

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК
СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

Збірник наукових праць

Випуск 3 (12)

Рівне-2005

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика".
The **"Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series"**.

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. (відповідальний редактор)	Недашківській М.О.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пономаренко Л.А.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О.
Гарашенко Ф.Г.	Присяжнюк І.М.
Гарбарчук В.І.	Савула Я.Г.
Дейнека В.С.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопечкий В.В. (головний редактор)
Каштан С.С. (секретар)	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. (технічний секретар)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол №10 від 28.05.2005 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

Зміст

Барановський С.В., Бринда І.В. Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформацій поверхні дна криволінійного каналу.....	5
Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. Моделювання багатосекторної економічної динаміки зростання з лагами	16
Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Капитан С.С. Застосування методу “фіктивних областей” та методології квазіконформних відображень при моделюванні нелінійно-суфозійних процесів в середовищах з вільними межами	28
Бомба А.Я., Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М. Розв'язування задач типу “конвекція-масообмін” з урахуванням зворотного впливу	38
Булавацький В.М. Спрощена математична модель для опису процесу фільтраційної консолідації ґрунтових масивів, насичених сольовими розчинами за умов релаксаційної фільтрації	45
Глинська М.Л. Математичне моделювання неізотермічного адсорбційного масопереносу для обмежених нанопористих середовищ	53
Головач Ю.Ю. Розширення функціональності динамічного детектора помилки переповнення буферу	63
Ємець О.О., Черненко О.О. Моделі задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях	71
Климюк Ю.Є. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу модельних просторових нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія-масообмін”	80
Кузьменко А.П., Кузьменко В.М. Розрахунок фільтрації під гідротехнічними спорудами у випадку багаступеневого перепаду методом декомпозиції області	94

Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Застосування сплайн-інтерлінації функцій до загального методу побудови оптимальних за порядком точності кубатурних формул обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій	101
Мица О.В., Матяшовська Б.О., Шумило Н.Я. Дослідження впливу похибок параметрів шарів вузькосмугових та широко-смугових фільтрів на стійкість спектральних характеристик ...	113
Мороз І.П. Математичне моделювання процесу проходження електромагнітних хвиль через діелектричну хвилеводну систему з керуючим елементом на p -і- n -структурі	124
Поліщук О.Д. Розв'язання задач з похилою похідною для рівняння Лапласа в R^3 за допомогою потенціалу простого шару	134
Присяжнюк І.М. Асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії за умов малого масообміну	146
Сяський В.А. Односторонній контакт двозв'язного штампa з кутовими точками і криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці	161
Турбал Ю.В. Деякі властивості позитивних напівтраєкторій Жюліа	175
Фундак Л.І., Цегелик Г.Г. Новий підхід до побудови апарату не-класичних мажорант і діаграм Ньютона функції та його за-стосування	186
 З історії математики, механіки, інформатики	
<i>Академік Микола Боголюбов (до 95-річчя від дня народження)</i>	201
<i>Ігор Володимирович Скрипник</i>	208
<i>Олег Миколайович Романів</i>	210

УДК 539.3

Сяський В.А.

ОДНОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ДВОЗВ'ЯЗНОГО ШТАМПА З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ І КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ

Задача про тиск жорсткого двозв'язного штампа з кутовими точками на криволінійний отвір в нескінченній ізотропній пластинці зведена до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами. Методом граничної колокації знайдено наближений розв'язок задачі, досліджено вплив форми отвору та величини ділянки контакту на напружений стан в пластинці.

Постановка задачі. Виведення основних рівнянь. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, який обмежений гладким контуром L у вигляді правильного N -кутника із заокругленими кутами. До середньої поверхні пластинки віднесена комплексна площина $z = x + jy$ так, що її початок координат співпадає з центром отвору (рис. 1).

В отвір без зазору і натягу вставлений абсолютно жорсткий двозв'язний штамп з кутовими точками, вісь симетрії якого співпадає з віссю абсцис. До штампа вздовж осі Ox прикладено силу P_0 . Внаслідок

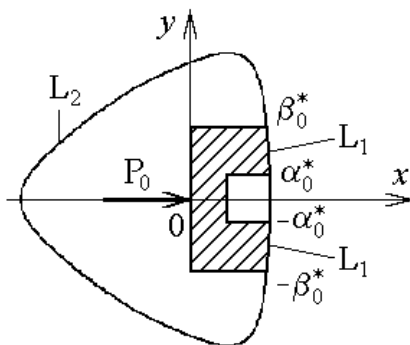


Рис. 1

взаємодії пластинки і штампа на контурі отвору L виникають дві зони: L_1 – зона контакту і L_2 – зона, вільна від напружень. Розв’язок задачі полягає у визначенні контактних напружень на L_1 і кільцевих напружень на $L = L_1 + L_2$.

Раціональна функція [1]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка. Тут R_0 – характерний розмір отвору; ε – параметр, який характеризує відхилення форми криволінійного многокутника від кола. При $N=2$, $|\varepsilon| < 1$ контур L має форму еліпса, при $N=3$, $|\varepsilon| < 1/2$ – форму трикутника із заокругленими кутами.

Нехай $\pm \alpha_0^*, \pm \beta_0^*$ значення полярного кута, які визначають зону контакту. Тоді $L_1 = [-\beta_0^*; -\alpha_0^*] \cup [\alpha_0^*; \beta_0^*]$. При конформному відображенні (1) образом L_1 буде зона $\gamma_1 = [-\beta_0; -\alpha_0] \cup [\alpha_0; \beta_0]$ на одиничному колі γ .

Тиск штампу на контур отвору можна замінити дією на ділянці контура L_1 нормальних T_p і дотичних $S_{p\lambda}$ зусиль. При цьому вважається, що зовнішнє навантаження у нескінченно віддалених точках відсутнє.

Враховуючи симетричність задачі відносно осі Ox , основні деформаційні співвідношення можна записати так [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^* &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_p^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_p^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{p\lambda}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \tilde{\varepsilon}_\lambda^0 \right]; \\ V^* &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{p\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{p\lambda}^*(t) dt - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_p^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \tilde{V}_0 \right], \lambda \in \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\lambda}^* + iV^* &= (\varepsilon_{\lambda} + iV)\omega'(\sigma); & T_{\rho}^* + iS_{\rho\lambda}^* &= (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda})\omega'(\sigma); \\ \varepsilon_{\lambda} + iV &= \frac{d}{ds} \left[(U_n + iU_s)e^{\imath\theta} \right]; & e^{\imath\theta} &= e^{i\tilde{\lambda}} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}; & \sigma &= e^{i\tilde{\lambda}}; \\ \tilde{\varepsilon}_{\lambda}^0 + i\tilde{V}_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[(X_0 + iY_0)(3-\nu)e^{-i\tilde{\lambda}} - (1+\nu)(N-2)\varepsilon(X_0 - iY_0)e^{-i(N-1)\tilde{\lambda}} \right];\end{aligned}\quad (3)$$

ε_{λ} , V – відносне видовження контура L і кут повороту нормалі до нього; s – дуга на L ; U_n , U_s – нормальна і дотична складові вектора зміщення контурних точок; θ – кут між нормаллю до L і віссю Ox ; E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; X_0 , Y_0 – проекції головного вектора зусиль, прикладених до L .

Компоненти напружено-деформованого стану на контурі отвору через величини T_{ρ}^* , $S_{\rho\lambda}^*$, ε_{λ}^* , V^* визначаються за формулами

$$\begin{aligned}T_{\rho} &= \frac{\alpha T_{\rho}^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; & S_{\rho\lambda} &= \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_{\rho}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \\ \varepsilon_{\lambda} &= \frac{\alpha \varepsilon_{\lambda}^* + \beta V^*}{\alpha^2 + \beta^2}; & V &= \frac{\alpha V^* - \beta \varepsilon_{\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; & \alpha + i\beta &= \omega'(\sigma).\end{aligned}\quad (4)$$

При цьому кільцеві зусилля можна обчислити за формулою [2]

$$T_{\lambda} = \nu T_{\rho} + 2Eh\varepsilon_{\lambda}. \quad (5)$$

Для визначення складових вектора зміщення контурних точок використаємо граничні умови першої і другої основних задач плоскої теорії пружності [1]:

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2 + C_0, \quad \sigma \in \gamma; \quad (6)$$

$$\kappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 4Gh(U + iV), \quad \sigma \in \gamma, \quad (7)$$

де $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ – комплексні потенціали Мусхелішвілі [1]; U, V – декартові компоненти вектора зміщення контурних точок;

$$U + iV = (U_n + iU_s)e^{i\theta}; \quad f_1 + if_2 = i \int_0^\lambda (T_p^* + iS_{p\lambda}^*) e^{it} dt; \quad G - \text{модуль зсуву};$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}; \quad C_0 - \text{комплексна стала.}$$

Внаслідок додавання (6), (7) одержимо

$$4Gh(U + iV) = (\kappa + 1)\varphi(\sigma) - (f_1 + if_2) - C_0. \quad (8)$$

Помножимо умову (6) на $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \xi}$ та проінтегруємо по контуру

γ . З врахуванням властивостей функцій $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ [1] знаходимо

$$\varphi(\xi) = -\frac{X_0 + iY_0}{2\pi(1+\kappa)} \ln \xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f_1^* + if_2^*}{\sigma - \xi} d\sigma + \frac{X_0 - iY_0}{2\pi(1+\kappa)} \varepsilon(N-2) \frac{1}{\xi^{N-2}}. \quad (9)$$

$$\text{Тут } f_1^* + if_2^* = f_1 + if_2 + i(X_0 + iY_0) \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Застосовуючи до (9) формули Сохоцького-Племеля [1] і підставляючи одержані результати у (8), одержимо після певних перетворень і розділення дійсної та уявної частин

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) f_1^*(\lambda) + \frac{1}{\pi} \oint_\gamma f_2^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon(N-2)}{2\pi} (1+\nu) (X_0 \cos(N-2)\lambda - Y_0 \sin(N-2)\lambda) + C_1 \right]; \\ V = & \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) f_2^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma f_1^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon(N-2)}{2\pi} (1+\nu) (X_0 \sin(N-2)\lambda + Y_0 \cos(N-2)\lambda) + C_2 \right], \end{aligned} \quad (10)$$

де C_1, C_2 – сталі.

Граничні умови задачі вибираємо у вигляді рівності нормальних змішень пластинки і штампа в зоні контакту. При відсутності сил тертя ці умови запишуться так

$$U_n = U_n'''; \quad S_{p\lambda} = 0, \quad \lambda \in \gamma_1. \quad (11)$$

Тут U_n''' – нормальні зміщення контурних точок штампа.

Оскільки

$$U + iV = (U_n + iU_s)e^{\tilde{\lambda}} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}; \quad U_0 = (U_n''' + iU_s''')e^{\tilde{\lambda}} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}, \quad (12)$$

де U_0 – горизонтальне зміщення штампа, то умови (11) з врахуванням властивостей відображення (1) можна подати у вигляді:

$$U + d(\lambda) \cdot V = U_0; \quad f_1'(\lambda) + d(\lambda) \cdot f_2'(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1. \quad (13)$$

$$\text{Тут } d(\lambda) = \frac{\sin \lambda + \varepsilon(N-1) \sin(N-1)\lambda}{\cos \lambda - \varepsilon(N-1) \cos(N-1)\lambda}.$$

Враховуючи симетричність задачі відносно осі Ox та парність функції $f_1(\lambda)$ і непарність функції $f_2(\lambda)$ формули (10) для визначення компонент вектора зміщення контурних точок матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2Eh} & \left[(1-\nu) f_1(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_2(t) \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \lambda} + \right. \\ & \left. + \varepsilon(N-2)(1+\nu) \frac{P_0}{2\pi} \cos(N-2)\lambda - \frac{P_0}{\pi} \ln|1 + \cos \lambda| + \tilde{C}_0 \right]; \\ V = \frac{1}{2Eh} & \left[(1-\nu) f_2(\lambda) - \frac{2 \sin \lambda}{\pi} \int_0^\pi f_1(t) \frac{dt}{\cos t - \cos \lambda} - \right. \\ & \left. - \varepsilon(N-2)(1+\nu) \frac{P_0}{2\pi} \sin(N-2)\lambda + \frac{P_0}{2\pi} (1-\nu) \lambda \right], \quad \lambda \in [0; \pi]. \end{aligned} \quad (14)$$

Інтегруючи у (14) за частинами та підставляючи в граничні умови (13) одержимо систему двох інтегродиференціальних рівнянь для визначення функцій $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$

$$\left\{ \begin{aligned} & (1-\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt + \\ & + \varepsilon(N-2)(1+\nu) \frac{P_0}{2\pi} \cos(N-2)\lambda + d(\lambda) \left[(1-\nu) \left(\int_{\beta_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{P_0}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln |\cos t - \cos \lambda| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| 2 \sin^2 \frac{\lambda+t}{2} \right| dt - \right. \\ & \left. - \varepsilon(N-2)(1+\nu) \frac{P_0}{2\pi} \sin(N-2)\lambda + \frac{P_0}{2\pi} (1-\nu)\lambda \right] = \tilde{C}_1; \\ & f_1'(\lambda) + d(\lambda) f_2'(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Крім системи (15) повинна виконуватися умова рівноваги штампа, яка набуває вигляду

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt = -\frac{P_0}{2} \quad (16)$$

і служить для відшукування сталої \tilde{C}_1 .

Якщо функції $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$ відомі, то величини T_p^* , $S_{p\lambda}^*$ визначаються із співвідношень

$$\begin{aligned} T_p^* &= f_2'(\lambda) \cos \lambda - f_1'(\lambda) \sin \lambda, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \\ S_{p\lambda}^* &= -f_2'(\lambda) \sin \lambda - f_1'(\lambda) \cos \lambda, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \\ T_p^* &= S_{p\lambda}^* = 0, \quad \lambda \in [0; \alpha_0] \cup [\beta_0; \pi]. \end{aligned} \quad (17)$$

Компоненти напруженого стану на контурі L обчислюються за формулами (4), (5).

Розв'язок системи (15), (16) будемо шукати наближено. Для цього спочатку зведемо систему до стандартного вигляду. Заміною змінних

$$\cos t = \frac{b_0 - a_0}{2} s + \frac{a_0 + b_0}{2}; \quad \cos \lambda = \frac{b_0 - a_0}{2} x + \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad (18)$$

де $a_0 = \cos \alpha_0$, $b_0 = \cos \beta_0$, систему рівнянь (15), (16) перетворимо так:

$$\left\{ \begin{aligned} & (1-\nu) \int_1^x \Phi_1(s) ds + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(s) \ln|s-x| ds + \\ & + \varepsilon(N-2)(1+\nu) \frac{P_0}{2\pi} \cos(N-2)\lambda + d(\lambda) \left[(1-\nu) \left(\int_1^x \Phi_2(s) ds - \frac{P_0}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(s) \ln \left| \frac{b_0 - a_0}{2} (s-x) \right| ds + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(s) \ln \left| 2 \sin^2 \frac{\lambda+t}{2} \right| ds - \right. \\ & \left. - \varepsilon(N-2)(1+\nu) \frac{P_0}{2\pi} \sin(N-2)\lambda + \frac{P_0}{2\pi} (1-\nu)\lambda \right] = \tilde{C}_2 ; \\ & \Phi_1(x) + d(\lambda)\Phi_2(x) = 0, \quad x \in [-1;1], \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi_2(s) ds = -\frac{P_0}{2}. \quad (20)$$

Тут введені позначення

$$\Phi_1(x) = \frac{f_1'(\lambda)}{\sin \lambda} \cdot \frac{a_0 - b_0}{2}, \quad \Phi_2(x) = \frac{f_2'(\lambda)}{\sin \lambda} \cdot \frac{a_0 - b_0}{2}. \quad (21)$$

Встановлення структури розв'язку системи (19), (20). Для наближеного розв'язку системи (19), (20) встановимо структуру функції $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ в околі точок $x = \pm 1$ ($\lambda = \alpha_0$; $\lambda = \beta_0$).

Продиференціювавши перше рівняння (19) по x , одержимо після певних перетворень

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(s) \frac{ds}{s-x} - d(\lambda) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(s) \frac{ds}{s-x} = F(\lambda, x); \\ & \Phi_1(x) + d(\lambda)\Phi_2(x) = 0, \quad x \in [-1;1], \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \end{aligned} \right. \quad (22)$$

де $F(\lambda, x)$ – функція, яка містить регулярні при $x = \pm 1$ доданки і сингулярний інтеграл з логарифмічним ядром.

Система (22) має бути несуперечною при $x \rightarrow \pm 1$. Умова несуперечності визначає структуру її розв'язку в кутових точках зони контакту.

Допустимо, що функції $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ задовольняють на $(-1;1)$ умову Гельдера [3], а в околі торців $x = \pm 1$ мають місце подання

$$\Phi_{1,2}(x) = \frac{\Phi_{1,2}^0(x)}{(1-x)^{\tau_1}(1+x)^{\tau_2}}. \quad (23)$$

Тут $\Phi_{1,2}^0(x)$ – функції, які задовольняють умову Гельдера на $[-1;1]$; $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$.

Враховуючи співвідношення [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_{1,2}(s) \frac{ds}{s-x} \bigg|_{x \rightarrow \pm 1} = \mp \operatorname{ctg}(\tilde{\tau}\pi) \frac{\Phi_{1,2}^0(\pm 1)}{(1-x)^{\tau_1}(1+x)^{\tau_2}} + \Phi_{1,2}^*(x), \quad (24)$$

де $\Phi_{1,2}^*(x)$ – регулярні при $x = \pm 1$ функції, із системи (22) після множення на $(1-x)^{\tau_1}(1+x)^{\tau_2}$ одержимо

$$\begin{cases} d\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right) \operatorname{ctg}(\tilde{\tau}\pi) \Phi_1^0(\pm 1) - \operatorname{ctg}(\tilde{\tau}\pi) \Phi_2^0(\pm 1) = 0; \\ \Phi_1^0(\pm 1) + d\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right) \Phi_2^0(\pm 1) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

причому $\tilde{\tau} = \begin{cases} \tau_1, & x \rightarrow 1, \\ \tau_2, & x \rightarrow -1. \end{cases}$

Система (25) відносно $\Phi_{1,2}^0(\pm 1)$ має ненульовий розв'язок, тому

$$\operatorname{ctg}(\tilde{\tau}\pi) \left(1 + d^2 \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0} \right) \right) = 0, \quad (26)$$

або $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2}$. (27)

На підставі (27) співвідношення (23) приймають вигляд

$$\Phi_{1,2}(x) = \frac{\Phi_{1,2}^0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1;1]. \quad (28)$$

Таким чином, в околі торців зони контакту нормальні напруження мають кореневу особливість.

Наближений розв'язок задачі. Чисельна реалізація задачі проведена модифікованим методом колокації Мультотпа-Каландія [4].

Згідно з (28) розв'язок системи (19), (20) вибираємо у вигляді

$$\Phi_{1,2}(x) = \frac{\Phi_{1,2}^0(\varphi)}{\sin \varphi}, \quad (29)$$

де $x = \cos \varphi$.

Для функцій $\Phi_{1,2}^0(\varphi)$ побудуємо інтерполяційні многочлени Лагранжа, вибравши в якості вузлів інтерполяції корені поліномів Чебишева першого роду порядку N_0 , вважаючи число N_0 парним. Як відомо [4], такі многочлени мають вигляд

$$\{\Phi_1^0(\varphi), \Phi_2^0(\varphi)\} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \{A_n, B_n\} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{N_0-1} \cos(m\varphi_n) \cos(m\varphi) \right]. \quad (30)$$

$$\text{Тут } \varphi_n = \frac{2n-1}{2N_0} \pi, \quad n = \overline{1, N_0}.$$

Враховуючи (29), (30) та відомі рівності [5]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi) \ln \left| \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{\mu} \right| d\varphi = \begin{cases} -\ln(2\mu), & n = 0, \\ -\frac{\cos(n\theta)}{n}, & n \neq 0; \end{cases} \quad (31)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{F(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} F(\cos \varphi_n),$$

запишемо квадратурні формули для обчислення особливих і регулярних інтегралів, які входять у систему (19), (20)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)} \right\} \ln |s - x| ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)} \right\} \ln |\cos \varphi - \cos \theta| \sin \varphi d\varphi = \quad (32)$$

$$= -\frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0-1} \left\{ \frac{A_n}{B_n} \right\} \left[\ln 2 + 2 \sum_{m=1}^{N_0-1} \frac{\cos m\varphi_n \cos m\theta}{m} \right], \quad x \in [-1; 1], \theta \in [0; \pi];$$

$$\pi \int_{-1}^1 \Phi_1(s) \ln \left| 2 \sin^2 \frac{\lambda + t}{2} \right| ds = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} A_n \ln \left| 2 \sin^2 \frac{\lambda + t_n}{2} \right|, \quad (33)$$

$$t_n = \arccos\left(\frac{b_0 - a_0}{2} \cos \varphi_n + \frac{a_0 + b_0}{2}\right), \quad \lambda = \arccos\left(\frac{b_0 - a_0}{2} \cos \theta + \frac{a_0 + b_0}{2}\right);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(s) ds = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} B_n; \quad (34)$$

$$\int_1^x \{\Phi_1(s), \Phi_2(s)\} ds = - \int_0^\theta \{\Phi_1(\varphi), \Phi_2(\varphi)\} \sin \varphi d\varphi =$$

$$= - \sum_{n=1}^{N_0} \{A_n, B_n\} \left[\theta + 2 \sum_{m=1}^{N_0-1} \frac{\cos m\varphi_n \sin m\theta}{m} \right], \quad x \in [-1; 1], \quad \theta \in [0; \pi]. \quad (35)$$

Також справедливими будуть співвідношення

$$\Phi_1(\lambda_k) = \frac{A_k}{\sin \varphi_k}; \quad \Phi_2(\lambda_k) = \frac{B_k}{\sin \varphi_k}, \quad k = \overline{1, N_0}. \quad (36)$$

Підставляючи (32)-(36) в систему (19), (20) і надаючи аргументу θ послідовно значення $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_0}$, а аргументу λ – відповідно значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_0}$, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих A_n, B_n, \tilde{C}_2

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N_0} A_n [(1-\nu)p_{kn} + d(\lambda_k)(-q_{kn} + r_{kn} - g)] + \\ + \sum_{n=1}^{N_0} B_n [q_{kn} + d(\lambda_k)(1-\nu)p_{kn}] - \tilde{C}_2 = -w \cos(N-2)\lambda_k + \\ + d(\lambda_k) \left[\frac{P_0}{2} (1-\nu) \left(1 - \frac{\lambda_k}{\pi} \right) + w \sin(N-2)\lambda_k \right], \quad k = \overline{1, N_0}; \\ A_k + d(\lambda_k) B_k = 0, \quad k = \overline{1, N_0}; \end{cases} \quad (37)$$

$$\sum_{n=1}^{N_0} B_n = -\frac{P_0}{\pi} \cdot \frac{N_0}{2}. \quad (38)$$

Тут введені позначення

$$p_{kn} = -\frac{1}{N_0} \left[\varphi_k + 2 \sum_{m=1}^{N_0-1} \frac{\cos m\varphi_n \sin m\varphi_k}{m} \right];$$

$$q_{kn} = -\frac{2}{N_0} \left[\ln 2 + 2 \sum_{m=1}^{N_0-1} \frac{\cos m\varphi_n \cos m\varphi_k}{m} \right];$$

$$r_{kn} = \frac{2}{N_0} \ln \left| 2 \sin^2 \frac{\lambda_k + t_n}{2} \right|;$$

$$w = \varepsilon(N-2)(1+\nu) \frac{P_0}{2\pi}; \quad g = \frac{2}{N_0} \cdot \ln \left| \frac{b_0 - a_0}{2} \right|.$$

Якщо розв'язок системи (37), (38) буде відомий, то контактні напруження T_p під штапом та кільцеві зусилля T_λ на контурі отвору L з врахуванням співвідношень (17) визначаються за формулами (4), (5).

Аналіз числових результатів. Для нескінченної ізотропної пластинки з трикутним отвором запропонованим вище методом досліджено вплив форми отвору та величини зони контакту на розподіл нормальних $\frac{T_p}{P_0}$ і

кільцевих $\frac{T_\lambda}{P_0}$ зусиль по контуру L . На рис. 2 наведено результати

розрахунку при $\varepsilon = 0.25$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{12}$, $\nu = 0.3$. Суцільні лінії побудовані

для $\beta_0 = \frac{\pi}{6}$, штрихові – для $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$, штрихпунктирні – для $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Аналогічні результати при $\varepsilon = -0.25$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{24}$, $\nu = 0.3$ зображені на

рис. 3. Тут суцільні лінії відповідають $\beta_0 = \frac{\pi}{12}$, штрихові – $\beta_0 = \frac{\pi}{6}$,

штрихпунктирні – $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$.

В наведених прикладах збільшення зони контакту супроводжується зменшенням контактних зусиль. На торцях зон контакту величини T_p і T_λ необмежені. На торцях вільних зон кільцеві зусилля приймають скінченні значення.

Всі розрахунки проведено для різних значень N_0 (до $N_0 = 64$ включно). Числові результати практично не змінюються, починаючи з $N_0 = 32$, що свідчить про добру збіжність методу колокації.

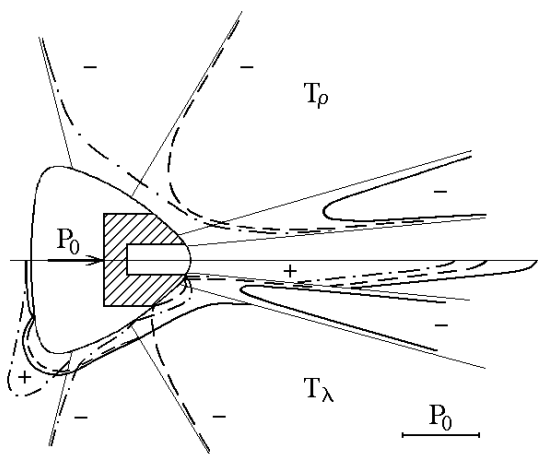


Рис. 2

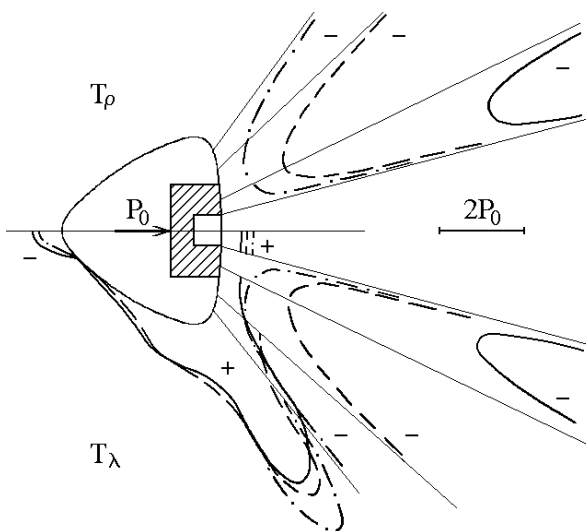


Рис. 3

Система інтегральних рівнянь (15) дозволяє розглянути низку часткових задач для пластинки з криволінійним отвором і різних типів жорстких штампів:

1) якщо в системі (15) покласти $\alpha_0 = 0$, то одержимо розв'язок задачі про тиск однозв'язного симетричного штампа з кутовими точками на контур криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці;

2) при $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \rightarrow \alpha_0$ однозв'язний штамп з кутовими точками вироджується в клиноподібний, та система (15) визначає розв'язок задачі про тиск зосередженої сили P_0 на контур криволінійного отвору в нескінченній пластинці;

3) покладаючи в (15) $\alpha_0 \rightarrow \beta_0$, $\beta_0 \neq 0$, приходимо до задачі про тиск на контур отвору в пластинці симетричної системи двох зв'язаних клиноподібних штампів, яка еквівалентна задачі про тиск на цей контур системи двох паралельних сил, відстань між якими незмінна.

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, 1966.- 708 с.
2. Мартынович Т.Л., Сяський Вас.А. Определение напряженного состояния пластинки с разомкнутым ребром жесткости // Изв. вузов. Строительство и архитектура.- 1985.- № 8.- С. 32-34.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М.: Наука, 1968.- 511 с.
4. Каландия Ф.И. Математические методы двумерной упругости.- М.: Наука, 1973.- 304 с.
5. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении.- М.: Машиностроение, 1986.- 176 с.

Рівненський державний гуманітарний університет

Надійшла 20.09.2005

Сяський В.А. ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ ДВУСВЯЗНОГО ШТАМПА С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ И КРИВОЛИНЕЙНОГО ОТВЕРСТИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ // *Задача о давлении жесткого двусвязного штампа с угловыми точками на контур криволинейного отверстия в бесконечной изотропной пластинке приведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими ядрами. Методом граничной*

коллокации найдено приближенное решение задачи и исследовано влияние формы отверстия и величины зоны контакта на напряженное состояние в пластинке.

Syas'kyi V.A. UNILATERAL CONTACT OF THE TWO-COHERENT STAMP WITH ANGULAR POINTS AND THE CURVILINEAR HOLE IN THE ENDLESS ISOTROPIC PLATE // *The problem about pressure of the hard two-coherent stamp with angular points on the contour of curvilinear hole in the endless isotropic plate is reduced to the system of two singular integral equations with logarithmic kernels. The approximate solution of the problem was found by the method of boundary collocation and was explored the influence of the hole form and the size of contact area upon the tense condition in the plate.*