РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 3 (12)

Рівне-2005

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол №10 від 28.05.2005 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

З історії математики, механіки, інформатики

УДК 518.61.001.573

Климюк Ю.Є.

ЧИСЕЛЬНО-АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ МОДЕЛЬНИХ ПРОСТОРОВИХ НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ "КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ-МАСООБМІН"

На основі просторового аналогу плоскої крайової задачі на конформне відображення внутрішньої області криволінійного чотирикутника на прямокутну побудовано асимптотичне наближення розв'язку просторової нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи нелінійних рівнянь трикомпонентної конвективної дифузії в криволінійному паралелепіпеді, обмеженому двома еквіпотенціальними та чотирма поверхнями течії з урахуванням малого масообміну. Наводяться результати числових досліджень.

Вступ. У роботах [1-3], ґрунтуючись на відомій публікації Вішика В.Й., Люстерника Л.А. [4], розроблено асимптотичний метод розв'язання типових крайових та змішаних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях (прямокутник, півсмуга і т.ін.) з урахуванням різного рівня гладкості початкової і граничних умов та їх узгодженості у кутових точках. В роботах [5-6] показано, що найбільш ефективною методикою розв'язання двовимірних задач для рівнянь конвективної дифузії при фільтрації підземних вод є перетворення цих рівнянь у нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу. Використання згаданої методики сумісно з аналітичними і чисельно-аналітичними методами дало можливість отримати точні або наближенні аналітичні розв'язки найбільш типових плоских задач типу "конвекція-фільтрація" в багатозв'язних областях [7-9], задач гетеродифузії [11-12], нелінійних задач із запізненням [13]. Оскільки у роботі [10] побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення внутрішньої області криволінійного чотирикутника на прямокутну і одержано асимптотичне розвинення розв’язку сингулярно збуреної крайової задачі для рівняння конвективної дифузії у криволінійному паралелепіпеді, то нині актуальною є проблема одержання розв’язків для аналогічних просторових задач. У цій роботі йдеться про розв’язання просторової задачі для системи нелінійних рівнянь трикомпонентної конвективної дифузії з урахуванням малого масообміну.

Постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0,\infty)$, де $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ ($z = (x,y,z)$) – однозв’язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x,y,z)=0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x,y,z)=0\}$ та поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x,y,z)=0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x,y,z)=0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x,y,z)=0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x,y,z)=0\}$ (рис. 1а), розглянемо таку модельну задачу:

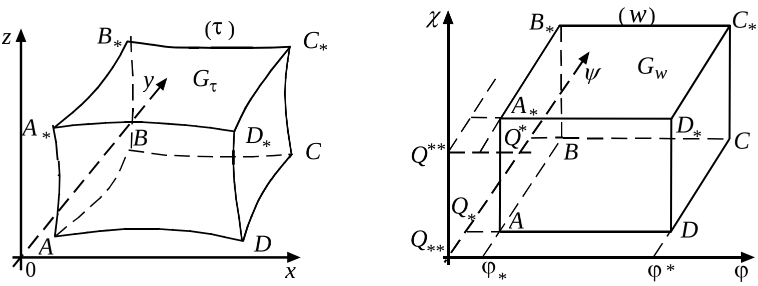
$$\vec{v} = grad\,\varphi,\ div\,\vec{v} = 0,$$

$$\varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \varphi\Big|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{ADD_*A_* \cup A_*D_*C_*B_* \cup BCC_*B_* \cup ADCB} = 0; \qquad (1)$$

$$\varepsilon\cdot(C_{1xx}(x,y,z,t) + C_{1yy}(x,y,z,t) + C_{1zz}(x,y,z,t)) - v_x(x,y,z)\times$$
$$\times C_{1x}(x,y,z,t) - v_y(x,y,z)\cdot C_{1y}(x,y,z,t) - v_z(x,y,z)\cdot C_{1z}(x,y,z,t) -$$
$$-\varepsilon\cdot a_1(x,y,z,t)\cdot C_1(x,y,z,t)\cdot C_2(x,y,z,t)\cdot C_3(x,y,z,t) = C_{1t}(x,y,z,t),$$

$$\varepsilon\cdot(C_{2xx}(x,y,z,t) + C_{2yy}(x,y,z,t) + C_{2zz}(x,y,z,t)) - v_x(x,y,z)\times$$
$$\times C_{2x}(x,y,z,t) - v_y(x,y,z)\cdot C_{2y}(x,y,z,t) - v_z(x,y,z)\times$$
$$\times C_{2z}(x,y,z,t) + \varepsilon\cdot b_1(x,y,z,t)\cdot C_1(x,y,z,t)\cdot C_2(x,y,z,t) -$$
$$-\varepsilon\cdot b_2(x,y,z,t)\cdot C_2(x,y,z,t)\cdot C_3(x,y,z,t) = C_{2t}(x,y,z,t),$$

$$\varepsilon\cdot(C_{3xx}(x,y,z,t) + C_{3yy}(x,y,z,t) + C_{3zz}(x,y,z,t)) - v_x(x,y,z)\times$$
$$\times C_{3x}(x,y,z,t) - v_y(x,y,z)\cdot C_{3y}(x,y,z,t) - v_z(x,y,z)\times$$



а) б)

Рис. 1. Просторова фізична область G_τ (а) та відповідна область комплексного потенціалу G_w (б)

$$\begin{aligned}&\times C_{3z}(x,y,z,t)+\varepsilon\cdot d_1(x,y,z,t)\cdot C_1(x,y,z,t)\cdot C_2(x,y,z,t)\times\\&\times C_3(x,y,z,t)=C_{3t}(x,y,z,t);\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&C_j\Big|_{ABB_*A_*}=c_{j*}(M,t),C_j\Big|_{CDD_*C_*}=c_j^{\ *}(M,t),\\&C_j\Big|_{ADD_*A_*}=c_{j**}(M,t),C_j\Big|_{BCC_*B_*}=c_j^{\ **}(M,t),\\&C_j\Big|_{ABCD}=c_{j***}(M,t),\ C_j\Big|_{A_*D_*C_*B_*}=c_j^{\ ***}(M,t),\end{aligned}\tag{3}$$

$$C_j(x,y,z,0)=c_j^{\ 0}(x,y,z),\ j=\overline{1,3},\tag{4}$$

де $\vec{v}\big(v_x(x,y,z),v_y(x,y,z),v_z(x,y,z)\big)$ – вектор, а $\varphi=\varphi(x,y,z)$ – потенціал швидкості фільтрації ($\sqrt{v_x^2(x,y,z)+v_y^2(x,y,z)+v_z^2(x,y,z)}>>\varepsilon$, $0<\varphi_*\le\varphi\le$ $\le\varphi^*<\infty$) в точці $z=(x,y,z)$, $C_j(\varphi,\psi,\chi,t)$ $(j=\overline{1,3})$ – концентрації розчинних в потоці речовин в точці $z=(x,y,z)$ в момент часу t; $a_1(x,y,z,t)$, $b_1(x,y,z,t)$, $b_2(x,y,z,t)$, $d_1(x,y,z,t)$ – неперервні обмежені функції, які характеризують вплив забруднення на його дифузійну проникливість, ε – малий параметр ($\varepsilon>0$), M – довільна точка відповідної поверхні, $c_{j*}(M,t)$, $c_j^{\ *}(M,t)$, $c_{j**}(M,t)$, $c_j^{\ **}(M,t)$, $c_{j***}(M,t)$, $c_j^{\ ***}(M,t)$, $c_j^{\ 0}(x,y,z)$ $(j=\overline{1,3})$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою в кутових точках та по ребрах області G .

Нехай задача (1) шляхом конформного відображення [10] $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $\vec{v}\left(v_x(x,y,z), v_y(x,y,z), v_z(x,y,z)\right)$, де $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \chi): \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad Q_* < \psi < Q^*, \quad Q_{**} < \chi < Q^{**}\}$ – відповідна G_τ область комплексного потенціалу (рис. 1б), $\psi = \psi(x,y,z)$, $\chi = \chi(x,y,z)$ – функції течії (комплексно спряжені до $\varphi = \varphi(x,y,z)$). Параметр $Q = Q_0 \cdot Q^0$ – потік через довільний поперечний переріз течії G_τ ($Q_0 = Q^* - Q_*$, $Q^0 = Q^{**} - Q_{**}$ – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний прошарки) знаходиться в процесі розв'язування цієї задачі (див., напр., [10]). Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \chi)$, $y = y(\varphi, \psi, \chi)$, $z = z(\varphi, \psi, \chi)$, $t = t$ у рівнянні (2) та умовах (3), (4), приходимо до відповідної задачі для області G_w:

$$\begin{cases}
\varepsilon \cdot v^2(\varphi,\psi,\chi) \cdot (C_{1\varphi\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t) + C_{1\psi\psi}(\varphi,\psi,\chi,t) + C_{1\chi\chi}(\varphi,\psi,\chi,t)) - \\
- v^2(\varphi,\psi,\chi) \cdot C_{1\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t) - \varepsilon \cdot a_1(\varphi,\psi,\chi,t) \cdot C_1(\varphi,\psi,\chi,t) \times \\
\times C_2(\varphi,\psi,\chi,t) \cdot C_3(\varphi,\psi,\chi,t) = C_{1t}(\varphi,\psi,\chi,t), \\
\varepsilon \cdot v^2(\varphi,\psi,\chi) \cdot (C_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t) + C_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,\chi,t) + C_{2\chi\chi}(\varphi,\psi,\chi,t)) - \\
- v^2(\varphi,\psi,\chi) \cdot C_{2\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t) + \varepsilon \cdot b_1(\varphi,\psi,\chi,t) \cdot C_1(\varphi,\psi,\chi,t) \times \\
\times C_2(\varphi,\psi,\chi,t) - \varepsilon \cdot b_2(\varphi,\psi,\chi,t) \cdot C_2(\varphi,\psi,\chi,t) \cdot C_3(\varphi,\psi,\chi,t) = \\
= C_{2t}(\varphi,\psi,\chi,t), \\
\varepsilon \cdot v^2(\varphi,\psi,\chi) \cdot (C_{3\varphi\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t) + C_{3\psi\psi}(\varphi,\psi,\chi,t) + C_{3\chi\chi}(\varphi,\psi,\chi,t)) - \\
- v^2(\varphi,\psi,\chi) \cdot C_{3\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t) + \varepsilon \cdot d_1(\varphi,\psi,\chi,t) \cdot C_1(\varphi,\psi,\chi,t) \times \\
\times C_2(\varphi,\psi,\chi,t) \cdot C_3(\varphi,\psi,\chi,t) = C_{3t}(\varphi,\psi,\chi,t),
\end{cases} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
&C_j(\varphi_*,\psi,\chi,t)=c_{j*}(\psi,\chi,t),\ C_j(\varphi^*,\psi,\chi,t)=c_j^{\ *}(\psi,\chi,t),\\
&C_j(\varphi,Q_*,\chi,t)=c_{j**}(\varphi,\chi,t),\ C_j(\varphi,Q^*,\chi,t)=c_j^{\ **}(\varphi,\chi,t),\\
&C_j(\varphi,\psi,Q_{**},t)=c_{j***}(\varphi,\psi,t),\ C_j(\varphi,\psi,Q^{**},t)=c_j^{\ ***}(\varphi,\psi,t),\\
&C_j(\varphi,\psi,\chi,0)=c_j^{\ 0}(\varphi,\psi,\chi),\ j=\overline{1,3}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Розв'язання задачі. Розв'язок $C_j(\varphi,\psi,\chi,t)$ $(j=\overline{1,3})$ задачі (5), (6) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$
\begin{aligned}
&C_j(\varphi,\psi,\chi,t)=C_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i C_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,t)+\\
&+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i \varPi_{j,i}(\xi,\psi,\chi,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}P_{j,i}(\varphi,\eta,\chi,t)+\\
&+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}H_{j,i}(\varphi,\zeta,\chi,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}\varGamma_{j,i}(\varphi,\psi,\mu,t)+\\
&+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}T_{j,i}(\varphi,\psi,\lambda,t)+R_{j,n}(\varphi,\psi,\chi,t,\varepsilon),\ j=\overline{1,3},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

де $R_{j,n}(\varphi,\psi,\chi,t,\varepsilon)$ $(j=\overline{1,3})$ – залишкові члени, $C_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,t)$ $(i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,3})$ – члени регулярних частин асимптотик, $\varPi_{j,i}(\xi,\psi,\chi,t)$ $(i=\overline{0,n+1},\ j=\overline{1,3})$ – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході конвективного потоку), $P_{j,i}(\varphi,\eta,z,t)$, $H_{j,i}(\varphi,\zeta,z,t)$, $\varGamma_{j,i}(\varphi,\psi,\mu,t)$, $T_{j,i}(\varphi,\psi,\lambda,t)$ $(i=\overline{0,n+1},\ j=\overline{1,3})$ – функції типу пограншару відповідно в околах $\psi=Q_*$, $\psi=Q^*$, $\chi=Q_{**}$, $\chi=Q^{**}$, що враховують вплив "бічних джерел забруднень", $\xi=(\varphi-\varphi_*)\cdot\varepsilon^{-1}$, $\eta=(\psi-Q_*)\cdot\varepsilon^{-1/2}$, $\zeta=(Q^*-\psi)\cdot\varepsilon^{-1/2}$, $\mu=(\chi-Q_{**})\cdot\varepsilon^{-1/2}$, $\lambda=$ $=(Q^{**}-\chi)\cdot\varepsilon^{-1/2}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги).

В результаті підстановки (7) в (5) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, одержимо такі задачі для знаходження головних частин $C_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,t)$ $(j=\overline{1,3})$ розв'язку і поправок $C_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,t)$ $(i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,3})$:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi,\chi)\cdot C_{j,0\,\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t)+C_{j,0\,t}(\varphi,\psi,\chi,t)=0, \\ C_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,0)=c_j^{\,0}(\varphi,\psi,\chi), C_{j,0}(\varphi_*,\psi,\chi,t)=c_{j*}(\varphi,\psi,t),\, j=\overline{1,3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi,\chi)\cdot C_{j,i\,\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t)+C_{j,i\,t}(\varphi,\psi,\chi,t)=g_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,t), \\ C_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,0)=0, C_{j,i}(\varphi_*,\psi,\chi,t)=0, i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,3}, \end{cases}$$

де $g_{1,i}(\varphi,\psi,\chi,t)=v^2(\varphi,\psi,\chi)\cdot(C_{1,i-1\,\varphi\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t)+C_{1,i-1\,\psi\psi}(\varphi,\psi,\chi,t)+$

$+C_{1,i-1\,\chi\chi}(\varphi,\psi,\chi,t))-a_1(\varphi,\psi,\chi,t)\cdot\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{m=0}^{i-1-k}(C_{1,k}(\varphi,\psi,\chi,t)\cdot C_{1,m}(\varphi,\psi,\chi,t)\times$

$\times C_{1,i-1-k-m}(\varphi,\psi,\chi,t))$, $g_{2,i}(\varphi,\psi,\chi,t)=v^2(\varphi,\psi,\chi)\cdot(C_{2,i-1\,\varphi\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t)+$

$+C_{2,i-1\,\psi\psi}(\varphi,\psi,\chi,t)+C_{2,i-1\,\chi\chi}(\varphi,\psi,\chi,t))+b_1(\varphi,\psi,\chi,t)\cdot\sum\limits_{k=0}^{i-1}(C_{1,k}(\varphi,\psi,\chi,t)\times$

$\times C_{2,i-1-k}(\varphi,\psi,\chi,t))-b_2(\varphi,\psi,\chi,t)\cdot\sum\limits_{k=0}^{i-1}C_{2,k}(\varphi,\psi,\chi,t)\cdot C_{3,i-1-k}(\varphi,\psi,\chi,t),$

$g_{3,i}(\varphi,\psi,\chi,t)=v^2(\varphi,\psi,\chi)\cdot(C_{3,i-1\,\varphi\varphi}(\varphi,\psi,\chi,t)+C_{3,i-1\,\psi\psi}(\varphi,\psi,\chi,t)+$

$+C_{3,i-1\,\chi\chi}(\varphi,\psi,\chi,t))+d_1(\varphi,\psi,\chi,t)\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{m=0}^{i-1-k}(C_{1,k}(\varphi,\psi,\chi,t)\cdot C_{2,m}(\varphi,\psi,\chi,t)\times$

$\times C_{3,i-1-k-m}(\varphi,\psi,\chi,t))$.

В результаті їх розв'язання матимемо:

$$C_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases} c_{j*}(t-f(\varphi,\psi,\chi)), & t\ge f(\varphi,\psi,\chi), \\ c_j^{\,0}(f^{-1}(f(\varphi,\psi,\chi)-t,\psi,\chi)), & t<f(\varphi,\psi,\chi), \end{cases}$$

$$C_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{g_{j,i}(s,\psi,\chi,f(s,\psi,\chi)+t-f(\varphi,\psi,\chi))}{v^2(s,\psi,\chi)}ds, & t\ge f(\varphi,\psi,\chi), \\ \int\limits_{0}^{t}g_{j,i}(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\chi)-t,\psi,\chi),\psi,\chi,s)ds, & t<f(\varphi,\psi,\chi), \end{cases}$$

де $f(\varphi,\psi,\chi)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{v^2(s,\psi,\chi)}$ – час проходження відповідної частинки від точки (φ_*,ψ,χ) до точки (φ,ψ,χ), f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відмітимо, що така функція існує, оскільки $v(\varphi,\psi,\chi)$ – неперервно диференційовні, обмежені, додатньо визначені функції).

Функції $\Pi_j=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\Pi_{j,i}$ $(j=\overline{1,3})$ призначені для усунення нев'язки, що вноситься побудованими регулярними частинами $C_j=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i C_{j,i}$ $(j=\overline{1,3})$ асимптотик, в околі точок (φ_*,ψ,χ) (виходу фільтраційного потоку), а значить, повинні виконуватись умови: $\left(C_j+\Pi_j\right)\Big|_{\varphi=\varphi^*}=c_j^*+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$ $(j=\overline{1,3})$. Для їх знаходження матимемо задачі:

$$\begin{cases}\Pi_{j,0\xi\xi}+\Pi_{j,0\xi}=0,\ j=\overline{1,3},\\ \Pi_{j,0}\left(\xi,\psi,\chi,t\right)\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ \Pi_{j,0}\left(0,\psi,\chi,t\right)=c_j^*\left(\psi,\chi,t\right)-C_{j,0}\left(\varphi^*,\psi,\chi,t\right),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Pi_{j,i\xi\xi}+\Pi_{j,i\xi}=v^{-2}\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\left(\Pi_{j,i-1t}-q_{j,i}\left(\xi,\psi,\chi,t\right)\right),i=\overline{1,n+1},\ j=\overline{1,3},\\ \Pi_{j,i}\left(\xi,\psi,\chi,t\right)\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ \Pi_{j,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)=-C_{j,i}\left(\varphi^*,\psi,\chi,t\right),\end{cases}$$

де $q_{1,1}\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=2\cdot v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_\xi\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\xi\cdot(\Pi_{1,0\xi}-\Pi_{1,0\xi\xi})$,

$q_{2,1}\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=2\cdot v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_\xi\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\xi\cdot(\Pi_{2,0\xi}-\Pi_{2,0\xi\xi})$,

$q_{3,1}\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=2\cdot v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_\xi\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\times\xi\cdot(\Pi_{3,0\xi}-\Pi_{3,0\xi\xi})$,

$q_{1,2}\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=2\cdot v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_\xi\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\xi\cdot(\Pi_{1,1\xi}-\Pi_{1,1\xi\xi})-(v_\xi^2\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)+$

$+v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_{\xi\xi}\left(\varphi^*,\psi,\chi\right))\cdot\xi^2\cdot(\Pi_{1,0\xi}-\Pi_{1,0\xi\xi})-a_1\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\Pi_{1,0}\cdot\Pi_{2,0}\cdot\Pi_{3,0}$,

$$q_{2,2}(\xi,\psi,\chi,t)=2\cdot v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_\xi\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\xi\cdot(\Pi_{2,1\xi}-\Pi_{2,1\xi\xi})-(v_\xi^2\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)+$$

$$+v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_{\xi\xi}\left(\varphi^*,\psi,\chi\right))\cdot\xi^2\cdot(\Pi_{2,0\xi}-\Pi_{2,0\xi\xi})+b_1\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\Pi_{1,0}\cdot\Pi_{2,0}-$$

$$-b_2\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\Pi_{2,0}\cdot\Pi_{3,0},$$

$$q_{3,2}(\xi,\psi,\chi,t)=2\cdot v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_\xi\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\xi\cdot(\Pi_{3,1\xi}-\Pi_{3,1\xi\xi})-(v_\xi^2\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)+$$

$$+v\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot v_{\xi\xi}\left(\varphi^*,\psi,\chi\right))\cdot\xi^2\cdot(\Pi_{3,0\xi}-\Pi_{3,0\xi\xi})+d_1\left(\varphi^*,\psi,\chi\right)\cdot\Pi_{1,0}\cdot\Pi_{2,0}\cdot\Pi_{3,0},$$

$$q_{1,i}(\varphi,\eta,z,t)=\sum_{l=0}^{i-1}V_{*l}(\Pi_{1,l\xi}-\Pi_{1,l\xi\xi})-\sum_{l=0}^{i-2}A_{1*l}\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{l-1-k}\Pi_{1,k}\cdot\Pi_{2,m}\cdot\Pi_{3,l-1-k-m},$$

$$q_{2,i}(\varphi,\eta,z,t)=\sum_{l=0}^{i-1}V_{*l}(\Pi_{2,l\xi}-\Pi_{2,j\xi\xi})+\sum_{l=0}^{i-2}B_{1*l}\sum_{k=0}^{l-1}\Pi_{1,k}\cdot\Pi_{2,l-1-k}-\sum_{l=0}^{i-2}B_{2*l}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{l-1}\Pi_{2,k}\cdot\Pi_{3,l-1-k},$$

$$q_{3,i}(\varphi,\eta,z,t)=\sum_{l=0}^{i-1}V_{*l}(\Pi_{3,l\xi}-\Pi_{3,l\xi\xi})+\sum_{l=0}^{i-2}D_{1*l}\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{l-1-k}\Pi_{1,k}\cdot\Pi_{2,m}\cdot\Pi_{3,l-1-k-m},$$

$i=\overline{3,n+1}$,

V_{*l}, A_{1*l}, B_{1*l}, B_{2*l} і D_{1*l} – коефіцієнти при ε розкладу функцій $v^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi)$, $a_1(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi,t)$, $b_1(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi,t)$, $b_2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi,t)$ і $d_1(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi,t)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi^*$.

Функції типу пограншару $P_j\left(\varphi,\eta,z,t\right)=\sum_{i=0}^{n+1}P_{j,i}\varepsilon^{i/2}$ $(j=\overline{1,3})$ призначені для усунення нев'язок в околі $\psi=Q_*$ відповідно. Для знаходження $P_{j,i}\left(\varphi,\eta,z,t\right)$ у результаті проведення стандартної процедури "прирівнювання" [7] маємо задачі:

$$\begin{cases}P_{j,0\eta\eta}-P_{j,0\varphi}=v^{-2}(\varphi,Q_*,\chi)\cdot P_{j,0t},\ j=\overline{1,3},\\ P_{j,0}(\varphi,\eta,\chi,t)\underset{\eta\to\infty}{\to}0,\ P_{j,0}(\varphi,0,\chi,t)=c_{j**}(\varphi,\chi,t)-\widehat{M}_{j,0}(\varphi,\eta,\chi,t),\end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{j,i\eta\eta} - P_{j,i\varphi} = v^{-2}(\varphi, Q_*, \chi)\cdot(P_{j,it} + M_{j,i}(\varphi,\eta,\chi,t)), i=\overline{1,n+1},\ j=\overline{1,3}, \\ P_{j,i}(\varphi,\eta,\chi,t) \underset{\eta\to\infty}{\to} 0,\ P_{j,i}(\varphi,0,\chi,t) = \begin{cases} 0,\ \text{якщо}\ i - \text{не парне}, \\ -\widehat{M}_{j,i}(\varphi,\eta,\chi,t),\ \text{якщо}\ i - \text{парне}. \end{cases} \end{cases}$$

Тут $\widehat{M}_{j,i}(\varphi,\eta,\chi,t) = C_{j,i-i/2}(\varphi,Q_*,\chi,t) + \varPi_{j,i-i/2}(\varphi,Q_*,\chi,t)$,

$$M_{1,i}(\varphi,\eta,\chi,t) = \sum_{l=0}^{i} V_{*l}\cdot P_{1,i-l_{\eta\eta}} + \sum_{l=0}^{i} V_{*l}\cdot P_{1,i-l_{\varphi}} + I(i,2)\cdot\sum_{l=0}^{i-2} V_{*l}\cdot(P_{1,i-2-l_{\varphi\varphi}} +$$

$$+ P_{1,i-2-l_{\chi\chi}} - I(i,2)\cdot\sum_{l=0}^{i-2} A_{1*l}\cdot\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{l-1-k} P_{1,k}\cdot P_{2,m}\cdot P_{3,l-1-k-m},$$

$$M_{2,i}(\varphi,\eta,\chi,t) = \sum_{l=0}^{i} V_{*j} P_{2,i-l_{\eta\eta}} + \sum_{l=0}^{i} V_{*l} P_{2,i-l_{\varphi}} + I(i,2)\cdot\sum_{l=0}^{i-2} V_{*l}(P_{2,i-2-l_{\varphi\varphi}} + P_{2,i-2-l_{\chi\chi}}) +$$

$$+ I(i,2)\cdot\sum_{l=0}^{i-2} B_{1*l}\sum_{k=0}^{l-1} P_{1,k}\cdot P_{2,l-1-k} - I(i,2)\cdot\sum_{l=0}^{i-2} B_{2*l}\sum_{k=0}^{l-1} P_{2,k}\cdot P_{3,l-1-k},$$

$$M_{3,i}(\varphi,\eta,\chi,t) = \sum_{l=0}^{i} V_{*l}\cdot P_{3,i-l_{\eta\eta}} + \sum_{l=0}^{i} V_{*l}\cdot P_{3,i-l_{\varphi}} + I(i,2)\cdot\sum_{l=0}^{i-2} V_{*l}\cdot(P_{3,i-2-l_{\varphi\varphi}} +$$

$$+ P_{3,i-2-l_{\chi\chi}}) + I(i,2)\cdot\sum_{l=0}^{i-2} D_{1*l}\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{l-1-k} P_{1,k}\cdot P_{2,m}\cdot P_{3,l-1-k-m},$$

де V_{*l}, A_{1*l}, B_{1*l}, B_{2*l} і D_{1*l} – коефіцієнти при $\varepsilon^{i/2}$ розкладу функцій $v^2(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$, $a_1(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi, t)$, $b_1(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi, t)$, $b_2(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi, t)$ і $d_1(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi, t)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\psi = Q_*$, $I(a,b) = \begin{cases} 1,\ \text{якщо}\ a \ge b, \\ 0,\ \text{якщо}\ a < b. \end{cases}$

Задачі для знаходження функцій $H_j(\varphi,\zeta,z,t) = \sum_{i=0}^{n+1} H_{j,i}\varepsilon^{i/2}$, $\varGamma_j(\varphi,\psi,\mu,t) = \sum_{i=0}^{n+1}\varGamma_{j,i}\varepsilon^{i/2}$, $T_j(\varphi,\psi,\lambda,t) = \sum_{i=0}^{n+1} T_{j,i}\varepsilon^{i/2}$, які призначені для усунення нев'язок відповідно в околах $\psi = Q^*$, $\chi = Q_{**}$, $\chi = Q^{**}$, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} H_{j,0\zeta\zeta} - H_{j,0\varphi} = v^{-2}(\varphi, Q^*, \chi) \cdot H_{0t}, H_{j,0}(\varphi,\zeta,\chi,t) \underset{\zeta\to\infty}{\to} 0,\ j = \overline{1,3}, \\ H_{j,0}(\varphi,0,\chi,t) = c_j^{**}(\varphi,\chi,t) - \widehat{K}_{j,0}(\varphi,\zeta,\chi,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{j,i\zeta\zeta} - H_{j,i\varphi} = v^{-2}(\varphi, Q^*, \chi) \cdot (H_{j,it} - K_{j,i}(\varphi,\zeta,\chi,t)),\ i = \overline{1,n+1},\ j = \overline{1,3}, \\ H_{j,i}(\varphi,\zeta,\chi,t) \underset{\zeta\to\infty}{\to} 0,\ H_{j,i}(\varphi,0,\chi,t) = \begin{cases} 0,\ \text{якщо } i - \text{не парне}, \\ -\widehat{K}_{j,i}(\varphi,\zeta,\chi,t),\ \text{якщо } i - \text{парне}, \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{j,0\mu\mu} - \Gamma_{j,0\varphi} = v^{-2}(\varphi,\psi,Q_{**}) \cdot \Gamma_{j,0t},\ j = \overline{1,3}, \\ \Gamma_{j,0}(\varphi,\psi,\mu,t) \underset{\mu\to\infty}{\to} 0,\ \Gamma_{j,0}(\varphi,\psi,0,t) = c_{j***}(\varphi,\psi,t) - \widehat{Q}_{j,0}(\varphi,\psi,\mu,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{j,i\mu\mu} - \Gamma_{j,i\varphi} = v^{-2}(\varphi,\psi,Q_{**}) \cdot (\Gamma_{j,it} - Q_{j,i}(\varphi,\psi,\mu,t)), i = \overline{1,n+1},\ j = \overline{1,3}, \\ \Gamma_{j,i}(\varphi,\psi,\mu,t) \underset{\mu\to\infty}{\to} 0,\ \Gamma_{j,i}(\varphi,\psi,0,t) = \begin{cases} 0,\ \text{якщо } i - \text{не парне}, \\ -\widehat{Q}_{j,i-i/2}(\varphi,\psi,\mu,t),\ \text{якщо } i - \text{парне}, \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{j,0\lambda\lambda} - T_{j,0\varphi} = v^{-2}(\varphi,\psi,Q^{**}) \cdot T_{j,0t},\ j = \overline{1,3}, \\ T_{j,0}(\varphi,\psi,\lambda,t) \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0,\ T_{j,0}(\varphi,\psi,0,t) = c_j^{***}(\varphi,\psi,t) - \widehat{G}_{j,0}(\varphi,\psi,\lambda,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{j,i\lambda\lambda} - T_{j,i\varphi} = v^{-2}(\varphi,\psi,Q^{**}) \cdot (T_{j,it} - G_{j,i}(\varphi,\psi,\lambda,t)),\ i = \overline{1,n+1},\ j = \overline{1,3}, \\ T_{j,i}(\varphi,\psi,\lambda,t) \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0,\ T_{k,i}(\varphi,\psi,0,t) = \begin{cases} 0,\ \text{якщо } i - \text{не парне}, \\ -\widehat{G}_{j,i-i/2}(\varphi,\psi,\lambda,t),\ \text{якщо } i - \text{парне}, \end{cases} \end{cases}$$

де $\widehat{K}_{j,i}(\varphi,\zeta,\chi,t) = c_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t) + \Pi_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t) + P_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t)$, $\widehat{Q}_{j,i-i/2}(\varphi,\psi,\mu,t) = c_{j,i-i/2}(\varphi,\psi,Q_{**},t) + \Pi_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t) + P_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t) + H_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t)$, $\widehat{G}_{j,i-i/2}(\varphi,\psi,\lambda,t) = c_{j,i-i/2}(\varphi,\psi,Q^{**},t) + \Pi_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t) + P_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t) + H_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t) + \Gamma_{j,i-i/2}(\varphi,Q^*,\chi,t)$, а функції $K_{j,i}(\varphi,\zeta,\chi,t)$, $Q_{j,i}(\varphi,\psi,\mu,t)$, $G_{j,i}(\varphi,\psi,\lambda,t)$ $(j = \overline{1,3})$ отримуються аналогічно до $M_{j,i}(\varphi,\eta,\chi,t)$ при виконанні відповідних замін.

Числові розрахунки. Наведемо результати розрахунків розглянутого вище процесу “конвекції-дифузії” при значеннях потенціалів $\varphi_* = 0$,

$\varphi^*=1.5$. На рис.2. зображено розподіл концентрацій $C_j(\varphi,\psi,\chi,t)$ $(j=\overline{1,3})$ розчинних речовин в моменти часу $t_1=0.348$ і $t_2=0.799$ лінійної (коли функції $a_1(x,y,z,t)$, $b_1(x,y,z,t)$, $b_2(x,y,z,t)$, $d_1(x,y,z,t)$, які характеризують вплив забруднення на його дифузійну проникливість, рівні нулю) та нелінійної систем (відповідно суцільна та штрихова лінії), що ілюструє їх взаємовплив, при величині малого параметра $\varepsilon=0.01$, початкових $c_1^0(\varphi,\psi,\chi)=1/(\varphi^2+12)$, $c_2^0(\varphi,\psi,\chi)=\exp(-1/(\varphi^2+1))/7$, $c_3^0(\varphi,\psi,\chi)=\cos(\varphi^2-1)/13$ та граничних умовах $c_{1*}(\psi,\chi,t)=1/(t+12)$, $c_1^*(\psi,\chi,t)=1/(t+14.25)$, $c_{2*}(\psi,\chi,t)=$ $=\exp(-t^2+t-1)/7$, $c_2^*(\psi,\chi,t)=$

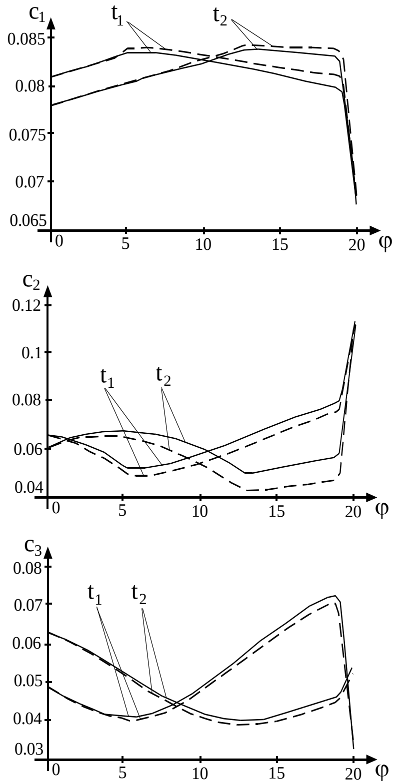


Рис. 2

$=\exp(-(t^2-t+1)/3.25)/7$, $c_{3*}(\psi,\chi,t)=\cos(-1/(t^2+1))/13$, $c_3^*(\psi,\chi,t)=$ $=\cos(1.25/(t^2+1))/13$, $c_{1**\psi}(\varphi,\chi,t)=c_{1***\chi}(\varphi,\psi,t)=c_{1\psi}^{**}(\varphi,\chi,t)=$ $=c_{1\chi}^{***}(\varphi,\psi,t)=c_{2**\psi}(\varphi,\chi,t)=c_{2***\chi}(\varphi,\psi,t)=c_{2\psi}^{**}(\varphi,\chi,t)=c_{2\chi}^{***}(\varphi,\psi,t)=$ $=c_{3**\psi}(\varphi,\chi,t)=c_{3***\chi}(\varphi,\psi,t)=c_{3\psi}^{**}(\varphi,\chi,t)=c_{3\chi}^{***}(\varphi,\psi,t)=0$, а також, при заданих "поперечних усередненнях" функцій швидкості

$$\overline{v}(\varphi)=\int_0^1\int_0^1 v^2(\varphi,\psi,\chi)d\psi d\chi=\varphi^2-3/4\cdot\varphi+5/4,\quad a_1(\varphi,\psi,\chi,t)=5012\times$$

$\times\exp(-(t^2+2\cdot t+1)/(\varphi^2-\varphi+1))$, $b_1(\varphi,\psi,\chi,t)=1073\cdot\exp(-(t^2+1)/(\varphi^2+1))$,

$b_2(\varphi,\psi,\chi,t)=1268\cdot\exp(-(t^2+t+1)/(\varphi^2+1))$, $d_1(\varphi,\psi,\chi,t)=5101\times$

$\times\exp(-(t^2+1)/(\varphi^2-\varphi+1))$.

Висновки і зауваження. Конструкція побудованого розв'язку (7) просторової нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи нелінійних рівнянь трикомпонентної конвективної дифузії в криволінійному паралелепіпеді з урахуванням малого масообміну дає можливість автономно доповнювати (збурювати) основну його частину відповідними "дифузійними поправками" і поправками в околах виходу фільтраційної течії та граничних поверхонь течії.

Якщо початкова та граничні умови недостатньо узгодженні або недостатньо гладкі, то тут можливою є процедура згладження негладкостей розв'язків вироджених задач вздовж характеристик, що виходять із кутових (реброви) точок області $G_w\times(0,\infty)$ [5], та побудова кутових функцій [1].

У перспективі запропоновану методику можна перенести на випадки розв'язання відповідних просторових сингулярно збурених задач для багатозв'язних областей [7-9], задач гетеродифузії [11-12], а також нелінійних задач із запізненням [13].

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1980.- 208 с.
2. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
3. *Bobisud L.E.* Parabolic Equations wits a Small Paramer and discontinuons Data. // Jornal of mathematical analysis and opplications.- 1969.- Volum 26, №1.- P. 208-220.
4. *Вишик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук.- 1957.- 12, вып. 5.- С. 3-122.
5. *Бомба А.Я.* Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса. К.: Киевский ун-т, 1986.- Деп. в УкрНИИНТИ, №286-Ук86.
6. *Бомба А.Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу "фільтрація-дифузія" за умов

взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.12-21.
7. *Присяжнюк І.М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" у многозв'язних областях // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 118-128.
8. *Бомба А.Я., Пригорницкий Д.А., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №1.- С. 152-159.
9. *Бомба А.Я., Скопецький В.В., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №2.- С. 99-104.
10. *Бомба А.Я.* Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 27-35.
11. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу.- НАН України, Центр матем. моделювання Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача.- Львів: СПОЛОМ, 2003.- 128 с.
12. *Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O.* Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in manyphases continuum systems // In mat.: II Szkola Geomechaniki (miedz. konf.).- Gliwice: Polit. Slaska, 1995.- P. 343-351.
13. *Бомба А.Я., Присяжнюк І.М.* Асимптотичне розвинення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" із запізненням // Доповіді НАН України.- 2005.- №3.- С.60-66.

Рівненський державний гуманітарний університет
E-mail: klimyuk@ukr.net

Надійшла 17.08.2005

Климюк Ю. Е. ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА "КОНВЕКЦИЯ-ДИФУЗИЯ-МАССООБМЕН" // *На основе пространственного аналога плоской краевой задачи на конформное отображение внутренней области криволинейного четыреугольника на прямоугольную построено асимптотическое приближение решения пространственной нелинейной сингулярно возмущённой краевой задачи для системы нелинейных уравнений трикомпонентной конвективной диффузии в кривоугольном параллелепипеде, ограниченном двумя эквипотенциальными и четырьмя поверхностями течения с учётом малого масообмена. Наводятся результаты численных исследований.*

Klimjuk Ju. E. NUMERICAL ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS OF

SOLUTIONS OF ONE CLASS MODEL 3D NONLINEAR SINGULAR INDIGNANT BOUNDARY PROBLEMS OF "CONVECTION-DIFFUSION-MASS EXCHANGE" TYPE // *Asymptotic approximation of the solution of 3D nonlinear singular indignant problem for the system of nonlinear equations of three component convectional diffusion in distorting angle parallelepiped, bounded by the two equipotential surfaces and four surfaces of current in view of small mass exchange on the basis of 3D analogue of the flat boundary value problem on conformal mapping of the internal area of a curvilinear quadrangle on the rectangular is constructed. Results of numerical researches are presented.*