РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Рівне - 2007

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 5 від 28.12.2007 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: abomba@ukr.net

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

УДК 518.61.001.573

Климюк Ю.Є.

ПРОСТОРОВІ НЕЛІНІЙНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТИПУ "КОНВЕКЦІЯ–ДИФУЗІЯ" ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ В АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на квазіконформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник для анізотропних середовищ і на цій основі одержано алгоритм асимптотичного наближення розв'язку нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі типу "конвекція-дифузія" із запізненням в криволінійному паралелепіпеді, обмеженому двома еквіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії.

Вступ. На основі [1 – 4] в [5 – 9] розроблено підхід до розв'язання двомірних задач для рівнянь конвективної дифузії при фільтрації підземних вод, що ґрунтується на переході від криволінійної фізичної області фільтрації, обмеженої лініями течії і еквіпотенціальними лініями, до відповідної області комплексного потенціалу. Поєднуючи цей підхід із числово-асимптотичними методами отримані розв'язки найбільш типових плоских задач „фільтрація–конвекція–дифузія–реакція", зокрема: задач для багатозв'язних областей [7, 8], задач гетеродифузії [10 – 11], нелінійних задач із запізненням [9]. У роботі [13] побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник і на цій основі одержано асимптотичне розвинення розв'язку сингулярно збуреної крайової задачі для рівняння конвективної дифузії у криволінійному паралелепіпеді обмеженому двома еквіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії [12 – 14]. У цій роботі йдеться про побудову просторового аналогу плоскої крайової задачі на квазіконформне відображення і розв'язання нелінійних просторових сингулярно збурених крайових задач

С. 84–99

конвективної дифузії із запізненням в анізотропному середовищі.

Постановка задачі. Для області $G = G_{\text{z}} \times (0, \infty)$, де $G_{\text{z}} = ABCDA_*B_*C_*D_*$ $(\text{z} = (x, y, z))$ – однозв'язний криволінійний паралелепіпед (анізотропний пористий пласт), обмежений квазіортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер (тут „приреброві кути” на стільки відрізняються від прямих, на скільки в їх околах анізотропія „відхиляє” вектор швидкості від градієнта напору), двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{\text{z}: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{\text{z}: f_2(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{\text{z}: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{\text{z}: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{\text{z}: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\text{z}: f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 1а), розглянемо нелінійну модельну задачу:

$$\vec{v} = \kappa \cdot grad\ \varphi,\ div\ \vec{v} = 0; \tag{1}$$

$$\varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*,\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{ADD_*A_* \cup A_*B_*C_*D_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD} = 0; \tag{2}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial C}{\partial x}\left(\left(1 + \varepsilon \cdot h(C(x, y, z, t - \tau))\right)\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial C}{\partial y}\left(\left(1 + \varepsilon \cdot h\right)\frac{\partial C}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial C}{\partial z}\left(\left(1 + \varepsilon \cdot h\right)\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right) - v_x\frac{\partial C}{\partial x} - v_y\frac{\partial C}{\partial y} - v_z\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial t}, \tag{3}$$

$$C(x, y, z, t)\Big|_{ABB_*A_*} = c_*(x, y, z, t),\ C(x, y, z, t)\Big|_{CDD_*C_*} = c^*(x, y, z, t),$$

$$C(x, y, z, t)\Big|_{ADD_*A_*} = c_{**}(x, y, z, t),\ C(x, y, z, t)\Big|_{BCC_*B_*} = c^{**}(x, y, z, t),$$

$$C(x, y, z, t)\Big|_{ABCD} = c_{***}(x, y, z, t),\ C(x, y, z, t)\Big|_{A_*B_*C_*D_*} = c^{***}(x, y, z, t),$$

$$C(x, y, z, \tilde{t}) = c_0^0(x, y, z, \tilde{t})\ \ (-\tau \le \tilde{t} \le 0), \tag{4}$$

де $\varphi = -\chi_* h$ – фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \le \varphi \le \varphi^* < \infty$),

$h = h(x, y, z)$ – напір; $\kappa = \chi_*^{-1}\chi = (\kappa_{rs})_{r,s=1,2,3}$ – тензор проникності ($\kappa_{rs} = \kappa_{sr}$), $\chi = (\chi_{rs})_{r,s=1,2,3}$ – тензор (χ_* – його характерний розмір) і $\vec{v}$ – вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x,y,z) + v_y^2(x,y,z) + v_z^2(x,y,z)} >$ $> v_* >> \varepsilon$); $C = C(x, y, z, t)$ – концентрація розчинної речовини в фільтраційній течії у точці (x, y, z) в момент часу t, n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$), $c_*(x, y, z, t)$, $c^*(x, y, z, t)$, $c_{**}(x, y, z, t)$, $c^{**}(x, y, z, t)$, $c_{***}(x, y, z, t)$, $c^{***}(x, y, z, t)$, $c_0^0(x, y, z)$, $h = h(C(x, y, z, t-\tau))$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області G. Крім того вважаємо, що функція $c_0^0(x, y, z, t)$ в моменти часу $t = -\tau$ і $t = 0$ задовольняє умовам, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв'язку $C(x, y, z, t)$ при $t = \tau n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

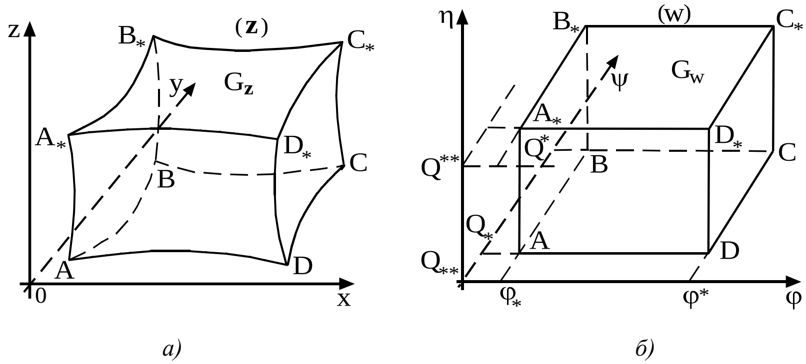

Рис. 1. Фізична область G_z (а) і відповідна область комплексного потенціалу G_w (б)

При цьому квазігармонічна функція $\varphi = \varphi(x, y, z)$ (квазіпотенціал) задовольняє диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_{11}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\kappa_{12}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\kappa_{13}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa_{21}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\kappa_{22}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\kappa_{23}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa_{31}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\kappa_{32}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\kappa_{33}(x,y,z,\varphi,\psi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0. \qquad (5)$$

Шляхом введення пари функцій $\psi=\psi(x,y,z)$, $\eta=\eta(x,y,z)$, "просторових квазікомплексноспряжених" із функцією $\varphi=\varphi(x,y,z)$ тобто, таких, що: $\kappa\cdot\mathrm{grad}\varphi(x,y,z)=\mathrm{grad}\psi(x,y,z)\times\mathrm{grad}\eta(x,y,z)$, $\mathrm{grad}\psi(x,y,z)\times\mathrm{grad}\eta(x,y,z)=0$ і заміни третьої із граничних умов (2) на умови: $\psi\big|_{ADD_*A_*}=Q_*$, $\psi\big|_{BCC_*B_*}=Q^*$, $\eta\big|_{ABCD}=Q_{**}$, $\eta\big|_{A_*B_*C_*D_*}=Q^{**}$, приходимо до більш загальної відносно (1), (2) задачі на "просторово квазіконформне" відображення області G_z на відповідну область "просторового комплексного квазіпотенціалу" $G_w=\{w=(\varphi,\psi,\eta):$ $\varphi_*\le\varphi\le\varphi^*,\ Q_*\le\psi\le Q^*,\ Q_{**}\le\eta\le Q^{**}\}$ (рис. 1б):

$$\begin{cases} \kappa_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\kappa_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\kappa_{13}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial z}-\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \\ \kappa_{21}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\kappa_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\kappa_{23}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial z}, \\ \kappa_{31}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\kappa_{32}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\kappa_{33}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial y}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial z}=0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi\big|_{ABB_*A_*}=\varphi_*\,,\ \varphi\big|_{DCC_*D_*}=\varphi^*\,,\ \psi\big|_{ADD_*A_*}=Q_*\,,\ \psi\big|_{BCC_*B_*}=Q^*\,,$$

$$\eta\big|_{ABCD}=Q_{**}\,,\ \eta\big|_{A_*B_*C_*D_*}=Q^{**}\,, \tag{7}$$

де $Q=Q_0\cdot Q^0$ – потік через довільний поперечний переріз течії ($Q_0=Q^*-Q_*$, $Q^0=Q^{**}-Q_{**}$ – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний “одиничні прошарки”).

Відповідна обернена до (6), (7) задача на квазіконформне відображення $\mathrm{z}=\mathrm{z}(\mathrm{w})$ області G_{w} на G_{z} при невідомих Q, Q_0, Q^0 має наступний вигляд:

$$I\left(x(\varphi,\psi,\eta),y(\varphi,\psi,\eta),z(\varphi,\psi,\eta)\right)\left(\kappa_{11}\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)+\right.$$

$$\left.+\kappa_{12}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)+\kappa_{13}\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}\right),$$

$$I\left(x(\varphi,\psi,\eta),y(\varphi,\psi,\eta),z(\varphi,\psi,\eta)\right)\left(\kappa_{21}\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)+\right.$$

$$+\kappa_{22}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}-\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+\kappa_{23}\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)\Bigg)=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi}-\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right),$$

$$I\left(x(\varphi,\psi,\eta),y(\varphi,\psi,\eta),z(\varphi,\psi,\eta)\right)\Bigg(\kappa_{31}\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)+$$

$$+\kappa_{32}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}-\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+\kappa_{33}\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)\Bigg)=\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi}\right),$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi}-\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)=0, \quad (8)$$

де I – якобіан відповідного перетворення;

$$\begin{cases} f_1\left(x(\varphi_*,\psi,\eta),y(\varphi_*,\psi,\eta),z(\varphi_*,\psi,\eta)\right)=0, & \\ f_2\left(x(\varphi^*,\psi,\eta),y(\varphi^*,\psi,\eta),z(\varphi^*,\psi,\eta)\right)=0, & \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*, \\ f_3\left(x(\varphi,Q_*,\eta),y(\varphi,Q_*,\eta),z(\varphi,Q_*,\eta)\right)=0, & \\ f_4\left(x(\varphi,Q^*,\eta),y(\varphi,Q^*,\eta),y(\varphi,Q^*,\eta)\right)=0, & Q_*\le\psi\le Q^*, \\ f_5\left(x(\varphi,\psi,Q_{**}),y(\varphi,\psi,Q_{**}),z(\varphi,\psi,Q_{**})\right)=0, & \\ f_6\left(x(\varphi,\psi,Q^{**}),y(\varphi,\psi,Q^{**}),z(\varphi,\psi,Q^{**})\right)=0, & Q_{**}\le\eta\le Q^{**}. \end{cases} \quad (9)$$

Припустимо, що задача на просторове квазіконформне відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) є розв’язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $\vec{v}$ і параметри Q_0, Q^0, Q. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi,\psi,\eta)$, $y = y(\varphi,\psi,\eta)$, $z = z(\varphi,\psi,\eta)$ у рівнянні (3) та умовах (4), приходимо до відповідної "дифузійної задачі" для області G_{w}:

$$\varepsilon\Big(\big(1+\varepsilon h\big(c(\varphi,\psi,\eta,t-\tau)\big)\big)\big(b_{1,1}(\varphi,\psi,\eta)c_{\varphi\varphi} + b_{1,2}(\varphi,\psi,\eta)c_{\psi\psi} +$$
$$+b_{1,3}(\varphi,\psi,\eta)c_{\eta\eta} + 2b_{2,1}(\varphi,\psi,\eta)c_{\varphi\psi} + 2b_{2,2}(\varphi,\psi,\eta)c_{\varphi\eta} +$$
$$+b_{3,1}(\varphi,\psi,\eta)c_{\varphi} + b_{3,2}(\varphi,\psi,\eta)c_{\psi} + b_{3,3}(\varphi,\psi,\eta)c_{\eta}\big) +$$
$$+\varepsilon\big(b_{1,1}(\varphi,\psi,\eta)c_{\varphi}h_{\varphi} + b_{1,2}(\varphi,\psi,\eta)c_{\psi}h_{\psi} + b_{1,3}(\varphi,\psi,\eta)c_{\eta}h_{\eta} +$$
$$+b_{2,1}(\varphi,\psi,\eta)\big(c_{\varphi}h_{\psi} + c_{\psi}h_{\varphi}\big) + b_{2,2}(\varphi,\psi,\eta)\big(c_{\varphi}h_{\eta} + c_{\eta}h_{\varphi}\big)\big)\Big) -$$
$$-q(\varphi,\psi,\eta)\cdot c_{\varphi} = c_t; \qquad (10)$$

$$c(\varphi_*,\psi,\eta,t) = c_*(\psi,\eta,t),\ c\big(\varphi^*,\psi,\eta,t\big) = c^*(\psi,\eta,t),$$
$$c(\varphi,Q_*,\eta,t) = c_{**}(\varphi,\eta,t),\ c\big(\varphi,Q^*,\eta,t\big) = c^{**}(\varphi,\eta,t),$$
$$c(\varphi,\psi,Q_{**},t) = c_{***}(\varphi,\psi,t),\ c\big(\varphi,\psi,Q^{**},t\big) = c^{***}(\varphi,\psi,t),$$
$$c(\varphi,\psi,\tilde{t}) = c_0^0(\varphi,\psi,\tilde{t}),\ -\tau \le \tilde{t} \le 0, \qquad (11)$$

де $$c = c(\varphi,\psi,\eta,t) = C\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$

$$b_{1,1} = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2,\ b_{1,2} = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2,\ b_{1,3} = \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2,$$
$$b_{2,1} = \varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y + \varphi_z\psi_z,\ b_{2,2} = \varphi_x\eta_x + \varphi_y\eta_y + \varphi_z\eta_z,$$
$$b_{3,1} = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz},\ b_{3,2} = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz},$$
$$b_{3,3} = \eta_{xx} + \eta_{yy} + \ +\eta_{zz},\ q = v_x\varphi_x + v_y\varphi_y + v_z\varphi_z$$

або $b_{1,1}(\varphi,\psi,\eta) = \dfrac{1}{I^2}\Big(\big(y_{\psi}z_{\eta} - y_{\eta}z_{\psi}\big)^2 + \big(x_{\eta}z_{\psi} - x_{\psi}z_{\eta}\big)^2 + \big(x_{\psi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\psi}\big)^2\Big),$

$$b_{1,2}(\varphi,\psi,\eta)=\frac{1}{I^2}\left(\left(y_\eta z_\varphi-y_\varphi z_\eta\right)^2+\left(x_\varphi z_\eta-x_\eta z_\varphi\right)^2+\left(x_\eta y_\varphi-x_\varphi y_\eta\right)^2\right),$$

$$b_{1,3}(\varphi,\psi,\eta)=\frac{1}{I^2}\left(\left(y_\varphi z_\psi-y_\psi z_\varphi\right)^2+\left(x_\psi z_\varphi-x_\varphi z_\psi\right)^2+\left(x_\varphi y_\psi-x_\psi y_\varphi\right)^2\right),$$

$$b_{2,1}(\varphi,\psi,\eta)=\frac{1}{I^2}\Big(\left(y_\psi z_\eta-y_\eta z_\psi\right)\left(y_\eta z_\varphi-y_\varphi z_\eta\right)+\left(x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta\right)\times$$
$$\times\left(x_\varphi z_\eta-x_\eta z_\varphi\right)+\left(x_\psi y_\eta-x_\eta y_\psi\right)\left(x_\eta y_\varphi-x_\varphi y_\eta\right)\Big),$$

$$b_{2,2}(\varphi,\psi,\eta)=\frac{1}{I^2}\Big(\left(y_\psi z_\eta-y_\eta z_\psi\right)\left(y_\varphi z_\psi-y_\psi z_\varphi\right)+\left(x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta\right)\times$$
$$\times\left(x_\psi z_\varphi-x_\varphi z_\psi\right)+\left(x_\psi y_\eta-x_\eta y_\psi\right)\left(x_\varphi y_\psi-x_\psi y_\varphi\right)\Big),$$

$$b_{3,1}(\varphi,\psi,\eta)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{y_\psi z_\eta-y_\eta z_\psi}{I}\right)\cdot\frac{y_\psi z_\eta-y_\eta z_\psi}{I}+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{y_\psi z_\eta-y_\eta z_\psi}{I}\right)\times$$
$$\times\frac{y_\eta z_\varphi-y_\varphi z_\eta}{I}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{y_\psi z_\eta-y_\eta z_\psi}{I}\right)\cdot\frac{y_\varphi z_\psi-y_\psi z_\varphi}{I}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta}{I}\right)\times$$
$$\times\frac{x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta}{I}+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta}{I}\right)\cdot\frac{x_\varphi z_\eta-x_\eta z_\varphi}{I}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta}{I}\right)\times$$
$$\times\frac{x_\psi z_\varphi-x_\varphi z_\psi}{I}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta}{I}\right)\cdot\frac{x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta}{I}+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta}{I}\right)\times$$
$$\times\frac{x_\varphi z_\eta-x_\eta z_\varphi}{I}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{x_\eta z_\psi-x_\psi z_\eta}{I}\right)\cdot\frac{x_\psi z_\varphi-x_\varphi z_\psi}{I},$$

$$b_{3,2}(\varphi,\psi,\eta)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{y_\eta z_\varphi-y_\varphi z_\eta}{I}\right)\cdot\frac{y_\psi z_\eta-y_\eta z_\psi}{I}+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{y_\eta z_\varphi-y_\varphi z_\eta}{I}\right)\times$$
$$\times\frac{y_\eta z_\varphi-y_\varphi z_\eta}{I}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{y_\eta z_\varphi-y_\varphi z_\eta}{I}\right)\cdot\frac{y_\varphi z_\psi-y_\psi z_\varphi}{I}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{x_\varphi z_\eta-x_\eta z_\varphi}{I}\right)\times$$

$$\times\frac{x_\eta z_\psi - x_\psi z_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{x_\varphi z_\eta - x_\eta z_\varphi}{I}\right)\cdot\frac{x_\varphi z_\eta - x_\eta z_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{x_\varphi z_\eta - x_\eta z_\varphi}{I}\right)\times$$

$$\times\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{x_\eta y_\varphi - x_\varphi y_\eta}{I}\right)\cdot\frac{x_\psi y_\eta - x_\eta y_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{x_\eta y_\varphi - x_\varphi y_\eta}{I}\right)\times$$

$$\times\frac{x_\eta y_\varphi - x_\varphi y_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{x_\eta y_\varphi - x_\varphi y_\eta}{I}\right)\cdot\frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I},$$

$$b_{3,3}(\varphi,\psi,\eta) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{y_\varphi z_\psi - y_\psi z_\varphi}{I}\right)\cdot\frac{y_\psi z_\eta - y_\eta z_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{y_\varphi z_\psi - y_\psi z_\varphi}{I}\right)\times$$

$$\times\frac{y_\eta z_\varphi - y_\varphi z_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{y_\varphi z_\psi - y_\psi z_\varphi}{I}\right)\cdot\frac{y_\varphi z_\psi - y_\psi z_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I}\right)\times$$

$$\times\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I}\right)\cdot\frac{x_\varphi z_\eta - x_\eta z_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I}\right)\times$$

$$\times\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I}\right)\cdot\frac{x_\psi y_\eta - x_\eta y_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I}\right)\times$$

$$\times\frac{x_\eta y_\varphi - x_\varphi y_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I}\right)\cdot\frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I},$$

$$q(\varphi,\psi,\eta) = \frac{1}{I^2}\Big(\big(\kappa_{11}(y_\psi z_\eta - y_\eta z_\psi) + \kappa_{12}(x_\eta z_\psi - x_\psi z_\eta) + \kappa_{13}(x_\psi y_\eta -$$

$$-x_\eta y_\psi)\big)(y_\psi z_\eta - y_\eta z_\psi) + \big(\kappa_{21}(y_\psi z_\eta - y_\eta z_\psi) + \kappa_{22}(x_\eta z_\psi - x_\psi z_\eta) +$$

$$+\kappa_{23}(x_\psi y_\eta - x_\eta y_\psi)\big)(x_\eta z_\psi - x_\psi z_\eta) + \big(\kappa_{31}(y_\psi z_\eta - y_\eta z_\psi) + \kappa_{32}(x_\eta z_\psi -$$

$$-x_\psi z_\eta) + \kappa_{33}(x_\psi y_\eta - x_\eta y_\psi)\big)(x_\psi y_\eta - x_\eta y_\psi)\Big).$$

Розв’язання задачі. Задачу із запізненням τ (10), (11) на кожному із часових інтервалів $[(n-1)\tau, n\tau]$, $n = 1, 2, \ldots$ приведемо до таких задач без запізнення:

$$\varepsilon\Big(\big(1+\varepsilon h_{n\tau}\big)\Big(b_{1,1}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\varphi\varphi}+b_{1,2}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\psi\psi}+$$

$$+b_{1,3}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\eta\eta}+2b_{2,1}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\varphi\psi}+2b_{2,2}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\varphi\eta}+$$

$$+b_{3,1}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\varphi}+b_{3,2}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\psi}+b_{3,3}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\eta}\Big)+$$

$$+\varepsilon\Big(b_{1,1}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\varphi}h_{n\tau\,\varphi}+b_{1,2}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\psi}h_{n\tau\,\psi}+b_{1,3}(\varphi,\psi,\eta)c^{[n]}_{\eta}h_{n\tau\,\eta}+$$

$$+b_{2,1}(\varphi,\psi,\eta)\Big(c^{[n]}_{\varphi}h_{n\tau\,\psi}+c^{[n]}_{\psi}h_{n\tau\,\varphi}\Big)+b_{2,2}(\varphi,\psi,\eta)\Big(c^{[n]}_{\varphi}h_{n\tau\,\eta}+c^{[n]}_{\eta}h_{n\tau\,\varphi}\Big)\Big)\Big)-$$

$$-q(\varphi,\psi,\eta)\cdot c^{[n]}_{\varphi}=c^{[n]}_{t}; \tag{12}$$

$$c^{[n]}(\varphi_*,\psi,\eta,t)=c_*(\psi,\eta,t),\ \ c^{[n]}\Big(\varphi^*,\psi,\eta,t\Big)=c^*(\psi,\eta,t),$$

$$c^{[n]}(\varphi,Q_*,\eta,t)=c_{**}(\varphi,\eta,t),\ \ c^{[n]}\Big(\varphi,Q^*,\eta,t\Big)=c^{**}(\varphi,\eta,t),$$

$$c^{[n]}(\varphi,\psi,Q_{**},t)=c_{***}(\varphi,\psi,t),\ \ c^{[n]}\Big(\varphi,\psi,Q^{**},t\Big)=c^{***}(\varphi,\psi,t),$$

$$c^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,(n-1)\tau)=w_n(\varphi,\psi,\eta,(n-1)\tau),\ \ h_{n\tau}(\varphi,\psi,\eta,t)=$$

$$=h\Big(c^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,t-\tau)\Big)=h\Big(c^{[n-1]}(\varphi,\psi,\eta,t-\tau)\Big)=w_n(\varphi,\psi,\eta,t-\tau), \tag{13}$$

де
$$w_n(\varphi,\psi,\eta,t)=c^{[n-1]}(\varphi,\psi,\eta,t),\quad n=1,2,\ldots,$$

$$c^{[0]}(\varphi,\psi,\eta,0)=c^{0}_{0}(\varphi,\psi,\eta,0)\ \ (\ t\in[n\tau,(n+1)\tau]\ ).$$

Розв’язок задач (12), (13) з точністю $O(\varepsilon^2)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів

$$c^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,t)=c^{[n]}_0(\varphi,\psi,\eta,t)+\varepsilon c^{[n]}_1(\varphi,\psi,\eta,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i P^{[n]}_i(\xi,\psi,\eta,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i/2}H^{[n]}_i(\varphi,\zeta,\eta,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i/2}\tilde{H}^{[n]}_i\Big(\varphi,\tilde{\zeta},\eta,t\Big)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i/2}T^{[n]}_i(\varphi,\psi,\varsigma,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i/2}\tilde{T}^{[n]}_i(\varphi,\psi,\tilde{\varsigma},t)+R^{[n]}_2(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon), \tag{14}$$

де $R_2^{[n]}$ – залишковий член (його оцінка встановлюється на основі принципу максимуму аналогічно [3 – 5, 13]), $c_i^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,t)$ ($i=\overline{0,1}$) – члени регулярної частини асимптотики: $c_0^{[n]}$ – розв'язки відповідних вироджених задач (конвективного переносу); $c_1^{[n]}$ – поправки, які враховують “вплив” дифузії по всій області G (за виключенням деяких її примежевих ділянок); $P_i^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)$ ($i=\overline{0,2}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході конвективної течії), $H_i^{[n]}(\varphi,\zeta,\eta,t)$, $\widehat{H}_i^{[n]}(\varphi,\widehat{\zeta},\eta,t)$, $T_i^{[n]}(\varphi,\psi,\varsigma,t)$, $\widehat{T}_i^{[n]}(\varphi,\psi,\widehat{\varsigma},t)$ ($i=\overline{0,2}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi=Q_*$, $\psi=Q^*$, $\eta=Q_{**}$, $\eta=Q^{**}$, що враховують вплив “бічних джерел забруднень”, $\xi=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\zeta=\dfrac{\psi-Q_*}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\widehat{\zeta}=\dfrac{Q^*-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\varsigma=\dfrac{\eta-Q_{**}}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\widehat{\varsigma}=\dfrac{Q^{**}-\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення.

Аналогічно до [1 – 3, 5], підставляючи (14) в (12), (13) і застосовуючи стандартну “процедуру прирівнювання”, одержимо наступні задачі для знаходження функцій $c_0^{[n]}$, $c_1^{[n]}$:

$$\left[\begin{array}{l} q(\varphi,\psi,\eta)\cdot c_{0\ \varphi}^{[n]}+c_{0\ t}^{[n]}=0,\ c_0^{[n]}(\varphi_*,\psi,\eta,t)=c_*(\psi,\eta,t),\\ c_0^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,(n-1)\tau)=w_n(\varphi,\psi,\eta,(n-1)\tau)=\overline{w}_n(\varphi,\psi,\eta),\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} q(\varphi,\psi,\eta)\cdot c_{1\ \varphi}^{[n]}+c_{1\ t}^{[n]}=g^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,t),\\ c_1^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,0)=0,\ c_1^{[n]}(\varphi_*,\psi,\eta,t)=0,\end{array}\right.$$

де
$$g^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,t)=b_{1,1}(\varphi,\psi,\eta)c_{0\ \varphi\varphi}^{[n]}+b_{1,2}(\varphi,\psi,\eta)c_{0\ \psi\psi}^{[n]}+$$
$$+b_{1,3}(\varphi,\psi,\eta)c_{0\ \eta\eta}^{[n]}+2b_{2,1}(\varphi,\psi,\eta)c_{0\ \varphi\psi}^{[n]}+2b_{2,2}(\varphi,\psi,\eta)c_{0\ \varphi\eta}^{[n]}+$$
$$+b_{3,1}(\varphi,\psi,\eta)c_{0\ \varphi}^{[n]}+b_{3,2}(\varphi,\psi,\eta)c_{0\ \psi}^{[n]}+b_{3,3}(\varphi,\psi,\eta)c_{0\ \eta}^{[n]}.$$

В результаті їх розв'язання одержимо:

$$c_0^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{bmatrix} c_*\left(\psi,\eta,t-f(\varphi,\psi,\eta)\right), & t\geq f(\varphi,\psi,\eta), \\ \overline{w}_n\left(f^{-1}\left(\psi,\eta,f(\varphi,\psi,\eta)-t\right),\right), & t<f(\varphi,\psi,\eta), \end{bmatrix}$$

$$c_1^{[n]}(\varphi,\psi,\eta,t)=\begin{bmatrix} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g^{[n]}\left(s,\psi,\eta,t-f(\varphi,\psi,\eta)+f(s,\psi,\eta)\right)}{q(s,\psi,\eta)}ds, & t\geq f(\varphi,\psi,\eta), \\ \int\limits_{(n-1)\tau}^{t} g^{[n]}\left(f(\varphi,\psi,\eta)-t+\tilde{t},\psi,\eta,\tilde{t}\right)d\tilde{t}, & t<f(\varphi,\psi,\eta), \end{bmatrix}$$

де $f(\varphi,\tilde{\psi},\tilde{\eta})=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{q(s,\tilde{\psi},\tilde{\eta})}$ – час проходження виділеної частинки від точки $(\varphi_*,\tilde{\psi},\tilde{\eta})$ до точки $(\varphi,\tilde{\psi},\tilde{\eta})$ вздовж відповідної лінії течії, f^{-1} – функція, обернена до f відносно змінної φ (відмітимо, що вона завжди існує, оскільки підінтегральна функція q – неперервно-диференційована, обмежена і додатньо визначена).

Функції $P^{[n]}=\sum\limits_{i=0}^{2}\varepsilon^i P_i^{[n]}$ призначені для усунення нев'язок, які вносяться відповідно побудованими регулярними частинами $c^{[n]}=\sum\limits_{i=0}^{1}c_i^{[n]}\varepsilon^i$ асимптотики, в околі ділянки $\varphi=\varphi_*$ (виходу фільтраційної течії). Для їх знаходження матимемо задачі [5]:

$$\begin{cases} P_{0\xi\xi}^{[n]}+P_{0\xi}^{[n]}=0, \\ P_0^{[n]}(0,\psi,\eta,t)=c^*(\psi,\eta,t)-c^{[n]}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right),\ P_0^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)\underset{\xi\to\infty}{\to}0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{i\xi\xi}^{[n]} + P_{i\xi}^{[n]} = \dfrac{d_i(\xi,\psi,\eta,t)}{q(\varphi^*,\psi,\eta)}, \\ P_i^{[n]}(0,\psi,\eta,t) = 0,\ P_i^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) \underset{\xi\to\infty}{\to} 0,\ i = \overline{1,2}, \end{cases}$$

де $d_1(\xi,\psi,\eta,t) = P_{0t}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - b_{1,1}(\varphi^*,\psi,\eta)h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,\eta,t)P_{0\xi\xi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)$,

$$d_2(\xi,\psi,\eta,t) = P_{1t}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) + \Big(h_{n\tau\,\xi}(\varphi^*,\psi,\eta,t)\cdot b_{1,1}(\varphi^*,\psi,\eta) +$$

$$+b_{1,1\xi}(\varphi^*,\psi,\eta)\cdot h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,\eta,t)\Big)\cdot\xi\cdot P_{0\xi\xi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) + b_{3,1}(\varphi^*,\psi,\eta)\times$$

$$\times h_{n\tau\,\xi}(\varphi^*,\psi,\eta,t)P_{0\xi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - b_{1,1}(\varphi^*,\psi,\eta)h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,\eta,t)P_{1\xi\xi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) -$$

$$-b_{1,2}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\psi\psi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - b_{1,3}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\eta\eta}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) -$$

$$-2b_{2,1}\left(\varphi^*,\psi,\eta\right)P_{0\varphi\psi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - 2b_{2,2}\left(\varphi^*,\psi,\eta\right)P_{0\varphi\eta}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) -$$

$$-b_{3,2}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\psi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - b_{3,3}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\eta}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)\Big).$$

Аналогічно до [1-3, 5, 6], в результаті розв'язання цих задач, отримаємо:

$$P_0^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) = \left(c^*(\psi,\eta,t) - c^{[n]}\left(\varphi^*,\psi,\eta,t\right)\right)\cdot e^{-\xi};$$

$$P_1^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) = -\frac{\xi}{q(\varphi^*,\psi,\eta)}\Big(P_{0t}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) -$$

$$-b_{1,1}(\varphi^*,\psi,\eta)\,h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,\eta,t)P_{0\xi\xi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)\Big);$$

$$P_2^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) = -\xi\cdot\Big(q(\varphi^*,\psi,\eta)h_{n\tau}(\varphi^*,\psi,\eta,t)\Big(P_{0t}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) -$$

$$-l(\varphi^*,\psi,\eta,t)P_0^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)\Big) - b_{1,2}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\psi\psi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - b_{1,3}(\varphi^*,\psi,\eta)\times$$

$$\times P_{0\eta\eta}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - b_{1,2}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\psi\psi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - b_{1,3}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\eta\eta}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) -$$

$$-b_{3,2}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\psi}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) - b_{3,3}(\varphi^*,\psi,\eta)P_{0\eta}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t) -$$

$$-q(\varphi^*,\psi,\eta)h_{n\tau\,\xi}(\varphi^*,\psi,\eta,t)\cdot P_0^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)\Big) - q^{-1}(\varphi^*,\psi,\eta)e^{-\xi}(\xi + \xi^2/2)\times$$

$$\times\Big(P_0^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)\cdot l'_\xi(\varphi^*,\psi,\eta,t)-q^{-1}(\varphi^*,\psi,\eta)\cdot\Big(P_{0tt}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)-$$

$$-l(\varphi^*,\psi,\eta,t)P_{0t}^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)\Big)-q(\varphi^*,\psi,\eta)h_{n\tau\,t}(\varphi^*,\psi,\eta,t)P_0^{[n]}(\xi,\psi,\eta,t)\Big),$$

$$l(\xi,\psi,\eta,t)=b_{1,1}(\xi,\psi,\eta)\cdot h_{n\tau}(\xi,\psi,\eta,t).$$

Функції типу примежевого шару $H^{[n]}\left(\varphi,\zeta,\eta,t\right)=\sum_{i=0}^{2}H_i^{[n]}\varepsilon^{i/2}$, $\widehat{H}^{[n]}\left(\varphi,\widehat{\zeta},\eta,t\right)=\sum_{i=0}^{2}\widehat{H}_i^{[n]}\varepsilon^{i/2}$, $T^{[n]}\left(\varphi,\psi,\varsigma,t\right)=\sum_{i=0}^{2}T_i^{[n]}\varepsilon^{i/2}$, $\widehat{T}^{[n]}\left(\varphi,\psi,\widehat{\varsigma},t\right)=$ $=\sum_{i=0}^{2}\widehat{T}_i^{[n]}\varepsilon^{i/2}$ одержуємо шляхом перетворення рівнянь вигляду $\alpha(\varphi)\dfrac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}-\delta(\varphi)\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+g(\varphi,\mu,t)$ за допомогою заміни $f(s,\psi,\eta)=$ $=f(\varphi,\psi,\eta)-t$ до рівнянь із сталими коефіцієнтами $a(s)\dfrac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+g_0(s,\mu,t)$ (s – параметр).

Зауважимо, що запропонована математична модель може бути використана для моделювання просторових процесів "конвекція-дифузія" в анізотропних середовищах, структура яких пов'язана з опадокопиченням: проникність вздовж шарів має одне значення, а в перпендикулярному напрямку – інше, значно менше, у випадку, коли відомо їх поведінку в деякий початковий проміжок часу.

Розроблений вище підхід дає можливість розв'язувати аналогічні задачі для більш складних конфігурацій розглядуваної області і залежності коефіцієнта дифузії від шуканої концентрації (моделі зворотнього впливу характеристик середовища на характеристики процесу). У **перспективі** – поширення запропонованої методики на випадки розв'язування відповідних просторових задач гетеродифузії [10, 11].

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1980.- 208 с.
2. Теория сингулярных возмущений в прикладных задачах.- Рига: Hitelser, 1990.- 187 с.
3. *Bobisud L.E.* Parabolic Equations wits a Small Paramer and discontinuons Data // Jornal of mathematical analysis and opplications.- 1969.- Volum 26, №1.- P. 208-220.
4. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.- Успехи математических наук.- 1957.- 12, вып. 5.- С. 3-122.
5. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.- 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
6. *Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде.- К.: 1985.- 17 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.72).
7. *Бомба А.Я., Пригорницкий Д.А., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №1.- С. 152-159.
8. *Бомба А.Я., Скопецький В.В., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №2.- С. 99-104.
9. *Бомба А.Я., Присяжнюк І.М.* Асимптотичне розвинення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" із запізненням // Доповіді НАН України.- 2005.- №3.- С.60-66.
10. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. НАН України, Центр матем. моделювання Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача.- Львів: СПОЛОМ, 2003.- 128 с.
11. *Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O.* Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in manyphases continuum systems // In mat.: II Szkola Geomechaniki (miedz. konf.).- Gliwice: Polit. Slaska, 1995.- P. 343-351.
12. *Бомба А.Я.* Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2003.- Вип. 1 (10).- С. 27-35.
13. *Бомба А.Я., Присяжнюк І.М., Климюк Ю.Є.* Чисельно-асимптотичне

наближення розв'язків одного класу просторових задач конвективно-дифузійного переносу в плоских фільтраційних пластах // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2005.- Т. 10, число 3.- С. 158-165.

14. *Климюк Ю.Є.* Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу модельних просторових нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія-масообмін" // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.- 2005.- Вип. 3 (12).- С. 80-93.

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне
E-mail: klimyuk@ukr.net

Надійшла 17.04.2007

Климюк Ю.Е. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА "КОНВЕКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ" С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ // *Построен пространственный аналог плоской краевой задачи на квазиконформное отображение криволинейного четырёхугольника на прямоугольник для анизотропных сред и на этом основании получено алгоритм асимптотического приближения решения нелинейной сингулярно возмущённой краевой задачи типа "конвекция-диффузия" с запаздыванием в криволинейном паралелепипеде, ограниченом двумя эквипотенциальными поверхностями та четырьмя поверхностями тока.*

Klymyuk Yu.E. 3D NONLINEAR SINGULAR INDIGNANT BOUNDARY VALUE "CONVECTION-DIFFUSION" PROBLEMS WITH DELAY IN ANISOTROPIC MEDIUMS // *3D analogue of a flat boundary vaue problem on quasiconformal mapping of a curvilinear quadrangle on a rectangular for the anisotropic mediums is constructed. On this basis algorithm of asymptotic approximation of solution of the nonlinear singular indignant boundary value "convection-diffusion" problem with delay in the curvilinear parallelepiped, bounded by two equipotential surfaces and four surfaces of current, in case of polynomial dependence of factor of diffusion on concentration is received.*