

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК  
СЕРІЯ  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 4 (13)**

Рівне - 2007

**"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика"** публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

**"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика".**  
**The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".**

*Редакційна колегія*

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашківській М.О.
Бомба А.Я. ( <i>відповідальний редактор</i> )	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Б.П.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О.
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопецький В.В. ( <i>головний редактор</i> )
Каштан С.С. ( <i>секретар</i> )	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. ( <i>технічний секретар</i> )	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 5 від 28.12.2007 р.).

**Адреса редакції:** 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: abomba@ukr.net

## Зміст

<i>Наші вітання Андрію Олексійовичу Сяському</i> .....	5
<i>Барановський С.В. Автоматизація розрахунку характеристик ідеальних та квазіідеальних полів у криволінійних чотирикутних областях довільної конфігурації обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями</i> .....	7
<i>Бомба А.Я., Русий Д.Е. Розв'язування нелінійних крайових задач на побудову квазіконформних сіток методом скінченних елементів</i> .....	17
<i>Бомба А.Я., Фурсачик О.А. Обернені сингулярно збурені задачі типу “конвекція–дифузія”</i> .....	28
<i>Булавацький В.М. Математичне моделювання процесу консолідації насиченого сольовим розчином релаксаційно-стискуваного пористого середовища</i> .....	37
<i>Власов Н.М., Федик И.И. Водородная проницаемость металлов при наличии внутренних напряжений</i> .....	50
<i>Гаврилюк В.І. Чисельне розв'язання модельних крайових задач на квазіконформні відображення в областях з вільними межами та однорідними включеннями</i> .....	65
<i>Єлгондичев К.К. Періодичні розв'язки лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією</i> .....	76
<i>Климюк Ю.Є. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” із запізненням в анізотропних середовищах</i> .....	84
<i>Кравченко О.П. Аналіз коливного кола з нелінійним конденсатором</i> .....	100

<i>Малачівський П.С. Рівномірне наближення нелінійним виразом із точним відтворенням значень функції та її похідної в зовнішніх точках</i> .....	109
<i>Сафоник А.П. Нелінійні сингулярно збудені математичні моделі процесів фільтрування</i> .....	119
<i>Присяжнюк І.П. Дослідження нелінійного сингулярно збуденого процесу трикомпонентної конвективної дифузії з урахуванням утворення речовини, що випадає в осад</i> .....	129
<i>Турбал Ю.В. Функції щільності деяких нелінійних перетворень випадкових векторів</i> .....	140
<i>Янчук П.С. Квазіспектральний спосіб побудови кусково-поліноміальних наближень для задачі Діріхле</i> .....	148
Визначні математики, механіки, інформатики сучасності	
<i>До 70-річчя члена-кореспондента НАН України Богдана Йосиповича Пташника</i> .....	177
<i>Бурак Ярослав Йосипович – видатний вчений, організатор науки, громадський діяч</i> .....	180
<i>До 85-річчя видатного математика, академіка НАН України Ляшка Івана Івановича</i> .....	185
<i>Про наукову та науково-організаційну діяльність академіка І.В. Сергієнка</i> .....	188
З історії математики, механіки, інформатики	
<i>Возняк Г.М., Возняк О.Г. Основні віхи життя та наукової діяльності Миколи Чайковського</i> .....	195

УДК 518.61.001.573

**Бомба А.Я., Фурсачик О.А.****ОБЕРНЕНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ “КОНВЕКЦІЯ–ДИФУЗІЯ”**

*Побудовано алгоритм асимптотичного розв'язку оберненої сингулярно збуреної крайової задачі типу “конвекція–дифузія” з невідомим коефіцієнтом дифузії.*

**Вступ.** Використовуючи методологію переходу від координат фізичної області фільтрації до відповідної області комплексного потенціалу, у роботах [1, 2] розвинуто асимптотичні методи [5, 6] для розв'язування модельних сингулярно збурених параболічних задач типу “фільтрація–конвекція–дифузія–масообмін” в чотирикутних криволінійних областях, обмежених двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями, за умов переважання конвективних складових процесу над дифузійними. На даний час (див., напр., [7 – 9]) встановленні умови існування та єдиності розв'язків подібних класів обернених параболічних задач для прямокутних областей.

У цій роботі йдеться про асимптотичне розв'язування розв'язків задач типу “конвекція–дифузія”, якщо відомо, що невідомий коефіцієнт дифузії залежить лише від часу.

**Постановка задачі.** Для області  $G = G_z \times (0, \infty)$ , де  $G_z = ABCD$  ( $z = x + iy$ ) – криволінійна прямокутна чотирикутна область (див. рис. 1 а), розглядатимемо таку обернену модельну задачу процесу конвективної дифузії при фільтрації у відповідному однорідному пористому середовищі:

$$\varepsilon b(t) \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} - v_y(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (1)$$

$$c(x, y, 0) = c_0^0(x, y); \quad (2)$$

$$c|_{AB} = c_*(M, t), \quad c|_{CD} = c^*(M, t), \quad c|_{AD} = c_\Delta(M, t),$$

$$c|_{BC} = c^\Delta(M, t); \quad (3)$$

$$b(t) \int_{AB} \frac{\partial c(M, t)}{\partial n} dl = c_*(t) \ell; \quad (4)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad} \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*,$$

$$\frac{d\varphi}{dn} \Big|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{DA} = 0, \quad (5)$$

де  $c(x, y, t)$  – концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці  $(x, y)$  в момент часу  $t$ ,  $M$  – біжуча точка відповідної кривої,  $n$  – зовнішня нормаль до відповідної кривої,  $\varepsilon b(t)$  – коефіцієнт дифузії,  $b(t)$  – достатньо гладка обмежена функція,  $\varepsilon$  – малий параметр ( $\varepsilon > 0$ ),  $\ell$  – довжина кривої  $AB$ ,  $\varphi$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  – відповідно потенціал та компоненти його швидкості в пористому середовищі  $G_z$ .

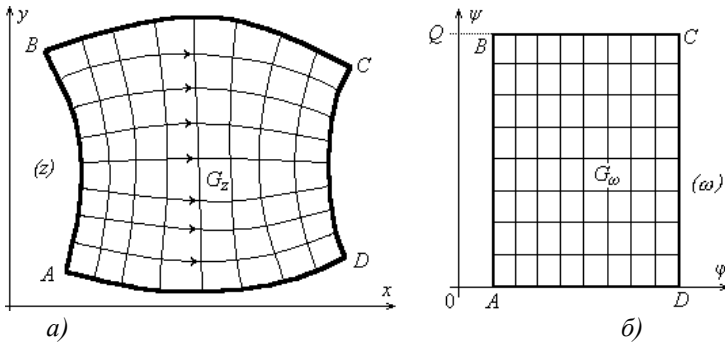


Рис. 1. Фізична область  $G_z$  (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_w$  (б)

Шляхом введення гармонічної функції  $\psi = \psi(x, y)$  (функції течії), комплексно спряженої до  $\varphi = \varphi(x, y)$ , і заміною останніх двох граничних умов (5) на умови:  $\psi|_{BC} = Q$ ,  $\psi|_{AD} = 0$  (де  $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$  – потік через довільний поперечний переріз  $G_z$ ), задачу (5) замінимо більш загальною задачею на конформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  фізичної області  $G_z$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  (див. рис. 1 б) при відповідності чотирьох кутових точок.

Припустивши, що задача (5) є розв’язаною [3], зокрема знайдено поле швидкості  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ , здійснюємо заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi)$  у рівнянні (1) та умовах (2) – (4) і приходимо до відповідної “дифузійної задачі” для області  $G_w$ :

$$\varepsilon a(t) v^2(\varphi, \psi) (u_{\varphi\varphi} + u_{\psi\psi}) - v^2(\varphi, \psi) u_\varphi = u_t, \quad (6)$$

$$u(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \quad (7)$$

$$u(\varphi_*, \psi, t) = u_*(\psi, t), \quad u(\varphi^*, \psi, t) = u^*(\psi, t),$$

$$u(\varphi, 0, t) = u_\Delta(\varphi, t), \quad u(\varphi, Q, t) = u^\Delta(\varphi, t), \quad (8)$$

$$a(t) \int_0^Q u_\varphi(\varphi_*, \psi, t) d\psi = u_*^*(t), \quad (9)$$

де  $u(\varphi, \psi, t) = c(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t)$ ,  $b(t) = a(t)$  і т.д.

**Асимптотичне наближення розв’язку.** Розв’язок задачі (6) – (9) для знаходження невідомих  $u(\varphi, \psi, t)$  та  $a(t)$  з точністю  $O(\varepsilon^{n+1})$  шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$u(\varphi, \psi, t) = \left( u_0(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i u_i(\varphi, \psi, t) \right) + \sum_{i=0}^{n+1} \pi_i(\xi, \psi, t) \varepsilon^i + \sum_{i=0}^{n+1} \underline{p}_{i/2}(\varphi, \eta, t) \varepsilon^{i/2} + \sum_{i=0}^n \overline{p}_{i/2}(\varphi, \mu, t) \varepsilon^{i/2} + R_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (10)$$

$$a(t) = a_0(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i a_i(t) + r_n(t, \varepsilon), \quad (11)$$

де  $u_i(\varphi, \psi, t)$ ,  $a_i(t)$  ( $i = \overline{0, n}$ ) – члени регулярної частини асимптотики, зокрема:  $u_0(\varphi, \psi, t)$  – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу);  $u_i(\varphi, \psi, t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – поправки, які враховують вплив дифузії всюди у даній області (за виключенням деякої її приграничної ділянки);  $\pi_i(\xi, \psi, t)$ ,  $\underline{p}_{i/2}(\varphi, \eta, t)$ ,  $\overline{p}_{i/2}(\varphi, \mu, t)$  – функції типу примежового шару в околах  $\varphi = \varphi^*$  (поправки навколо виходу фільтраційної течії) відповідно;  $\psi = 0$ ,  $\psi = Q$  (поправки, що враховують вплив “бічних джерел забруднень”);  $R_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ ,  $r_n(t, \varepsilon)$  – залишкові члени.

В результаті підстановки (10) – (11) в (6) – (9) та виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $\varepsilon$  одержано такі задачі для знаходження регулярних членів асимптотики та поправок навколо виходу фільтраційної течії [1, 2]:

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{0\varphi}(\varphi, \psi, t) + u_{0t}(\varphi, \psi, t) = 0, \\ u_0(\varphi^*, \psi, t) = u_*(\psi, t), u_0(\varphi, \psi, 0) = u_0^0(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_0(t) \int_0^Q u_{0\varphi}(\varphi^*, \psi, t) d\psi = u_*^*(t),$$



$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi) \cdot u_{k\varphi} + u_{kt} = g_k(\varphi, \psi, t), \\ u_k(\varphi, \psi, 0) = 0, u_k(\varphi_*, \psi, t) = 0, \end{cases}$$

$$a_k(t) \int_0^Q u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi = - \sum_{i=1}^k a_{k-i}(t) \int_0^Q u_{i\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi, \quad k = \overline{1, n},$$

де  $g_k(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \sum_{i=1}^k a_{k-i}(t) (u_{i\varphi\varphi} + u_{i\psi\psi})$ ,

$$\begin{cases} a_0(t) \cdot \pi_{0\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{0\xi}(\xi, \psi, t) = 0, \\ \pi_0(0, \psi, t) = u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_0 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0(t) \cdot \pi_{1\xi\xi}(\xi, \psi, t) + \pi_{1\xi}(\xi, \psi, t) = \frac{\pi_{0t}}{v^2(\varphi^*, \psi)} - \\ - a_1(t) \pi_{0\xi\xi} - \frac{2v'(\varphi^*, \psi) \xi (\pi_{0\xi} + a_0 \pi_{0\xi\xi})}{v(\varphi^*, \psi)}, \\ \pi_1(0, \psi, t) = -u_1(\varphi^*, \psi, t), \\ \pi_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0 \text{ і т.д.} \end{cases}$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$u_0(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} u_*(\psi, t - f(\varphi, \psi)), & t \geq f(\varphi, \psi), \\ u_0^0(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t), \psi), & t < f(\varphi, \psi), \end{cases}$$

$$a_0(\varphi, \psi) = \frac{u_*^*(t)}{\int_0^Q u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi},$$

$$u_k(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_k(\tilde{\varphi}, \psi, t - f(\varphi, \psi) + f(\tilde{\varphi}, \psi))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)} d\tilde{\varphi}, & t \geq f(\tilde{\varphi}, \psi), \\ \int_0^t g_k(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t + \tilde{t}, \psi, \tilde{t})) d\tilde{t}, & t < f(\tilde{\varphi}, \psi), \end{cases}$$

$$a_k(t) = \frac{-\sum_{i=1}^k a_{k-i}(t) \int_0^Q u_{i\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi}{\int_0^Q u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi, t) d\psi},$$

де  $f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi)}$ ,  $f^{-1}$  – функція обернена до  $f$  стосовно змінної  $\varphi$ ,

$$\pi_0(\xi, \psi, t) = (u^*(\psi, t) - u_0(\varphi^*, \psi, t)) e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}},$$

$$\pi_1(\xi, \psi, t) = \left(-u_1(\varphi^*, \psi, t)\right) e^{-\frac{\xi}{a_0(\varphi^*, \psi)}} + b_0 \xi + b_1 \xi^2,$$

де  $b_1 = \frac{v'(\varphi^*, \psi)(\pi_{0\xi} + a_0 \pi_{0\xi\xi})}{v(\varphi^*, \psi)}$ ,  $b_0 = a_1(t) \pi_{0\xi\xi} + \frac{\pi_{0t}}{v^2(\varphi^*, \psi)} - 2a_0(t) b_1$ .

Легко бачити, що  $\pi_k(\xi, \psi, t) = \sum_{j=0}^{k+1} \alpha_{kj}(\psi, t) \xi^j e^{-\frac{\xi}{a_0(t)}}$ ,  $k = 1, n+1$ , де всі  $\alpha_{kj}$

визначаються через  $\alpha_{ij}$  ( $i < k$ ) та через граничні умови.

Зауважимо, що аналогічно до [4] знаходяться функції  $\underline{p}(\varphi, 0, t)$ ,  $\overline{p}(\varphi, Q, t)$ .

Для оцінки  $R_n$  та  $r_n$  маємо наступні співвідношення:

$$\varepsilon \left( \sum_{i=0}^n \varepsilon^i a_i(t) + r_n \right) v^2(\varphi, \psi) \left[ R_{n\varphi\varphi} + R_{n\psi\psi} \right] - v^2(\varphi, \psi) R_{n\varphi} = R_{n1} + \varepsilon^{n+1} g_n(\varphi, \psi, t),$$

$$R_n(\varphi, \psi, 0, \varepsilon) = R_n(\varphi_*, \psi, t, \varepsilon) = R_n(\varphi^*, \psi, t, \varepsilon) = R_n(\varphi, 0, t, \varepsilon) = R_n(\varphi, Q, t, \varepsilon) = 0, \\ r_n(\varphi, \psi, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1} p_n(\varphi, \psi, \varepsilon),$$

де  $g_n(\varphi, \psi, t)$ ,  $p_n(\varphi, \psi, \varepsilon)$  виражаються через відомі члени ряду (10) – (11).

### Висновки та зауваження.

1. Таким чином, як бачимо із викладеного вище, методологія переходу від фізичної криволінійної області до відповідної області комплексного потенціалу, окрім відомих переваг (спрощення рівняння, зведення задачі до канонічної області, тощо), дозволяє ще й опиратися на відомі напрацювання (результати) при обґрунтуванні коректності поставлених задач.

2. Зауважимо, що аналогічно до вище викладеного можемо розв'язати задачу (1) – (4), якщо замість умови перевизначення (4) задати:

$$b(t) \frac{\partial c(x_0, y_0, t)}{\partial n_0} = c_*^*(t),$$

де  $M_0(x_0, y_0)$  – деяка фіксована точка ділянки входу  $AB$ ;  $n_0$  – відповідна нормаль. При цьому в області  $G_\omega$ , дана умова прийме вигляд:

$$a(t) \frac{\partial u(\varphi_*, \psi_0, t)}{\partial \varphi} = u_*^*(t),$$

де  $\psi_0$  – значення функції течії в точці  $M_0(x_0, y_0)$  (потік через ділянку  $AM_0$ ), як і в [10]. Для знаходження регулярних членів асимптотики, замість відповідних задач матимемо:

$$a_0(t)u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi_0, t) = u_*^*(t),$$

$$a_k(t)u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi_0, t) = -\sum_{i=1}^k a_{k-i}(t)u_{i\varphi}(\varphi_*, \psi_0, t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Розв'язок матиме вигляд:

$$a_0(t) = \frac{u_*^*(t)}{u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi_0, t)},$$

$$a_k(t) = -\frac{\sum_{i=1}^k a_{k-i}(t)u_{i\varphi}(\varphi_*, \psi_0, t)}{u_{0\varphi}(\varphi_*, \psi_0, t)}.$$

3. Розроблений вище підхід можна використати при розв'язанні відповідних задач у випадках більш складної структури коефіцієнта дифузії (наприклад,  $\varepsilon a(x, y)$ ), а також у випадках багатозв'язних областей.

4. Якщо початкова та граничні умови недостатньо узгоджені або недостатньо гладкі, то тут можливою є процедура згладження негладкостей розв'язків вироджених задач вздовж характеристик, що виходять із кутових (ребрових) точок області  $G_\omega \times (0, \infty)$  [1], та побудова кутових функцій [5].

1. Бомба А.Я. Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде // Укр. матем. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
2. Бомба А.Я. Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1.- С. 27-35.
3. Бомба А.Я., Кацтан С.С. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник.- 2001.- Вип. 8.- С. 9-22.

4. Бомба А.Я., Власюк А.П., Лаврик В.И. Об асимптотическом

- приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде.- К.: 1985.- 17 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.72).
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1990.- 208с.
  6. *Вишик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук.- 1957.- 12, Вып. 5.- С. 3-122.
  7. *Иванчов М.И.* Обернена задача теплопровідності в анізотропному тілі // Мат. методи і фіз.-мех. поля.- 2000.- 43, №1.- С. 45-50.
  8. *Иванчов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журнал.- 1998.- Т. 39, № 3.- С. 539-550.
  9. *Ратыни А.К.* Условия корректности задачи определения матрицы коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференц. уравнения.- 1992.- 28, №8.- С. 1419-1426.
  10. *Сагайдак Р.В.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу // Мат. методи і фіз.-мех. поля.- 2002.- 45, №2.- С. 22-30.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне  
E-mail : abomba@ukr.net, yatsuko@mail.ru

Надійшла 11.04.2007

**Бомба А.Я., Фурсачик О.А.** ОБРАТНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА “КОНВЕКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ” // *Post роен алгоритм асимпт от ического приближения решения обрат ной сингулярно возмущенной краевой задачи типа “конвекция–диффузия” с неизвест ным коэффициент ом диффузии.*

**Bomba A.Y., Fursachyk O.A.** INVERS SINGULAR PERTURBED PROBLEMS OF TYPE "CONVECTION–DIFFUSION" // *The algorithm is constructed for asymptotic expansion resolving invers singular perturbed boundary value "convection–diffusion" problems, where the coefficient of diffusion is unknown.*