

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК
СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Рівне - 2007

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашківській М.О.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Б.П.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О.
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопецький В.В. (<i>головний редактор</i>)
Каштан С.С. (<i>секретар</i>)	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 5 від 28.12.2007 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: abomba@ukr.net

Зміст

<i>Наші вітання Андрію Олексійовичу Сяському</i>	5
<i>Барановський С.В. Автоматизація розрахунку характеристик ідеальних та квазіідеальних полів у криволінійних чотирикутних областях довільної конфігурації обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями</i>	7
<i>Бомба А.Я., Русий Д.Е. Розв'язування нелінійних крайових задач на побудову квазіконформних сіток методом скінченних елементів</i>	17
<i>Бомба А.Я., Фурсачик О.А. Обернені сингулярно збурені задачі типу “конвекція–дифузія”</i>	28
<i>Булавацький В.М. Математичне моделювання процесу консолідації насиченого сольовим розчином релаксаційно-стискуваного пористого середовища</i>	37
<i>Власов Н.М., Федик И.И. Водородная проницаемость металлов при наличии внутренних напряжений</i>	50
<i>Гаврилюк В.І. Чисельне розв'язання модельних крайових задач на квазіконформні відображення в областях з вільними межами та однорідними включеннями</i>	65
<i>Єлгондичев К.К. Періодичні розв'язки лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією</i>	76
<i>Климюк Ю.Є. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” із запізненням в анізотропних середовищах</i>	84
<i>Кравченко О.П. Аналіз коливного кола з нелінійним конденсатором</i>	100

Малачівський П.С. Рівномірне наближення нелінійним виразом із точним відтворенням значень функції та її похідної в зовнішніх точках	109
Сафоник А.П. Нелінійні сингулярно збудені математичні моделі процесів фільтрування	119
Присяжнюк І.П. Дослідження нелінійного сингулярно збуденого процесу трикомпонентної конвективної дифузії з урахуванням утворення речовини, що випадає в осад	129
Турбал Ю.В. Функції щільності деяких нелінійних перетворень випадкових векторів	140
Янчук П.С. Квазіспектральний спосіб побудови кусково-поліноміальних наближень для задачі Діріхле	148
Визначні математики, механіки, інформатики сучасності	
До 70-річчя члена-кореспондента НАН України Богдана Йосиповича Пташника	177
Бурак Ярослав Йосипович – видатний вчений, організатор науки, громадський діяч	180
До 85-річчя видатного математика, академіка НАН України Ляшка Івана Івановича	185
Про наукову та науково-організаційну діяльність академіка І.В. Сергієнка	188
З історії математики, механіки, інформатики	
Возняк Г.М., Возняк О.Г. Основні віхи життя та наукової діяльності Миколи Чайковського	195

УДК 532.546-532.72

Бомба А.Я., Русий Д.Є.

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА
ПОБУДОВУ КВАЗІКОНФОРМНИХ СІТОК МЕТОДОМ
СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

На основі методу скінченних елементів розроблено алгоритм побудови динамічних сіток квазіідеальних полів для чотирикутних областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища.

Вступ. У роботах [1 – 4] розроблено метод та відповідні алгоритми числового розв'язання модельних нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення для криволінійних чотирикутних областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. В їх основу покладено ідею переходу від прямих постановок задач (на побудову динамічних сіток потенціальних та квазіпотенціальних полів, побудову різного роду профілів, зокрема – крилових, та поля швидкості із паралельним розрахунком різних інших характеристик) до відповідних обернених. Причому під оберненням такого роду задач тут мається на увазі як перехід від прямих задач до задач на конформне відображення відповідної області комплексного потенціалу на вихідну область, так і той факт, що вони містять невідомі параметри (витрати) та вільні ділянки границь і ін. при додаткових відомостях про їх розв'язки.

Зазначимо, що складністю обернених задач на квазіконформні відображення є те, що вони містять невідомі параметри (шукані повні витрати), що знаходяться у процесі розв'язування задачі, хоча проблема сітки вирішується автоматично. При розв'язуванні ж прямих задач для областей складної геометрії є проблема вибору сітки, але знаходження

розв'язку задачі та відповідних інтегральних характеристик проводяться автономно (послідовно) без організації ітеративного процесу для розрахунку певного стану системи (при цьому, як наслідок, зменшується число невідомих при числових розрахунках та збільшується швидкість роботи алгоритму). Метою даної роботи є розробка спеціального підходу для побудови динамічних сіток квазіідеальних полів [6] для чотирикутних областей, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями.

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу на знаходження квазіпотенціалу $\varphi = \varphi(x, y)$, поля швидкості $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$, повної витрати та побудову рівномірної динамічної сітки квазіідеального поля ($\vec{v} = k(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \cdot \nabla \varphi$, $\text{div}(\vec{v}) = 0$, k – достатньо гладка обмежена функція, що характеризує провідність відповідного схильного до деформації середовища; зокрема $k = k_0(x, y)$ – у випадку відсутності деформації) в однозв'язній чотирикутній криволінійній області $G_z = ABCD$ ($G_z \subset R^2$), що обмежена чотирма гладкими кривими $AB = \{z : f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A , B , C , D перетинаються під прямими кутами, при умовах $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{BC} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{DA} = 0$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < \infty$, де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої.

Шляхом введення функції течії $\psi = \psi(x, y)$ (квазікомплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$) у роботах [1 – 4] задачі такого роду зводились до задач на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z)$ даної області G_z на

відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$k(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \psi|_{BC} = Q. \quad (2)$$

Такі задачі розв'язувалися шляхом побудови відповідного оберненого квазіконформного відображення $G_\omega \rightarrow G_z$, а саме розв'язку оберненої задачі:

$$\begin{cases} k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0. \end{cases}$$

Ми ж пропонуємо вихідну задачу звести до розв'язання таких трьох задач:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \nabla \varphi) = 0, \\ \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{BC} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{DA} = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$Q = \int_{AB} k(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds; \quad (4)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k^{-1}(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \nabla \psi) = 0, \\ \psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{AB} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{CD} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Загальна структура побудови розв'язку полягає в почерговій фіксації („заморожуванні”) характеристик середовища та характеристик процесу (градієнта квазіпотенціалу) наступним чином.

1. На початковому етапі фіксуємо коефіцієнт провідності:

$$k = k(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = k_0(x, y) .$$

2. Розв'язуємо послідовно відповідні лінійні задачі (3), (4), (5) з використанням методу скінченних елементів та знаходимо $\tilde{\varphi}$ – наближення φ у „робочих” вузлах $(\tilde{x}_l, \tilde{y}_l), l \in J$ (де J – множина вузлів, породжена процесом розбиття області на скінченні елементи, тобто триангуляції області).

3. Обчислюємо $\tilde{\varphi}_x, \tilde{\varphi}_y$, „уточнюємо” коефіцієнт k згідно заданих залежностей та знову розв'язуємо задачі (3) – (5); процес продовжуємо до стадії його стабілізації, тобто виконання наступних умов:

$$\left| \varphi^{(p)} - \varphi^{(p-1)} \right| \leq \varepsilon_1 , \quad (6)$$

$$\left| k^{(p)} - k^{(p-1)} \right| \leq \varepsilon_2 , \quad (7)$$

де ε_1 та ε_2 – достатньо малі величини.

4. Маючи на G_z кусково-лінійне наближення для φ та ψ , будуємо рівномірну динамічну сітку з наступних умов: $\varphi(x, y) = \varphi_i$, $\psi(x, y) = \psi_j$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $\varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi$, $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/n$, $\psi_j = \Delta\psi \cdot j$, $\Delta\psi = Q/m$. В результаті розв'язання відповідних систем рівнянь отримуємо вузлові точки (x_{ij}, y_{ij}) цієї сітки.

Для генерації сітки скінченних елементів в області G_z використано модифікований метод триангуляції, описаний в [7], [8]. Зокрема, для згущення межових вузлів у „вузьких” підобластях,

довжини відповідних «складових відрізків» вибирались в залежності від радіусу кривизни ланки кривої, що апроксимується ламаною. Розбиття на скінченні елементи внутрішності отриманого многокутника проведено методом фронтальної триангуляції [7], [8] з вибором найменшого кута та застосуванням топологічного згладження

Лапласа [9] вигляду $\tilde{z} = z + r \left[\frac{1}{n(z)} \sum_{i=1}^{n(z)} (z_i - z) \right]$ ($n(z)$ – кількість

навоколишніх, сусідніх із z , «здіяних» вузлів, z_i – їх координати, r – коефіцієнт згладження) на кожному етапі «введення внутрішнього вузла».

Введемо скінченно-вимірний підпростір M_0 з базисом – множиною кусково-лінійних функцій $g_l(x, y)$, визначених для кожного вузла $l \in J$ в трикутнику G_e наступним чином:

$$g_l(x, y) = g_l^e(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) = (x_l, y_l), \\ \alpha_l^e + \beta_l^e x + \gamma_l^e y, & (x, y) \in G_e, \\ 0, & (x, y) \notin G_e. \end{cases}$$

Тут e – номер трикутника G_e ($G_z = \bigcup_e G_e$), однією з вершин якого є

(x_l, y_l) ; α_l^e , β_l^e , γ_l^e – константи. Застосувавши метод Бубнова–Гальоркіна [12] до задачі вигляду

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k(x, y, \varphi^{(p-1)}, \psi^{(p-1)}, \varphi_x^{(p-1)}, \varphi_y^{(p-1)}) \nabla \varphi^{(p)}) = 0, \\ \varphi^{(p)} \Big|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi^{(p)} \Big|_{CD} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \Big|_{BC} = \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} \Big|_{DA} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

(лінеаризованої задачі (3)), де p – крок ітерації, $\varphi^{(0)}$ – числовий розв'язок задачі при $k = k_0(x, y)$, знаходимо числовий розв'язок $\varphi^{(p)}$

(наближення $\tilde{\varphi}$). Далі знаходимо Q . Маючи значення Q , в результаті розв'язання задачі (5), визначаємо $\tilde{\psi}$ – наближення ψ .

Вузли $(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})$ квазіконформної рівномірної динамічної сітки знаходимо як результат числового розв'язання (наприклад, методом Ньютона) системи рівнянь:

$$P_{\tilde{\varphi}}(x, y) = \tilde{\varphi}_i, P_{\tilde{\psi}}(x, y) = \tilde{\psi}_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

де $P_{\tilde{\varphi}}(x, y)$ та $P_{\tilde{\psi}}(x, y)$ скінченно-елементні інтерполяційні многочлени вигляду:

$$P_{\tilde{\varphi}}(x, y) = \sum_{l \in J} \tilde{\varphi}(x_l, y_l) g_l(x, y), \quad P_{\tilde{\psi}}(x, y) = \sum_{l \in J} \tilde{\psi}(x_l, y_l) g_l(x, y).$$

Числові експерименти.

1. Розглянемо випадок, коли $f_1 = y$, $f_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)x^3 + 3(\alpha_2 - \alpha_1)x^2 + \alpha_1$, $f_3 = 1$, $f_4 = x$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 2$, $\varphi^* = 1$, $\varphi_* = 0$,

$$k(x, y, \varphi, \psi, \varphi_x, \varphi_y) = k(I) = \begin{cases} k_0, & I \leq I_1, \\ k_0 + \alpha(I - I_1)(I - I_2), & I_1 < I < I_3, \\ k_*, & I \geq I_3, \end{cases} \quad (10)$$

де $k_* = k_0 + \alpha(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)$, $I_1 < I_2 < I_3$, $I = |\nabla \varphi|$, $k_0 = 0.5$, $\alpha = 0.01$.

У результаті проведених числових розрахунків отримано поле градієнтів фільтрації, швидкості, коефіцієнта фільтрації, динамічну сітку (див. рис. 1 та рис. 2), та наступні характеристики процесу: $Q = Q_0 = 0.151$ ($\alpha = 0$) – величина потоку за умов відсутності деформації; $Q_* - Q_0 = 0.00306$ (Q_* – повна витрата за умов деформації); $I_{\max} = 3.411$, $I_{\min} = 0.001$ – максимальне та мінімальне значення градієнта фільтрації.

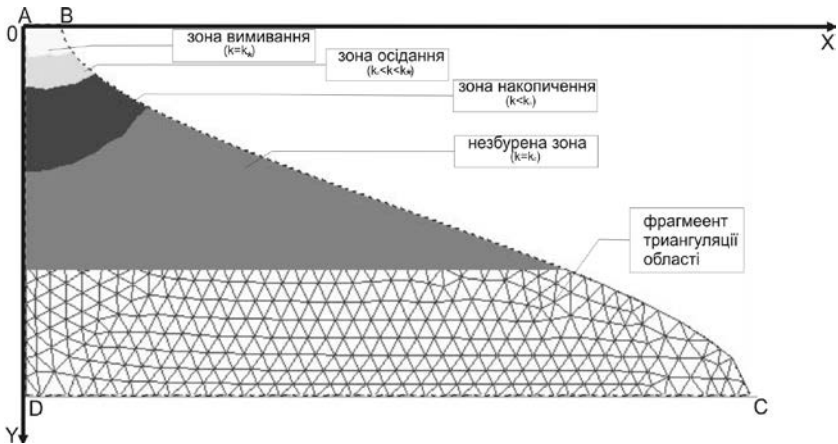


Рис. 1. Зони збурення та фрагмент триангуляції області

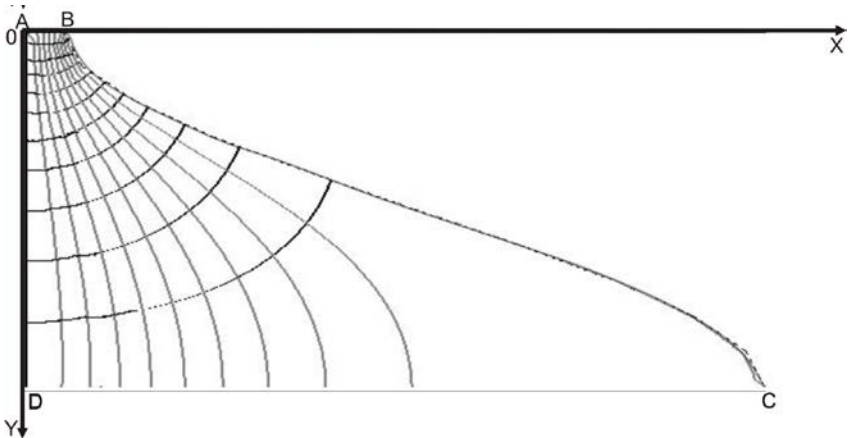


Рис. 2. Динамічна сітка згідно (10)

2. На рис. 3, 4 зображені відповідні результати при $f_1 = x$, $f_2 = y - 25 + 7 \cos(x/5)$, $f_3 = x - 10\pi$, $f_4 = y - 3 - 3 \cos(x/5)$, $\varphi^* = 10$, $\varphi_* = 0$,

$$k(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = k(I) = \begin{cases} k_0, & I < I_1, \\ k_0 + \alpha(I - I_1)(I - I_2), & I_1 \leq I \leq I_3, I_\varphi \leq 0, \\ k_*, & I > I_3; \\ k_0, & I < I_1^*, \\ k_0 + \beta(I - I_1^*), & I_1^* \leq I \leq I_2^*, I_\varphi > 0, \\ k^*, & I > I_2^*; \end{cases} \quad (11)$$

де $k_* = k_0 + \alpha(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)$, $k^* = k_0 + \beta(I_2^* - I_1^*)$, $I_1 < I_2 < I_3$, $I = |\nabla \varphi|$,
 $k_0 = 1$, $\alpha = 0.125$, $\beta = 1$, $I_1 = 0.3$, $I_2 = 0.35$, $I_3 = 0.4$, $I_1^* = 0.37$,
 $I_2^* = 0.4$. При цьому, $Q_0 = 6.453$, $Q_* - Q_0 = 0.0115$, $I_{\max} = 0.6144$,
 $I_{\min} = 0.0371$.

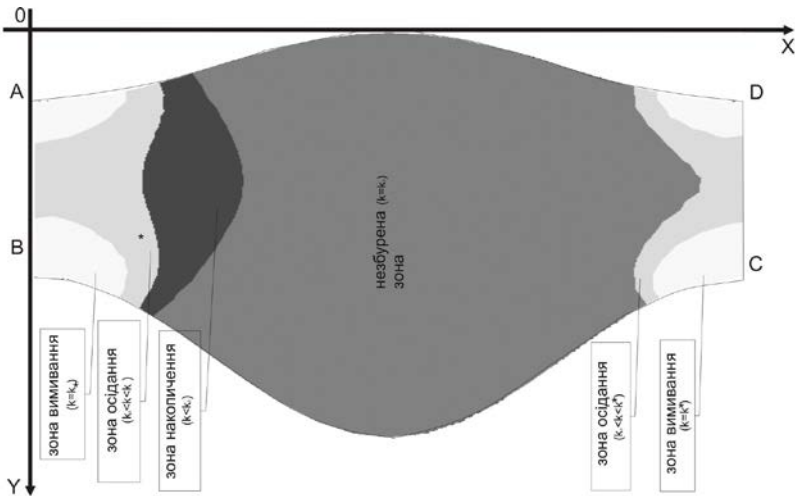


Рис. 3. Зони збурення згідно (11)

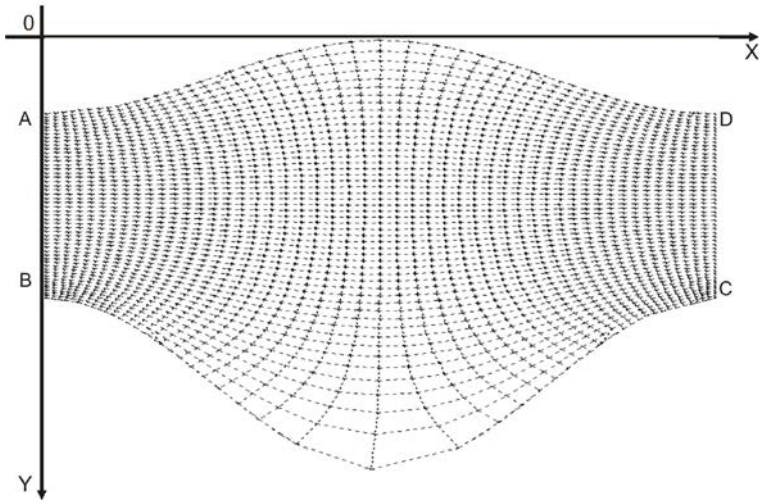


Рис.4. Динамічна сітка згідно (11)

Висновки і зауваження. Отже, здійснюючи почергове „заморожування” характеристик середовища та процесу, вихідну модельну нелінійну задачу, що враховує їх взаємовплив зведено до послідовності відповідних лінійних задач – прямих аналогів відповідних обернених задач на конформні відображення. При цьому зазначимо, що кожна з ітерацій відображає стан системи на певному часовому проміжку, а зупинка процесу з заданою ε -точністю співпадає із стабілізацією процесу. Тобто, незважаючи на стаціонарність постановки вихідної задачі, все ж на проміжку часу від початку до стадії стабілізації побудовані „компоненти алгоритму” дозволяють розвивати відповідний процес у часі. **У перспективі** перенесення розробленої методики на відповідні просторові аналоги.

1. Бомба А.Я., Кацман С.С. Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник.- 2001.- Вип. 8.- С. 9-22.
2. Бомба А.Я. Про метод сумарних зображень розв’язання нелінійних

- крайових задач на конформні відображення в шаруватих середовищах // Волинський математичний вісник.- 2000.- Вип. 7.- С. 17-21.
3. *Бомба А.Я., Кацтан С.С.* Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник.- 1999.- Вип. 6.- С. 25-36.
 4. *Бомба А.Я., Кацтан С.С., Кузьменко А.П.* Про застосування методу сумарних зображень до розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення // Волинський математичний вісник. - 1998.- Вип. 5.- С. 16-25.
 5. *Бомба А.Я.* Просторові сингулярно-збурені крайові задачі типу “конвекція–дифузія” // Волинський математичний випуск. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 27-36.
 6. *Бомба А.Я.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених нелінійних задач типу “фільтрація-дифузія” за умов взаємовпливу градієнтів потенціалу та коефіцієнта провідності середовища // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 7.- С. 17-21.
 7. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації солевих розчинів: Монографія.- Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004.- 211 с.
 8. *Мартинюк П.М., Чума А.С.* Побудова трикутних сіток для методу скінченних елементів // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 96-106.
 9. *Canann S.A., S.N. Muthukrishnan and R.K. Phillips (1996)*, Topological Refinement Procedures for Triangular Finite Element Meshes, Engineering with Computers // Springer-Verlag, Vol. 12, pp. 243-255, December 1996 (submitted for publication in 1994).
 10. *Borouchaki, H. and P. Frey (1998)*, Adaptive triangular-quadrilateral mesh generation // Int. J. Numer. Meth. Engng., 41, 915-934.
 11. *Marcum, David L. and Nigel P. Weatherill (1995)*, Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection // AIAA Journal, AIAA, Vol 33, Num 9, pp. 1619-1625.
 12. *Марчук Г.И.* Методы вычислений.- М.: Наука, 1980.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
E-mail : abomba@ukr.net

Надійшла 11.04.2007

Бомба А.Я., Русый Д.Е. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПОСТОРЕНИЕ КВАЗИКОНФОРМНЫХ СЕТОК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ

ЭЛЕМЕНТОВ // *На основе метода конечных элементов разработан алгоритм построения динамических сеток квазиидеальных полей для четырехугольных областей, ограниченных линиями тока и эквипотенциальными линиями, с учетом обратного воздействия характеристик процесса на характеристики среды.*

Bomba A.Y., Rusyy D.E. SOLVING NONLINEAR BOUNDARY PROBLEMS TO CONSTRUCT QUASICONFORMIC GRIDS WITH THE FINFITE ELEMENT METHOD // *Developed algorithm based on the finite element method to construct dynamic grids of quasiideal fields over quadrangular domains bounded with current-flow lines and equipotential lines with inverse dependence of the process on the medium characteristics.*