(x,y,\tilde{t}\right), 0\le\tilde{t}\le\tau\ (j=\overline{1,3}). \qquad (3)$$

Тут $\varphi=\varphi(x,y)$, $\vec{v}\left(v_x(x,y),v_y(x,y)\right)$ – відповідно потенціал та його вектор швидкості фільтрації в точці (x,y) ($\sqrt{v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)}>>0$, $0<\varphi_*\le\varphi\le\varphi^*<\infty$), $C_j(x,y,t)$ $(j=\overline{1,3})$ – концентрації розчинних в потоці речовин в точці (x,y) в момент часу t, $\tau>0$ – запізнення, $a_1(x,y,t)$, $b_1(x,y,t)$, $b_2(x,y,t)$, $d_1(x,y,t)$ – концентраційні коефіцієнти (неперервні обмежені функції), які характеризують інтенсивність масообміну, M – довільна точка відповідної поверхні, $c_j^*(M,t)$, $c_j^0(x,y,t)$ ($j=\overline{1,3}$) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках та вздовж усіх ребер області G. Крім цього вважаємо, що функції $c_j^0(x,y,t)$ ($j=\overline{1,3}$) при $t=0$ та $t=\tau$ задовольняють



а) *б)*

Рис. 1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω (б) умови, які забезпечують необхідні для проведення подальших викладок гладкості розв'язків $C_j(x,y,t)$ $(j=\overline{1,3})$ при $n\tau < t \le (n+1)\tau$ $(n=1,2,...)$ [8-9].

Нехай задача (1) шляхом конформного відображення [1] $G_z \mapsto G_\omega$ (або $G_\omega \mapsto G_z$, де $G_\omega = \{\omega = (\varphi,\psi):\ \ \varphi_* < \varphi < \varphi^*,\ \ Q_* < \psi < < Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 1 б)) є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей $\vec{v}$. Параметри Q_*, Q^* та $Q = Q_* \cdot Q^*$ – потік через довільний поперечний переріз течії в області G_z знаходяться в процесі розв'язку цієї задачі (див., напр., [4]).

Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi,\psi)$, $y = y(\varphi,\psi)$, $t = t$ у рівнянні (2) та умовах (3), приходимо до відповідної "конвективної задачі із запізненням" для області G_w:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot C_{1\varphi}(\varphi,\psi,t) + C_{1t}(\varphi,\psi,t) = -a_1(\varphi,\psi,t)\cdot C_1(\varphi,\psi,t-\tau)\times \\ \times C_2(\varphi,\psi,t-\tau)\cdot C_3(\varphi,\psi,t-\tau), \\ v^2(\varphi,\psi)\cdot C_{2\varphi}(\varphi,\psi,t) + C_{2t}(\varphi,\psi,t) = b_1(\varphi,\psi,t)\cdot C_1(\varphi,\psi,t-\tau)\times \\ \times C_2(\varphi,\psi,t-\tau) - b_2(\varphi,\psi,t)\cdot C_2(\varphi,\psi,t-\tau)\cdot C_3(\varphi,\psi,t-\tau), \\ v^2(\varphi,\psi)\cdot C_{3\varphi}(\varphi,\psi,t) + C_{3t}(\varphi,\psi,t) = d_1(\varphi,\psi,t)\cdot C_1(\varphi,\psi,t-\tau)\times \\ \times C_2(\varphi,\psi,t-\tau)\cdot C_3(\varphi,\psi,t-\tau), \end{cases} \tag{4}$$

$$C_j(\varphi_*,\psi,t) = c_j^*(\psi,t),\ C_j(\varphi,\psi,\tilde{t}) = c_j^0(\varphi,\psi,\tilde{t}),\ 0 \le \tilde{t} \le \tau\ (j=\overline{1,3}). \tag{5}$$

Розв'язок задачі. Задачу із запізненням τ (4)-(5) на кожному із часових проміжків $(n\tau,(n+1)\tau]$, $n=\overline{1,m}$ зведемо до наступних m задач без запізнення:

$$\nu^2(\varphi,\psi)\cdot C_{j\,\varphi}^{\{n\}}(\varphi,\psi,t) + C_{j\,t}^{\{n\}}(\varphi,\psi,t) = g_j^{\{n\}}(\varphi,\psi,t)\ \ (j=1,3);$$

$$C_j^{\{n\}}(\varphi_*,\psi,t) = c_j^*(\psi,t),\ \ C_j^{\{n\}}(\varphi,\psi,n\tau) = q_j^{\{n\}}(\varphi,\psi,n\tau),$$

$$q_j^{\{n\}}(\varphi,\psi,t) = \begin{bmatrix} c_j^0(\varphi,\psi,t), & 0 \le t \le \tau, & n=1, \\ C_j^{\{n-1\}}(\varphi,\psi,t), & (n-1)\tau < t \le n\tau, & n>1, \end{bmatrix}$$

де $g_1^{\{n\}}(\varphi,\psi,t) = -a_1(\varphi,\psi,t)\cdot\prod_{i=1}^{3} q_i^{\{n\}}(\varphi,\psi,t-\tau)$, $g_2^{\{n\}}(\varphi,\psi,t) = b_1(\varphi,\psi,t)\times$ $\times\prod_{i=1}^{2} C_i^{\{n\}}(\varphi,\psi,t-\tau) - b_2(\varphi,\psi,t)\cdot\prod_{i=2}^{3} C_i^{\{n\}}(\varphi,\psi,t-\tau)$, $g_3^{\{n\}}(\varphi,\psi,t) =$ $= d_1(\varphi,\psi,t)\cdot\prod_{i=1}^{3} q_i^{\{n\}}(\varphi,\psi,t-\tau)$.

В результаті їх розв'язування матимемо:

$$C_j(\varphi,\psi,t) = \left[\begin{array}{ll} c_j^0(\varphi,\psi,t), & 0 \le t \le \tau, \\ C_j^{\{n\}}(\varphi,\psi,t), & n\tau < t \le (n+1)\tau,\ n = \overline{1,m}, \end{array}\right.$$

$$C_j^{\{n\}}(\varphi,\psi,t) = \left[\begin{array}{ll} -\int\limits_{n\tau}^{t} g_j^{\{n\}}(f^{-1}(\psi,h+f(\varphi,\psi)-t),\psi,h)dh + q_j^{\{n\}}(\varphi,\psi,n\tau), & t \le f(\varphi,\psi), \\ -\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} \dfrac{g_j^{\{n\}}(s,\psi,f(s,\psi)-f(\varphi,\psi)+t)}{v^2(s,\psi)}ds + c_j^*(\psi,t), & t > f(\varphi,\psi), \end{array}\right.$$

де $f(\varphi,\psi) = \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} \dfrac{ds}{v^2(s,\psi)}$ – час проходження відповідної частинки від точки (φ_*,ψ) до точки (φ,ψ), f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відмітимо, що така функція існує, оскільки $v^2(\varphi,\psi)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція).

Числові розрахунки. Наведемо результати розрахунку розглянутої вище системи нелінійних рівнянь трикомпонентного конвективного масопереносу з урахуванням запізненого масообміну на ідеальному фільтраційному фоні, породженому особливими точками $z_1 = 0$ і $z_2 = 4$ (відповідно витік і втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого $\omega = (Q_0/2\pi)\cdot\ln((z-z_1)/(z-z_2))$ при рівномірній сітці області комплексного потенціалу G_w та відповідній динамічній сітці в G_z: $\varphi(x,y) \overset{df}{=} \overline{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*)\cdot i)/50$, $\psi(x,y) \overset{df}{=} \overline{\psi}_j = (Q_* \cdot j)/35$, $i = \overline{0,50}$, $j = \overline{0,35}$, $\varphi_* = -2$, $\varphi^* = -1$; величині швидкості фільтрації $v = \left((dz/d\omega)\overline{(dz/d\omega)}\right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j).

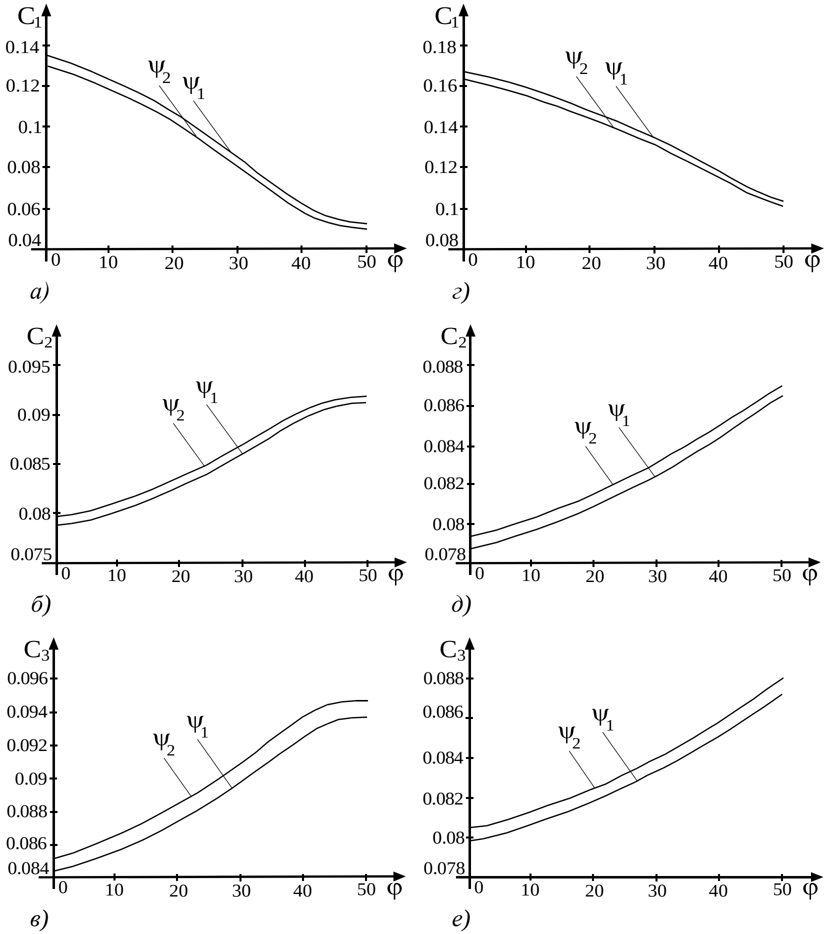


Рис. 2. Розподіл концентрацій речовин вздовж ліній течії $\psi_1 = 1.077$ *і* $\psi_2 = 2.154$ *в моменти часу* $t_1 = 1.518$ *(а, б, в) та* $t_2 = 2.928$ *(г, д, е)*

На рис. 2 зображено розподіл концентрацій $C_j(\varphi,\psi,t)$ $(j=\overline{1,3})$ при $a_1(\varphi,\psi,t)=50\cdot\exp[(t^2+2t+1)/(\varphi^2+\psi^2+1)]$, $b_1(\varphi,\psi,t)=\exp[-(t^2+$ $+1)/(\varphi^2+\psi^2+1)]$, $b_2(\varphi,\psi,t)=0.5\cdot\exp[-(t^2+t+1)/(\varphi^2+\psi^2+1)]$, $d_1(\varphi,\psi,t)=10\cdot\exp[-(t^2+1)/(\varphi^2+\psi^2+1)]$, $c_1^0\left(\varphi,\psi,t\right)=(t^2+1)/((\psi-$ $-\pi)^2+\varphi^2+5)$, $c_1^*(\psi,t)=(t^2+1)/((\psi-\pi)^2+9)$, $c_2^0\left(\varphi,\psi,t\right)=0.1\times$ $\times\exp[-(t^2+1)/((\psi-\pi/2)^2+\varphi^2+1)]$, $c_2^*(\psi,t)=0.1\cdot\exp[-(t^2+1)/((\psi-$ $-\pi/2)^2+5)]$, $c_3^0\left(\varphi,\psi,t\right)=0.1\cdot\exp[-(t^2+1)/((\psi-\pi)^2+\varphi^2+1)]$, $c_3^*(\psi,t)=0.1\cdot\exp[-(t^2+1)/((\psi-\pi)^2+5)]$, $\tau=1.226$.

Висновки. Результати цієї роботи можна використати при математичному моделюванні масопереносу і біохімічних процесів [10], що відбуваються у товщі полігонів і звалищ твердих побутових відходів та в ґрунтовому середовищі за їх межами, що дає змогу прогнозувати масообмін біогазу і швидкість руху речовин фільтрату (зокрема, летких жирних кислот) на кожному етапі життєвого циклу полігону чи звалища; виробити стратегію захисту, яка зменшує ризик впливу забруднень; розробити протиаварійні системи і методи утилізації біогазу.

1. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса.- К.: Киевский ун-т, 1986.- Деп. в УкрНИИНТИ, №286-Ук86.
2. *Бомба А.Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв’язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу “фільтрація-дифузія” за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.12-21.
3. *Присяжнюк І.М.* Асимптотичний метод розв’язування сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” у многозвязних областях // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 118-128.
4. *Бомба А.Я., Пригорницкий Д.А., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №1.- С. 152-159.
5. *Бомба А.Я., Скопецький В.В., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях // Компьютерная

математика.- 2004.- №2.- С. 99-104.

6. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. НАН України, Центр матем. моделювання Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача.- Львів: СПОЛОМ, 2003.- 128 с.
7. *Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O.* Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in manyphases continuum systems / In mat.: II Szkola Geomechaniki (miedz. konf.).- Gliwice: Polit. Slaska, 1995.- P. 343-351.
8. *Бомба А.Я., Присяжнюк І.М.* Асимптотичне розвинення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" із запізненням // Доповіді НАН України.- 2005.- №3.- С. 60-66.
9. *Єльсгольц Л.Є., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.- М: Наука, 1971.- 296 с.
10. *Гелетуха Г., Колейкін К.* (Інститут технічної теплофізики НАН України, НТЦ "Біомаса") // Науково-виробничий журнал. Енергозбереження Полісся, серпень-жовтень № 4-5, 2005 р., м. Рівне.- С. 19-22.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
E-mail: abomba@ukr.net
klimyuk@ukr.net

Надійшла 01.03.2005

Бомба А.Я., Климюк Ю.Е., Присяжнюк И.М. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПА "КОНВЕКЦИЯ-МАССООБМЕН" С УЧЕТОМ ОБРАТНОГО ВЛИЯНИЯ // *Построено решение краевой задачи для системы нелинейных уравнений трехкомпонентного конвективного массопереноса с учетом запоздавшего массообмена. Приводятся результаты численных расчетов.*

Bomba A.Ya., Klymyuk Yu.E., Prysjazhnjuk I.M. THE DECISION OF PROBLEMS SUCH AS "CONVECTION-MASS MIGRATION" IN VIEW OF RETURN INFLUENCE // *The decision of boundary-value problem for system of the nonlinear equations of 3-component convection mass migration in view of delay mass exchange is constructed. The results of numerical calculation are given.*