РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 3 (12)

Рівне-2005

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол №10 від 28.05.2005 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

З історії математики, механіки, інформатики

УДК 519.63:532.5

Присяжнюк І.М.

АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ЗА УМОВ МАЛОГО МАСООБМІНУ

Побудовано алгоритм асимптотичного наближення розв'язку лінійної сингулярно збуреної крайової задачі типу „конвекція-дифузія" за умов залежності малого масообміну від наявної концентрації забруднюючих речовин двох сортів. Наведено результати числових розрахунків.

Вступ. У роботах [1-3] та ін. авторів, ґрунтуючись на відомій публікації Вішика В.Й., Люстерника Л.А. [4], розроблено асимптотичний метод розв'язання типових крайових та змішаних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях (прямокутник, півсмуга і т.ін.) з урахуванням різного рівня гладкості початкової і граничних умов та їх узгодженості у кутових точках. Разом з тим, аналіз та дослідження робіт [2], [5-6] показує, що найбільш ефективною методикою розв'язання двовимірних задач для рівнянь конвективної дифузії при фільтрації підземних вод є перетворення цих рівнянь до нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу. Використавши цю методику разом з чисельно-аналітичними методами були отримані точні, або наближенні розв'язки найбільш типових двовимірних задач стаціонарної і нестаціонарної дифузії і, зокрема, конвективного переносу, що виникають при дослідженні процесів забруднення, або засолення підземних вод і родючих земель. В роботах [7-9] ця методика була використана разом з асимптотичним методом Вішика-Люстерника при побудові розв'язків деяких двовимірних задач типу "конвекція-дифузія" при фільтрації в пористому середовищі.

Біохімічні процеси масопереносу, зокрема процеси очищення стічних вод, можна описати задачами конвективної дифузії за умов масообміну для систем сингулярно збурених рівнянь. Тому, важливим є

 С.146–160

поширення розробленої методики побудови асимптотичних розкладів на такого роду задачі. У цій роботі йдеться про асимптотичне наближення лінійних сингулярно збурених задач конвективної дифузії за умов малого масообміну для двозв'язних криволінійних областей обмежених еквіпотенціальними лініями.

Постановка задачі. Дослідимо сингулярно збурений процес конвективної дифузії речовин двох сортів у двозв'язній області за умов малого масообміну. Для цього розглянемо відповідну модельну задачу для області $G = G_z \times (0,\infty)$, де G_z ($z = x + iy$) – двозв'язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \left\{ z : f_* (x, y) = 0 \right\}$ – внутрішній та $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ – зовнішній (рис. 1 а):

$$D\left(\frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) -$$

$$-v_x(x,y)\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial x} - v_y(x,y)\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial y} -$$

$$-k_1 \cdot c(x,y,t) + k_2 \cdot u(x,y,t) = \frac{\partial c(x,y,t)}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$D^*\left(\frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) -$$

$$-v_x(x,y)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} - v_y(x,y)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} +$$

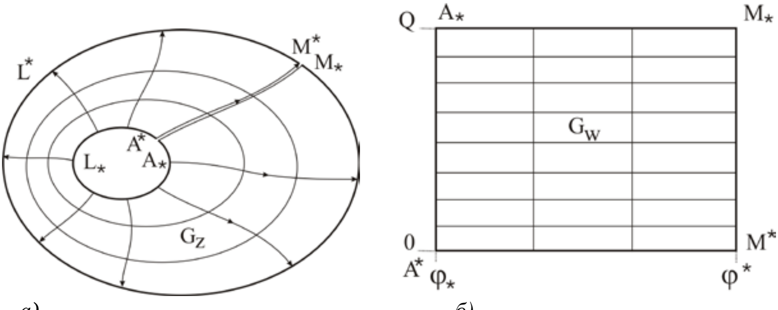
$$+k_3 \cdot c(x,y,t) - k_4 \cdot u(x,y,t) = \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$c\Big|_{L_*} = c_*\left(M,t\right),\ c\Big|_{L^*} = c^*\left(M,t\right),\ c(M,0) = c_0^0\left(M\right),$$

$$u\Big|_{L_*} = u_*\left(M,t\right),\ u\Big|_{L^*} = u^*\left(M,t\right),\ u(M,0) = u_0^0\left(M\right), \qquad (3)$$

$$(v_x, v_y) = grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi = 0,\ \varphi\Big|_{L_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{L^*} = \varphi^*. \qquad (4)$$

Тут $c(x, y, t)$ та $u(x, y, t)$ – відповідно концентрації двох сортів розчинної речовини фільтраційної течії в точці (x, y) в момент часу t, M – біжуча точка відповідної кривої, $D = a \cdot \varepsilon$, $D^* = a^* \cdot \varepsilon$, $k_1 = k_1^* \cdot \varepsilon$, $k_2 = k_2^* \cdot \varepsilon$, $k_3 = k_3^* \cdot \varepsilon$, $k_4 = k_4^* \cdot \varepsilon$, де k_1^*, k_2^*, k_3^*, k_4^*, a, a^* – задані додатні дійсні числа, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z, $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$ □ ε, $c_*(M,t)$, $c^*(M,t)$, $c_0^0(M,t)$, $u_*(M,t)$, $u^*(M,t)$, $u_0^0(M,t)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G. Ця модель описує процес руху частинок двох сортів забруднюючої речовини у фільтраційному середовищі. Зауважимо, що частинки одного сорту речовини можуть (наприклад, під дією певних хімічних реакцій) ставати частинками іншого сорту, причому k_1^*, k_2^*, k_3^*, k_4^* – концентраційні коефіцієнти інтенсивності процесів переходу речовини з одного сорту в інший (див., напр., [11], [12]), $k_i^*(x, y) > k^*$ □ ε ($i = \overline{1,4}$). Тут явища конвекції переважають над іншими складовими процесу.



а) *б)*

Рис. 1. Фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Припустимо, що задача (4) є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $\left(v_x(x, y), v_y(x, y)\right)$. Це, наприклад, можна зробити шляхом конформного відображення $G_z^* \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z^*$), де $G_z^* = G_z \setminus L$, L – розріз області G_z вздовж деякої лінії течії $A_*^* Ì_*^*$ (на рис.1а через $A_* Ì_*$ та $A^* Ì^*$ зображені береги цього розрізу), $G_w = \{ w = \varphi + i\psi :$ $\varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q \}$ – відповідна G_z^* область комплексного потенціалу (рис. 1б), $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$). Параметр $Q = \int\limits_{L^*} -v_y dx + v_x dy$ (потік через довільний поперечний переріз G_z) та розріз L (за заданою точкою $A_* = A^* \in L_*$) знаходяться в процесі розв'язку задачі фільтрації (див., напр., [7]). Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у рівняннях (1), (2) та умовах (3), приходимо до відповідної задачі для області G_w:

$$\varepsilon \cdot a \cdot v^2(\varphi, \psi) \cdot \left(\frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) - v^2(\varphi, \psi) \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi} -$$

$$-\varepsilon \cdot k_1^* \cdot c(\varphi, \psi, t) + \varepsilon \cdot k_2^* \cdot u(\varphi, \psi, t) = \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\varepsilon \cdot a^* \cdot v^2(\varphi, \psi) \left(\frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(\varphi, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) - v^2(\varphi, \psi) \frac{\partial u(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi} -$$

$$+\varepsilon \cdot k_3^* \cdot c(\varphi, \psi, t) - \varepsilon \cdot k_4^* \cdot u(\varphi, \psi, t) = \frac{\partial u(\varphi, \psi, t)}{\partial t}, \tag{6}$$

$$c(\varphi_*, \psi, t) = c_*(\psi, t),\ c(\varphi^*, \psi, t) = c^*(\psi, t),\ c(\varphi, \psi, 0) = c_0^0(\varphi, \psi),$$

$$u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t),\ u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t),\ u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi). \tag{7}$$

Асимптотика розв'язку. Розв'язок (c,u) системи (5), (7) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [3], [6], [7]:

$$c(\varphi,\psi,t) = c_0(\varphi,\psi,t) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i c_i(\varphi,\psi,t) +$$

$$+\sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \text{Ï}_i(\xi,\psi,t) + R^1_{n+1}(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \qquad (8)$$

$$u(\varphi,\psi,t) = u_0(\varphi,\psi,t) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i u_i(\varphi,\psi,t) +$$

$$+\sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i(\xi,\psi,t) + R^2_{n+1}(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \qquad (9)$$

де R^1_{n+1}, R^2_{n+1} – залишкові члени, $c_i(\varphi,\psi,t)$, $u_i(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: c_0, u_0 – розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); $c_1, ..., c_n, u_1, ..., u_n$ – відповідні поправки, що враховують “вклад” дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її пригранichної зони), $\text{Ï}_i(\xi,\psi,t)$, $P_i(\xi,\psi,t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (відповідні поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z), $\xi=(\varphi^*-\varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (змінна розтягу).

Аналогічно до [5-10], після підстановки (8) та (9) в (5)-(6) та застосування процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, для знаходження функцій c_i та u_i ($i=\overline{0,n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{i\,\varphi}(\varphi,\psi,t) + c_{it}(\varphi,\psi,t) = g_i(\varphi,\psi,t), \\ v^2(\varphi,\psi)\cdot u_{i\,\varphi}(\varphi,\psi,t) + u_{it}(\varphi,\psi,t) = \gamma_i(\varphi,\psi,t), \\ c_i(\varphi,\psi,0) = h_i(\varphi,\psi),\ c_i(\varphi_*,\psi,t) = b_i(\psi,t), \\ u_i(\varphi,\psi,0) = l_i(\varphi,\psi),\ u_i(\varphi_*,\psi,t) = p_i(\psi,t), \end{cases} \qquad (10)$$

$$g_0(\varphi,\psi,t)=0,\ \gamma_0(\varphi,\psi,t)=0,\ h_0(\varphi,\psi)=c_0^0(\varphi,\psi),$$

$$l_0(\varphi,\psi)=u_0^0(\varphi,\psi),\ b_0(\psi,t)=c_*(\psi,t),\ p_0(\psi,t)=u_*(\psi,t);$$

$$h_i(\varphi,\psi)=0\,,\;\; l_i(\varphi,\psi)=0\,,\;\; b_i(\psi,t)=0\,,\;\; p_i(\psi,t)=0\,,$$

$$g_i(\varphi,\psi,t)=av^2(\varphi,\psi)\left(c_{i-1\varphi\varphi}+c_{i-1\psi\psi}+u_{i-1\varphi\varphi}+u_{i-1\psi\psi}\right)-k_1^*c_{i-1}+k_2^*u_{i-1}\,,$$

$$\gamma_i(\varphi,\psi,t)=a^*v^2(\varphi,\psi)\left(c_{i-1\varphi\varphi}+c_{i-1\psi\psi}+u_{i-1\varphi\varphi}+u_{i-1\psi\psi}\right)+k_3^*c_{i-1}-k_4^*u_{i-1}\,,\;\; i=\overline{1,n}\,.$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} c_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\; t\ge f(\varphi,\psi),\\ c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,t)\,,t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$u_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} u_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\; t\ge f(\varphi,\psi),\\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,t)\,,t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$c_i(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde\varphi,\psi)\cdot g_i(\tilde\varphi,\psi,f(\tilde\varphi,\psi)+t-f(\varphi,\psi))\,d\tilde\varphi,\; t\ge f(\varphi,\psi),\\ \int\limits_{0}^{t} g_i(f^{-1}(\tilde t+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,\tilde t)d\tilde t,\; t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$u_i(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde\varphi,\psi)\cdot \gamma_i(\tilde\varphi,\psi,f(\tilde\varphi,\psi)+t-f(\varphi,\psi))\,d\tilde\varphi,\; t\ge f(\varphi,\psi),\\ \int\limits_{0}^{t} \gamma_i(f^{-1}(\tilde t+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,\tilde t)d\tilde t,\; t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

де $i=\overline{1,n}$, $f\left(\varphi,\tilde\psi\right)=\int_{\varphi_*}^{\varphi}v^{-2}\left(s,\tilde\psi\right)ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi=\tilde\psi$ від еквіпотенціальної лінії $s=\varphi_*$ до еквіпотенціальної лінії $s=\varphi$, f^{-1} – функція обернена до функції f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція v^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

Функції $\ddot{I}=\sum\limits_{i=0}^{n+1}\ddot{I}_i\,\varepsilon^i$, $P=\sum\limits_{i=0}^{n+1}P_i\,\varepsilon^i$ призначені для усунення нев'язок, внесених побудованими регулярними частинами $c=\sum_{i=0}^{n} c_i\,\varepsilon^i$, $u=\sum_{i=0}^{n} u_i\,\varepsilon^i$ в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Тобто, повинні виконуватись умови: $\left(c+\ddot{I}\ \right)\Big|_{\varphi=\varphi^*}=c^*+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$, $\left(u+P\right)\Big|_{\varphi=\varphi^*}=$ $=u^*+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$. Ці функції знаходимо в результаті розв'язку наступних задач (систем рівнянь):

$$\begin{cases} a\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\left(\ddot{I}_{\ i\xi\xi}(\xi,\psi,t)+P_{i\xi\xi}(\xi,\psi,t)\right)+v^2(\varphi^*,\psi)\ddot{I}_{\ i\xi}(\xi,\psi,t)=d_i(\xi,\psi,t), \\ a^*\cdot v^2(\varphi^*,\psi)\left(\ddot{I}_{\ i\xi\xi}(\xi,\psi,t)+P_{i\xi\xi}(\xi,\psi,t)\right)+v^2(\varphi^*,\psi)P_{i\xi}(\xi,\psi,t)=d^*{}_i(\xi,\psi,t), \\ \ddot{I}_{\ i}\ \to 0,\ P_i\ \to 0\ \ \text{ï ðè}\ \ \xi\to\infty, \\ \ddot{I}_{\ i}\ \left(0,\psi,t\right)=q_i\left(\psi,t\right),\ P_i\ \left(0,\psi,t\right)=q^*{}_i\left(\psi,t\right),\ i=\overline{0,n+1}, \end{cases}$$

де $\quad q_0(\psi,t)=c^*\left(\psi,t\right)-c_0\left(\varphi^*,\psi,t\right)$, $q_0^*(\psi,t)=u^*\left(\psi,t\right)-u_0\left(\varphi^*,\psi,t\right)$,

$$q_{n+1}(\psi,t)=0\ ,\ q_{n+1}^*(\psi,t)=0\ ,\ q_l(\psi,t)=-c_l\left(\varphi^*,\psi,t\right),$$

$$q_l^*(\psi,t)=-u_l\left(\varphi^*,\psi,t\right),\ l=\overline{1,n}\,,$$

$$\begin{aligned} d_i(\xi,\psi,t)&=I(i,1)\ddot{I}_{\ (i-1)_t}+I(i,2)\cdot k_1^*\ddot{I}_{\ (i-2)}-I(i,2)\cdot k_2^*P_{(i-2)}- \\ &-I(i,1)\sum_{j=1}^{i}V_j\ddot{I}_{\ (i-j)_\xi}-I(i,1)\cdot a\sum_{j=1}^{i}\left(V_j\cdot\left(\ddot{I}_{\ (i-j)_{\xi\xi}}+P_{(i-j)_{\xi\xi}}\right)\right)- \\ &-I(i,2)\cdot a\sum_{j=0}^{i-2}\left(V_j\cdot\left(\ddot{I}_{\ (i-j-2)_{\psi\psi}}+P_{(i-j-2)_{\psi\psi}}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i^*(\xi,\psi,t)&=I(i,1)P_{(i-1)_t}-I(i,2)k_3^*\ddot{I}_{\ (i-2)}+I(i,2)k_4^*P_{(i-2)}- \\ &-I(i,1)\sum_{j=1}^{i}V_jP_{(i-j)_\xi}-I(i,1)\cdot a^*\sum_{j=1}^{i}\left(V_j\cdot\left(\ddot{I}_{\ (i-j)_{\xi\xi}}+P_{(i-j)_{\xi\xi}}\right)\right)- \\ &-I(i,2)\cdot a^*\sum_{j=0}^{i-2}\left(V_j\cdot\left(\ddot{I}_{\ (i-j-2)_{\psi\psi}}+P_{(i-j-2)_{\psi\psi}}\right)\right), \end{aligned}$$

де V_j – коефіцієнти при ε^j розкладу функції $v^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi)$ в ряд

Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, $I(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{ÿêù î } a \ge b, \\ 0, & \text{ÿêù î } a < b. \end{cases}$

У випадку розв'язку задачі (5)-(7), наприклад, з точністю $O(\varepsilon^2)$ отримаємо такі поправки на виході фільтраційного потоку із області G_w:

$$\text{Ï}_0(\xi,\psi,t) = \left(c^*(\psi,t) - c_0\left(\varphi^*,\psi,t\right)\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{A}},$$

$$P_0(\xi,\psi,t) = \left(u^*(\psi,t) - u_0\left(\varphi^*,\psi,t\right)\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{A}},$$

$$\text{Ï}_1(\xi,\psi,t) = -c_1\left(\varphi^*,\psi,t\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{A}} - \frac{a\xi}{v^2(\varphi^*,\psi)}\left(\frac{\partial \text{Ï}_0}{\partial t} + \frac{\partial P_0}{\partial t}\right),$$

$$P_1(\xi,\psi,t) = -u_1\left(\varphi^*,\psi,t\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{A}} - \frac{a^*\xi}{v^2(\varphi^*,\psi)}\left(\frac{\partial \text{Ï}_0}{\partial t} + \frac{\partial P_0}{\partial t}\right),$$

$$\text{Ï}_2(\xi,\psi,t) = -v^{-2}\left(\varphi^*,\psi\right)\xi e^{\frac{-\xi}{A}}\left(\zeta(\psi,t) + \left(\frac{A}{2}\xi + A^2\right)\zeta^*(\psi,t)\right),$$

$$P_2(\xi,\psi,t) = -v^{-2}\left(\varphi^*,\psi\right)\xi e^{\frac{-\xi}{A}}\left(\varsigma(\psi,t) + \left(\frac{A}{2}\xi + A^2\right)\varsigma^*(\psi,t)\right),$$

де $$\zeta(\psi,t) = \frac{-a}{A}\frac{\partial c_1(M)}{\partial t} - \frac{a}{A}\frac{\partial u_1(M)}{\partial t} + \frac{2v'_\xi(\varphi^*,t)}{v(\varphi^*,t)}\Big(a^*(c_t^*(\psi,t) - c_{0t}(M)) -$$

$$-a(u_t^*(\psi,t) - u_{0t}(M))\Big) + \frac{a}{A}\left(k_1^* - k_3^*\right)\left(c^*(\psi,t) - c_0(M)\right) +$$

$$+\frac{a}{A}\left(k_4^* - k_2^*\right)\left(u^*(\psi,t) - u_0(M)\right) - a\cdot v(\varphi^*,t)\Big(c^*_{\psi\psi}(\psi,t) -$$

$$-c_{0\psi\psi}(M) + u^*_{\psi\psi}(\psi,t) - u_{0\psi\psi}(M)\Big),$$

$$\zeta^*(\psi,t) = a\Big(c^*_{tt}(\psi,t) - c_{0tt}(M)) + u^*_{tt}(\psi,t) - u_{0tt}(M)\Big) +$$

$$+\frac{a}{A}\frac{2v'_{\xi}(\varphi^*,t)}{v(\varphi^*,t)}\Big(c_t^*(\psi,t)-c_{0t}(M))+u_t^*(\psi,t)-u_{0t}(M)\Big),$$

$$\varsigma(\psi,t)=\frac{-a^*}{A}\frac{\partial u_1(M)}{\partial t}-\frac{a^*}{A}\frac{\partial c_1(M)}{\partial t}+\frac{2v'_{\xi}(\varphi^*,t)}{v(\varphi^*,t)}\Big(a^*(c_t^*(\psi,t)-$$

$$-c_{0t}(M))-a(u_t^*(\psi,t)-u_{0t}(M))\Big)+\frac{a^*}{A}\Big(k_1^*-k_3^*\Big)\Big(c^*(\psi,t)-c_0(M)\Big)+$$

$$+\frac{a^*}{A}\Big(k_4^*-k_2^*\Big)\Big(u^*(\psi,t)-u_0(M)\Big)-a^*\cdot v(\varphi^*,t)\Big(c_{\psi\psi}^*(\psi,t)-$$

$$-c_{0\psi\psi}(M)+u_{\psi\psi}^*(\psi,t)-u_{0\psi\psi}(M)\Big),$$

$$\varsigma^*(\psi,t)=a^*\Big(c_{tt}^*(\psi,t)-c_{0tt}(M))+u_{tt}^*(\psi,t)-u_{0tt}(M)\Big)+$$

$$+\frac{a^*}{A}\frac{2v'_{\xi}(\varphi^*,t)}{v(\varphi^*,t)}\Big(c_t^*(\psi,t)-c_{0t}(M))+u_t^*(\psi,t)-u_{0t}(M)\Big),$$

$$A=a+a^*,\ (M)=(\varphi^*,\psi,t).$$

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\varepsilon a v^2(\varphi,\psi)\Big(R^1_{(n+1)\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+R^1_{(n+1)\psi\psi}(\varphi,\psi,t)+R^2_{(n+1)\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+$$

$$+R^2_{(n+1)\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\Big)-v^2(\varphi,\psi)R^1_{(n+1)\varphi}(\varphi,\psi,t)-\varepsilon\cdot k_1^*\cdot R^1_{(n+1)}(\varphi,\psi,t)+$$

$$+\varepsilon\cdot k_2^*\cdot R^2_{(n+1)}(\varphi,\psi,t)=R^1_{(n+1)t}(\varphi,\psi,t)-b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^{n+1},$$

$$\varepsilon\cdot a^*\cdot v^2(\varphi,\psi)\Big(R^1_{(n+1)\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+R^1_{(n+1)\psi\psi}(\varphi,\psi,t)+R^2_{(n+1)\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+$$

$$+R^2_{(n+1)\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\Big)-v^2(\varphi,\psi)R^2_{(n+1)\varphi}(\varphi,\psi,t)+\varepsilon\cdot k_3^*\cdot R^1_{(n+1)}(\varphi,\psi,t)-$$

$$-\varepsilon\cdot k_4^*\cdot R^2_{(n+1)}(\varphi,\psi,t)=R^2_{(n+1)t}(\varphi,\psi,t)-b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^{n+1}, \tag{14}$$

де $$b_1(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=av^2(c_{n\varphi\varphi}+c_{n\psi\psi}+u_{n\varphi\varphi}+u_{n\psi\psi})-k_1^*c_n+k_2^*u_n-$$

$$-\ddot{I}_{(n+1)t}-\varepsilon\Big(k_1^*\ddot{I}_{n+1}-k_2^*P_{n+1}\Big)+av^2\Big(\ddot{I}_{n\psi\psi}+P_{n\psi\psi}\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n+1}\left(V_{(n+2-j)}\ddot{I}_{\ j\xi}\right)+a\sum_{j=1}^{n+1}\left(V_{(n+2-j)}(\ddot{I}_{\ j\xi\xi}+P_{j\xi\xi})\right)+$$

$$+\sum_{\substack{i+j\geq n+3,\\ i\leq n+1,\ j\leq n+1}}^{2(n+1)}\varepsilon^{i+j-(n+2)}\left(V_i\ddot{I}_{\ j\xi}+aV_i(\ddot{I}_{\ j\xi\xi}+P_{j\xi\xi}+\ddot{I}_{\ j\psi\psi}+P_{j\psi\psi})\right),$$

$$b_2(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=a^*v^2(c_{n\varphi\varphi}+c_{n\psi\psi}+u_{n\varphi\varphi}+u_{n\psi\psi})+k_3^*c_n-k_4^*u_n-$$

$$-P_{(n+1)t}+k_3^*\ddot{I}_{\ n}-k_4^*P_n-\varepsilon\left(k_3^*\ddot{I}_{\ n+1}-k_4^*P_{n+1}\right)+a^*v^2\left(\ddot{I}_{\ n\psi\psi}+P_{n\psi\psi}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n+1}\left(V_{(n+2-j)}P_{j\xi}\right)+a^*\sum_{j=1}^{n+1}\left(V_{(n+2-j)}(\ddot{I}_{\ j\xi\xi}+P_{j\xi\xi})\right)+$$

$$+\sum_{\substack{i+j\geq n+3,\\ i\leq n+1,\ j\leq n+1}}^{2(n+1)}\varepsilon^{i+j-(n+2)}\left(V_i\ddot{I}_{\ j\xi}+a^*V_i(\ddot{I}_{\ j\xi\xi}+P_{j\xi\xi}+\ddot{I}_{\ j\psi\psi}+P_{j\psi\psi})\right),$$

$$R^i_{n+1}(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R^i_{n+1}(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R^i_{n+1}(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0\quad (i=\overline{1,2})\,.$$

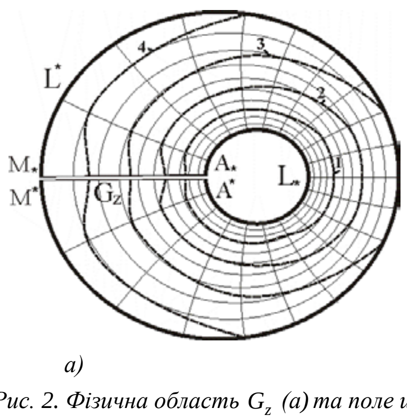
Аналогічно до [6], [7], вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь (1), (2) та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^*\times 0$, $L_*\times 0$ області $\overline{G}_T=G_z\times[0,T]$, де $[0,T]$ – фіксований проміжок часу (необхідних в першу чергу для забезпечення гладкості “двоповерхових компонент” c_i $(i=\overline{1,n})$ розв’язку поставленої задачі вздовж ребрових характеристик $t=f(\varphi,\psi)$), на основі принципу максимуму стосовно (14) приходимо до справедливості такого твердження: $R^i_{n+1}(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})$ ($i=1,2$, $(\varphi,\psi,t)\in\overline{G}_T$).

Числові розрахунки. Наведемо результати розрахунку процесу типу “конвекція-дифузія” на ідеальному плоско паралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого – $w=(Q_0/2\pi)\cdot\ln((z-z_1)/(z-z_2))$, при

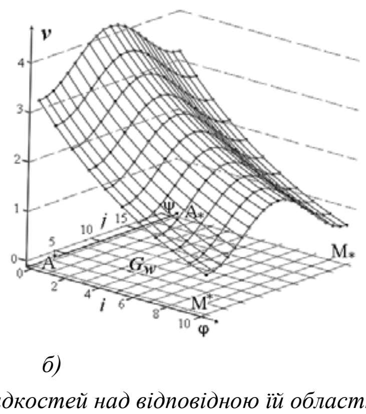
$\varphi_* = -2.7$, $\varphi^* = -1.5$, $AD = \{z : \psi(x,y) = 0\}$, $BC = \{z : \psi(x,y) = 2\pi\}$.

На рис. 2 а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z: $\varphi(x,y) = \overline{\varphi}_i \overset{df}{=} \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*)\cdot i)/10$, $\psi(x,y) = \overline{\psi}_j \overset{df}{=} (Q_* \cdot j)/20$, $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,20}$, величину швидкості фільтрації $v = \left((dz/dw)(\overline{dz/dw})\right)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j), та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi,\psi) = t_k$, $k = \overline{1,4}$ при $t_1 = 0.035$, $t_2 = 1.098$, $t_3 = 0.213$, $t_4 = 0.432$, (криві 1-4 відповідно).

Розподіли концентрацій $c(\varphi,\psi,t)$, $u(\varphi,\psi,t)$ розчинних речовин при $\varepsilon = 0.01$, $a = 1$, $a^* = 2$, $k_1^* = k_3^* = 10$, $k_2^* = k_4^* = 1$, $c_0^0(\varphi,\psi) = (1 + (\varphi + 2.7)^2 + \sin(\psi/2)/4)^{-1}$, $c_*(\psi,t) = (1 + t + \sin(\psi/2)/4)^{-1}$, $c^*(\psi,t) = (2.44 + t + \sin(\psi/2)/4)^{-1}$, $u_0^0(\varphi,\psi) = (2 + (\varphi + 2.7)^2 + \cos((\psi+\pi)/2)/2)^{-1}$, $u_*(\psi,t) = (2 + t + \cos((\psi+\pi)/2)/2)^{-1}$, $u^*(\psi,t) = (3.44 + t + \cos((\psi+\pi)/2)/2)^{-1}$



а)



б)

Рис. 2. Фізична область G_z (а) та поле швидкостей над відповідною їй областю комплексного потенціалу G_w (б) зображено на рис. 3-5. Так, на рис. 3 зображено регулярні частини c_0, $c_0+\varepsilon c_1$ а) та u_0, $u_0+\varepsilon u_1$ б) (криві $1-3$ та 1^*-3^* відповідно в моменти часу $t_1=0.0359$, $t_2=0.1265$, $t_3=0.5236$ вздовж лінії течії $\psi=1,256$) розв'язку поставленої задачі. На рис.4 зображено розподіли концентрації розчинних речовин c (криві $1-3$) та u (криві 1^*-3^*) вздовж лінії течії $\psi_5=1.57$ (а) та вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi=-1.86$ (б) відповідно в моменти часу $t_1=0.0131$, $t_2=0.1265$, $t_3=0.5236$.

На рис.5 зображено залежність розподілу концентрації розчинної речовини c а) та u б) від коефіцієнта дифузії вздовж лінії течії

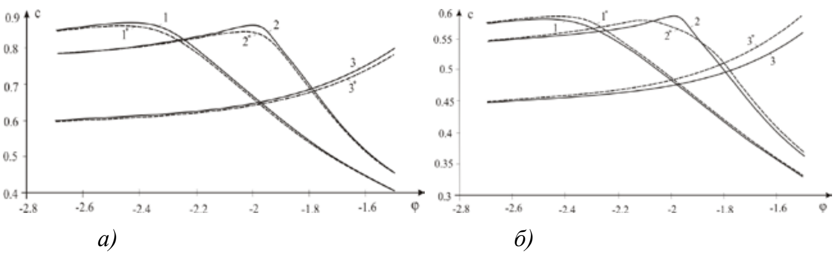


Рис. 3. Вплив дифузійних поправок на розподіл концентрації забруднюючих речовин

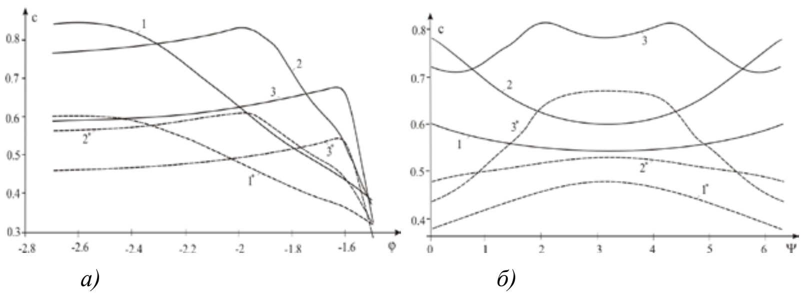
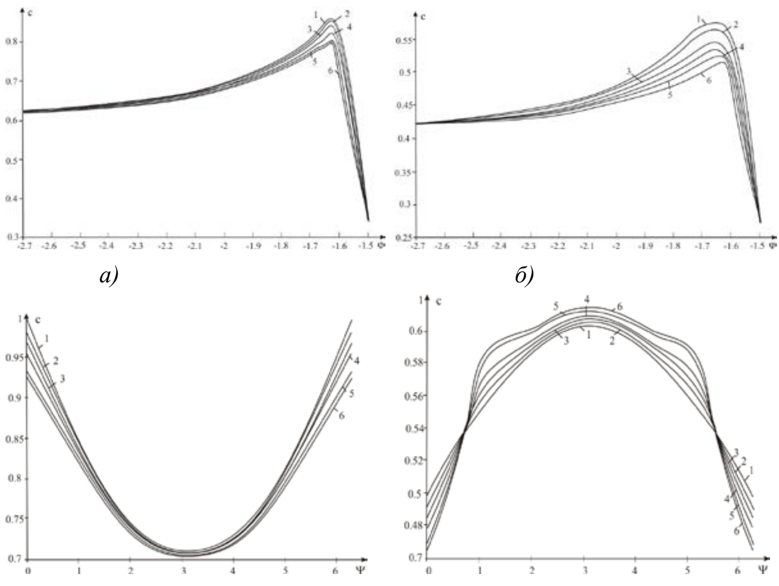


Рис. 4. Розподіл концентрації забруднюючих речовин в різні моменти часу вздовж фіксованої лінії течії (а) та еквіпотенціальної лінії (б)



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 5. Залежність розподілу концентрації розчинної речовини від коефіцієнта дифузії

$\psi = 0,628$ в момент часу $t = 0.5236$ при $\varepsilon_1 = 0,001$, $\varepsilon_2 = 0,004$, $\varepsilon_3 = 0,007$, $\varepsilon_4 = 0,01$, $\varepsilon_5 = 0,015$, $\varepsilon_6 = 0,017$ (криві 1-6 відповідно). Такі ж залежності для розчинних речовин c та u зображено відповідно на рис. 5 в) та рис. 5 г) вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = -1.86$ в момент часу $t = 0.2613$.

Висновки і зауваження. Досліджено зв'язок між розподілом концентрації розчинних речовин та коефіцієнтом дифузії. Встановлено, що навіть при малих коефіцієнтах дифузії та масообміну їх вплив на розподіл концентрації речовини одного сорту може бути суттєвим.

У перспективі – застосування розробленого підходу до моделювання процесів біологічного очищення стічних вод від забруднень, а також поширення запропонованої методики на відповідні просторові задачі.

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1980.- 208 с.
2. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
3. *Bobisud L.E.* Parabolic Equations wits a Small Paramer and discontinuons Data. // Jornal of mathematical analysis and opplications.- 1969.- Volum 26, №1.- P. 208-220.
4. *Вишик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.- Успехи математических наук.- 1957.- 12, вып. 5.- С. 3-122.
5. Бомба А.Я. Асимптотический метод решения одной сингулярно возмущённой задачи массопереноса.- К.: Киевский ун-т, 1986.- Деп. в УкрНИИНТИ, №286-Ук86.
6. *Бомба А.Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно-збурених нелінійних крайових задач типу "фільтрація-дифузія" за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта фільтрації // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С.12-21.
7. *Присяжнюк. І.М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" у многозвязних областях // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 118-128.
8. *Бомба А.Я., Пригорницкий Д.А., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №1.- С. 152-159.
9. *Бомба А.Я., Скопецький В.В., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №2.- С. 99-104.
10. *Бомба А.Я.* Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 27-35.
11. *Лаврик В.И., Никифорович Н.А.* Исследования конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена: Препр. // АН УССР. Ин-т математики; 82.20.- К.: 1982.- 46 с.
12. *Никифорович Н.А.* Исследование процессов массопереноса в случае нелинейной ионнообменной сорбции методом сращиваемых асимптотических разложений: Препр. // АН УССР. Ин-т математики; 85.5.- К.: 1985.- С. 118-128.

Рівненський державний гуманітарний університет
E-mail: igor_pri@mail.ru

Надійшла 01.03.2005

Присяжнюк И.М. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ УСЛОВИИ МАЛОГО МАССООБМЕНА // *Построен алгоритм асимптотического приближенния решения линейной сингулярно возмущенной краевой задачи типа „конвекция-диффузия" при условии зависимости малого массообмена от имеющейся концентрации загрязняющих веществ двух сортов. Приведены результаты числовых расчетов.*

Prysjazhnjuk I.M. ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF THE DECISIONS OF SINGULAR INDIGNANT BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF CONVECTION DIFFUSION UNDER CONDITION OF SMALL MASS EXCHANGE // *The algorithm of asymptotic approximation of the decisions of linear singular indignant boundary-value problem such as „convection-diffusion" under condition of dependence of мass exchange on available concentration of polluting substances of two grades. The results of numerical researches are given.*