РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВОЛИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ВІСНИК

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник наукових праць

Випуск 4 (13)

Рівне - 2007

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волынский математический вестник. Серия прикладная математика".
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол № 5 від 28.12.2007 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
Рівненський державний гуманітарний університет,
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: abomba@ukr.net

ISBN 966-7281-02-8

Зміст

Визначні математики, механіки, інформатики сучасності

З історії математики, механіки, інформатики

УДК 519.63:532.5

Присяжнюк І.М.

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ПРОЦЕСУ ТРИКОМПОНЕНТНОЇ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ З УРАХУВАННЯМ УТВОРЕННЯ РЕЧОВИНИ, ЩО ВИПАДАЄ В ОСАД

Побудовано асимптотичне наближення розв'язку нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі трикомпонентної конвективної дифузії за умов малого масообміну в пористому пласті – двозв'язній області, обмеженій еквіпотенціальними лініями. Наведено результати числових розрахунків.

Вступ. В роботах [1 – 4] йдеться про розробку та дослідження асимптотичних методів для розв'язування типових крайових та мішаних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях з урахуванням різного рівня гладкості початкової та граничних умов, а також їх узгодженості у кутових (реброви х) точках. Успішне застосування та розвиток ці методи знайшли у роботах [5 – 6], де модифіковано відповідні алгоритми стосовно розв'язання задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних криволінійних областях, а також у двозв'язних та багатозв'язних областях. Актуальною є проблема ефективного застосування методики переходу до області комплексного потенціалу і разом з нею асимптотичного методу до розв'язання систем рівнянь для сингулярно збурених задач типу "конвекція-дифузія-масообмін". У цій роботі йдеться про побудову асимптотичного наближення розв'язків такого роду задач для процесів трикомпонентної конвективної дифузії з урахуванням малого масообміну та утворення речовини, що випадає в осад.

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу типу „конвекція–

 С. 129–139

дифузія–масообмін” для області $G = G_z \times (0,\infty)$, де G_z ($z = x + iy$) – двозв’язна криволінійна область (пористий пласт), обмежена двома замкненими гладкими контурами $L_* = \left\{z:\ f_*\ (x,y) = 0\right\}$ – внутрішній та $L^* = \{z:\ f^*(x,y) = 0\}$ – зовнішній (рис. 1, а):

$$D_i\left(\frac{\partial^2 c_i(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i(x,y,t)}{\partial y^2}\right) - v_x(x,y)\frac{\partial c_i(x,y,t)}{\partial x} - v_y(x,y)\frac{\partial c_i(x,y,t)}{\partial y} -$$

$$-k_i \cdot H_i(x,y,t) = \frac{\partial c_i(x,y,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

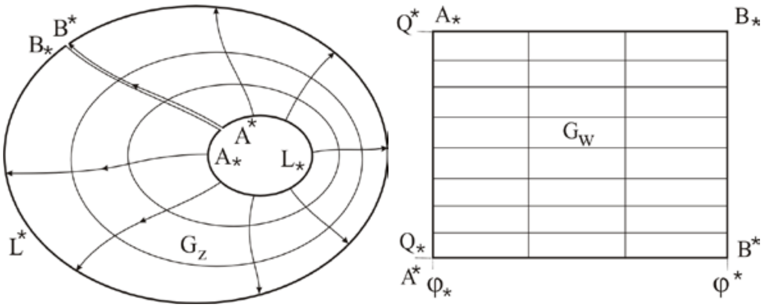
$$\frac{\partial N(x,y,t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^{3} k_i \cdot H_i(x,y,t), \tag{2}$$

$$c_i\Big|_{L_*} = c_{i*}\left(M,t\right),\ c_i\Big|_{L^*} = c_i^*\left(M,t\right),\ c_i(M,0) = c_{i0}^0\left(M\right),$$

$$N(M,0) = N_0^0\left(M\right), \tag{3}$$

$$(v_x, v_y) = grad\,\varphi(x,y),\ \Delta\varphi = 0,\ \varphi\Big|_{L_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{L^*} = \varphi^*. \tag{4}$$

Тут $c_i(x,y,t)$ $(i = 1,2,3)$ – відповідно концентрації трьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці (x,y) в момент часу t, $H_i(x,y,t)$ $(i = 1,2,3)$ – концентрація речовини і-го сорту в точці (x,y) у момент часу t, яка випадає в осад в наслідок хімічної взаємодії речовин c_1, c_2 та c_3, $H_1(x,y,t) = c_2 \cdot c_3$, $H_2(x,y,t) = c_1 \cdot c_3$, $H_3(x,y,t) = c_1 \cdot c_2$, M – біжуча точка відповідної кривої, $D_i = a_i \cdot \varepsilon$, $k_i = k_i^* \cdot \varepsilon$, де k_i^*, a_i – задані додатні дійсні числа, ε ($\varepsilon > 0$) – малий параметр (характеризує переваги одних складових процесу над іншими), φ, v_x, v_y – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z), $\sqrt{v_x^2(x,y)+v_y^2(x,y)} > v_* \gg \varepsilon$, $c_{i*}(M,t)$, $c_i^*(M,t)$, $c_{i0}^0(M,t)$ ($i=1,2,3$) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G, $N(x,y,t)$ – концентрація осаду в точці (x,y) у момент часу t.



а) *б)*

Рис. 1. Фізична двозв'язна область G_z (а)та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Ця модель описує процес поширення частинок трьох сортів забруднюючої речовини у фільтраційному середовищі. Причому кожна з речовин втрачає (наприклад, під дією певної хімічної реакції) свої частинки при взаємодії з речовинами іншого сорту, внаслідок чого утворюється речовина $N(x,y,t)$, яка випадає в осад.

Вважаємо, що задача фільтрації (4) є розв'язаною. Зокрема, відомим є поле швидкості. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi,\psi)$, $y = y(\varphi,\psi)$ у рівняннях (1), (2) та умовах (3), приходимо до відповідної задачі для області G_w (рис. 1, б):

$$\varepsilon \cdot a_i \cdot v^2(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial^2 c_i(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 c_i(\varphi,\psi,t)}{\partial\psi^2}\right)-v^2(\varphi,\psi)\frac{\partial c_i(\varphi,\psi,t)}{\partial\varphi}-$$

$$-\varepsilon\cdot k_i\ \cdot H_i(\varphi,\psi,t)=\frac{\partial c_i(\varphi,\psi,t)}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial N(\varphi,\psi,t)}{\partial t}=\sum_{l=1}^{3}k_i\cdot H_i(\varphi,\psi,t), \tag{6}$$

$$c_i(\varphi_*,\psi,t)=c_{i*}(\psi,t),\ c_i(\varphi^*,\psi,t)=c_i^*(\psi,t),\ c_i(\varphi,\psi,0)=c_{i0}^0(\varphi,\psi),$$

$$N(\varphi,\psi,0)=N_0^0(\varphi,\psi). \tag{7}$$

Асимптотика розв’язку. Розв’язок (c_1,c_2,c_3) задачі (5) - (7) знаходимо з точністю у вигляді асимптотичних рядів:

$$c_i(\varphi,\psi,t)=c_{i0}(\varphi,\psi,t)+\varepsilon c_{i1}(\varphi,\psi,t)+\sum_{l=0}^{2}\varepsilon^i \mathit{\Pi}_{il}(\xi,\psi,t)+R_2^i(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \tag{8}$$

де R_2^i – залишкові члени, $c_{ij}(\varphi,\psi,t)$, ($j=0,1$) – члени відповідних регулярних частин асимптотики, зокрема: c_{i0} – розв’язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу); c_{i1} – відповідні поправки, що враховують “вклад” дифузії всюди в даній області (за виключенням деякої її приграничної зони), $\mathit{\Pi}_{iq}(\xi,\psi,t)$, ($q=\overline{0,2}$) – функції типу пограншару в околі $\varphi=\varphi^*$ (відповідні поправки на виході фільтраційного потоку із області G_z), $\xi=(\varphi^*-\varphi)\cdot\varepsilon^{-1}$ – відповідне регуляризуюче перетворення (змінна розтягу), $i=1,2,3$.

Після підстановки (8) в (5) та застосування процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, для знаходження функцій c_{ij} ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{0,1}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi)\cdot c_{ij\,\varphi}(\varphi,\psi,t)+c_{ijt}(\varphi,\psi,t)=g_{ij}(\varphi,\psi,t), \\ c_{ij}(\varphi,\psi,0)=h_{ij}(\varphi,\psi),\ c_{ij}(\varphi_*,\psi,t)=b_{ij}(\psi,t), \end{cases} \tag{9}$$

$$g_{i0}(\varphi,\psi,t)=0\,,\quad g_{i1}(\varphi,\psi,t)=a_i v^2(\varphi,\psi)(c_{i0\varphi\varphi}+c_{i0\psi\psi})-k_i\prod_{m=1,\,m\neq i}^{3}c_{m0}\,,$$

$$h_{i0}(\varphi,\psi)=c_{i0}^0(\varphi,\psi)\,,\ h_{i1}(\varphi,\psi)=0\,,\ b_{i0}(\psi,t)=c_{i*}(\psi,t)\,,\ b_{i1}(\psi,t)=0\,.$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$c_{i0}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} c_{i*}(\psi,t-f(\varphi,\psi)),\ t\geq f(\varphi,\psi), \\ c_{i0}^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,t)\,,t<f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

$$c_{i1}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases} \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(\tilde{\varphi},\psi)\cdot g_{i1}(\tilde{\varphi},\psi,f(\tilde{\varphi},\psi)+t-f(\varphi,\psi))\,d\tilde{\varphi},\ t\geq f(\varphi,\psi), \\ \int\limits_{0}^{t} g_{i1}(f^{-1}(\tilde{t}+f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi,\tilde{t})d\tilde{t},\ t<f(\varphi,\psi), \end{cases}$$

де $f\left(\varphi,\tilde{\psi}\right)=\int_{\varphi_*}^{\varphi}v^{-2}\left(s,\tilde{\psi}\right)ds$ – час проходження виділеної частинки вздовж лінії течії $\psi=\tilde{\psi}$ від еквіпотенціальної лінії $s=\varphi_*$ до еквіпотенціальної лінії $s=\varphi$, f^{-1} – функція, обернена до функції f стосовно змінної φ.

Функції $\Pi_i=\sum_{j=0}^{2}\Pi_{ij}\varepsilon^j$ призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $c_i=\sum_{j=0}^{1}c_{ij}\varepsilon^j$, в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ (виходу фільтраційної течії). Ці функції знаходимо в результаті розв'язування наступних задач:

$$a_i \cdot v^2(\varphi^*,\psi)\Pi_{ij\xi\xi}(\xi,\psi,t)+v^2(\varphi^*,\psi)\Pi_{ij\xi}(\xi,\psi,t)=d_{ij}(\xi,\psi,t),$$

$$\Pi_{ij}\to 0,\quad при\ \xi\to\infty,\ \ \Pi_{ij}\left(0,\psi,t\right)=q_{ij}\left(\psi,t\right),\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{0,2},$$

де $q_{i0}(\psi,t)=c_i^*(\psi,t)-c_{i0}(\varphi^*,\psi,t)$, $q_{i1}(\psi,t)=-c_{i1}(\varphi^*,\psi,t)$, $q_{i2}(\psi,t)=0$,

$$d_{i0}(\xi,\psi,t)=0,\ d_{i1}(\xi,\psi,t)=\Pi_{i0t}(\xi,\psi,t),\ d_{i2}(\xi,\psi,t)=\Pi_{i1t}(\xi,\psi,t)-$$

$$-v^2(\varphi^*,\psi)\Pi_{i0\psi\psi}(\xi,\psi,t)+k_i\prod_{m=1,\,m\neq i}^{3}\Pi_{m0}(\xi,\psi,t)+v^{-1}(\varphi^*,\psi)v_\xi(\varphi^*,\psi)\times$$

$$\times\xi\Pi_{i0t}(\xi,\psi,t)+k_i\prod_{m=1,\,m\neq i}^{3}\Pi_{m0}(\xi,\psi,t)+k_i\sum_{l=1,\,l\neq i}^{3}\left(c_{l0}\Pi_{(3-l)0}\right).$$

Розв'язки записаних вище звичайних диференціальних рівнянь отримуємо у явному вигляді. Так зокрема, матимемо:

$$\Pi_{i0}\left(\xi,\psi,t\right)=\left(c_i^*\left(\psi,t\right)-c_{i0}\left(\varphi^*,\psi,t\right)\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{a_i}},$$

$$\Pi_{i1}\left(\xi,\psi,t\right)=-c_{i1}\left(\varphi^*,\psi,t\right)\cdot e^{\frac{-\xi}{a_i}}-\frac{a_i\xi\Pi_{i0t}(\xi,\psi,t)}{v^2(\varphi^*,\psi)}.$$

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\varepsilon\, a_i\, v^2(\varphi,\psi)\left(R^i_{2\varphi\varphi}(\varphi,\psi,t)+R^i_{2\psi\psi}(\varphi,\psi,t)\right)-v^2(\varphi,\psi)R^i_{2\varphi}(\varphi,\psi,t)-$$

$$-\varepsilon\cdot k_i\cdot\prod_{m=1,\,m\neq i}^{3}R_2^m(\varphi,\psi,t)=R^i_{2t}(\varphi,\psi,t)-b_i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)\cdot\varepsilon^2,$$

$$R_2^i(\varphi_*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi^*,\psi,t,\varepsilon)=R_2^i(\varphi,\psi,0,\varepsilon)=0\quad(i=\overline{1,3}).$$

Тут $b_i(\varphi,\psi,t,\varepsilon)$ – відома функція, що є сумою добутків членів ряду (8), їх частинних похідних, а також коефіцієнтів при ε розкладу функції $v^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi=\varphi^*$.

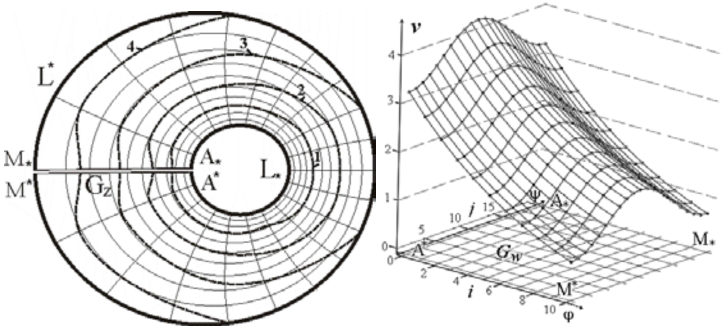
Вимагаючи достатньої гладкості коефіцієнтів системи рівнянь

(1), та початкової і граничних умов (існування неперервних частинних похідних до четвертого порядку включно), а також узгодженості останніх вздовж ребер $L^* \times 0$, $L_* \times 0$ області $G = G_z \times [0,T]$, де $[0,T]$ – фіксований проміжок часу, на основі принципу максимуму для параболічних рівнянь приходимо до справедливості такого твердження: $R_2^i(\varphi,\psi,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ ($i=\overline{1,3}$, $(\varphi,\psi,t) \in G$).

Знайшовши розв’язок (c_1, c_2, c_3), легко знаходимо концентрацію осаду N в точці $(\varphi^*, \psi^*) \in G_w$ у момент часу $t = t^*$ за формулою:

$$N(\varphi^*, \psi^*, t^*) = \int_0^{t^*} \sum_{l=1}^{3} \Big(k_i \cdot H_i(\varphi^*, \psi^*, \tilde{t}) \Big) d\tilde{t} .$$

Числові розрахунки. Наведемо результати розрахунку розглянутого вище процесу типу “конвекція-дифузія-масообмін” на ідеальному плоскопаралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1 = 0$ та $z_2 = 4$ (відповідно витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого – $w = (Q_0 / 2\pi) \cdot \ln((z - z_1)/(z - z_2))$, при $\varphi_* = -2.7$, $\varphi^* = -1.5$, $AD = \{z : \psi(x,y) = 0\}$, $BC = \{z : \psi(x,y) = 2\pi\}$. На рис. 2 а), б) зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу G_w та відповідну динамічну сітку в G_z: $\varphi(x,y) = \overline{\varphi}_i \overset{df}{=} \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i)/10$, $\psi(x,y) = \overline{\psi}_j \overset{df}{=} (Q_* \cdot j)/20$, $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,20}$, величину швидкості фільтрації $v = \Big((dz/dw)(\overline{dz/dw}) \Big)^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j), та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi,\psi) = t_k$, $k = \overline{1,4}$ при $t_1 = 0.035$, $t_2 = 1.098$, $t_3 = 0.213$, $t_4 = 0.432$ (криві 1 – 4 відповідно).

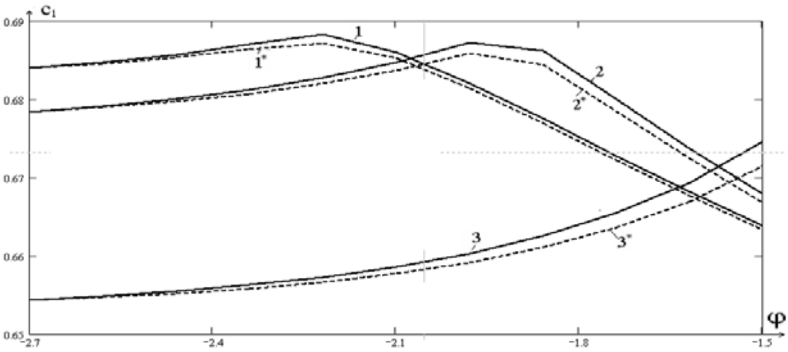


а) *б)*

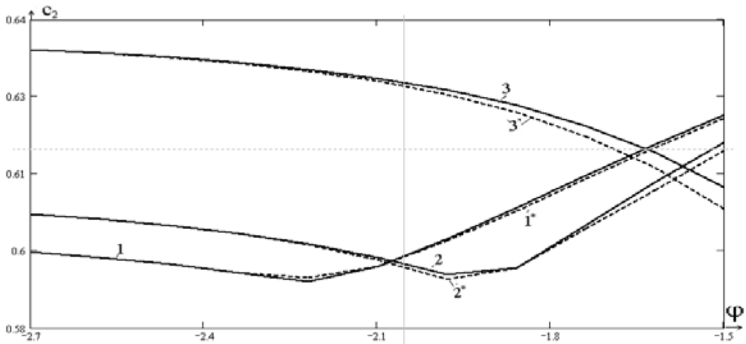
Рис. 2. Фізична область G_z (а) та поле швидкостей над відповідною їй областю комплексного потенціалу G_w (б)

Розподіли концентрацій $c_i(\varphi,\psi,t)$ ($i=\overline{1,3}$) розчинних речовин при $a_1=1, a_2=2,\ a_3=3$, $k_1=2, k_2=3,\ k_3=4$, $c_{10}^0(\varphi,\psi)=0.6+(1/4)\cdot\sin(\psi)\times$ $\times(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $c_{20}^0(\varphi,\psi)=0.7+(1/3)\cdot\cos(\psi+\pi/2)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $c_{30}^0(\varphi,\psi)=0.5+\sin(\psi+\pi/6)\cdot(3+(\varphi+2.7)^2)^{-1}$, $c_{1*}(\psi,t)=0.6+(1/4)\times$ $\times\sin(\psi)\cdot e^{-t}\cdot 3^{-1}$, $c_{2*}(\psi,t)=0.7+(1/3)\cdot\cos(\psi+\pi/2)\cdot e^{-t}\cdot 3^{-1}$, $c_{3*}(\psi,t)=$ $=0.5+\sin(\psi+\pi/6)\cdot e^{-t}\cdot 3^{-1}$, $c_1^*(\psi,t)=0.6+(1/4)\sin(\psi)\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+$ $+2.7)^2)^{-1}$, $c_2^*(\psi,t)=0.7+(1/3)\cos(\psi+\pi/2)\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$, $c_3^*(\psi,t)=0.5+\sin(\psi+\pi/6)\cdot e^{-2t}(3+(-1.5+2.7)^2)^{-1}$ зображено на рис. 3.

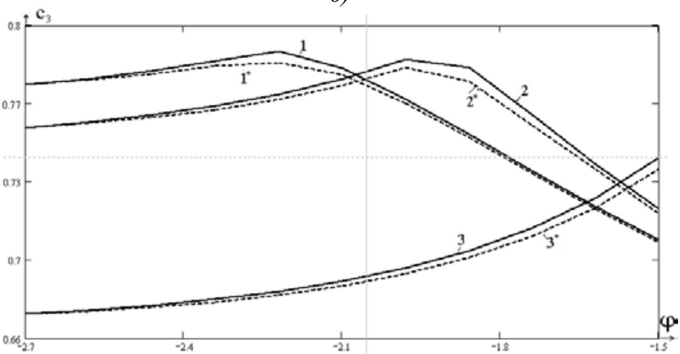
Так на рис. 3 а) зображено регулярні частини c_{10}, $c_{10}+\varepsilon c_{11}$, на рис. 3 б) та на рис. 3 в) – відповідно регулярні частини c_{20}, $c_{20}+\varepsilon c_{21}$ та c_{20}, $c_{20}+\varepsilon c_{21}$ (криві 1 – 3 та 1^*-3^* відповідно в моменти часу $t_1=0.0537$, $t_2=0.1265$, $t_3=0.5236$ вздовж лінії течії $\psi=1{,}57$) розв’язку поставленої задачі при $\varepsilon=0.01$.



а)



б)



в)

Рис. 3. Вплив дифузійних поправок
на розподіл концентрації забруднюючих речовин

Висновки і зауваження. Встановлено зв'язок між розподілом концентрації розчинних речовин та коефіцієнтами масообміну і дифузії. Це дає можливість передбачити вибір хімічно активних речовин (вибір коефіцієнта масообміну), що візьмуть участь у реакціях, з метою ефективного очищення стічних вод.

У **перспективі** – застосування розробленого підходу до моделювання процесів біологічного очищення стічних вод від забруднень.

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М.: Высшая школа, 1980.- 208 с.
2. *Бомба А.Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн., 1982.- Т.4, №4.- С. 493-496.
3. *Bobisud L.E.* Parabolic Equations wits a Small Paramer and discontinuons Data // Jornal of mathematical analysis and opplications.- 1969.- Vol. 26.- P. 208-220.
4. *Вишик М.И., Люстерник Л.Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957.-12, вып. 5.- С. 3-122.
5. *Бомба А.Я., Скопецький В.В., Присяжнюк И.М.* Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика.- 2004.- №2.- С. 99-104.
6. *Присяжнюк. І.М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" у многозв'язних областях // Волинський математичний вісник. Серія "Прикладна математика".- 2003.- Вип. 1.- С. 118-128.

Рівненський державний гуманітарний університет
E-mail: igor_pri@mail.ru

Надійшла 01.08.2006

Присяжнюк И.М. ИСЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО ПРОЦЕССА ТРИКОМПОНЕНТНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ ВЕЩЕСТВА, КОТОРОЕ ВЫПАДАЕТ В ОСАДОК // *Построено асимптотическое приближение решения нелинейной сингулярно-возмущенной краевой задачи трикомпонентной конвективной диффузии при условии малого массообмена в пористом пласте –*

двусвязной области, ограниченной эквипотенциальными линиями. Приведены результаты числовых расчетов.

Prysjazhnjuk I.M. RESEARCH OF THE NONLINEAR SINGULAR- INDIGNANT PROCESS OF THREE COMPONENT CONVECTION DIFFUSION WITH THE ACCOUNT OF CREATION SUBSTANCES, WHICH IS PRECIPITATE IN DEPOSIT // *The asymptotic approximation of the decisions of nonlinear singular indignant boundary-value problem of three component convection diffusion under condition of small мass exchange in porous layer – two-coherent area, bounded by equipotential lines, is constructed. The results of numerical researches are given.*