

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ
МАТЕМАТИЧНИЙ
ВІСНИК
СЕРІЯ
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Рівне - 2007

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серія прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Редакційна колегія

Барановський С.В.	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Недашківській М.О.
Бомба А.Я. (<i>відповідальний редактор</i>)	Новіков О.М.
Булавацький В.М.	Петрівський Б.П.
Бурак Я.Й.	Пономаренко Л.А.
Власюк А.П.	Пригорницький Д.О.
Войтович М.М.	Присяжнюк І.М.
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Джунь Й.В.	Скопецький В.В. (<i>головний редактор</i>)
Каштан С.С. (<i>секретар</i>)	Сяський А.О.
Климюк Ю.Є. (<i>технічний секретар</i>)	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 5 від 28.12.2007 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: abomba@ukr.net

Зміст

<i>Наші вітання Андрію Олексійовичу Сяському</i>	5
<i>Барановський С.В. Автоматизація розрахунку характеристик ідеальних та квазіідеальних полів у криволінійних чотирикутних областях довільної конфігурації обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями</i>	7
<i>Бомба А.Я., Русий Д.Е. Розв'язування нелінійних крайових задач на побудову квазіконформних сіток методом скінченних елементів</i>	17
<i>Бомба А.Я., Фурсачик О.А. Обернені сингулярно збурені задачі типу “конвекція–дифузія”</i>	28
<i>Булавацький В.М. Математичне моделювання процесу консолідації насиченого сольовим розчином релаксаційно-стискуваного пористого середовища</i>	37
<i>Власов Н.М., Федик И.И. Водородная проницаемость металлов при наличии внутренних напряжений</i>	50
<i>Гаврилюк В.І. Чисельне розв'язання модельних крайових задач на квазіконформні відображення в областях з вільними межами та однорідними включеннями</i>	65
<i>Єлгондичев К.К. Періодичні розв'язки лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією</i>	76
<i>Климюк Ю.Є. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція-дифузія” із запізненням в анізотропних середовищах</i>	84
<i>Кравченко О.П. Аналіз коливного кола з нелінійним конденсатором</i>	100

<i>Малачівський П.С. Рівномірне наближення нелінійним виразом із точним відтворенням значень функції та її похідної в зовнішніх точках</i>	109
<i>Сафоник А.П. Нелінійні сингулярно збудені математичні моделі процесів фільтрування</i>	119
<i>Присяжнюк І.П. Дослідження нелінійного сингулярно збуденого процесу трикомпонентної конвективної дифузії з урахуванням утворення речовини, що випадає в осад</i>	129
<i>Турбал Ю.В. Функції щільності деяких нелінійних перетворень випадкових векторів</i>	140
<i>Янчук П.С. Квазіспектральний спосіб побудови кусково-поліноміальних наближень для задачі Діріхле</i>	148
Визначні математики, механіки, інформатики сучасності	
<i>До 70-річчя члена-кореспондента НАН України Богдана Йосиповича Пташника</i>	177
<i>Бурак Ярослав Йосипович – видатний вчений, організатор науки, громадський діяч</i>	180
<i>До 85-річчя видатного математика, академіка НАН України Ляшка Івана Івановича</i>	185
<i>Про наукову та науково-організаційну діяльність академіка І.В. Сергієнка</i>	188
З історії математики, механіки, інформатики	
<i>Возняк Г.М., Возняк О.Г. Основні віхи життя та наукової діяльності Миколи Чайковського</i>	195

УДК 519.63.4.001.57+517

Гаврилюк В.І.

**ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА
КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В ОБЛАСТЯХ З ВІЛЬНИМИ
МЕЖАМИ ТА ОДНОРІДНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

Розроблено алгоритм числового розв'язання модельних крайових задач на квазіконформні відображення в областях з вільними межами та однорідними включеннями.

Вступ. У роботах [1 – 5] для побудови динамічної сітки потенціальних і квазіпотенціальних полів, розрахунку різного роду профілів з одночасним знаходженням інших характеристик (витрати, та інших) був розроблений метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень), де під терміном “обернення” розуміється, по перше, перехід від конформного відображення фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу G_ω до більш вигідного оберненого відображення $G_\omega \rightarrow G_z$; по друге те, що задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_\omega$ ($G_\omega \rightarrow G_z$) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про розв'язок задачі, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, граничні умови). Зокрема, у роботах [2 – 6] проведено математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища, а в [1] розглядається найпростіший приклад розрахунку фільтраційного режиму в середовищах з вільними межами. У цій роботі йдеться про поєднання методу фіктивних областей та квазіконформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач для розрахунку фільтраційного режиму в середовищах з кривими депресії (вільними межами) та однорідними включеннями.

Постановка задачі. Розглянемо процес фільтрації в ґрунтовій греблі із однорідним включенням (інеродним тілом). Відповідну фізичну область фільтрації G_z ($z = x + iy$) із однорідним включенням G_1 ($z = x + iy$) (аналогічно до [2 – 6]) зображено на рис. 1, $AA_1 = \{z: y = 0, -l_3 \leq x \leq 0\}$, $A_1B = \{z: m_1y - x = 0, 0 \leq x \leq l_1\}$, $SD = \{z: m_2y + x - l_1 - b - l_2 = 0\}$, $C_1C = \{z: y = h_*, x_1 \leq x \leq x_*\}$, $C_1D = \{z: m_2y + x - l_1 - b - l_2 = 0, x_1 \leq x \leq l_1 + b + l_2\}$, $AJ = \left\{z: y = \frac{-b_1 \cdot (x + l_3)}{2(l_3 + b_1)}, -l_3 \leq x \leq b_1\right\}$, $JD = \left\{z: y = \frac{1}{2} \left(\frac{b_1 * x}{l_1 + b + l_2 - b_1} - \frac{b_1 * (l_1 + b + l_2)}{l_1 + b + l_2 - b_1} \right), b_1 \leq x \leq l_1 + b + l_2\right\}$, $BC \circ C$ – вільна (невідома) поверхня (крива депресії), $C \circ C_1$ – проміжок височування, AD – непроникна основа греблі, H_G та H , h_* – відповідно висота греблі та напори на ній, b – ширина гребеня, $m_1 = l_1 / H_G$ та $m_2 = l_2 / H_G$ – коефіцієнти закладання верхового та низового укосів, $C \circ C_1 C$ – фіктивна ділянка розглядуваної області фільтрації, x_1 – перетин C_1C та SD , x_* – шукана абсциса точки C .

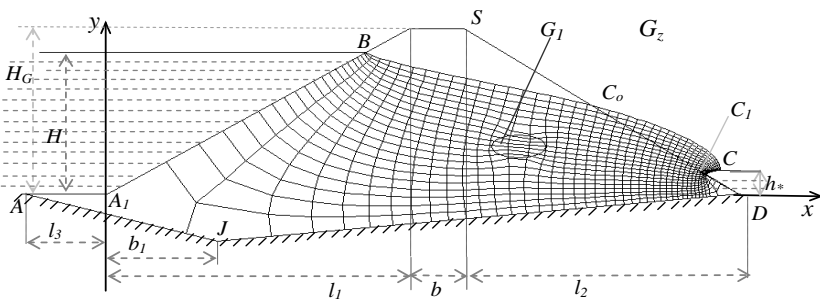


Рис. 1. Схема області фільтрації

Як і раніше, процес фільтрації рідини описуватимемо рівнянням руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } h$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$ [3], де $\vec{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$ – швидкість фільтрації, κ – коефіцієнт провідності, кусково-стала в області G_z функція, така, що для включення – $\kappa = \kappa_1$, а для іншої частини області G_z – $\kappa = \kappa_2$, $h = h(x, y)$ – напір в точці (x, y) , $h|_{BC_0C} = y$, $h|_{BC_0C_1} = y$, $\varphi = 1 - \frac{h - h_*}{H - h_*}$ – потенціал поля, такий, що $\varphi|_{AA_1B} = 0$, $\varphi|_{CC_1D} = 1$, $\frac{d\varphi}{dn}|_{BC} = \frac{d\varphi}{dn}|_{DJA} = 0$, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області.

Задача на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ розглядуваної області G_z на відповідну область квазікомплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : 0 < \varphi < 1, 0 < \psi < Q\}$ ($\psi = \psi(x, y)$ – функція течії, квазікомплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$) з невідомим параметром – повною питомою витратою $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ ($Q = Q_*/l$, де Q_* – повна витрата, l – довжина греблі) матиме вигляд [3, 5]

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AA_1B} = 0, \quad \varphi|_{CC_1D} = 1, \quad \psi|_{DJA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \quad (2)$$

Запишемо обернену до (1) – (2) задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (3)$$

$$\begin{cases} y(0, \psi) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q_*, \\ m_1 y(0, \psi) - x(0, \psi) = 0, & Q_* \leq \psi \leq Q, \\ m_2 y(1, \psi) + x(1, \psi) - l_1 - b - l_2 = 0, & 0 \leq \psi \leq Q^*, \\ y(1, \psi) = h_*, & Q^* \leq \psi \leq Q, \\ y(\varphi, Q) = h_* + (1 - \varphi)(H - h_*), & 0 \leq \varphi \leq 1, \\ y(\varphi, 0) + b_1 \frac{x(\varphi, 0) + l_3}{2(l_3 + b_1)} = 0, & 0 \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}, \\ y(\varphi, 0) - \frac{1}{2} \left(\frac{b_1 x(\varphi, 0)}{l_1 + b + l_2 - b_1} - \frac{b_1(l_1 + b + l_2)}{l_1 + b + l_2 - b_1} \right) = 0, & \tilde{\varphi} \leq \varphi \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Тоді, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ у дивергентній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Різницева задача. Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов "квазіконформної подібності в малому" відповідних чотирикутників, у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Delta\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1};$

$$\psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = \overline{0, n+1}; \Delta\varphi = \frac{1}{m+1}, \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, m, n \in \mathbf{N}\}$$

запишемо у вигляді [1 – 6]

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sigma \left(a_{i+1,j+1} x_{i+1,j+1} - (a_{i+1,j+1} + a_{i,j+1}) x_{i,j+1} + a_{i,j+1} x_{i-1,j+1} \right) + \\
 & + (1 - 2\sigma) \left(a_{i+1,j} x_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) x_{i,j} + a_{i,j} x_{i-1,j} \right) + \\
 & + \sigma \left(a_{i+1,j-1} x_{i+1,j-1} - (a_{i+1,j-1} + a_{i,j-1}) x_{i,j-1} + a_{i,j-1} x_{i-1,j-1} \right) + \\
 & + \gamma^2 \left(\sigma \left(b_{i+1,j+1} x_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j}) x_{i+1,j} + b_{i+1,j} x_{i+1,j-1} \right) + \right. \\
 & + (1 - 2\sigma) \left(b_{i,j+1} x_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) x_{i,j} + b_{i,j} x_{i,j-1} \right) + \\
 & \left. + \sigma \left(b_{i-1,j+1} x_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j}) x_{i-1,j} + b_{i-1,j} x_{i-1,j-1} \right) \right) = 0, \\
 & \sigma \left(a_{i+1,j+1} y_{i+1,j+1} - (a_{i+1,j+1} + a_{i,j+1}) y_{i,j+1} + a_{i,j+1} y_{i-1,j+1} \right) + \\
 & + (1 - 2\sigma) \left(a_{i+1,j} y_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) y_{i,j} + a_{i,j} y_{i-1,j} \right) + \\
 & + \sigma \left(a_{i+1,j-1} y_{i+1,j-1} - (a_{i+1,j-1} + a_{i,j-1}) y_{i,j-1} + a_{i,j-1} y_{i-1,j-1} \right) + \\
 & + \gamma^2 \left(\sigma \left(b_{i+1,j+1} y_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j}) y_{i+1,j} + b_{i+1,j} y_{i+1,j-1} \right) + \right. \\
 & + (1 - 2\sigma) \left(b_{i,j+1} y_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) y_{i,j} + b_{i,j} y_{i,j-1} \right) + \\
 & \left. + \sigma \left(b_{i-1,j+1} y_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j}) y_{i-1,j} + b_{i-1,j} y_{i-1,j-1} \right) \right) = 0, \\
 & \quad \quad \quad \overline{i=1,m}, \quad \overline{j=1,n}.
 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & y_{0,j} = 0, & \overline{j=0,n_*}, \\
 & m_1 y_{0,j} - x_{0,j} = 0, & \overline{j=n_*+1,n+1}, \\
 & m_2 y_{m+1,j} + x_{m+1,j} - l_1 - b - l_2 = 0, & \overline{j=0,n^*}, \\
 & y_{m+1,j} = h_*, & \overline{j=n^*+1,n+1}, \\
 & y_{i,n+1} = h_* + (H - h_*)(1 - \varphi_i), & \overline{i=0,m+1}, \\
 & y_{i,0} + b_1 * (x_{i,0} + l_3) / (2 * (l_3 + b_1)) = 0, & \overline{i=0,m_0}, \\
 & y_{i,0} - \frac{1}{2} \left(\frac{b_1 \cdot x_{i,0}}{l_1 + b + l_2 - b_1} - \frac{b_1 \cdot (l_1 + b + l_2)}{l_1 + b + l_2 - b_1} \right) = 0, & \overline{i=m_0+1,m+1}.
 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n_*}, \\
 y_{1,j} - y_{0,j} + m_1(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{n_* + 1, n + 1}, \\
 (x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + \\
 + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m + 1}, \\
 y_{m,j} - y_{m+1,j} - m_2(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n^*}, \\
 x_{m,j} - x_{m+1,j} = 0, \quad j = \overline{n^* + 1, n + 1}, \\
 \frac{b_1}{2(l_3 + b_1)}(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m_0}, \\
 \frac{b_1}{2(l_1 + b + l_2 - b_1)}(y_{i,1} - y_{i,0}) + (x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{m_0 + 1, m + 1}.
 \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} \gamma_{i,j}, \quad (9)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}},$$

де

$$a_{i,j} = \frac{2}{\kappa_{i,j} + \kappa_{i-1,j}}, \quad b_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j-1} + \kappa_{i,j}}{2}, \quad x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j),$$

$$\kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \frac{\kappa_{i,j} + \kappa_{i+1,j} + \kappa_{i,j+1} + \kappa_{i+1,j+1}}{4}, \quad \sigma \in [0, 0.5] \text{ – ваговий коефіцієнт.}$$

Алгоритм числового розв'язання. Розв'язок різницевої задачі (6) – (9) у цьому випадку побудуємо так. Задаємо кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі. Задаємо початкові наближення ряду величин. А саме: початкові наближення координат

граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались рівності (7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Задання початкового наближення конформного інваріанта γ проведемо за формулою (9), в якій використовуємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$. Далі проводимо уточнення: внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) з допомогою ітераційного методу Зейделя [3 – 5] за формулами, отриманими шляхом розв’язання (6) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$; величини γ за формулою (9) та витрати Q за формулою $Q = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{n+1}{m+1}$; координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв’язання системи нелінійних рівнянь (7), (8). Далі перевіряємо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами

$$\begin{aligned} \max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon, \\ \left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad \left| D^{(k+1)} - D^{(k)} \right| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

де $D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j})^2}}$ – усереднене

значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^y .

Якщо умови (10) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку обчислюємо нев’язку конформності отриманої сітки за формулою

$\varepsilon_* = |1 - D|$. Ця нев'язка характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику рівне одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності).

У випадку якщо не виконується, наприклад, лише одна із умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m, n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо параметри розбиття m і n та розв'язуємо різницеву задачу (6) – (9) заново. Оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [5, 6] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана.

Числова реалізація методу здійснювалась при

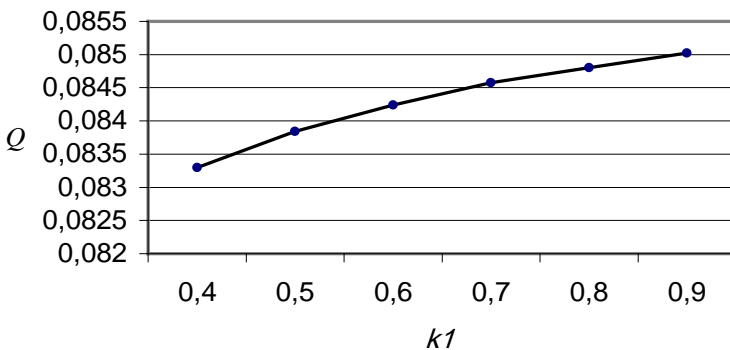
$$\kappa = \begin{cases} \kappa_1 & \text{при } \frac{(x-30)^2}{4} + (y-4)^2 \leq 1, \quad (x, y) \in G_z, \\ \kappa_2 & \text{при } \frac{(x-30)^2}{4} + (y-4)^2 > 1, \quad (x, y) \in G_z. \end{cases} \quad (11)$$

Результати розрахунку. Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при розбитті області фільтрації $m \times n = 40 \times 20$, точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, конструктивних параметрах греблі $H = 12$ м, $H_G = 14$ м, $b_1 = 8$ м, $h_* = 2$ м, $l_1 = 22$ м, $b = 4$ м, $l_2 = 20$ м, $\kappa_1 = 0.9$, $\kappa_2 = 0.3$, $\sigma = 0.1666$ за $\kappa = 14870$ кроків ітерацій отримано гідродинамічну сітку руху (див. рис. 1), знайдено повну фільтраційну витрату $Q = 0.085024$ м³/добу (див. табл. 1), координати точки $C(44.24; 2)$ та встановлено проміжок височування C_0C_1 . На рис. 2. показано залежність фільтраційної витрати від зміни коефіцієнта фільтрації розглядуваного включення.

Висновки. Із результатів числових розрахунків бачимо (див. табл. 1). що врахування зміни коефіцієнта фільтрації приводить до зміни фільтраційної витрати, а саме збільшення коефіцієнта фільтрації в області включення призводить до збільшення фільтраційної витрати, а також впливає на положення вільної кривої. Встановлення динаміки зміни положення кривої депресії дозволяє визначити ступінь деформаційних процесів в масиві низової призми та прогнозувати їх наслідки для роботи греблі.

Табл. 1. Результати розрахунків фільтраційної витрати

№	$m \times n$	κ_1	κ_2	Q	ε
1	40×20	0.4	0.3	0.083296	$1.0 \cdot e^{-5}$
2	40×20	0.5	0.3	0.08384	$1.0 \cdot e^{-5}$
3	40×20	0.6	0.3	0.084237	$1.0 \cdot e^{-5}$
4	40×20	0.7	0.3	0.084575	$1.0 \cdot e^{-5}$
5	40×20	0.8	0.3	0.084801	$1.0 \cdot e^{-5}$
6	40×20	0.9	0.3	0.085024	$1.0 \cdot e^{-5}$

Рис. 2. Залежність між Q та κ_1

1. *Бомба А.Я., Кацтан С.С.* Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник.- 2001.- Вип. 8.- С. 9-22.
2. *Кацтан С.С.* Про моделювання поля швидкості фільтрації за умов взаємовпливу градієнта потенціалу і характеристик анізотропного середовища // Волинський математичний вісник.- 2002.- Вип. 9.- С. 32-40.
3. *Бомба А.Я., Кацтан С.С.* Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації // Математичні методи та фізико-механічні поля.- 2002.- 45, №2.- С. 49-57.
4. *Бомба А.Я., Кацтан С.С.* Моделювання зворотного впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2004.- Т. 9, число 1.- С. 123-129.
5. *Бомба А.Я., Пригорницький Д.О., Скопецький В.В.* Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення з післядією // Доповіді НАН України.- 2004.- №3.- С. 62-68.
6. *Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Кацтан С.С.* Застосування методу „фіктивних областей” та методології квазіконформних відображень до моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтових греблях // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2005.- Вип. 12 (3).- С. 28-38.
7. *Самарський А.А.* Теория разностных схем.- Москва: Наука, 1977.- 656 с.
8. *Герсевич Н.М.* Основы динамики грунтовой массы.- М.-Л.: ОНТИ, 1937.- 242 с.
9. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики.- Киев: Наукова думка, 1980.- 334 с.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне

E-mail: im_vova@ukr.net

Надійшла 17.03.2007

Гаврилюк В.І. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В СРЕДАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ И ОДНОРОДНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ // *Разработан алгоритм численного решения модельных краевых задач на квазиконформные отображение в средах со свободными границами и однородными включениями.*

Gavrilyuk V.I. NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON QUASICONFORMAL MAPPINGS IN

ENVIRONMENTS WITH FREE BORDERS AND HOMOGENEOUS INCLUSIONS // *The new algorithm for numerical solution of nonlinear model boundary value problems on quasiconformal mappings in environments with free borders and homogeneous inclusions.*