РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ З МЕТОДИКОЮ ВИКЛАДАННЯ

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ У ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ ТЕМИ: «СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ»

Виконав: студент 2 курсу магістратури,
групи М_М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Штинь Софія Володимирівна

Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент, професор кафедри математики з МВ
Крайчук Олександр Васильович

Рецензенти: кандидат педагогічних наук, доцент,
проректор МЕГУ ім. акад. Степана Дем’янчука
Ясінський Андрій Миколайович
кандидат педагогічних наук, доцент, професор
кафедри ІКТ та МВІ Рівненського державного
гуманітарного університету
Остапчук Наталія Олександрівна

Рівне – 2023 року

ЗМІСТ

ВСТУП

У сучасному світі, враховуючи прогрес сучасного суспільства, потреба України увійти до групи найрозвиненіших країн світу вимагає від школи виховання творчої індивідуальності, здатності адаптуватися до динаміки змін та професійних пріоритетів. У цьому сенсі викладання математики в школі має бути спрямоване на розвиток творчої свідомості учнів.

Важливу роль в освіті майбутніх фахівців відіграє розвиток вміння створювати та аналізувати різні залежності, в тому числі функціональні. Функції дозволяють нам у багатьох випадках розглядати теорії та приклади в межах самої математики з єдиної точки зору. Тому вивчення і дослідження функцій в математичній освіті є фундаментальним як в теоретичному, так і в прикладному плані, особливо при поглибленому вивченні математики в спеціалізованих фізико-математичних класах, робота яких спрямована на підготовку майбутньої технічної і наукової еліти. Викладення змісту навчання предметів у середній школі акцентує увагу на зрозумілому поясненні викладання фізики та математики, яке в сучасних умовах спрямоване не лише на навчання обдарованих учнів. Тому ґрунтовне вивчення навчального матеріалу функціональної змістової лінії є необхідним для всіх вчителів фізики та математики.

Водночас практика викладання показує, що учні часто мають проблеми при вивченні функцій, припускаються помилок при їх знаходженні, застосуванні та аналізі. Однак, на думку університетських викладачів математики, володіння цими знаннями та навичками є важливою передумовою для якісного навчання математики в університетах. Тому впровадження компетентнісного підходу до викладання функцій є нагальною потребою сьогодення, що й складає актуальність теми дослідження.

Мета дослідження – вивчити методику вивчення у профільних класах теми: «Степенева функція». Реалізація поставленої мети передбачає аналіз і розв'язування таких **завдань:**

1. Провести аналіз теоретичних основ дослідження функції.
2. Визначити особливості додавання та віднімання степеневих функцій.
3. Встановити закономірності множення та ділення степеневих функцій .
4. Дослідити методичні підходи до розв'язування вправ з теми «Степенева функція» у профільних класах.
5. Здійснити педагогічний експеримент із визначення рівня розуміння учнями теоретичних концепцій степеневих функцій у ході експерименту у профільних класах.
6. Провести аналіз результатів педагогічного експерименту.

Об'єкт досліження – методика вивчення у профільних класах теми: «Степенева функція».

Предмет дослідження – графіки функцій.

Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань **такі методи дослідження:**

теоретичні – системний і порівняльний аналіз літератури для виявлення провідних напрямків у математиці, з'ясування цілей та завдань для вивчення функцій при поглибленому вивченні математики. Висвітлення психолого педагогічних основ навчання математики в класах фізико-математичного профілю; аналіз програм, навчальних посібників, підручників для описання основних підходів для вивчення функцій учнями, з'ясувати класифікацію основних завдань, пов'язаних з функціями; порівняння, синтез наявних науково-теоретичних положень;

емпіричні – спостереження, бесіди з учителями, учнями та викладачами вищих навчальних закладів, аналіз письмових робіт учнів, уроків, анкетування, тестування для виявлення помилок і труднощів, що виникають в учнів при вивченні функцій; узагальнення передового педагогічного досвіду; організація і проведення педагогічного експерименту для перевірки ефективності розробленої методичної системи.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

1.1. Основні поняття і визначення степеневої функції

Поняття функції в математиці з’явилося відносно недавно. Знадобилося кілька поколінь відомих математиків, щоб зрозуміти доцільність його введення і отримати перші досить чіткі визначення. Великі зміни в математиці, що відбулися в сімнадцятому столітті, були викликані роботою багатьох вчених з різних країн і народів.

Умови для виникнення поняття функції були створені в 30-х роках XVII століття, коли з’явилася аналітична геометрія, яка, на відміну від класичних методів геометрів Стародавньої Греції, характеризувалася активним включенням алгебри до розв’язання геометричних задач. Майже в один і той же час (і незалежно один від одного) французькі математики П. Ферма і Р. Декарт зрозуміли, що багато завдань геометрії можна звести до вивчення, ввівши систему координат на площині і представивши фігури рівняннями. Декарт детально описав новий метод у своїх книгах "Геометрія" і "Міркування про метод", тому прямокутна система координат пізніше була названа його ім’ям - декартова система координат. Важливо зазначити, що в той самий час розвивалася алгебра і було створено "алфавітне числення", те саме числення, яке використовується сьогодні для перетворення алгебраїчних виразів, розв’язування текстових задач і рівнянь тощо.

Ейлер ввів позначення функцій, яке є загальновизнаним і сьогодні. Сучасне означення числової функції, в якому цей термін вже був звільнений від способу означення, дали незалежно один від одного німецький математик Ж. Лежандр-Діріхле (1837) і російський математик Н. І. Лобачевський (1834).

Основна ідея цих означень полягала в наступному: не важливо, як (і зокрема, не обов'язково шляхом задання аналітичного виразу) задана величина ставиться у відповідність з кожним із визначених значень, важливо лише, щоб ця відповідність була встановлена.

Сучасне поняття функції з довільною областю значень та означень виникло порівняно недавно, приблизно в першій половині цього століття, завдяки роботам засновника теорії множин Г. Кантора (1845-1918).

Поняттю функції притаманний складний і дуже тривалий розвиток. Для того, щоб краще зрозуміти необхідність введення нового абстрактного поняття, необхідно дати визначення, яке точно відображає його зміст і підкреслити його при вирішенні багатьох конкретних завдань.

Відштовхуючись від конкретних і складних проблем в математиці та її додатках, математики прийшли до поняття функції. Це сталося в ході створення нового великого дослідницького апарату - інтегрального та диференціального числення. Відкриття інтегрального та диференціального числення розширило можливості математики, а Ейлер проголосив функцію її центральним поняттям ("Все обчислення обертається навколо змінних величин та їх функцій").

Після відкриття теорії множин у другій половині 19 століття, визначення функції було розширено, щоб включити поняття множини, на додаток до ідеї відповідності, так що сучасне визначення функції формулюється наступним чином "Відповідність між множинами x і y, в якій кожному елементу x в x відповідає певний елемент в y, називається функцією".

Поняття функції отримало подальший розвиток у 19 столітті у зв'язку з потребами фізики. У 20 столітті, завдяки потребам фізики. У 1930 році англійський фізик Поль Дірак (1902-1984) ввів поняття так званої "дельта-функції", а в 1936 році механік і математик С. Л. Соболєв (1908-1990) ввів ширше поняття узагальненої функції, яка включає в себе дельта-функцію.

Таким чином, поняття функції постійно розширюється і розвивається відповідно до практичних застосувань і потреб математичної науки.

Тому слід також сказати, що розвиток поняття функції не стоїть на місці (поняття узагальненої функції) і, ймовірно, буде продовжувати змінюватися і пристосовуватися до потреб науки [26].

Функція – це така залежність змінної y від змінної x , якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y. Але ще є й таке означення функції (від лат. *functio* — звершення, виконання), може означати (в математиці) функціональне бінарне відношення [13].

Позначення функцій: $f\,(x), F(x), f\,, F, y = f\,(x), y\; x$ – аргумент (незалежна змінна) y – залежна змінна;

Набір значень, які приймає незалежна змінна x, називається областю визначення функції. Позначається $D(\,f), D_f$.

Значення залежної змінної y є значенням функції.

Набір відповідних значень залежної змінної y, отриманий з області визначення для всіх значень x, є областю значень (модифікації функції). Позначається $Ef\;\; E(\,f\,)$.

Приклад: Визначити область значень і область визначення такої функції y $= 2x^2 + 4$.

Степеневою функцією називається функція виду $y = x^p$, де p – постійне дійсне число, а x (основа) – змінна (табл.1.1).

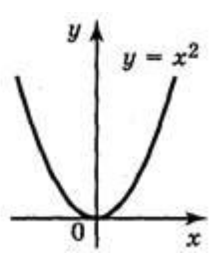
Степенева функція поєднує кілька різних видів функцій. На малюнку який нам даний схематично зображено співвідношення між деякими видами функцій (рис. 1.1).

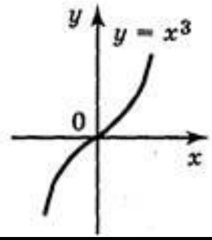
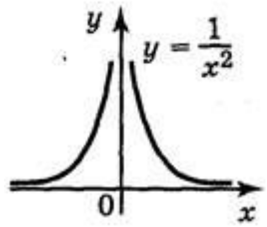
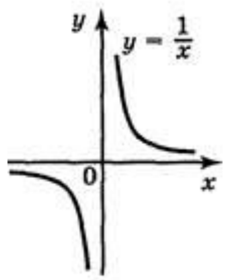
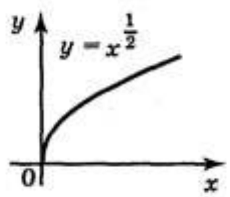
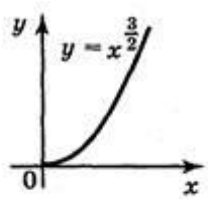
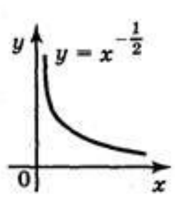
Рис. 1.1 Види степеневої функції

Отже, як видно з рис. 1.1, позначення 1 відноситься до чисел 1, 2 і 3. 1 – це лінійна підвищена функція (лише y = x); 2 – квадратична функція, зведена до степеня (лише одна: $y = x^2$); 3 – функції як зі степенем, так і з оберненою пропорцією (лише одна: $y = x^{-1}$) [1, с. 71-74].

Таблиця 1.1

Функція $y\ =\ x\boldsymbol{p}$

	p	Графік	*D(y)*	*E(y)*	Парність (непарність)	Зростання (спадання)
1	2	3	4	5	6	7
1.	$p = 2k$, $k \in N$	 	R	$[0;\ +\infty)$	парна	спадає, при x $\in (-\infty\ ;\ 0]$, зростає, при x $\in (0;\ +\infty\ ]$

2.	$p = 2k + 1$ $k \in N$		R	R	непарна	зростає
3.	$p = -(2k)$, $k \in N$		$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	парна	зростає, при $x \in (-\infty; 0]$, спадає, при $x \in (0; +\infty]$
4.	$p = -(2k - 1)$ $k \in N$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	непарна	спадає на проміж-ках $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$
5.	$p > 0$, p – не ціле, $0 < p < 1$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	ні парна, ні непарна	зростає
6.	$p > 0$, p– не ціле, $p > 1$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	ні парна, ні непарна	зростає
7.	$p < 0$, p – не ціле		$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	ні парна, ні непарна	спадає

1. Якщо $p = 2k, k \in Z$, то функція $y = x^{2k}$. Якщо $k = 1$, то ця функція має вигляд   Згадаємо її основні властивості.

Функція $y = x^2$:

- є визначеною для будь-якого дійсного *x;*
- може бути додатною при $x \neq 0$ і дорівнює 0 при $x = 0$;
- здатна приймати всі невід'ємні значення;
- парна (графік симетричний відносно осі *OY*);
- спадає, якщо $x \in (-\infty; 0]$ і зростає, якщо $x \in [0; +\infty)$. Такі саме властивості має. функція $y = x^{2k}$.

2. визначена для будь-якого дійсного *x;* 2. Якщо $p = 1$, то функція має вигляд $y = x$ (графік — пряма, що проходить через початок координат і ділить перший і третій координатний кути пополам). Якщо $p = 3$, то ця функція має вигляд $y = x^3$.

Функція $y = x^3$:

- додатна при $x > 0$, від'ємна при $x < 0$ і дорівнює 0 при $x = 0$;
- зростаюча;
- приймає всі дійсні значення;
- непарна (графік симетричний відносно початку координат), Такі самі властивості має степенева функція:

$$y = x^{2k} + 1,\ k \in N.$$

3. Розглянемо функцію $y = \frac{1}{x^2}$.

Ця функція визначена при $x \neq 0$ і приймає всі додатні значення. Функція парна (графік симетричний відносно осі OY). При $x < 0$функція зростає, а при $x > 0$ – спадає. Такі саме властивості має степенева функція

$$y = x^{2k} += \frac{1}{x^2},\ k \in N.$$

4. Якщо $p = -1$, то функція має вигляд:

$$y = x^1 = \frac{1}{x}.$$

Ця функція визначена при $x \neq 0$. При $x > 0$функція $y = \frac{1}{x}$ приймає додатні значення, а при $x < 0$ – від'ємні. При $x > 0$ функція $y = \frac{1}{x}$ спадає, і при $x < 0$ – спадає.

Такі саме властивості має степенева функція: $y = x^{-(2k-1)} = \frac{1}{x^{2k-1}}, k \in$ N.

Згадаємо властивості функції $y = \sqrt{x}$. Отже, функція $y = \sqrt{x}$:

- визначена при $x > 0$;
- додатна при $x > 0$ і дорівнює нулю при $x = 0$;
- зростає на всій області визначення;
- приймає всі невід'ємні значення.

Якщо p – додатне раціональне число, то степенева функція: $y = x^p$ визначена при $x \geq 0$ і має такі саме властивості, які функція $y = \sqrt{x}$.

Отже, проаналізувавши основні поняття та визначення степеневої функції, ми з'ясували, що степенева функція - це функція, яка визначається виразом $y = x^p$, де p – постійне дійсне число, а x (основа) – змінна. Степенева функція може бути зростаючою або спадною залежно від значення. Область визначення степеневої функції – це множина всіх можливих значень, для яких визначена функція. Діапазон значень – це множина всіх можливих значень, яких може набувати функція. Степеневі функції мають важливе значення в математиці, фізиці, економіці та інших галузях, оскільки дозволяють моделювати різноманітні явища та залежності.

1.2. Математична модель, теореми і твердження степеневої функції

Математична модель степеневої функції представляє собою вираз, що описує залежність між двома величинами, де одна величина змінюється залежно від іншої за законом степеневої функції. Загальний вигляд степеневої функції виглядає як $y = ax^b$, де

y – залежна (залежна)величина,

x – незалежна (незалежна)величина,

a – коефіцієнт масштабування або множник,

b – показник ступеня або степінь.

Така модель широко використовується в наукових дослідженнях, економіці, фізиці, біології та інших галузях для аналізу різноманітних явищ та процесів. Вона дозволяє описувати нелінійні залежності між величинами та адаптується до різноманітних сценаріїв змін.

Функцію $y = f\ (x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $xy_{0\_}\ D\ (f)$ існує єдине таке, що $y_0 = f\ (x_0)$.

Функція f є оборотною. Функція g не є оборотною. Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 1.2).

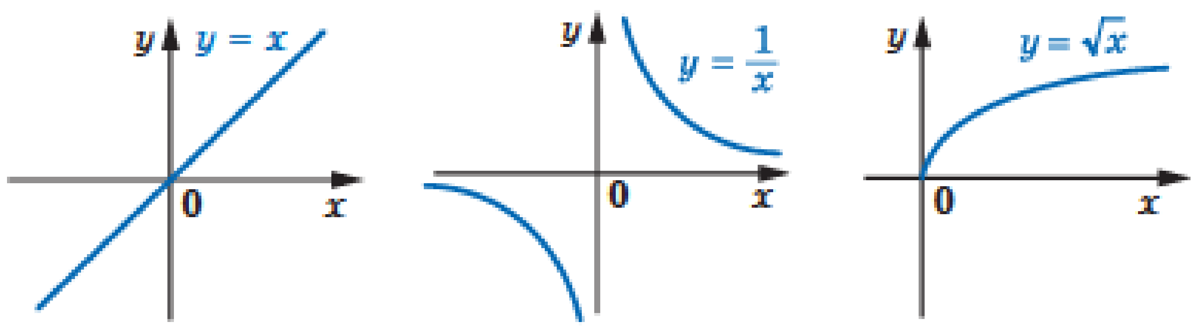


Рис. 1.2. Приклади оборотних функцій [21, с. 28]

Розглянемо ключові теореми функції.

Теорема 1. Функція є оборотною, якщо вона зростає (спадає).

Теорема 2. Графіки взаємно обернених функцій прямосиметричні $y = x$.

Теорема 3. При зростанні (зменшенні) функції f її обернена функція g також зростає (зменшується).

Теорема 4. Спільна точка графіка оберненої зростаючої функції лежить на прямій $y = x$ [21].

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n-го степеня.

Теорема 1 (перша теорема про степеневі корені). Для будь-якого a ∈R і k ∈N виконуються рівності: $\sqrt[2k+1]{a^{22+1} = a}$, $\sqrt[2k]{a^{2k}}$=|a|.

Теорема 2 (корінь із добутку). Якщо $\mathrm{a\,l\,0\;i\;b\,l\,0, n} \in \mathrm{N, n} > 1$, то $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Теорема 3 (корінь із частки). Якщо a l 0 і b > 0, n ∈N, n > 1, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Теорема 4 (степінь кореня). Якщо $\mathrm{a\,l\,0, n} \in \mathrm{N, k} \in \mathrm{N, n} > 1$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

Теорема 5 (корінь із кореня). Якщо $\mathrm{a\,l\,0, n} \in \mathrm{N, k} \in \mathrm{N, n} > 1, k > 1$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Теорема 6 (друга теорема про корінь із степеня). Якщо $\mathrm{a\,l\,0, n} \in \mathrm{N, k} \in \mathrm{N, n} > 1$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$ [21, с. 48-49].

Розглянемо твердження степеневої функції.

1. Якщо показник степеня n є натуральним числом, то степеневу функцію задається формулою, яка має вигляд $y = xn$. Якщо $\mathrm{n} = 1$, то $\mathrm{y} = \mathrm{x}1$ або $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ – пряма (рис.1.1). Якщо $\mathrm{n} = 2$, то $y = x^2$ – парабола. Якщо $n = 3$, то $y = x^3$ – кубічна парабола. Якщо $n = 2$, то $y = x^2$ – парабола. Якщо $n = 3$, то $y = x^3$ – кубічна парабола. Графік степеневої функції $y = xn$, де n – парне число (4,6,8...), набуває вигляду параболи (рис. 1.3).

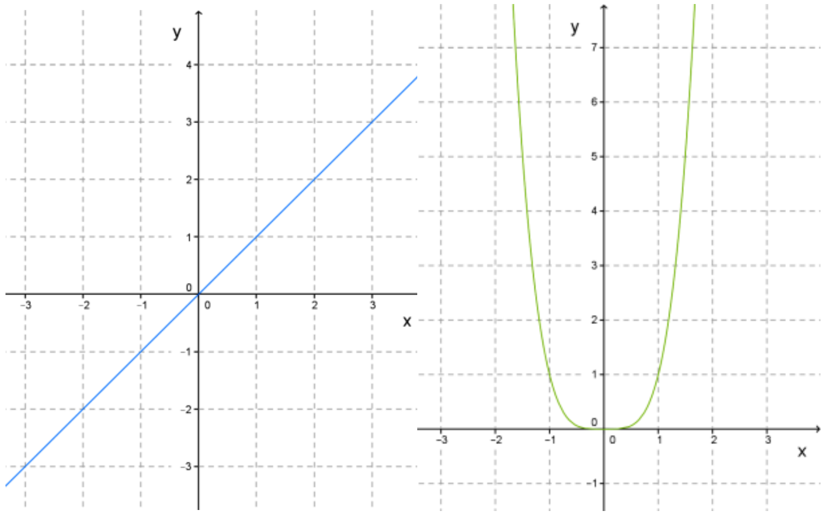


Рис. 1.3. Пряма степенева функція (ліворуч) та параболічна степенева функція (праворуч)

Графік степеневої функції $y = xn$, де n – непарне число (5,7,9...), набуває вигляду кубічної параболи (рис. 1.4).

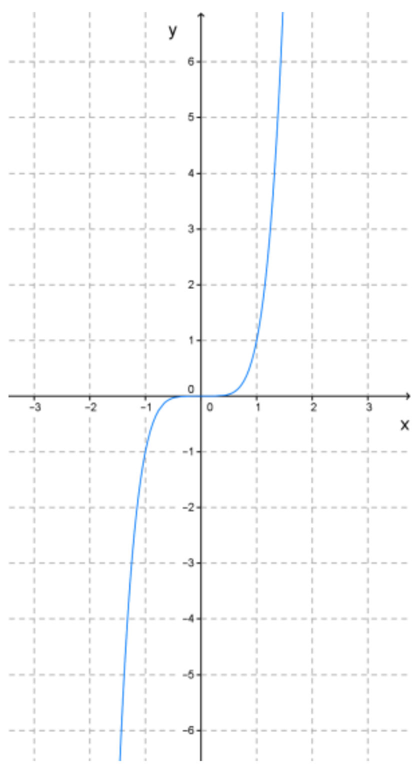


Рис. 1.4. Степенева функція у вигляді кубічної параболи

2. Якщо показник степеня – ціле від’ємне число, то степенева функція задається формулою $y = x - n$ або $y = 1xn$.

Графік степеневої функції $y=x-n$, у випадку, коли n – парне число (4,6,8...), набуває вигляду (рис. 1.5):

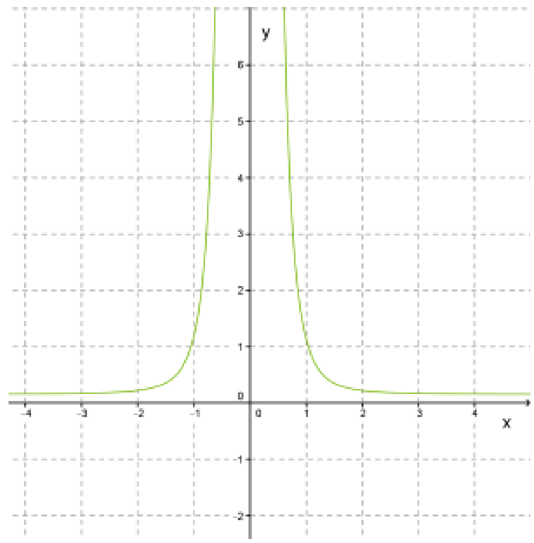


Рис. 1.5. Графік степеневої функції $y=x-n$, коли n парне число

Наприклад, такого вигляду набувають графіки функцій $y = x - 4$, $y = x - 8$.

Графік степеневої функції $y = x - n$, у випадку, коли n – непарне число (5,7,9...), набуває вигляду гіперболи (рис. 1.6).

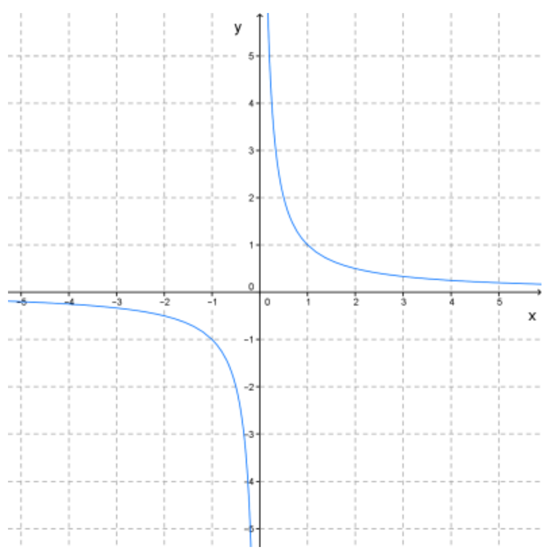


Рис. 1.6. Графік степеневої функції $y=x-n$, коли n непарне число

Наприклад, такого вигляду набувають графіки функцій $y = x - 5$, $y = x - 11$.

Розглянемо графіки степеневих функцій $y = xmn$ з додатним дробовим показником mn. Степенева функція $y = xmn$, де $mn > 1$ – неправильний дріб (чисельник більший від знаменника). Графік — вітка параболи (рис.1.7).

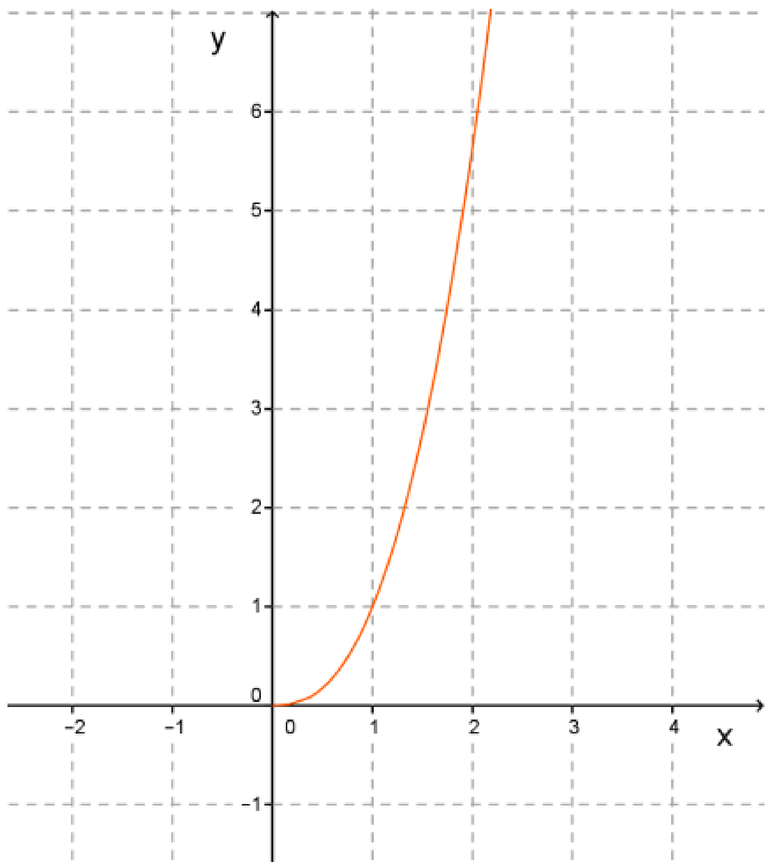


Рис. 1.7. Графік степеневої функції y=xmn з додатним дробовим показником mn – вітка параболи

Властивості функції y=xmn, де mn>1:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;

2) $E(f) = [0; +\infty)$;

3) не є ні парною, ні непарною;

4) зростає при $x \in [0; +\infty)$;

5) не має найбільшого значення, $y = 0$;

6) необмежена зверху, обмежена знизу;

7) опукла вниз;

8) неперервна.

Наприклад, ми маємо зображені на малюнках графіки функцій з різними дробовими показниками:

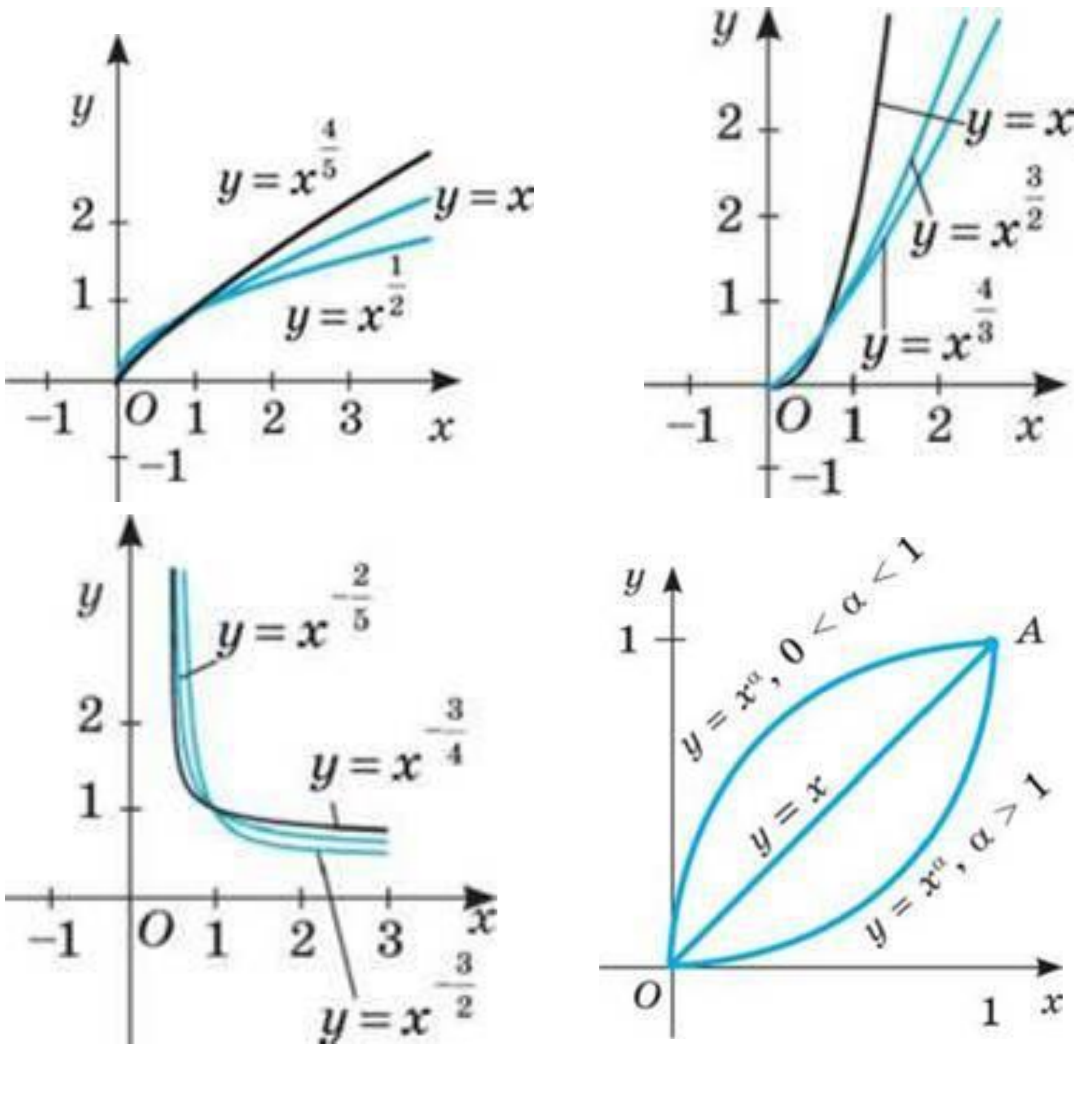


Рис. 1.8. Графіки функцій з різними дробовими показниками

Звернемо увагу на те, і побачимо який вигляд має графік степеневої функції з додатним показником степеня α на проміжку [0; 1]. На цьому проміжку, який зображений на малюнку , графіком функції $y = x^{\alpha}$ є:

1) відрізок ОА, тоді якщо α = 1;

2) коли крива, напрямлена опуклістю вниз, якщо α > 1;

3) коли крива, напрямлена опуклістю вгору, якщо 0 < α < 1.

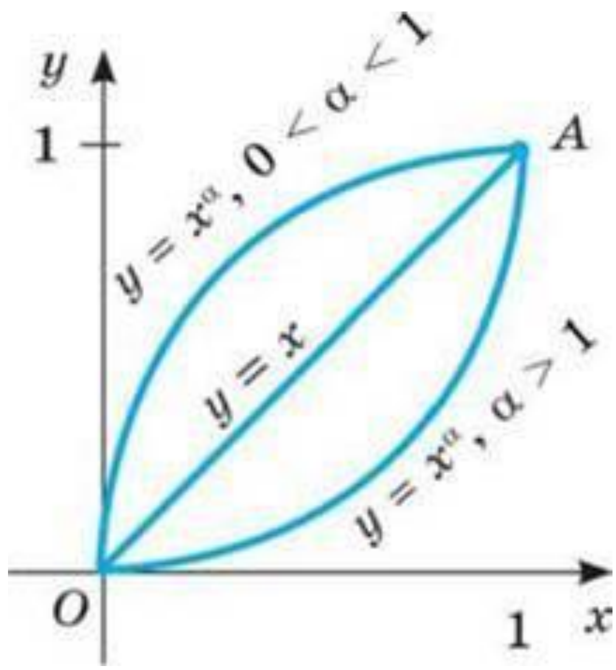


Рис. 1.8. Графік степеневої функції з додатним показником степеня \alpha на проміжку [0; 1]

Тоді нам потрібно знати, що чим більше додатне значення α (α > 1), тим нижче від відрізка ОА розміщується графік функції $y = x^{\alpha}$.[7]

Степенева функція $y = xmn$, де $0 < mn < 1$ — правильний дріб (чисельник менший від знаменника) (рис. 1.9).

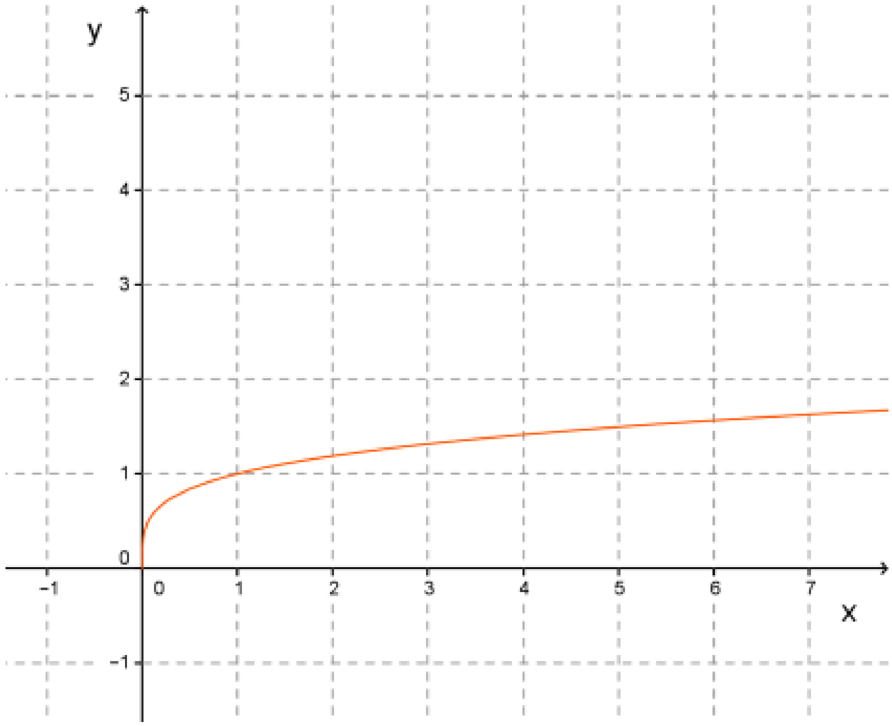


Рис. 1.9. Графік степеневої функції де $0 < mn < 1$

Визначимо властивості функції $y = xmn$, де $0 < mn < 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;

2) $E(f) = [0; +\infty)$;

3) не є ні парною, ні непарною;

4) зростає при $x \in [0; +\infty)$;

5) не має найбільшого значення, $y = 0$;

6) необмежена зверху, обмежена знизу;

7) опукла вгору;

8) неперервна.

3. Розглянемо степеневі функції з від'ємним дробовим показником степеня $y = x - mn$. Графік – вітка гіперболи (рис. 1.10).

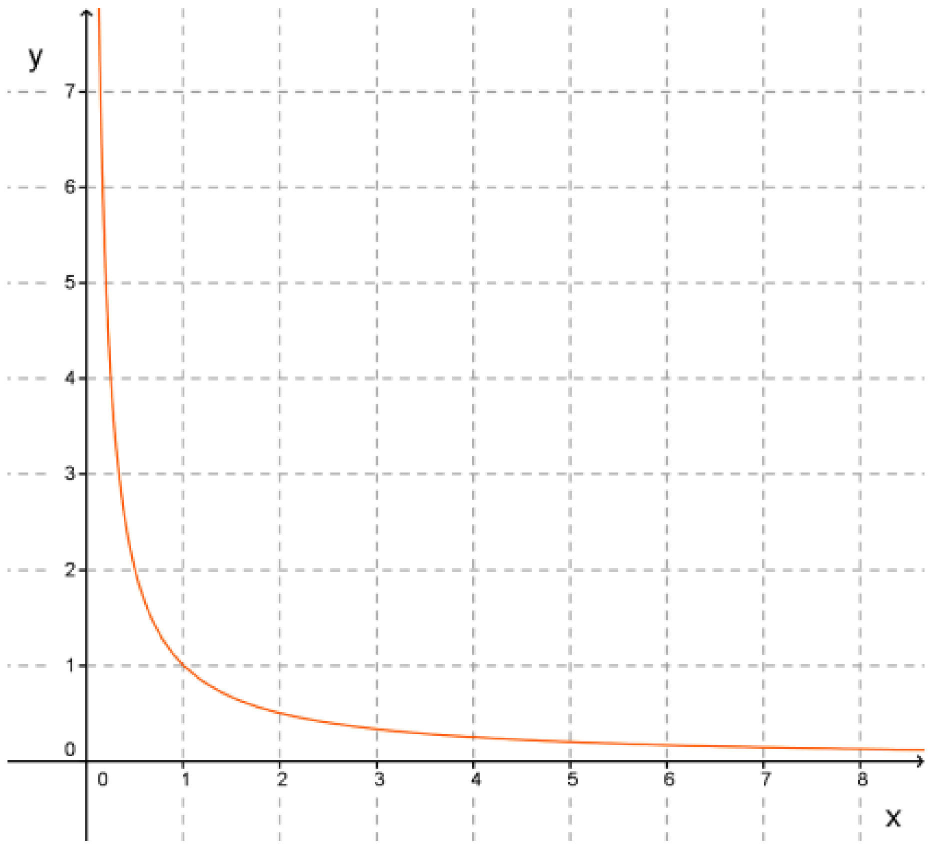


Рис. 1.10. Графік степеневої функції з від'ємним дробовим показником степеня $y = x - mn$

Графік має горизонтальну асимптоту $y = 0$ і вертикальну асимптоту $x = 0$.

Властивості функції $y = x - mn$

1) $D(f) = (0; +\infty)$;

2) $E(f) = (0; +\infty)$;

3) не є ні парною, ні непарною;

4) спадає при $x \in (0; +\infty)$;

5) не має ні найбільшого, ні найменшого значення;

6) необмежена зверху, обмежена знизу;

7) опукла вниз;

8) неперервна.

Узагальнимо всі згадані вище властивості функції $y = x^a$ у вигляді рис. 1.11.

Властивості	Функція $y = x^\alpha$						
	α — натуральне парне	α — натуральне непарне	$\alpha = 0$	α — непарне від'ємне	α — парне від'ємне	α — не ціле додатне	α — не ціле від'ємне
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Множина значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	1	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$	–	–	–	$x = 0$	–
Знакосталість, $y > 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	$x > 0$
Знакосталість, $y < 0$	–	$x < 0$	–	$x < 0$	–	–	–
Парність, непарність	Парна	Непарна	Парна	Непарна	Парна	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
Проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	–	$(-\infty; 0)$	$[0; +\infty)$	–
Проміжки спадання	$(-\infty; 0]$	–	–	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	–	$(0; +\infty)$

Рис. 1.11. Властивості функції $y = x^a$

Отже, як бачимо, степенева функція в математиці моделюється виразом $\int(x) = ax^b$, де a і b – константи, x – незалежна змінна. Ця модель використовується для вивчення залежності між змінною x та значенням функції $f(x)$. Теореми і твердження стосуються властивостей степеневих функцій. Наприклад, якщо b – раціональне число, то функція визначена для від'ємних значень x. Якщо b – парне ціле число, то графік функції симетричний відносно осі y. Існують також твердження про арифметичні операції зі степеневими функціями, такі як додавання, віднімання, множення і ділення. Завдяки цим властивостям степеневі функції можна використовувати для моделювання різних процесів і явищ у наукових і практичних дослідженнях.

1.3. Пояснення основних елементів показникової форми степеневої функції

У практиці часто використовуються функції $y = 2x,\ y = 10x,\ y = (12)x$, $y = (0{,}1)x$ і т. д., тобто функція вигляду $y = ax$, де а – задане число, х – змінна.

Такі функції називають показниковими. Ця назва пояснюється тим, що аргументом показникової функції є показник степеня, а основою степеня – задане число.

Функція, задана формулою $y = ax$ (де $a > 0, a \neq 1$), називається показниковою функцією з основою а.

Сформулюємо основні властивості показникової функції.

1. Область визначення — множина R дійсних чисел.

2. Область значень — множина $R+$ всіх додатних дійсних чисел.

3. При $a > 1$ функція зростає на всій числовій прямій; при $0 < a < 1$ функція спадає на множині R.

$ax1 < ax2$, якщо $x1 < x2, (a > 1)$,

$ax1 > ax2$, якщо $x1 < x2, (0 < a < 1)$.

4. При будь-яких дійсних значеннях х і у справедливі рівності

$$axay = ax + yaxay = ax - y(ab)x = axbx(ab)x = axbx(ax)y = axy$$

Графіки показникових функцій зображені на малюнках:

1) для випадку $a > 1$ (рис. 1.11)

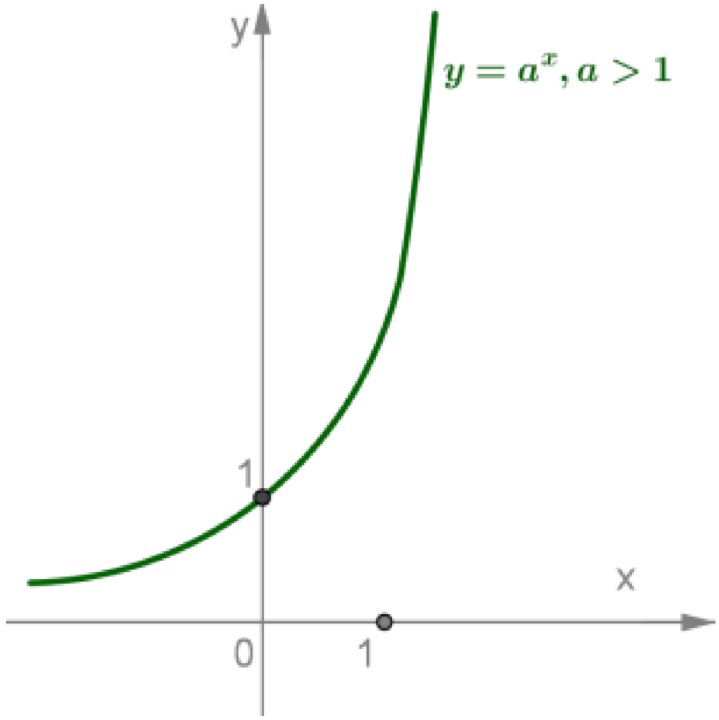


Рис. 1.11. Графік показникової функції для випадку $a > 1$

2) для випадку $0 < a < 1$ (рис. 1.12).

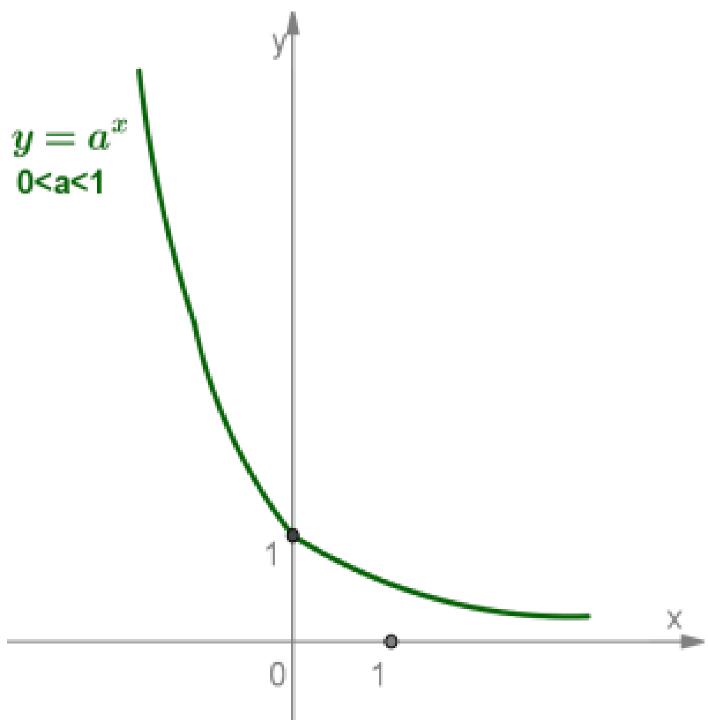


Рис. 1.12. Графік показникової функції для випадку $0 < a < 1$

Коренем n–го степеня з числа a називається таке число, n–ий степінь якого дорівнює a (n – натуральне число).

Прийнято такий запис: $\sqrt[n]{a}, n$ – показник кореня, a – підкореневий вираз.

Арифметичний корінь – невід'ємне значення кореня.

При $a \geq 0$ $\sqrt[n]{a}$ – позначення арифметичного значення кореня.

$\sqrt[n]{a}$ $-$ існує :

1) при $n = 2k,$ якщо $a \geq 0;$

2) при $n = 2k + 1,$ для будь $-$ яких значень $a.$

$x^n = a \longrightarrow n = 2k \longrightarrow a < 0 \longrightarrow x^{2k} = a \longrightarrow x \epsilon \emptyset$

$x^n = a \longrightarrow n = 2k \longrightarrow a \geq 0 \longrightarrow x^{2k} = a \longrightarrow x = \pm \sqrt[2k]{a}$

$x^n = a \longrightarrow n = 2k + 1 \longrightarrow x^{2k+1} = a \longrightarrow x = \pm \sqrt[2k+1]{a}$

Властивості кореня n – го степеня наводимо у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Властивості кореня *n* – го степеня

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \begin{cases} |a|, \text{якщо } n = 2k, \\ a, \text{ якщо } n = 2k + 1 \end{cases}$

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0$

3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$

4) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$

5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, a \geq 0$

6) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, a \geq 0$

7) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, a \geq 0$ – *основна властивість кореня*

Наслідки:

1. Винесення множника з-під знака кореня $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0.$ Корінь непарного степеня $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b} = a\sqrt[2k+1]{b}.$

Корінь парного степеня $\sqrt[2k]{a^{2k}b} = |a|\sqrt[2k]{b}, b \geq 0, a \in R.$

2. Внесення множника під знак кореня $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, a \geq 0, b \geq 0.$

Корінь непарного степеня $a\sqrt[2k+1]{b} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b}.$

Корінь парного степеня

$$a^2\sqrt[k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k}b}, \text{якщо } a \geq 0, \\ -\sqrt[2k]{a^{2k}b}, \text{якщо } a < 0, \end{cases}, \ b \geq 0, \ a \in R.$$

3. Якщо $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0.$

Рівняння або нерівність називаються *ірраціональними*, якщо невідоме знаходиться під знаком кореня.

1. Рівняння:

а) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x); \end{cases}$

б) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

2. Нерівності:

а) $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$

б) $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \end{array} \right.$

в) $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$

г) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

РОЗДІЛ 2
ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ» У ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ

2.1. Додавання та віднімання степеневих функцій

Степеневі функції зазвичай додають і віднімають, додаючи або віднімаючи коефіцієнти перед степенями відповідних змінних.

При додаванні або відніманні степеневих функцій важливо звернути увагу на те, що степені (b і d) повинні бути однаковими. Це означає, що ви можете додавати або віднімати тільки степеневі функції, які мають однаковий показник степеня (b=d).

Приклад: потрібно побудувати графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}\, і\; y = 3\sqrt{x}$. Визначимо, що є спільного у графіків цих функцій і чим вони відрізняються?

Розв'язання. Відомо, що $y = x^{\frac{1}{3}}$ – степенева функція з дробовим показником. Область визначення буде D = [0; +∞). Графік розташований у I чверті, що зображено на малюнку (рис. 2.1):

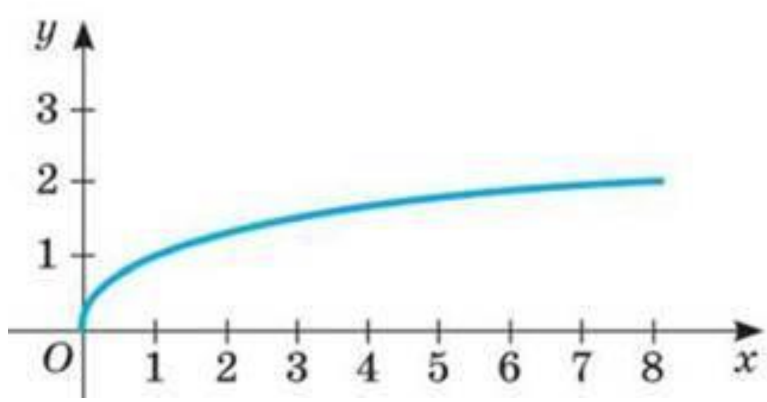


Рис. 2.1. Графік функції $y = x^{\frac{1}{3}}$ для області значення $[0;\ +\infty)$

Областю визначення буде функція $y = 3\sqrt{x}$— множина всіх дійсних чисел R. Її графік розташований у І і ІІІ чвертях, що зображено на малюнку (рис. 2.2):

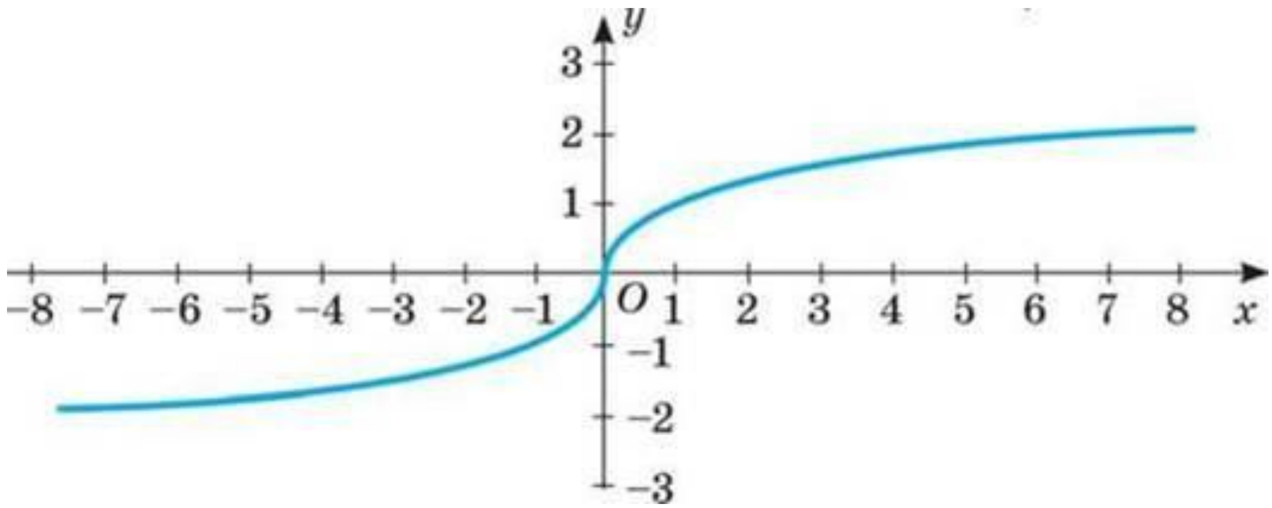


Рис. 2.2. Графік функції $y = 3\sqrt{x}$

Для x ≥ 0 графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ $і$ $y = 3\sqrt{x}$ будуть однакові. [12]

1. **Приклад:** Визначмо чи проходить графік функції $y = x^{0,75}$ через точку (16; 8)?

Розв’язання. Дивимось, якщо x = 16, то $y = 16^{0,75}$ $= 16^{\frac{3}{4}} =$ 8. Отже, відповідь. Графік функції проходить.

2. **Приклад:** потрібно розв’язати рівняння:

а) 4 = $x^{\frac{2}{7}}$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} = 3.$

Розв’язання:

а) ОДЗ: (0; +∞). Нам потрібно піднести обидві частини рівняння до степеня 7. Тоді отримаємо: $(x^{\frac{2}{7}})^7 = 4^7$або $x^2 = 2^{14}$. Коренями цього рівняння будуть $x_1 = -2^7$, $x_2 = 2^7 = 128$. Від’ємний корінь потрібно відкинути.

б) ОДЗ: $(0; +\infty)$. Нехай $x^{\frac{1}{3}}$ = y, тоді $x^{\frac{2}{3}}$ = y^2. Отримали рівняння: $y^2 + 2y - 3 = 0$. Його коренями будуть $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Від’ємний корінь потрібно відкинути. А якщо $x^{\frac{1}{3}}$= 1, то x = 1.

Зверніть увагу! Якби рівняння було записане у вигляді $\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} = 3$, тоді б воно мало б іншу ОДЗ і ще один корінь: х $= -27$.

Отримали відповідь. а) 128; б) 1. [24]

3. **Приклад:** потрібно розв'язати рівняння $\sqrt{2x-6} = 5 - \sqrt{x+4}$.

Розв'язання:

Отже, обидві частини рівняння піднесемо до квадрата. Тоді одержимо 2x – 6 = 25 – $10^{\sqrt{x+4}} + x + 4$ *, або після перетворення* $10^{\sqrt{x+4}}$ *= 35 – x.*

Тоді, знову піднесемо до квадрата обидві частини рівняння:

100(х + 4) = (35 – х)2;

100х + 400 = х2 – 70х + 1225;

х2 – 170х + 825 = 0;

звідси x_1 = 5, x_2 = 165.

Перевірка: 1)$\sqrt{2 \cdot 5 - 6} = \sqrt{4} = 2,\ \ 5 - \sqrt{5+4} = 5 - 3 = 2;$

2) $\sqrt{2 \cdot 165 - 6} \neq 5 - \sqrt{165+4}.$

Відповідь: 5.

4. **Приклад:** потрібно розв'язати рівняння: 1)$\sqrt[3]{x}^2 = 1;$ 2$*$) $x^{\frac{2}{3}} = 1.$

Розв'язання

1) Якщо $\sqrt[3]{x}^2$= 1. Тоді ОДЗ: х ∈ R,

$x^2 = 1$;
х = ±1.
Відповідь: ±1.
2*) Якщо $x^{\frac{2}{3}}$ = 1. Тоді ОДЗ: х > 0.

$x^2 = 1$;

х = ±1.

Враховуючи ОДЗ, ми одержуємо х = 1.

Відповідь: 1.

5. **Приклад:** потрібно розв'язати рівняння: $x^5 = 3 - 2x$

Розв’язання:

1. потрібно розглянути дві функції: y = $x^5, y = 3 - 2x$

2. тоді побудуємо графік функції y = x^5.

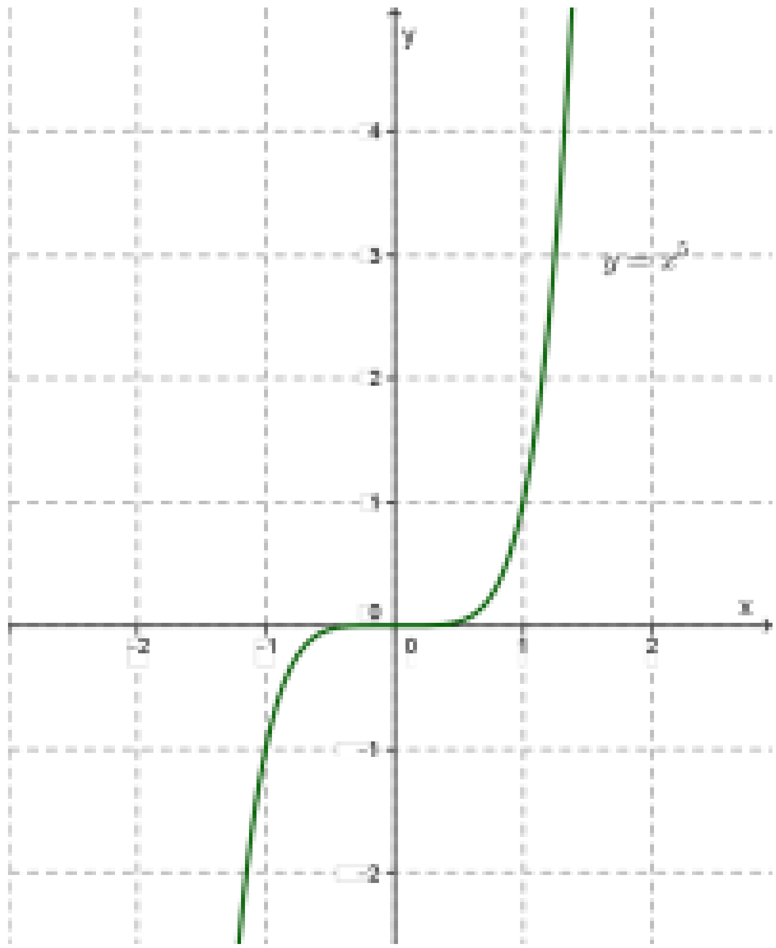


Рис. 2.3. Графік функції $y = x5$

1. Потрібно побудувати графік лінійної функції y = 3−2x. Це пряма лінія, що проходить через точки (0;3) та (1;1) (рис. 2.4).

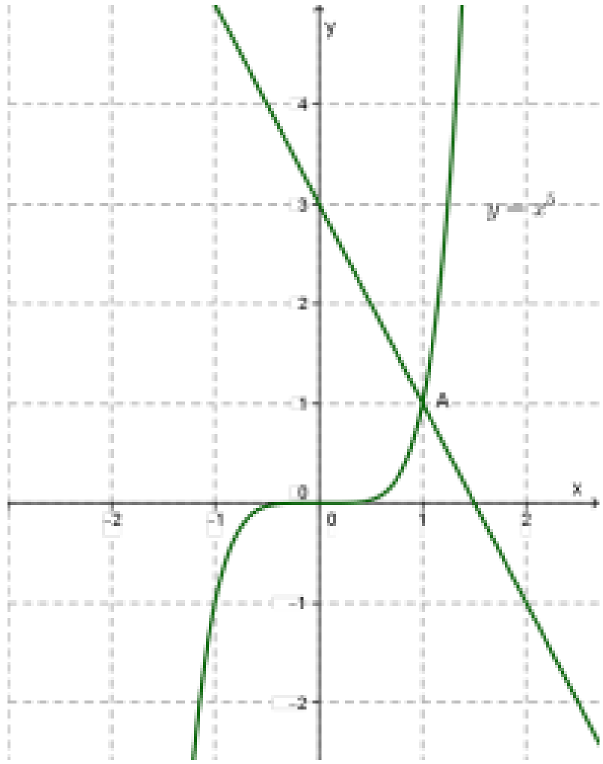


Рис. 2.4. Графік лінійної функції $y = 3 - 2x$

2. Отже, за кресленням ми бачимо, що побудовані графіки перетинаються в точці A (1;1). Нам перевірка показує, що насправді координати точки A (1;1) задовольняють і рівняння y $= x^5$, і рівняння $y = 3 - 2x$. Отже, відповідь: рівняння має один корінь: $x = 1$ – це абсциса точки A [19].

6. **Приклад:** Для того, щоб побудови графік функції y $= (x - 7)6$–3 необхідно перейти до допоміжної системи координат. Тоді визначити координати початкової точки O1 в допоміжній системі координат.

7. **Приклад:** Нам функція задана формулою $f(x) = x^4$. Потрібно обчисли різницю $f(3) - f(0)$ та $f(1) - f(0)$ і порівняй отримані результати.

8. **Приклад:** Потрібно визначити розв'язок рівняння $|x - 3| - |2 - x| = -0{,}4$ у проміжку (2, 3).

Розв'язання:

Для значень x з проміжку (2, 3) маємо $|x-3| = 3-x$ і $|2-x| = x-2$ Отже, при $x \in (2,3)$ рівняння буде мати вигляд $-x+3+2-x=-0{,}4$. Звідси $-2x=-5{,}4$ і $x=2{,}7$

2.2. Множення та ділення степеневих функцій

Множення та ділення степеневих функцій виконуються за допомогою множення (ділення) коефіцієнтів перед ступенями відповідних змінних.

Наприклад, при множенні, якщо у нас є дві степеневі функції $f(x) = ax^b$ та $g(x) = cx^d$, то їх можна помножити:

$$(f \cdot g)(x) = (a \cdot c) \cdot xb^{+d}, \text{наприклад: } (3x\ \ ^2) \cdot (4x\ \ ^3) = 12x\ \ ^5$$

При діленні степеневих функцій $f(x) = ax^b$ на $g(x) = cx^d$ (де $c \neq 0$), результат буде: $\frac{f\ ([x)}{g\ (x)} = \frac{a}{c} \cdot x^{b-d}$, наприклад: $\frac{6x^4}{2x^2} = \frac{a}{c} \cdot 3x^2$

Важливо враховувати, що при діленні ступеневих функцій, ступені (b та d) віднімаються один від одного (b–d). Також треба уникати ділення на нуль ($c \neq 0$).

1. **Приклад:** обчислити

$$\text{а) } 3^{0,5} \cdot 9^{0,75};\ \text{б) } \left(81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3,6}\right).$$

Розв'язання:

а) $30{,}5\ \cdot\ 90{,}75\ =\ 30{,}5\ \cdot\ 32 \cdot 0{,}75\ =\ 30{,}5\ \cdot\ 31{,}5\ =\ 32\ =\ 9;$

$$\text{б) } \left(81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3,6}\right) = \frac{81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}}{3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3,6}} = \left(\frac{81}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2^{\frac{2}{5}}}{2^{-3,6}} = 27^{\frac{1}{3}}\left(2^{0,4} : 2^{-3,6}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{27} \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48.$$

Відповідь: отже, а) 9; б) 48.

2. **Приклад:** потрібно розв'язати рівняння $\sqrt{2x-6} = 5 - \sqrt{x+4}$.

Розв’язання:

Отже, обидві частини рівняння піднесемо до квадрата. Тоді одержимо $2x - 6 = 25 - 10\sqrt{x+4} + x + 4$, або після перетворення $10\sqrt{x+4} = 35 - x$.

Тоді, знову піднесемо до квадрата обидві частини рівняння:

$100(x + 4) = (35 - x)2;$

$100x + 400 = x2 - 70x + 1225;$

$x2 - 170x + 825 = 0;$

звідси $x_1 = 5$, $x_2 = 165$.

Перевірка: 1)$\sqrt{2 \cdot 5 - 6} = \sqrt{4} = 2,\ \ 5 - \sqrt{5 + 4} = 5 - 3 = 2;$

2) $\sqrt{2 \cdot 165 - 6} \neq 5 - \sqrt{165 + 4}$.

Відповідь: 5.

3. **Приклад:** розв’язати рівняння: 1)$\sqrt[3]{x}^2 = 1;$ 2*) $x^{\frac{2}{3}} = 1$.

Розв’язання:

1) Якщо $\sqrt[3]{x}^2 = 1$. Тоді ОДЗ: $x \in R$,

$x2 = 1;$

$x = \pm 1.$

Відповідь: ±1.

2*) Якщо $x^{\frac{2}{3}} = 1$. Тоді ОДЗ: $x > 0$.

$$x2 = 1;$$

$$x = \pm 1.$$

Враховуючи ОДЗ, ми одержуємо x = 1.

Відповідь: 1.

Внесемо коментар до завдання: якщо, область допустимих значень рівняння $\sqrt[3]{x}^2 = 1$ будуть усі дійсні числа, а рівняння $x^{\frac{2}{3}} = 1$ буде тільки $x \geq 0$. Коли піднесемо обидві частини рівняння до куба, то одержимо рівняння, рівносильне заданому на його ОДЗ. Отже, тоді перше рівняння задовольняють усі знайдені корені, а друге – тільки невід'ємні [28].

У завданні 1 також ураховано, що $\sqrt[3]{x}^2 = x^2$, а в завданні 2 — що $(x^{\frac{2}{3}})^3 = x^{\frac{2}{3}} \cdot 3 = x^2$.

2.3. Розв'язування вправ з теми «Степенева функція» у профільних класах

Метою викладання математики на профільному рівні є свідоме і міцне формування математичних знань, умінь і навичок, необхідних для повсякденного життя та подальшої професійної діяльності та достатніх для вивчення інших шкільних предметів або для подальшого навчання в університеті. Це предметна область, яка містить важливі математичні елементи.

Досягнення поставленої мети забезпечується виконанням таких завдань:

– науковий світогляд учнів, уявлення про спосіб мислення та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, про те, що математичні знання є невід'ємною частиною загальної культури людини, а також жити повноцінним життям у сучасних компаніях Формування усвідомлення того, що це є необхідною умовою для стійкої та активної навчальної мотивації – оволодіння мовою математики, сукупністю математичних знань, уміннями та навичками, необхідними для повсякденного життя та майбутньої професійної діяльності, успішне оволодіння знаннями в інших освітніх галузях, мотивація потреб є достатньою для забезпечення того, щоб вчись протягом усього життя;

– інтелектуальний розвиток особистості – розвиток в учнів логічного мислення та інтуїції, просторової уяви, пам'яті, уваги, алгоритмізації, інформаційної та графічної культури;

– громадянське виховання та формування позитивних рис характеру – безпосередності та креативності, пізнавальної самостійності та зацікавленості, потреби в самоосвіті, здатності пристосовуватися до обставин, що змінюються.

– формування життєвих навичок учнів – позитивних рис характеру (наполегливості, волі, культури мислення і дій, справедливості суджень, відповідальності за доручену справу тощо) – розвиток загальнолюдських духовних цінностей особистості формування; формування національної самовпевненості, поваги до української національної культури і традицій [25].

У курсі «Алгебра і початки аналізу» однією з найважливіших областей навчання є область функцій. Тому під час вивчення цього курсу приділяється особливу увагу вивченню властивостей функцій у їх різних формах. Важливо продемонструвати зв'язки між функціями, рівняннями та нерівностями, які є ключовими поняттями курсу.

Одним із головних завдань вивчення математики на професійному рівні є також розвиток графічної культури здобувачів освіти, яка визначається практичними потребами. Робота з графіками, схемами та кресленнями є невід'ємною частиною діяльності. Тому при вивченні функцій особливу увагу слід приділяти розвитку в учнів умінь визначати властивості функцій за їх графіками та будувати графіки функцій, заданих аналітичними формулами, у вигляді таблиць або дослідно визначених даних. Важливо навчити учнів визначати неперервність функції, точки розриву, проміжки зростання і спадання, сталість знака, максимальне і мінімальне значення графіка функції.

Найважливішою формою навчання залишається класно-урочна система. Це означає вивчення нового матеріалу, розвиток навичок розв'язування задач, узагальнення та закріплення знань, перевірку й повторення вивченого матеріалу.

При цьому більшою мірою, ніж в академічній математиці, використовуються шкільні лекції, семінари, практичні заняття та нетрадиційні формати навчання (динамічні слайд-шоу, дидактичні ігри, уроки «одна задача» та «одна ідея»), математичні «битви», математика, що поєднує вивчення алгебри та основ числення з обробкою (у тому числі на комп'ютері) даних, отриманих під час лабораторних і практичних робіт з фізики, астрономії, хімії, біології тощо та інтегрованих уроків фізики. Окрім цього, бажано залучати до процесу навчання викладачів університету, науковців та фахівців.

Рішення про вивчення математики на профільному рівні передбачає наявність у кожного учня постійного усвідомленого інтересу до математики та схильності обрати в майбутньому суміжну професію. Відповідно до навчального плану, затвердженого МОН, на вивчення теми «Степеневі функції» відводиться 30 годин.

Очікуваним результатом навчально-пізнавальної діяльності учнів при вивченні даної теми є:

- розуміння ними змісту означення кореня р. степеня, арифметичного кореня р. степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів та степеня з раціональним показником;
- обчислення та порівняння значення виразів, що містять корені та степені з раціональним показником;
- побудова графіків степеневої функції;
- розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, у тому числі з параметрами;
- застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Зміст профільних навчальних матеріалів з даної теми спрямований на вивчення наступного матеріалу:

Корінь п-го числа.

Арифметичний корінь степеня n, його властивості.

Перетворення виразів за коренями п-го числа.

Квадратичні функції та їх графіки.

Кубічні функції з раціональними показниками, їх властивості.

Перетворення виразів, що містять порядки, за допомогою раціональних показників.

Степеневі функції, їх властивості та графіки.

Ірраціональне рівняння. Ірраціональна нерівність.

Ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами.

Проаналізовано підручник з математики для 10 класу (профільний рівень) з урахуванням змісту та методичного забезпечення навчання математики на профільному рівні:

Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. Рівні з 8 кл., проф. рівень [21];

Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти [4];

Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти [18],

та визначено типові завдання, які виносяться для розв'язування у 10 класі з теми «Степенева функція» у профільних класах.

Приклад 1. Дано функцію f(x) = $x^{\frac{5}{6}}$. Порівняти:

1) $f(3)$ і $f(3{,}2)$;

2) $f(\sqrt{2})$ і $f(1{,}4)$.

Розв'язання. $D(f) = [0;\ +\infty)$.

Функція f(x) = $x^{\frac{5}{6}}$ зростає на D(f). Тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

1) Оскільки $3 < 3{,}2$, то $f(3) < f(3{,}2)$.

2) Оскільки $\sqrt{2} > 1{,}4$, то $f(\sqrt{2}) > f(1{,}4)$.

Відповідь.

1) $f(3) < f(3{,}2)$;

2) $f(\sqrt{2}) > f(1{,}4)$.

Приклад 2. Дано функцію $g(x) = x^{-2018}$. Порівняти:

1) $g(-5)$ і $g(-6)$;

2) $g(1)$ і g $(1{,}2)$.

Розв'язання. 1) На проміжку $(-\infty;\ 0)$ функція $g(x) = x^{-2018}$ зростає, тому якщо $-5 > -6$, то і $g(-5) > g(-6)$.

2) На проміжку $(0; +\infty)$ функція $g(x) = x^{-2018}$ спадає, тому якщо $1 < 1{,}2$, то $g(1) > g(1{,}2)$.

Відповідь.

1) $g(-5) > g(-6)$;

2) $g(1) > g(1{,}2)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

1) $x^{\frac{1}{5}} = 2$; 2) $x^{\frac{4}{3}} = 5$; 3) $x^{-\frac{2}{3}} = 4$.

Розв'язання.

1) $x^{\frac{1}{5}} = 2$;
$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 2^5$;
$x = 32$.

2) $x^{\frac{4}{3}} = 5$;
$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}$;
$x = \sqrt[4]{5^3}$;
$x = \sqrt[4]{125}$.

3) $x^{-\frac{2}{3}} = 4$;
$\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{3}{2}}$;
$x = (2^2)^{-\frac{3}{2}}$;
$x = 2^{-3}$;
$x = \frac{1}{8}$.

Відповідь. 1)8; 2) $\sqrt[4]{125}$; 3) $\frac{1}{8}$.

Приклад 4. Знайти область визначення функції:

1) $y=(x-3)^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'язання:

1) $x - 3 \geq 0,$ тобто $x > 3,$ отже, D (y) $= [3; +\infty)$

2) $x + 1 > 0,$ тобто $x > -1,$ отже, D(y) $= (-1; +\infty)$

Коментар

Ураховуємо, що вираз а$\frac{1}{3}$ означений при а ≥ 0, а виразa_2^{-1} – тільки при а > 0.

Приклад 5. Побудувати графік функції:

$$1)\ y = x^5 + 1; \qquad 2)\ y = (x+2)^{\frac{1}{3}}.$$

Розв’язання:

1) Будуємо графік у $=$ х^5 (рис. 2.5, а), а потім паралельно переносимо його вздовж осі Оу на +1 (рис. 2.5, б).

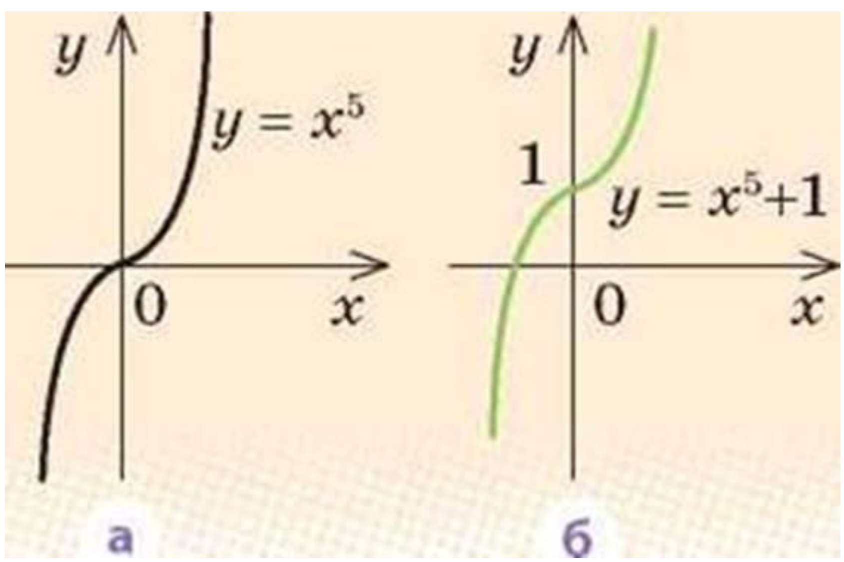
2) Будуємо графік у =х$\frac{1}{3}$ (рис. , а потім паралельно переносимо його вздовж осі Ох на -2, як показано на рис. 2.5.

Графіки заданих функцій можна отримати із графіків функцій:

1) у $=$ х^5, 2) у = $x^{\frac{1}{3}}$ за допомогою паралельного перенесення:

1) на +1 уздовж осі Оу;

2) на -2 вздовж осі Ох.



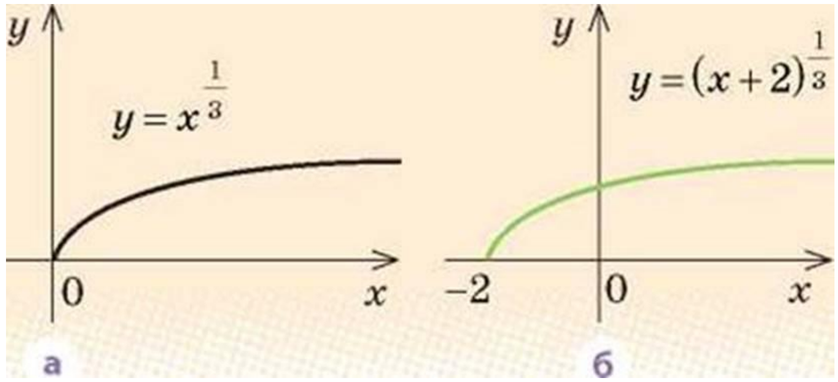


Рис. 2.5. Графіки функцій y = x^5 (а) та y =x_3^1 (б)

Приклад 6. Дослідити функцію та побудувати її графік: $f\ (x)\ =\ x^{\frac{3}{5}}$.

Розв'язання:

Встановимо властивості заданої степеневої функції $f\ (x)\ =\ x^{\frac{3}{5}}$.

Область визначення $D(f)\ =\ (-\infty;\ +\infty)$. Область значень $E(f)\ =\ (-\infty;\ +\infty)$.

Функція непарна, оскільки отже, її графік симетричний відносно початку координат.

$$f(-x)=\sqrt[5]{(-x)^3}=-\sqrt[5]{x^3}=-f(x),\ x\in D(f)\ ,$$

Графік функції перетинає вісь Ox у точці x = 0 (нуль функції).

Якщо $x\ \rightarrow\ +\infty$, то $f(\mathrm{x})\ \rightarrow\ +\infty$; якщо $x\ \rightarrow\ -\infty$, то $f(\mathrm{x})\ \rightarrow\ -\infty$ (рис. 2.6).

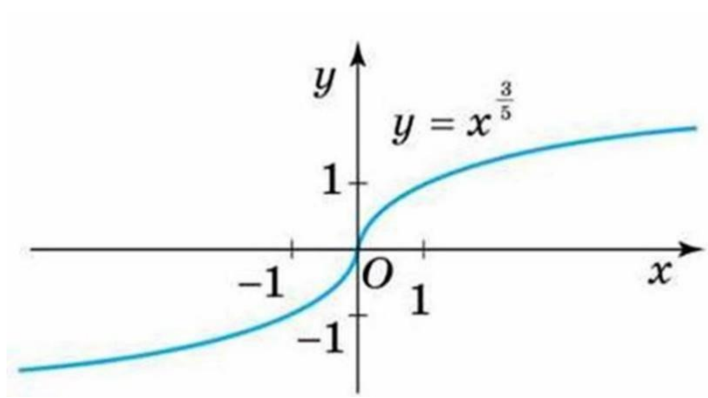


Рис. 2.6. Графік функції

Таким чином, учні 10 класу повинні вміти визначати властивості коренів у n-му степені, арифметичних коренів у n-му степені, степенів з раціональним показником, степенів з коренем і раціональним показником, обчислювати, оцінювати і порівнювати їх значення. Вирази, вирази з коренями та степенями, вирази з раціональними показниками, креслення графіків степеневих функцій, розв’язування неможливих рівнянь і нерівностей з параметрами, розв’язування неможливих рівнянь і нерівностей із застосуванням властивостей функцій.

У вивченні функцій важливе місце відводиться формуванню вмінь будувати та читати графіки функцій, а також характеризувати процеси, які вони описують, за допомогою графіків функцій. У міру засвоєння теоретичного матеріалу кількість властивостей, що підлягають аналізу, поступово збільшується. Властивості функцій визначаються за їхніми графіками, а інші властивості доводяться аналітично. Встановлено, що змістовна лінія функцій проходить через весь курс алгебри початкової школи і розвивається в тісному зв’язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями.

РОЗДІЛ 3
РЕЗУЛЬТАТИ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

3.1. Визначення рівня розуміння учнями теоретичних концепцій степеневих функцій у ході експерименту у профільних класах

Визначення рівня розуміння учнями теоретичних концепцій степеневих функцій у ході експерименту у профільних класах було здійснено на базі Вараського ліцею №5, м. Вараш, Рівненська область. У педагогічному експерименті взяли участь 10 дівчат та 12 хлопців 10-А класу у віці 17 років.

Мета даного етапу експерименту: виявити в учнів десятого класу за курс основної школи рівень сформованості знань і вмінь, необхідних для читання та зображення графіків степеневих функцій, також рівень сформованості функціональних понять.

Зокрема, необхідно було виявити наскільки учні змогли узагальнити, поглибити та систематизувати свої знання про степеневі функції після вивчення даної теми у першому півріччі 10 класу.

Нами було встановлено, що учні даного класу у 10 класі навчались на поглибленому рівні навчання шкільного курсу математики. Для проведення експерименту нами була складена контрольна робота із завданнями. Контрольна робота складалася з двох варіантів. За її основу було взято типові завдання, спрямовані на формування знань і вмінь, необхідних для читання та зображення графіків степеневих функцій.

- завдання 1 і 2: на встановлення відповідності між функціями, заданими графічним та аналітичним способами;

- завдання 3 і 4: на побудову графіка функції, що містить змінну під знаком модуля, і знаходження значення коефіцієнта m, за яких пряма y = m має з ним 2-і спільні точки;

- завдання 5 і 6: на побудову графіка дробово-раціональної функції та знаходження значення коефіцієнта k, за яких пряма y = kx має з ним одну спільну точку.

Нижче подано типовий варіант контрольної роботи з розв'язанням (завдання №1, №2 і №3 – для 1 варіанта, завдання №1, №2 і №3 – для 2 варіанта, відповідно по 3 завдання в кожному варіанті).

Варіант №1.

Завдання 1. «Дано три графіки (рисунок 3.1) і чотири функції, які імовірно їх задають: 1) $y = \frac{2}{x}$, 2) $y = \frac{x}{2}$, 3) $y = \sqrt{x}$, 4) $y = x^2$. Встановіть відповідність між ними.

А) Б) В)

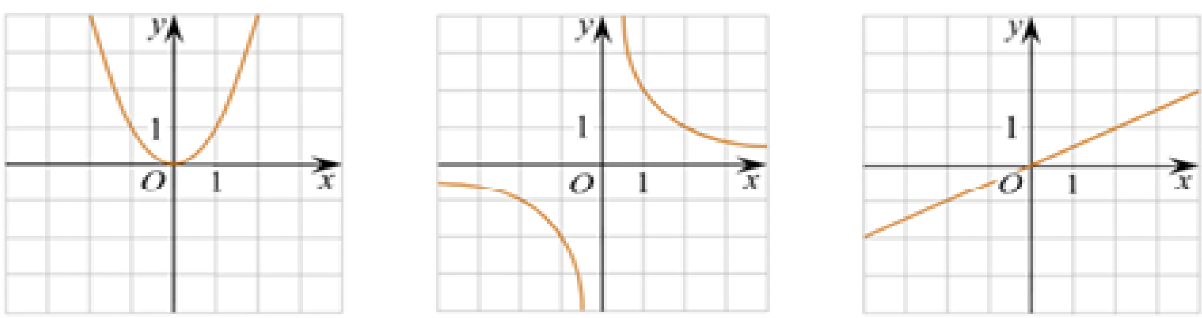


Рис. 3.1. Графіки функції до завдання 1 варіанта №1

Розв'язання. Спочатку визначаємо вид графіка та функцію, якій він належить.

1) $y = \frac{2}{x}$ – функція належить рівнянню гіперболи, її гілки розташовуються в I і III чвертях, оскільки перед дробом стоїть знак «плюс»;

2) $y = \frac{x}{2}$ – функція належить рівнянню прямої;

3) $y = \sqrt{x}$ – функція належить рівнянню параболи, спрямованої вправо;

4) $y = x^2$ – функція належить рівнянню параболи, гілки параболи спрямовані вгору.

Потім знаходимо відповідність: А – 4, Б -1, В – 2.

Відповідь: А – 4, Б -1, В – 2.

Завдання 2. Дано функцію виду y=x|x|+|x|-3x. Потрібно побудувати її графік (рис. 3.2) і знайти значення коефіцієнта m, за яких пряма y=m має тільки 2-і з ним спільні точки.

Розв'язання. Перетворимо нашу функцію, розкриваючи знак модуля:

$$\begin{cases} x \cdot x + x - 3x, & x \geq 0 \\ -x \cdot x - x\ 3x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ -x^2 - 4x, & x < 0 \end{cases}$$

У підсумку отримали рівняння парабол y = x^2-2x при x≥0 і y = - x^2-4x при x<0. Потім побудуємо графік функції y = x|x|+|x|-3x і отримаємо 2-і спільні точки при m = - 1 і m = 4.

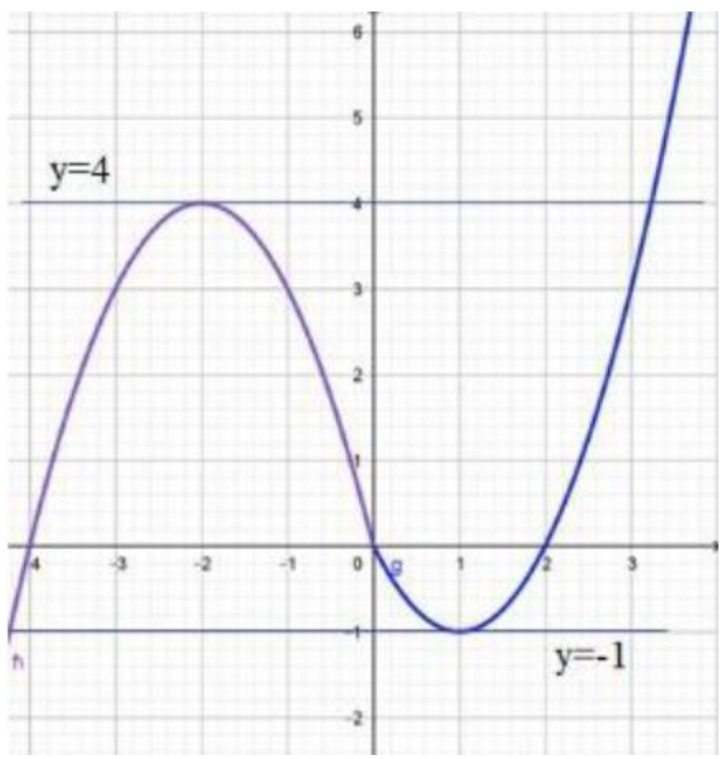


Рис. 3.2. Графік функції до завдання 2 варіанта №1

Оскільки пряма y=m має тільки 2-і спільні точки з графіком, то їхні рівні можна обчислити як координати у-вершини парабол за формулою:

$$y_0 = -(b^2 - 4ac)/4a$$

$$y1 = c - \frac{b^2}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \; і \; y2 = c - \frac{b^2}{4} = \frac{-16}{4} = 4$$

Відповідь: - 1; 4.

Завдання 3. Дано функцію виду $y = \frac{(x^2+2{,}23)(x-1)}{(1-x)}$. Потрібно побудувати її графік (рисунок 3.3) і знайти значення коефіцієнта k, за яких пряма y=kx має тільки 1-ну з ним спільну точку.

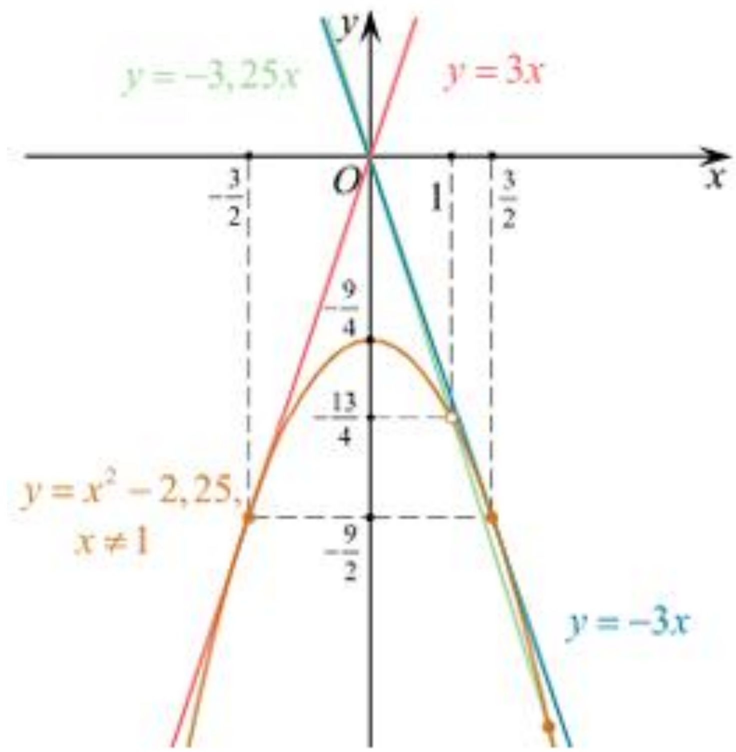


Рис. 3.3. Графік функції до завдання 3 варіанта №1

Розв’язання: перетворимо нашу функцію $y = \frac{(x^2+2{,}23)(x-1)}{(1-x)}$ і знайдемо її область допустимих значень.

$$y = \frac{(x^2 + 2{,}23)(x-1)}{(1-x)} = \frac{(x^2 + 2{,}25)(1-x)}{1-x} = -x^2 - 2{,}25, x \neq 1.$$

Очевидно, що при x≠1 функція $y = -x^2 - 2{,}25$ має одну виколоту точку (1; -3,25).

Далі побудуємо графік функції $y = -x^2 - 2{,}25$, який отримано з графіка $y = x^2$ шляхом відображення відносно осі *Ox*, і зсувом його на (0; -2,25). Для того, щоб пряма y=*kx* мала з побудованим графіком 1-ну спільну точку, треба, щоб пряма y=*kx* була дотичною до графіка функції і точка дотику була ≠1, або пряма y=*kx* повинна перетинати графік $y = -x^2 - 2{,}25$ у точці x=1 або в якійсь іншій точці.

Прирівняємо цю функцію $-x^2 - 2{,}25$ до нуля. Тоді k^2-9=0, к = ± 3.

При k= - 3 точка дотику x=1,5; при k=3 точка дотику x=-1,5.

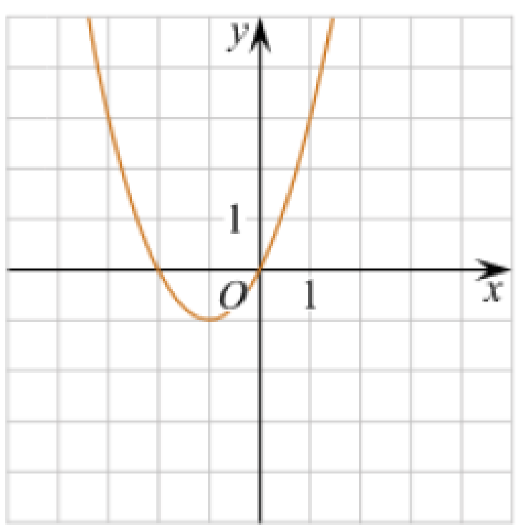
Тепер потрібно розглянути 2-й випадок при x=1 і підставити його значення в рівняння $-x^2 - 2{,}25 = kx$, k=-3,25. Дискримінант нового отриманого рівняння буде > 0, із цього випливає, що існує ще один розв'язок.

Відповідь: -3,25; -3; 3.

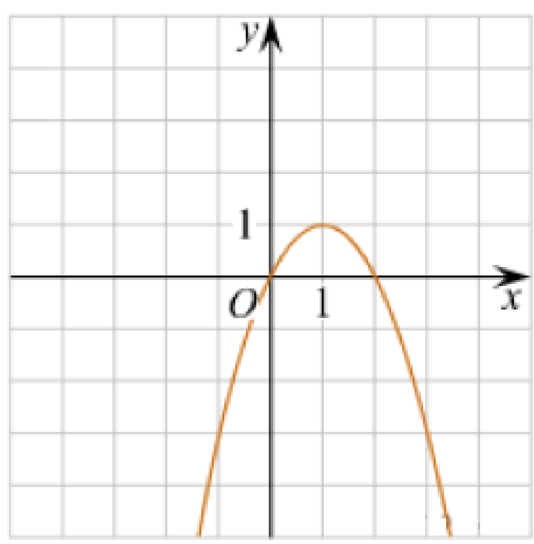
Варіант №2.

Завдання 1. Дано чотири графіки (рис.3.4) і три функції, які ймовірно їх задають: А) $y = x^2 + 2x$, Б) $y = x^2 - 2x$, В) $y = -x^2 - 2x$. Потрібно встановити відповідність між ними.

1)



2)



3) 4)

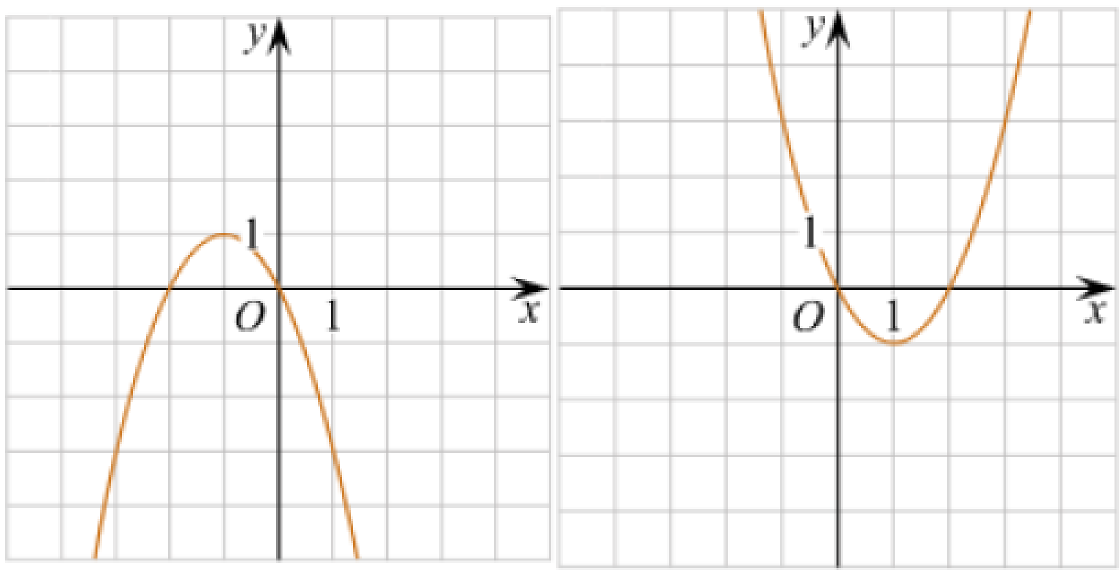


Рис. 3/4. Графіки функції до завдання 1 варіанта №2

Розв’язання.

А) функція $y = x^2 + 2x$ задає параболу, тому що а=1, з цього випливає, що гілки параболи спрямовані вгору, абсциса вершини дорівнює мінус одиниці, перетинає вісь ординат у нульовій точці. Функція $y = x^2 + 2x$ відповідає першому графіку;

Б) функція $y = x^2 - 2x$ задає параболу, тому що а=1, з цього випливає, що гілки параболи спрямовані вгору, абсциса вершини дорівнює одиниці, перетинає вісь ординат у нульовій точці. Функція $y = x^2 - 2x$ відповідає четвертому графіку;

В) функція $y = -x^2 - 2x$ задає параболу, тому що а=-1, з цього випливає, що гілки параболи спрямовані вниз, абсциса вершини дорівнює мінус одиниці, перетинає вісь ординат у нульовій точці. Функція $y = -x^2 - 2x$ відповідає третьому графіку.

Відповідь: 1 – А, 4 – Б, 3 – В.

Завдання 2. Дано функцію виду y = |x-2|-|x+1|+(x-2). Потрібно побудувати її графік (рисунок 2.3) і знайти значення коефіцієнта m, за яких пряма y=m має тільки 2-і з ним спільні точки.

Розв`язання: перетворимо нашу функцію, позбудемося модулів, розкривши їхні знаки.

$$y = |x-2| - |x+1| + x - 2 = \begin{cases} x-2-x-1+x-2, x \geq 2, \\ 2-x-x-1+x-2, -1 \leq x < 2, \\ 2-x+x+1+x-2, x < -1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} x-4, x \geq 2, \\ -x-1, -1 \leq x < 2, \\ x+1, x < -1. \end{cases}$$

У підсумку отримали рівняння прямих y = x+1 при x <-1, y=1x-1 при -1 ≤x ≤ 2 і y=x-5 при x >2.

Тепер побудуємо графік функції y = |x-2|-|x+1|+(x-2) і отримаємо 2-гі спільні точки при m = -3 і m = 0.

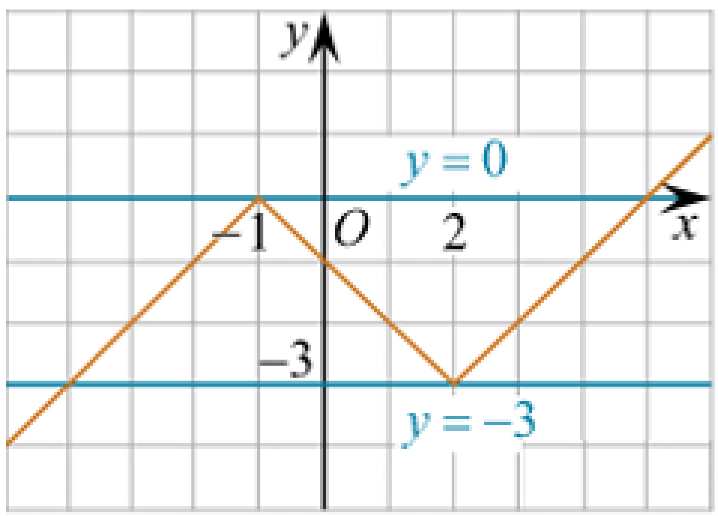


Рис. 3.5. Графік функції до завдання 2 варіанта №2

Відповідь: -3; 0.

Завдання 3. Дана функция виду $y = \frac{(x-2)}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$. Потрібно побудувати її графік (рис. 3.6) і знайти значення коефіцієнта k, за яких пряма y=kx має тільки 1-ну з ним спільну точку.

Розв’язання. Знайдемо область визначення функції: $x^2 - 2x > 0$; $x \epsilon (-\infty;\ 0)\ U\ (2; +\infty)$. Приведемо функцію до більш простого виду:

$$y = \frac{(x-2)}{(\sqrt{x^2-2x})^2} = \frac{x-2}{x^2-2x} = \frac{1}{x}$$

і побудуємо графік, який матиме вигляд гіперболи. Пряма y=kx при k>1/4 матиме з графіком функції рівно 1-уу спільну точку. Відповідь: [1/4; +∞).

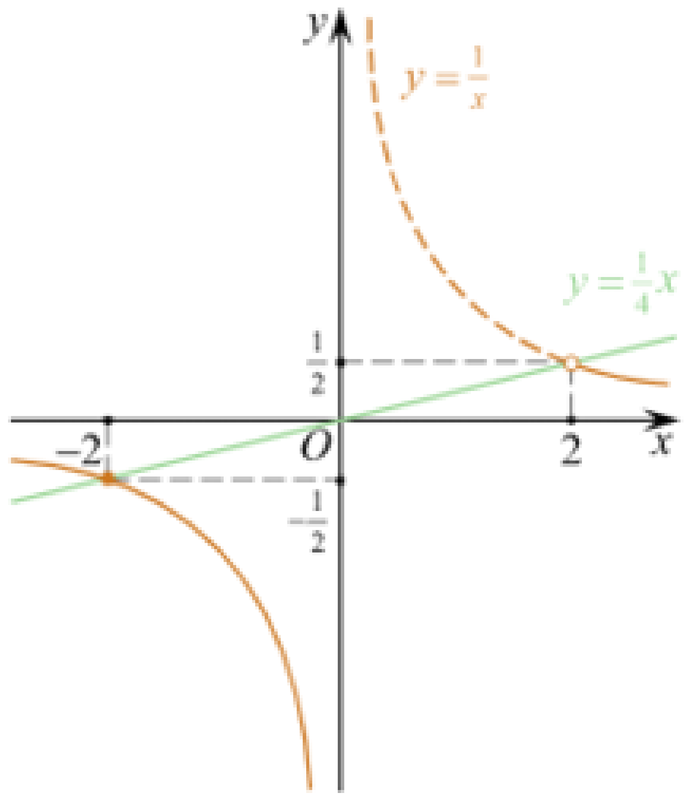


Рис. 3.6. Графік функції до завдання 3 варіанта №2

Отже, розібравши та розв’язавши запропоновані завдання, перейдемо до аналізу результатів експерименту.

3.2. Аналіз результатів експерименту

Для оцінки знань учнів 10-А класу використовувалися орієнтовні вимоги до оцінювання знань.Під час оцінювання навчальних досягнень учнів враховуються такі аспекти:

- Характеристика відповідей учнів: логічність, правильність, повнота, вичерпність, доцільність.
- Якість знань: зміст, глибина, узагальненість, систематичність, гнучкість, ефективність, міцність.
- Ступінь сформованості загальних і спеціальних умінь і навичок.
- Ступінь оволодіння розумовими операціями: уміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, абстрагувати, класифікувати, узагальнювати, робити висновки тощо.
- Досвід творчої діяльності (вміння розпізнавати та вирішувати проблеми, формулювати гіпотези).
- Незалежність в оцінці фактів.

Якість засвоєних знань учнів також оцінювалась з двох точок зору: рівень теоретичних знань, який може бути визначений під час усної співбесіди (опрацювання теоретичного матеріалу параграфів), та якість практичних навичок, тобто вміння застосовувати вивчений матеріал при розв’язуванні задач та вправ.

Використовувані вимоги навчальних досягнень учнів з математики наводимо у додатку А.

На основі виконаної контрольної роботи в таблицях 3.1 і 3.2 подано результати її кількісного аналізу, описано види помилок учнів.

Таблиця 3.1

Результати кількісного аналіз контрольної роботи (кількість учнів, які виконали завдання)

Кількісний аналіз				
	Оцінка			
Клас: 10-А К-сть учнів: 22 Тема: Функції	Низький рівень (1-3)	Середній рівень (4-6)	Достатній рівень (7-9)	Високий рівень (10-12)
Кількість учнів, які отримали бали	2	4	13	3
% від загальної кількості учнів, які виконали роботу	9	18	59	14
Кількість учнів, які не виконували роботу	0			
Загальна кількість учнів	22 (100%)			

Таблиця 3.2

Результати кількісного аналіз контрольної роботи (якість виконання завдань)

Кількісний аналіз			
	Оцінка		
Клас: 10-А К-сть учнів: 22 Тема: Функції	Завдання №1 В1, В2	Завдання №2 В1, В2	Завдання №3 В1, В2
Правильно, у повному обсязі виконано завдання	18 (82%)	7 (32%)	3 (14%)
Правильно і частково виконано завдання	4 (18%)	11 (64%)	18 (82%)
Неправильно виконано завдання	0	2 (4%)	2 (4%)
Не приступали до виконання завдання	0	0	0

Аналіз таблиці 3.2 показує, що найбільше труднощів в учнів викликають завдання на перевірку вміння будувати графіки функцій, що містить змінну під знаком модуля, і знаходження значення коефіцієнта *m*, за яких пряма $y = m$ має з ним 2 спільні точки (впоралися тільки 32% учнів). Крім того, великі труднощі в учнів виникають під час розв’язування завдань, пов’язаних із перевіркою вміння будувати графіки функцій і знаходженням значення коефіцієнта *k*, за яких пряма $y = kx$ має з ним одну спільну точку (впоралося лише 14% учнів). З першим завданням на встановлення відповідності між функціями, заданими графічним та аналітичним способами впоралося 82% учнів. Тих, хто не приступив до виконання завдань, не було.

За підсумками виконання контрольної роботи в учнів було виявлено такі види помилок:

обчислювальні помилки (14% учнів);

невміння працювати з поняттям модуля виявлено у 46% учнів, перетворювати графіки функцій – у 32% випробовуваних.

Більшість шкільних задач – стандартні: для їх розв'язування потрібне лише вміння працювати за «зразком», тобто знання деякого алгоритму, за допомогою якого можна розв'язати цей тип задач. Труднощі, що виникають під час розв'язування таких задач, мають часто технічний характер; методика їх подолання - це тренування однотипних вправ.

У школі степеневу функцію, ірраціональні рівняння та нерівності вивчають, як окремий розділ алгебри і початків аналізу. Це досить складна тема і не всім учням вона дається легко. Задачі підвищеної складності в шкільних підручниках та інших посібниках викликають у старшокласників найбільші труднощі та інтерес. Саме такі задачі сприяють формуванню в учнів кмітливості, спостережливості, уважності, розвивають пам'ять і фантазію, уміння логічно мислити, аналізувати, зіставляти й узагальнювати.

Навчання математики в школі має характер стереотипних вправ у розв'язуванні задач шаблонного змісту, що, можливо, і призводить до розвитку формальних навичок, але не спонукає до глибокого проникнення в матеріал, що вивчається, і не сприяє розвитку справжньої свободи думки.

Не всі завдання стандартні, деякі з них важко віднести до якогось певного типу. Зустрічаючи такі задачі на математичних олімпіадах або на вступних іспитах до ЗВО, учні не можуть знайти розв'язок, пояснюючи це тим, що таких задач вони в школі не розв'язували. Тому важливо, щоб до закінчення школи діти мали достатній досвід розв'язування задач підвищеної складності ыз теми степенева функції, коли потрібно проявити творчу (нехай навіть невелику) оригінальність і вміти виробити власний метод їх розв’язування.

Отже, після виконання контрольної роботи було проведене усне опитування в 10-А класі, щоб виявити основні труднощі та проблеми, пов’язані з виконанням завдань контрольної роботи, що відбулася. За результатами опитування можна зробити висновок, що завдання були учням цікаві, а ті, які вимагали встановлення відповідності (із готовими, побудованими графіками функцій) особливих труднощів у виконанні не викликали. Інша річ, якщо йдеться про побудову графіків функцій за заданими формулами, наприклад, якщо функція містить у собі модуль. Не всі учні до кінця розуміють, як перетворювати такі функції, розкривати модулі.

ВИСНОВОК

Отже, вивчення теми «Степенева функція» сьогодні є доволі актуальною.

Основною метою для вивчення є формування уявлення про функції як математичної моделі залежності між величинами й об’єктами, введення поняття про основні задання функції на прикладах прямої й оберненої пропорційності, розгляд функцій $y = kx + b, y = kx, y = \frac{k}{x}, y = x^2, y = x^3, y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ та їхніх графіків. Одним з базових математичних понять є поняття функції. Наявні знання учнів про лінійну функцію та її графік, опановані за курс базової освіти, будуть використані для графічної ілюстрації розв’язання лінійного рівняння з однією змінною та системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Інші типи функцій розглядаються в контексті вивчення відповідного матеріалу з інших розділів курсу. У 10 класі учні дадуть означення кореня п-го степеня, арифметичного кореня п-го степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів і степенів з раціональним показником, а також обчислюватимуть, оцінюватимуть і порівнюватимуть значення виразів, виразів, що містять корені та степені з раціональним показником, будувати графік степеневої функції, розв’язувати ірраціональні рівняння та нерівності, у тому числі з параметрами, застосовувати властивості функцій до розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Лінія функцій проходить через весь курс алгебри початкової школи і розвивається в тісному зв’язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій визначаються за їхніми графіками, а інші властивості доводяться аналітично.

У міру засвоєння теоретичного матеріалу кількість властивостей, що підлягають аналізу, поступово збільшується. У вивченні функцій важливе місце відводиться формуванню вміння будувати і читати графіки функцій, а також характеризувати процеси, які вони описують, за допомогою графіків функцій.

У результаті проведення педагогічного експерименту на базі Вараського ліцею №5 у 10-А класі було виявлено, що учні досить добре справляються із завданнями на готових кресленнях, тому що вони наочні, зрозуміліші й цікавіші. Чого не можна сказати про ті завдання, в яких потрібно самим за заданою формулою будувати графік функції. Це здебільшого завдання складнішого рівня, де потрібні перетворення під час розкриття знака модуля.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агафонова А.О. Математичні дрібнички. *Математика в школах України.* 2016. № 31-32. С. 71-74.

2. Ачкан В.В. Математичні компетентності як компонент особистісно орієнтованого навчання математики. Освіта, 2018. 450 с.

3. Бевз В. Г. Провідні методологічні підходи у навчанні математики в профільній школі. *Математика в школі*. 2010. № 8. С. 3–7.

4. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.

5. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу: 11 кл.: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень. Київ: Освіта, 2011. 400 с.

6. Бевз Г.П. Методи навчання математики. Харків : Основа. 2003. 96 с.

7. Беседін Б. Організація проєктної діяльності на уроках математики як спосіб розвитку пізнавальної компетентності учнів. *Гуманізація навчально-виховного процесу.* 2021. №. 1 (100). С. 98-108.

8. Бурда М. І. Математика. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту. Київ: Зодіак-ЕКО, 2010. 290 с.

9. Бурда М. І. Математика: підручник Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія). Оріон, 2018. 100 с.

10. Вища математика. Спеціальні розділи: Диференціальне числення функцій двох змінних. Розрахункова робота: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інженерна екологія та ресурсозбереження». КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 77 с.

11. Вища математика. Стислий конспект лекцій з курсу «Вища математика» для студентів 1-го курсу хімічного факультету. Частина 2. Вибрані розділи математичного аналізу. Ужгород: УжНУ, 2015. 48 с.

12. Вища математика: конспект лекцій у 3 частинах. Суми: Вид-во СумДУ, 2010. Ч.2. 111 с.

13. Вірченко Н. О. Графіки елементарних та спеціальних функцій : довідник. Київ : Наук. думка, 1996. 582 с.

14. Єршова А. П. Алгебра: підручник Геометрія 9 клас. Ранок, 2017. 256 с.

15. Єфремова О. І. Міжпредметні зв'язки фізики і математики у 9-11 класах середньої загальноосвітньої школи: автореф. дис. … канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)». Київ: НПУ, 2001. 20 с.

16. Забранський В. Організація письмових самостійних та контрольних робіт при диференційованому навчанні математики. *Математика в школі*. 2000. № 5. С. 30 – 33.

17. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : під- руч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти. Київ : Генеза, 2018. 448 с.

18. Істер О.С. Алгебра: підручник Алгебра 9 клас. Генеза 2017. 267 с.

19. Кухарєва О.С. Ретроспективний аналіз вивчення початків аналізу в старшій школі. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. 2013. № 8 (34). С. 100-110.

20. Кушнір В. Методичні особливості формування умінь побудови графіків функцій методом перетворень. *Математика в школі*. 2007. № 3. С. 41 – 44.

21. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. Рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків. Гімназія, 2018. 512 с.

22. Мойсеєв С. Про поняття функції в курсі алгебри. *Математика в школі*. 2003. № 5. С. 19 – 21.

23. Мосієнко І. Формування прийомів математичного моделювання у дослідно-орієнтованому навчанні. URL: http://oldconf.neasmo.org.ua/node/2936

24. Музиченко С. Задачі на перехід від одного способу задання функції до іншого. Математика в школі. 2008. № 1. С. 11 – 18.

25. Навчальні програми для 10-11 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011 рік). Математика (Профлільний рівень). URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

26. Нелін Є. П. Алгебра: підручник Алгебра 11 клас академічний рівень, профільний рівень. Гімназія 2011. 455 с.

27. Нелін Є. П. Математика: підручник Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту). Ранок, 2018. 60 с.

28. Прокопенко Н. С. Алгебра: підручник Алгебра 9 клас. Ранок, 2017. 288 с.

29. Резніченко Р. Степенева функція та прийоми розумової діяльності. *Математика в школі*. 2005. № 9. С. 20 – 26.

30. Семенець С. Про вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю. *Математика в школі*. 2005. № 7. С. 33 – 35.

31. Семенець С. Про вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю. URL: http://eprints.zu.edu.ua/2748/1/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86__%D1%80%D1%96%D0%B2_%D0%9A.pdf

32. Соколенко Л. О. Методика навчання курсу «Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія)» (рівень стандарту): Методичні рекомендації до навчання змістових модулів №6-9 навчальної дисципліни «Методика навчання

математики» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2020. 132 с.

33. Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Курилко О.Б., Цань В.Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІІ «Функції в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету, 2022. 224 с.

34. Чекатков А.О. З досвіду роботи вчителя математики харківського ліцею № 107. 2017. URL: https://dspace.hnpu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/bd12ab22-c267-4d36-9c61-7315e3671403/content

35. Шкільний курс математики і методика його навчання: алгебра основної школи. Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів денної форми навчання / Укладач: А. С. Кушнірук. Одеса: ФОП Бондаренко М. О., 2018. 60 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Вимоги навчальних досягнень учнів з математики

Рівні навчальних досягнень	**Бали**	**Характеристика навчальних досягнень учня (учениці)**
Початковий	1	Учень: • розпізнає один із кількох запропонованих математичних об’єктів (символів, виразів, геометричних фігур тощо), виділивши його серед інших; • читає і записує числа, переписує даний математичний вираз, формулу; • зображає найпростіші геометричні фігури (малює ескіз)
	2	Учень: • виконує однокрокові дії з числами, найпростішими математичними виразами; • впізнає окремі математичні об’єкти і пояснює свій вибір;
	3	Учень: • співставляє дані або словесно описані математичні об’єкти за їх суттєвими властивостями; • за допомогою вчителя розв’язує елементарні вправи
Середній	4	Учень: • відтворює означення математичних понять і формулювання тверджень; • називає елементи математичних об’єктів; • формулює деякі властивості математичних об’єктів; • виконує за зразком завдання обов’язкового рівня
	5	Учень: • ілюструє означення математичних понять, формулювань теорем і правил виконання математичних дій прикладами із пояснень вчителя або підручника;

		• розв’язує завдання обов’язкового рівня за відомими алгоритмами з частковим поясненням
	6	Учень: • ілюструє означення математичних понять, формулювань теорем і правил виконання математичних дій власними прикладами; • самостійно розв’язує завдання обов’язкового рівня з достатнім поясненням; • записує математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки
Достатній	7	Учень: • застосовує означення математичних понять та їх властивостей для розв’язання завдань у знайомих ситуаціях; • знає залежності між елементами математичних об’єктів; • самостійно виправляє вказані йому помилки; • розв’язує завдання, передбачені програмою, без достатніх пояснень
	8	Учень: • володіє визначеним програмою навчальним матеріалом; • розв’язує завдання, передбачені програмою, з частковим поясненням; • частково аргументує математичні міркування й розв’язування завдань
	9	Учень: • вільно володіє визначеним програмою навчальним матеріалом; • самостійно виконує завдання в знайомих ситуаціях з достатнім поясненням; • виправляє допущені помилки; • повністю аргументує обгрунтування математичних тверджень; • розв’язує завдання з достатнім поясненням;

Високий	10	Знання, вміння й навички учня повністю відповідають вимогам програми, зокрема учень: • усвідомлює нові для нього математичні факти, ідеї, вміє доводити передбачені програмою математичні твердження з достатнім обґрунтуванням; • під керівництвом учителя знаходить джерела інформації та самостійно використовує їх; • розв’язує завдання з повним поясненням і обґрунтуванням
	11	Учень: • вільно і правильно висловлює відповідні математичні міркування, переконливо аргументує їх; • самостійно знаходить джерела інформації та працює з ними; • використовує набуті знання і вміння в незнайомих для нього ситуаціях; • знає, передбачені програмою, основні методи розв’язання завдання і вміє їх застосовувати з необхідним обґрунтуванням
	12	Учень: • виявляє варіативність мислення і раціональність у виборі способу розв’язання математичної проблеми; • вміє узагальнювати й систематизувати набуті знання; • здатний до розв’язування нестандартних задач і вправ