

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК
СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Рівне - 2007

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашківській М.О.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Б.П.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О.
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопецький В.В. (<i>головний редактор</i>)
Каштан С.С. (<i>секретар</i>)	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 5 від 28.12.2007 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: abomba@ukr.net

Зміст

<i>Наші вітання Андрію Олексійовичу Сяському</i>	5
<i>Барановський С.В. Автоматизація розрахунку характеристик ідеальних та квазіідеальних полів у криволінійних чотирикутних областях довільної конфігурації обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями</i>	7
<i>Бомба А.Я., Русий Д.Е. Розв'язування нелінійних крайових задач на побудову квазіконформних сіток методом скінченних елементів</i>	17
<i>Бомба А.Я., Фурсачик О.А. Обернені сингулярно збурені задачі типу “конвекція–дифузія”</i>	28
<i>Булавацький В.М. Математичне моделювання процесу консолідації насиченого сольовим розчином релаксаційно-стискуваного пористого середовища</i>	37
<i>Власов Н.М., Федик И.И. Водородная проницаемость металлов при наличии внутренних напряжений</i>	50
<i>Гаврилюк В.І. Чисельне розв'язання модельних крайових задач на квазіконформні відображення в областях з вільними межами та однорідними включеннями</i>	65
<i>Єлгондичев К.К. Періодичні розв'язки лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією</i>	76
<i>Климюк Ю.Є. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” із запізненням в анізотропних середовищах</i>	84
<i>Кравченко О.П. Аналіз коливного кола з нелінійним конденсатором</i>	100

Малачівський П.С. Рівномірне наближення нелінійним виразом із точним відтворенням значень функції та її похідної в зовнішніх точках	109
Сафоник А.П. Нелінійні сингулярно збудені математичні моделі процесів фільтрування	119
Присяжнюк І.П. Дослідження нелінійного сингулярно збуденого процесу трикомпонентної конвективної дифузії з урахуванням утворення речовини, що випадає в осад	129
Турбал Ю.В. Функції щільності деяких нелінійних перетворень випадкових векторів	140
Янчук П.С. Квазіспектральний спосіб побудови кусково-поліноміальних наближень для задачі Діріхле	148
Визначні математики, механіки, інформатики сучасності	
До 70-річчя члена-кореспондента НАН України Богдана Йосиповича Пташника	177
Бурак Ярослав Йосипович – видатний вчений, організатор науки, громадський діяч	180
До 85-річчя видатного математика, академіка НАН України Ляшка Івана Івановича	185
Про наукову та науково-організаційну діяльність академіка І.В. Сергієнка	188
З історії математики, механіки, інформатики	
Возняк Г.М., Возняк О.Г. Основні віхи життя та наукової діяльності Миколи Чайковського	195

УДК 518.001.57

Барановський С.В.

**АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗРАХУНКУ ХАРАКТЕРИСТИК ІДЕАЛЬНИХ
ТА КВАЗІІДЕАЛЬНИХ ПОЛІВ У КРИВОЛІНІЙНИХ ЧОТИРИКУТНИХ
ОБЛАСТЯХ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ, ОБМЕЖЕНИХ ЛІНІЯМИ
ТЕЧІЇ ТА ЕКВІПОТЕНЦІАЛЬНИМИ ЛІНІЯМИ**

Пропонується підхід до автоматизації процедури комп'ютерного моделювання та розрахунку характеристик ідеальних та квазіідеальних полів у криволінійних чотирикутних областях довільної конфігурації обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями.

Вступ. Роботи [1 – 3] містять опис досить ефективної, зокрема, з обчислювальної точки зору методології розрахунку характеристик ідеальних та квазіідеальних полів у чотирикутних криволінійних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Виходячи з цієї методології, у роботі [4] запропоновано підхід до апроксимації кінематичних характеристик в'язкої водної течії деякою “фіктивною квазіідеальною” течією, що сприяло вдосконаленню методики математичного моделювання та дослідження процесів деформації незв'язного піщаного дна русла при його взаємодії з водною течією. Практичне застосування такого підходу певною мірою обмежується деякими труднощами при попередньому "ручному" виборі функцій для опису ділянок границі розрахункової області з метою їх якнайкращого наближення до реальних меж фізичних областей, де вивчаються фізичні процеси. Запропонований у даній роботі підхід до автоматизації процедури комп'ютерного моделювання та розрахунку характеристик ідеальних та квазіідеальних полів у криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, дозволяє усунути вказаний недолік та розширити коло практичного застосування згаданих вище математичних моделей.

Математична постановка задачі. Аналогічно до [2], розглянемо модельну задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в однозв'язній криволінійній чотирикутній області $G_z = ABCD$ ($z = x + iy$), обмеженій чотирма гладкими кривими $AB = \{z: x = f_1(y)\}$, $BC = \{z: y = f_2(x)\}$, $CD = \{z: x = f_3(y)\}$, $DA = \{z: y = f_4(x)\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, при умовах: $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0$ (де \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної кривої) [1 – 4]. Шляхом введення гармонічної функції $\psi = \psi(x, y)$ (функції течії), комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, і заміною останніх двох граничних умов на умови: $\psi|_{BC} = Q$, $\psi|_{AD} = 0$ (Q – невідомий параметр, повна витрата), здійснюється заміна цієї задачі більш загальною задачею на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на прямокутник (область комплексного потенціалу) $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$: $\psi_y = \kappa\varphi_x$, $\psi_x = -\kappa\varphi_y$ ($\kappa = 1$), при відповідності чотирьох кутових точок (див. рис. 1).

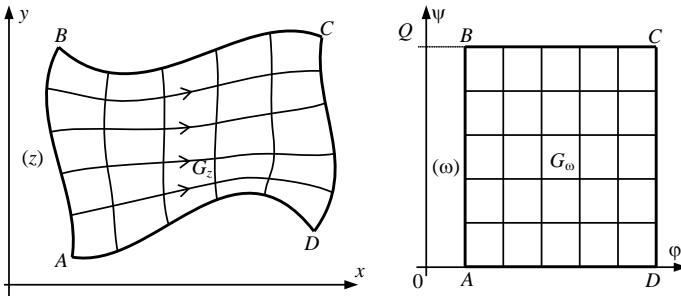


Рис. 1. Фізична область G_z та відповідна їй область комплексного потенціалу G_ω

Обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases} \quad (2)$$

Ця задача зводиться до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ при заданих нелінійних крайових умовах (2) та умовах Коші-Рімана на границі ∂G_ω області G_ω , які в деяких випадках зручніше [1 – 3] замінити на умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області.

Наближене розв'язання задачі побудови відображення прямокутника G_ω на криволінійну чотирикутну область G_z (при відповідності кутових точок) реалізується на основі запропонованого в [1 – 3] числового алгоритму або його модифікацій.

Апроксимація границь моделі фізичної області.

Варіант 1. Представимо функції f_i ($i = \overline{1,4}$) многочленами 3-го порядку у вигляді:

$$x = f_1(y) = (a_1 y + b_1)(y - y_A)(y - y_B) + \frac{y - y_A}{y_B - y_A}(x_B - x_A) + x_A, \quad (3)$$

$$y = f_2(x) = (a_2 x + b_2)(x - x_B)(x - x_C) + \frac{x - x_B}{x_C - x_B}(y_C - y_B) + y_B, \quad (4)$$

$$x = f_3(y) = (a_3y + b_3)(y - y_D)(y - y_C) + \frac{y - y_D}{y_C - y_D}(x_C - x_D) + x_D, \quad (5)$$

$$y = f_4(x) = (a_4x + b_4)(x - x_A)(x - x_D) + \frac{x - x_A}{x_D - x_A}(y_D - y_A) + y_A, \quad (6)$$

де (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , (x_C, y_C) , (x_D, y_D) – координати відповідно точок A , B , C , D ; a_i , b_i ($i = \overline{1,4}$) – невідомі коефіцієнти. Зазначимо, що така форма функції f_i ($i = \overline{1,4}$) досить зручна, оскільки автоматично задовольняє умові належності точок A, B, C, D відповідним кривим.

Для відшукування невідомих коефіцієнтів a_i , b_i ($i = \overline{1,4}$) задамо значення похідних функцій f_i' ($i = \overline{1,4}$) в точках A, B, C, D . Наприклад, для кривої $y = f_2(x)$ отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_B(x_B - x_C)a_2 + (x_B - x_C)b_2 = f_2'(x_B) - \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}, \\ x_C(x_C - x_B)a_2 + (x_C - x_B)b_2 = f_2'(x_C) - \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}, \end{cases}$$

в результаті розв'язання якої неважко знайти аналітичні вирази для обчислення значень a_2 , b_2 . Використання знайдених виразів для обчислення коефіцієнтів a_i , b_i ($i = \overline{1,4}$) дозволяє створити ефективну процедуру візуалізації процесу "підбору" форми ділянок границі фізичної області G_z , яка в режимі "реального часу" відображає зміну форми цих ділянок при зміні координат відповідних кутових точок та значень кутових коефіцієнтів дотичних в цих точках.

Варіант 2. Ширших можливостей для "підбору" форми ділянок границі області G_z можна досягти, якщо функції f_i ($i = \overline{1,4}$) представити многочленами 4-го порядку у вигляді:

$$x = f_2(y) = (a_1y^2 + b_1y + c_1)(y - y_A)(y - y_B) + \frac{y - y_A}{y_B - y_A}(x_B - x_A) + x_A, \quad (7)$$

$$y = f_2(x) = (a_2x^2 + b_2x + c_2)(x - x_B)(x - x_C) + \frac{x - x_B}{x_C - x_B}(y_C - y_B) + y_B, \quad (8)$$

$$x = f_3(y) = (a_3y^2 + b_3y + c_3)(y - y_D)(y - y_C) + \frac{y - y_D}{y_C - y_D}(x_C - x_D) + x_D, \quad (9)$$

$$y = f_4(x) = (a_4x^2 + b_4x + c_4)(x - x_A)(x - x_D) + \frac{x - x_A}{x_D - x_A}(y_D - y_A) + y_A, \quad (10)$$

де a_i, b_i, c_i ($i = \overline{1,4}$) – невідомі коефіцієнти.

Як і раніше, для відшукування невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i визначимо два рівняння шляхом задання значень похідної функції f_i' у відповідних кутових точках. Третє рівняння можемо отримати задавши значення другої похідної f_i'' в одній із проміжних точок відповідної ділянки границі області G_z . В результаті, наприклад, для кривої $y = f_2(x)$ отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_B^2(x_B - x_C)a_2 + x_B(x_B - x_C)b_2 + (x_B - x_C)c_2 = f_2'(x_B) - \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}, \\ x_C^2(x_C - x_B)a_2 + x_C(x_C - x_B)b_2 + (x_C - x_B)c_2 = f_2'(x_C) - \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}, \\ 2x_Cx_Ba_2 + (x_B - x_C)b_2 + 2c_2 = f_2''\left(\frac{x_C + x_B}{2}\right), \end{cases}$$

розв'язавши яку, неважко знайти аналітичні вирази для коефіцієнтів $a_2,$

$$b_2, c_2 \text{ в залежності від значень } f_2'(x_B), f_2'(x_C) \text{ та } f_2''\left(\frac{x_C + x_B}{2}\right).$$

Варіант 3. Представимо тепер функції f_i ($i = \overline{1,4}$) многочленами 5-го порядку у вигляді:

$$x = f_2(y) = (a_1y^3 + b_1y^2 + c_1y + d_1)(y - y_A)(y - y_B) + \frac{y - y_A}{y_B - y_A}(x_B - x_A) + x_A, \quad (11)$$

$$y = f_2(x) = (a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2)(x - x_B)(x - x_C) + \frac{x - x_B}{x_C - x_B}(y_C - y_B) + y_B, \quad (12)$$

$$x = f_3(y) = (a_3y^3 + b_3y^2 + c_3y + d_3)(y - y_D)(y - y_C) + \frac{y - y_D}{y_C - y_D}(x_C - x_D) + x_D, \quad (13)$$

$$y = f_4(x) = (a_4x^3 + b_4x^2 + c_4x + d_4)(x - x_A)(x - x_D) + \frac{x - x_A}{x_D - x_A}(y_D - y_A) + y_A, \quad (14)$$

де, як і раніше, a_i, b_i, c_i, d_i ($i = \overline{1,4}$) – коефіцієнти, що визначають форму відповідних кривих. Для їх відшукування задамо значення перших похідних функцій f'_i ($i = \overline{1,4}$) у відповідних кутових точках та значення других похідної f''_i ($i = \overline{1,4}$) в двох проміжних точках відповідних ділянок границі області G_z . В результаті, наприклад, для визначення невідомих коефіцієнтів a_2, b_2, c_2, d_2 можна скористатись такою системою рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_B^3(x_B - x_C)a_2 + x_B^2(x_B - x_C)b_2 + x_B(x_B - x_C)c_2 + (x_B - x_C)d_2 = \\ = f_2'(x_B) - (y_C - y_B)/(x_C - x_B), \\ x_C^3(x_C - x_B)a_2 + x_C^2(x_C - x_B)b_2 + x_C(x_C - x_B)c_2 + (x_C - x_B)d_2 = \\ = f_2'(x_C) - (y_C - y_B)/(x_C - x_B), \\ (27x_B^3 + 27x_B^2x_C - 15x_Bx_C^2 - 7x_C^3)a_2 + (36x_B^2 + 8x_Bx_C - 12x_C^2)b_2 + \\ + (40x_B - 8x_C)c_2 + 32d_2 = 16f_2''\left(\frac{3x_B + x_C}{4}\right), \\ (27x_C^3 + 27x_C^2x_B - 15x_Cx_B^2 - 7x_B^3)a_2 + (36x_C^2 + 8x_Cx_B - 12x_B^2)b_2 + \\ + (40x_C - 8x_B)c_2 + 32d_2 = 16f_2''\left(\frac{3x_C + x_B}{4}\right). \end{array} \right.$$

Результати числового експерименту. На рис. 2, 3 продемонстровані конфігурації модельної області G_z , ділянки границі якої (суцільні лінії) побудовані на основі запропонованого вище варіанту 1. Штриховими лініями тут представлені конфігурації ділянки границі AB побудованої на основі варіанту 2 при різних значеннях другої похідної $f_2''(x)$ в точці з абсцисою $0.5 \cdot (x_C + x_B)$. Як бачимо, використання варіанту 2 для апроксимації ділянок границь модельної області дозволяє змінювати їх конфігурацію в достатньо широких межах.

На рис. 4, 5 продемонстровані різні конфігурації ділянки границі AB модельної області G_z побудованої на основі варіанту 3 (штрихові лінії) при різних значеннях другої похідної $f_2''(x)$ в проміжних точках цієї ділянки. Як і раніше, тут границя модельної області G_z (суцільні лінії) отримана згідно варіанту 1.

Потрібно зазначити, що використання варіанту 3 для апроксимації ділянок границь дозволяє змінювати їх форму у більш широких межах, проте є більш чутливим до розміщення модельної області в обраній системі координат та вимогливіший до точності обчислення коефіцієнтів.

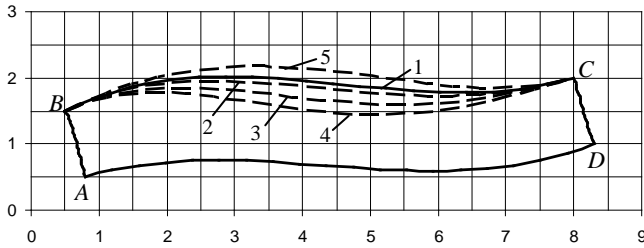


Рис. 2. 1) $f_2'(x_B) = 0.5$, $f_2'(x_C) = 0.3$; 2) $f_2''(0.5 \cdot (x_B + x_C)) = 0$;
 3) $f_2''(0.5 \cdot (x_B + x_C)) = 0.05$; 4) $f_2''(0.5 \cdot (x_B + x_C)) = 0.1$;
 5) $f_2''(0.5 \cdot (x_B + x_C)) = -0.08$

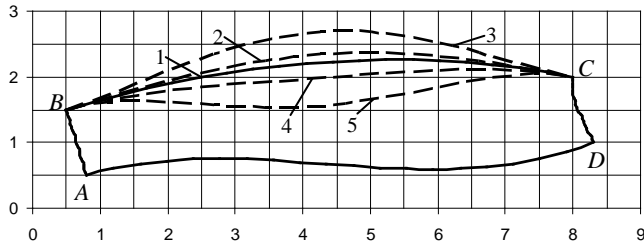


Рис. 3. 1) $f_2'(x_B) = 0.3$, $f_2'(x_C) = -0.2$; 2) $f_2''(0.5 \cdot (x_B + x_C)) = -0.1$;
 3) $f_2''(0.5 \cdot (x_B + x_C)) = -0.2$; 4) $f_2''(0.5 \cdot (x_B + x_C)) = 0$; 5) $f_2''(0.5 \cdot (x_B + x_C)) = 0.12$

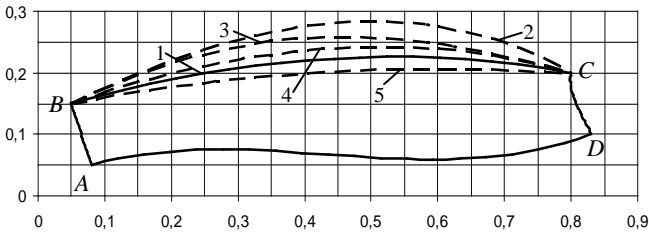


Рис. 4. 1) $f_2'(x_B) = 0.3$, $f_2'(x_C) = -0.2$;
 2) $f_2''(0.25 \cdot (3x_B + x_C)) = -0.001$, $f_2''(0.25 \cdot (3x_C + x_B)) = -0.2$;
 3) $f_2''(0.25 \cdot (3x_B + x_C)) = -1$, $f_2''(0.25 \cdot (3x_C + x_B)) = -0.4$;
 4) $f_2''(0.25 \cdot (3x_B + x_C)) = -0.06$, $f_2''(0.25 \cdot (3x_C + x_B)) = -0.06$;
 5) $f_2''(0.25 \cdot (3x_B + x_C)) = -0.005$, $f_2''(0.25 \cdot (3x_C + x_B)) = -0.005$

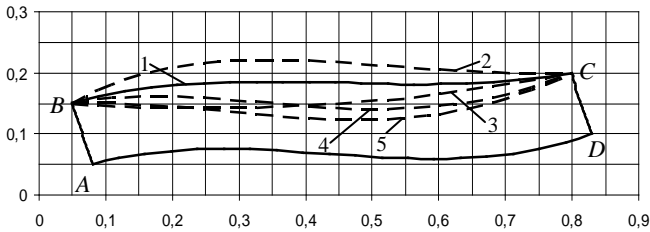


Рис. 5. 1) $f_2'(x_B) = 0.3$, $f_2'(x_C) = 0.2$;

2) $f_2''(0.25 \cdot (3x_B + x_C)) = -1.1$, $f_2''(0.25 \cdot (3x_C + x_B)) = 0.5$;

3) $f_2''(0.25 \cdot (3x_B + x_C)) = -1.5$, $f_2''(0.25 \cdot (3x_C + x_B)) = 0.005$;

4) $f_2''(0.25 \cdot (3x_B + x_C)) = -0.83$, $f_2''(0.25 \cdot (3x_C + x_B)) = 0.5$;

5) $f_2''(0.25 \cdot (3x_B + x_C)) = -0.64$, $f_2''(0.25 \cdot (3x_C + x_B)) = 0.42$

Висновки. Представлений в роботі підхід до апроксимації ділянок границі модельних криволінійних чотирикутних областей обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями дозволяє розширити межі практичного використання та певною мірою автоматизувати процедуру комп'ютерного моделювання та розрахунку характеристик відповідних ідеальних та квазіідеальних полів. Крім того, такий підхід дозволяє створювати ефективні процедури візуалізації процесу підбору форми ділянок границь модельної області, що є досить актуальним при вивченні реальних фізичних процесів.

1. Бомба А.Я., Каштан С.С. Про нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення у многозв'язних областях // Вісник Львівського національного університету. Серія: Прикладна математика.- 2000.- Вип. 2.- С. 3-14.
2. Бомба А.Я., Каштан С.С. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник.- 2001.- Вип. 8.- С. 9-22.
3. Бомба А.Я., Каштан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки.- 2001.- Вип. 4.- С. 182-195.

4. С. Барановський, А. Бомба, В. Гаврилюк. Про один підхід до апроксимації характеристик в'язкої водної течії та проблеми моделювання деформації дна русла // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2006.- Т. 11, №2.- С. 170-177.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

Надійшла 05.08.2006

Барановский С.В. АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ИДЕАЛЬНЫХ И КВАЗИИДЕАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ У КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ, ОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНИЯМИ ТОКА И ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ // *Предлагается подход к автоматизации процедуры компьютерного моделирования и расчета характеристик идеальных и квазиидеальных полей у криволинейных четырехугольных областях произвольной конфигурации, ограниченных линиями тока и эквипотенциальными линиями.*

Baranovsky S.V. AUTOMATION OF CALCULATION OF CHARACTERISTICS IDEAL AND QUASIIDEAL FIELDS AT CURVILINEAR QUADRANGULAR AREAS OF THE ANY CONFIGURATION, BOUNDED BY LINES OF CURRENT AND EQUIPOTENTIAL LINES // *Is offered the approach to automation of procedure of computer modelling and calculation of characteristics ideal and quasiideal fields at curvilinear quadrangular areas of an any configuration, bounded by lines of current and equipotential lines.*