

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК
СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

Збірник наукових праць

Випуск 3 (12)

Рівне-2005

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Недашківській М.О.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пономаренко Л.А.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О.
Гарашенко Ф.Г.	Присяжнюк І.М.
Гарбарчук В.І.	Савула Я.Г.
Дейнека В.С.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопечкий В.В. (<i>головний редактор</i>)
Каштан С.С. (<i>секретар</i>)	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол №10 від 28.05.2005 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

Зміст

Барановський С.В., Бринда І.В. Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформації поверхні дна криволінійного каналу.....	5
Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. Моделювання багатосекторної економічної динаміки зростання з лагами	16
Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Каітан С.С. Застосування методу “фіктивних областей” та методології квазіконформних відображень при моделюванні нелінійно-суфозійних процесів в середовищах з вільними межами	28
Бомба А.Я., Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М. Розв'язування задач типу “конвекція-масообмін” з урахуванням зворотного впливу	38
Булавацький В.М. Спроцена математична модель для опису процесу фільтраційної консолідації ґрунтових масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації	45
Глинська М.Л. Математичне моделювання неізотермічного адсорбційного масопереносу для обмежених нанопористих середовищ	53
Головач Ю.Ю. Розширення функціональності динамічного детектора помилки переповнення буферу	63
Ємець О.О., Черненко О.О. Моделі задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях	71
Климюк Ю.Є. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу модельних просторових нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія-масообмін”	80
Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. Розрахунок фільтрації під гідротехнічними спорудами у випадку багатоступеневого перепаду методом декомпозиції області	94

Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Застосування сплайн-інтерлінації функцій до загального методу побудови оптимальних за порядком точності кубатурних формул обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій	101
Міца О.В., Матяшовська Б.О., Шумило Н.Я. Дослідження впливу похибок параметрів шарів вузькосмугових та широко-смугових фільтрів на стійкість спектральних характеристик ...	113
Мороз І.П. Математичне моделювання процесу проходження електромагнітних хвиль через діелектричну хвилеводну систему з керуючим елементом на p -і- n -структурі	124
Поліщук О.Д. Розв'язання задач з похилою похідною для рівняння Лапласа в R^3 за допомогою потенціалу простого шару	134
Присяжнюк І.М. Асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії за умов малого масообміну	146
Сяський В.А. Односторонній контакт двозв'язного штамп з кутковими точками і криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці	161
Турбал Ю.В. Деякі властивості позитивних напівтраєкторій Жюліа	175
Фундак Л.І., Цегелик Г.Г. Новий підхід до побудови апарату не-класичних мажорант і діаграм Ньютона функції та його застосування	186
 З історії математики, механіки, інформатики	
<i>Академік Микола Боголюбов (до 95-річчя від дня народження)</i>	201
<i>Ігор Володимирович Скрипник</i>	208
<i>Олег Миколайович Романів</i>	210

УДК 628.315.3

Бомба А.Я., Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М.**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ-МАСООБМІН” З
УРАХУВАННЯМ ЗВОРОТНОГО ВПЛИВУ**

Побудовано розв'язок крайової задачі для системи нелінійних рівнянь трикомпонентного конвективного масопереносу з урахуванням запізненого масообміну. Наводяться результати числових розрахунків.

Вступ. Однією з найбільш ефективних методик розв'язання двовимірних задач для рівнянь конвективного масопереносу при фільтрації підземних вод є перетворення цих рівнянь у нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу [1-2]. Використання згаданої методики разом з відповідними аналітичними і числово-аналітичними методами дало можливість отримати точні або наближенні аналітичні розв'язки найбільш типових плоских задач типу “конвекція-фільтрація” в одно- та багатозв'язних областях [3-5], задач конвективної гетеродифузії [6-7], нелінійних задач із запізненням [8]. У цій роботі йдеться про розв'язання крайової задачі для системи рівнянь трикомпонентного конвективного масопереносу з урахуванням запізненого масообміну.

Постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де G_z ($z = x + iy$) – двозв'язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\}$ – внутрішній та $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній (рис.1а), розглянемо таку модельну задачу трикомпонентного конвективного масопереносу з урахуванням запізненого масообміну:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \\ v_x(x, y) \cdot C_{1x}(x, y, t) + v_y(x, y) \cdot C_{1y}(x, y, t) + C_{1t}(x, y, t) &= \\ = -a_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t - \tau) \cdot C_2(x, y, t - \tau) \cdot C_3(x, y, t - \tau), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 &v_x(x, y) \cdot C_{2x}(x, y, t) + v_y(x, y) \cdot C_{2y}(x, y, t) + C_{2t}(x, y, t) = \\
 &= b_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t - \tau) \cdot C_2(x, y, t - \tau) - b_2(x, y, t) \times \\
 &\quad \times C_2(x, y, t - \tau) \cdot C_3(x, y, t - \tau), \\
 &v_x(x, y) \cdot C_{3x}(x, y, t) + v_y(x, y) \cdot C_{3y}(x, y, t - \tau) + C_{3t}(x, y, t) = \\
 &= d_1(x, y, t) \cdot C_1(x, y, t - \tau) \cdot C_2(x, y, t - \tau) \cdot C_3(x, y, t - \tau); \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$C_j|_{L_*} = c_j^*(M, \tilde{t}), \quad C_j(x, y, \tilde{t}) = c_j^0(x, y, \tilde{t}), \quad 0 \leq \tilde{t} \leq \tau \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (3)$$

Тут $\varphi = \varphi(x, y)$, $\vec{v}(v_x(x, y), v_y(x, y))$ – відповідно потенціал та його вектор швидкості фільтрації в точці (x, y) ($\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} \gg 0$, $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$), $C_j(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) – концентрації розчинних в потоці речовин в точці (x, y) в момент часу t , $\tau > 0$ – запізнення, $a_1(x, y, t)$, $b_1(x, y, t)$, $b_2(x, y, t)$, $d_1(x, y, t)$ – концентраційні коефіцієнти (неперервні обмежені функції), які характеризують інтенсивність масообміну, M – довільна точка відповідної поверхні, $c_j^*(M, t)$, $c_j^0(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках та вздовж усіх ребер області G . Крім цього вважаємо, що функції $c_j^0(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) при $t = 0$ та $t = \tau$ задовольняють

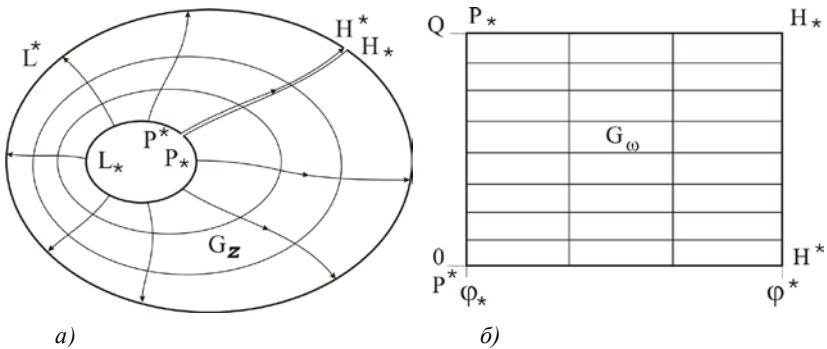


Рис. 1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω (б)

умови, які забезпечують необхідні для проведення подальших викладок гладкості розв'язків $C_j(x, y, t)$ ($j = \overline{1,3}$) при $n\tau < t \leq (n+1)\tau$ ($n = 1, 2, \dots$) [8-9].

Нехай задача (1) шляхом конформного відображення [1] $G_z \mapsto G_\omega$ (або $G_\omega \mapsto G_z$, де $G_\omega = \{\omega = (\varphi, \psi) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 1 б)) є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} . Параметри Q_* , Q^* та $Q = Q_* \cdot Q^*$ – потік через довільний поперечний переріз течії в області G_z знаходяться в процесі розв'язку цієї задачі (див., напр., [4]).

Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, $t = t$ у рівнянні (2) та умовах (3), приходимо до відповідної “конвективної задачі із запізненням” для області G_ω :

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{1\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{1t}(\varphi, \psi, t) = -a_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t - \tau) \times \\ \times C_2(\varphi, \psi, t - \tau) \cdot C_3(\varphi, \psi, t - \tau), \\ v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{2\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{2t}(\varphi, \psi, t) = b_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t - \tau) \times \\ \times C_2(\varphi, \psi, t - \tau) - b_2(\varphi, \psi, t) \cdot C_2(\varphi, \psi, t - \tau) \cdot C_3(\varphi, \psi, t - \tau), \\ v^2(\varphi, \psi) \cdot C_{3\varphi}(\varphi, \psi, t) + C_{3t}(\varphi, \psi, t) = d_1(\varphi, \psi, t) \cdot C_1(\varphi, \psi, t - \tau) \times \\ \times C_2(\varphi, \psi, t - \tau) \cdot C_3(\varphi, \psi, t - \tau), \end{cases} \quad (4)$$

$$C_j(\varphi_*, \psi, t) = c_j^*(\psi, t), C_j(\varphi, \psi, \tilde{t}) = c_j^0(\varphi, \psi, \tilde{t}), 0 \leq \tilde{t} \leq \tau \quad (j = \overline{1,3}). \quad (5)$$

Розв'язок задачі. Задачу із запізненням τ (4)-(5) на кожному із часових проміжків $(n\tau, (n+1)\tau]$, $n = \overline{1, m}$ зведемо до наступних m задач без запізнення:

$$\begin{aligned} v^2(\varphi, \psi) \cdot C_j^{[n]}(\varphi, \psi, t) + C_{jt}^{[n]}(\varphi, \psi, t) &= g_j^{[n]}(\varphi, \psi, t) \quad (j = 1, 3); \\ C_j^{[n]}(\varphi_*, \psi, t) &= c_j^*(\psi, t), \quad C_j^{[n]}(\varphi, \psi, n\tau) = q_j^{[n]}(\varphi, \psi, n\tau), \\ q_j^{[n]}(\varphi, \psi, t) &= \begin{cases} c_j^0(\varphi, \psi, t), & 0 \leq t \leq \tau, & n = 1, \\ C_j^{[n-1]}(\varphi, \psi, t), & (n-1)\tau < t \leq n\tau, & n > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } g_1^{[n]}(\varphi, \psi, t) &= -a_1(\varphi, \psi, t) \cdot \prod_{i=1}^3 q_i^{[n]}(\varphi, \psi, t - \tau), \quad g_2^{[n]}(\varphi, \psi, t) = b_1(\varphi, \psi, t) \times \\ &\times \prod_{i=1}^2 C_i^{[n]}(\varphi, \psi, t - \tau) - b_2(\varphi, \psi, t) \cdot \prod_{i=2}^3 C_i^{[n]}(\varphi, \psi, t - \tau), \quad g_3^{[n]}(\varphi, \psi, t) = \\ &= d_1(\varphi, \psi, t) \cdot \prod_{i=1}^3 q_i^{[n]}(\varphi, \psi, t - \tau). \end{aligned}$$

В результаті їх розв'язування матимемо:

$$C_j(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} c_j^0(\varphi, \psi, t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ C_j^{[n]}(\varphi, \psi, t), & n\tau < t \leq (n+1)\tau, \quad n = \overline{1, m}, \end{cases}$$

$$C_j^{[n]}(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -\int_{n\tau}^t g_j^{[n]}(f^{-1}(\psi, h + f(\varphi, \psi) - t), \psi, h) dh + q_j^{[n]}(\varphi, \psi, n\tau), & t \leq f(\varphi, \psi), \\ -\int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_j^{[n]}(s, \psi, f(s, \psi) - f(\varphi, \psi) + t)}{v^2(s, \psi)} ds + c_j^*(\varphi, \psi, t), & t > f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

де $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \psi)}$ – час проходження відповідної частинки від

точки (φ_*, ψ) до точки (φ, ψ) , f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відмітимо, що така функція існує, оскільки $v^2(\varphi, \psi)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція).

Числові розрахунки. Наведемо результати розрахунку розглянутої вище системи нелінійних рівнянь трикомпонентного конвективного масопереносу з урахуванням запізненого масообміну на ідеальному фільтраційному фоні, породженому особливими точками $z_1 = 0$ і $z_2 = 4$ (відповідно витік і втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого $\omega = (Q_0/2\pi) \cdot \ln((z - z_1)/(z - z_2))$ при рівномірній сітці області комплексного потенціалу G_w та відповідній

динамічній сітці в G_z : $\varphi(x, y) = \overline{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 50$,
 $\psi(x, y) = \overline{\psi}_j = (Q_* \cdot j) / 35$, $i = \overline{0, 50}$, $j = \overline{0, 35}$, $\varphi_* = -2$, $\varphi^* = -1$; величині швидкості фільтрації $v = ((dz/d\omega)(\overline{dz/d\omega}))^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) .

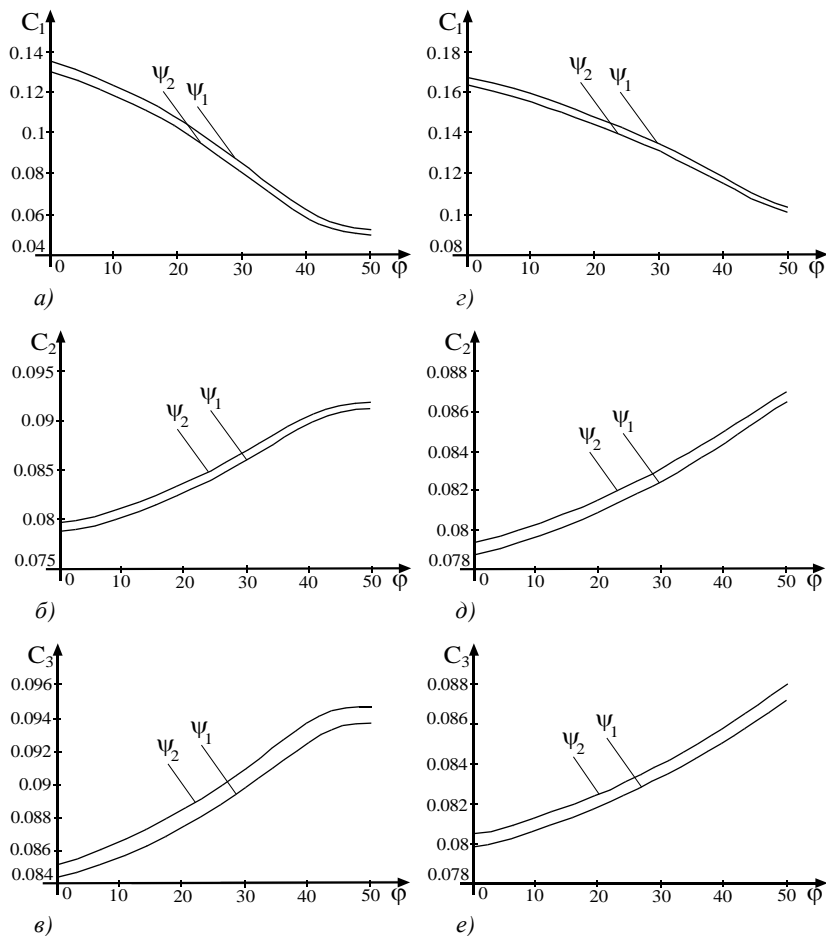


Рис. 2. Розподіл концентрацій речовин вздовж лінії течії $\psi_1 = 1.077$ і $\psi_2 = 2.154$ в моменти часу $t_1 = 1.518$ (а, б, в) та $t_2 = 2.928$ (г, д, е)

На рис. 2 зображено розподіл концентрацій $C_j(\varphi, \psi, t)$ ($j = \overline{1,3}$) при $a_1(\varphi, \psi, t) = 50 \cdot \exp[(t^2 + 2t + 1)/(\varphi^2 + \psi^2 + 1)]$, $b_1(\varphi, \psi, t) = \exp[-(t^2 + 1)/(\varphi^2 + \psi^2 + 1)]$, $b_2(\varphi, \psi, t) = 0.5 \cdot \exp[-(t^2 + t + 1)/(\varphi^2 + \psi^2 + 1)]$, $d_1(\varphi, \psi, t) = 10 \cdot \exp[-(t^2 + 1)/(\varphi^2 + \psi^2 + 1)]$, $c_1^0(\varphi, \psi, t) = (t^2 + 1)/((\psi - \pi)^2 + \varphi^2 + 5)$, $c_1^*(\psi, t) = (t^2 + 1)/((\psi - \pi)^2 + 9)$, $c_2^0(\varphi, \psi, t) = 0.1 \times \exp[-(t^2 + 1)/((\psi - \pi/2)^2 + \varphi^2 + 1)]$, $c_2^*(\psi, t) = 0.1 \cdot \exp[-(t^2 + 1)/((\psi - \pi/2)^2 + 5)]$, $c_3^0(\varphi, \psi, t) = 0.1 \cdot \exp[-(t^2 + 1)/((\psi - \pi)^2 + \varphi^2 + 1)]$, $c_3^*(\psi, t) = 0.1 \cdot \exp[-(t^2 + 1)/((\psi - \pi)^2 + 5)]$, $\tau = 1.226$.

Висновки. Результати цієї роботи можна використати при математичному моделюванні масопереносу і біохімічних процесів [10], що відбуваються у товщі полігонів і звалищ твердих побутових відходів та в ґрунтовому середовищі за їх межами, що дає змогу прогнозувати масообмін біогазу і швидкість руху речовин фільтрату (зокрема, летких жирних кислот) на кожному етапі життєвого циклу полігону чи звалища; виробити стратегію захисту, яка зменшує ризик впливу забруднень; розробити протиаварійні системи і методи утилізації біогазу.

1. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса.- К.: Киевский ун-т, 1986.- Деп. в УкрНИИИТИ, №286-Ук86.
2. *Бомба А.Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу "фільтрація-дифузія" за умов взаєм впливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.12-21.
3. *Присяжнюк І.М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" у многозв'язних областях // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 118-128.
4. *Бомба А.Я., Пригорницький Д.А., Присяжнюк І.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многозв'язных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №1.- С. 152-159.
5. *Бомба А.Я., Скопеецкий В.В., Присяжнюк І.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многозв'язных областях // Компьютерная

- математика.- 2004.- №2.- С. 99-104.
6. *Чапля С.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. НАН України, Центр матем. моделювання Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача.- Львів: СПОЛОМ, 2003.- 128 с.
 7. *Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O.* Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in manyphases continuum systems / In mat.: II Szkola Geomechaniki (miedz. konf.).- Gliwice: Polit. Slaska, 1995.- P. 343-351.
 8. *Бомба А.Я., Присяжнюк І.М.* Асимптотичне розв'язання розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" із запізненням // Доповіді НАН України.- 2005.- №3.- С. 60-66.
 9. *Сьльсгольц Л.С., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.- М: Наука, 1971.- 296 с.
 10. *Гелетуха Г., Колейкін К.* (Інститут технічної теплофізики НАН України, НТЦ "Біомаса") // Науково-виробничий журнал. Енергозбереження Полісся, серпень-жовтень № 4-5, 2005 р., м. Рівне.- С. 19-22.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

E-mail: abomba@ukr.net

klimyuk@ukr.net

Надійшла 01.03.2005

Бомба А.Я., Климок Ю.Е., Присяжнюк И.М. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПА "КОНВЕКЦИЯ-МАССООБМЕН" С УЧЕТОМ ОБРАТНОГО ВЛИЯНИЯ // *Построено решение краевой задачи для системы нелинейных уравнений трехкомпонентного конвективного массопереноса с учетом запоздавшего массообмена. Приводятся результаты численных расчетов.*

Bomba A.Ya., Klymyuk Yu.E., Prysazhnjuk I.M. THE DECISION OF PROBLEMS SUCH AS "CONVECTION-MASS MIGRATION" IN VIEW OF RETURN INFLUENCE // *The decision of boundary-value problem for system of the nonlinear equations of 3-component convection mass migration in view of delay mass exchange is constructed. The results of numerical calculation are given.*