Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

магістра

на тему

Методика навчання учнів гуманітарного профілю розв'язувати стереометричні задачі

Виконав: студентка 2 курсу магістратури,

групи М-М-21

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Вознюк Катерина Юріївна

Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент, професор кафедри математики з МВ
Крайчук Олександр Васильович

Рецензенти: кандидат педагогічних наук, доцент,
проректор МЕГУ ім. акад. Степана Дем'янчука
Ясінський Андрій Миколайович

кандидат педагогічних наук, доцент, професор кафедри ІКТ та МВІ Рівненського державного гуманітарного університету
Остапчук Наталія Олександрівна

Рівне – 2023 року

Зміст

Вступ

Місце і роль шкільного курсу математики і, зокрема, стереометрії значно зросла з появою спеціалізованих шкіл і класів різного профілю. Виникають питання про методичні підходи до викладання стереометрії в класах різної профільної орієнтації. Заслуговують також на вивчення методики, спільні для різнопрофільних класів і відмінності в курсах стереометрії таих класів. У цьому аспекті постає загальне питання про об’єм матеріалу із курсу стереометрії, про її значення для різних профілів навчання і, зокрема, для навчання учнів гуманітарного профілю.

Стереометрія, як і кожна інша математична дисципліна, потрібна в гуманітарних класах. Саме вона знайомить учнів із різноманітністю просторових форм, законами сприйняття і зображення просторових фігур. Такі знання дозволяють правильно орієнтуватись в оточуючому світі, формують необхідну просторову уяву. Стереометрія дає метод наукового пізнання, активізує пізнавальну діяльность, формує мислення школярів. Крім цього, вивчення стереометрії формує необхідні практичні навички в зображенні, моделюванні і конструюванні просторових фігур, вимірюванні основних геометричних величин (довжин, площ, об'ємів, тощо).

Питання удосконалення математичної підготовки учнівської молоді досліджувались у роботах математиків-методистів І. А. Акуленко, М. І. Башмакова,В. Г. БевзГ. П. Бевза,М. І. Бурди,О. І. Глобіна,Н. А. Глузман, Я. І. Грудьонова,В. О. Гусєва,Г. В. Дорофеєва,Ю. М. Колягіна,Т. В. Крилової, В. Г. Моторіної,В. М. Осинської,Д. Пойя,М. В. Працьовитого,Г. І. Саранцева, С. П. Семенця,О. І. Скафи,С. О. Скворцової,З. І. Слєпкань, В. І. Таточенка, Т. М. Хмари, О. С. Чашечникової, В. О. Швеця та ін. Особливості навчання математики в старших класах, зокрема профільної школи, розглянуто в дисертаційних роботах: С. В. Іванової (формування геометричних умінь старшокласників шкіл (класів) гуманітарного профілю), М. Я. Ігнатенка (активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики), О. М. Марченко (систематизація знань старшокласників у процесі навчання математики з комп’ютерною підтримкою), І. В. Сверчевської (вивчення геометричних тіл у загальноосвітній школі). Однак проблема побудови методики навчання стереометрії, яка спрямовує навчальний процес у класах гуманітарного профілю на формування в учнів вміння розв’язувати стереометричні задачі, залишається недостатньо розроблено.

Актуальність дослідження. Вилучення стереометрії з числа предметів, що вивчаються в класах гуманітарного профілю, суттєво збіднює, знижує загальнокультурний рівень школярів. Звичайно, це відбувається не тільки тому, що не повністю усвідомлюються втрати, пов'язані з таким вилученням, але й через те, що шкільні підручники і навчальні посібники зі стереометрії не придатні для гуманітарних класів. І ось тут ми повинні відповісти на питання: "Яким повинен бути курс стереометрії в гуманітарних класах?"

В учнів загальноосвітніх шкіл, особливо в класах гуманітарного спрямування, відсутні знання про структуру, етапи, методи і прийоми розв’язання геометричних задач. А одним з найважливіших завдань навчання стереометрії – формування вмінь розв’язувати задачі. Ця діяльність є і засобом засвоєння понять та фактів, і кінцевою метою навчання стереометрії. Тому методика формування вмінь набувати стереометричних знань і застосовувати їх є важливою складовою методики навчання стереометрії.

Таким чином, важливість теоретичного і практичного розв’язання проблеми навчання розв’язуванню задач у школах (класах) гуманітарного профілю, її недостатня вивченість, велике значення для покращення геометричної підготовки учнів старшої школи, обумовлюють актуальність вибраної теми бакалаврської роботи.

Об’єкт дослідження - процес навчання розв’язуванню задач зі стереометрії старшокласників шкіл (класів) гуманітарного профілю.

Предмет дослідження - формування умінь і навичок розв’язувати стереометричні задачі в учнів класів гуманітарного профілю навчання.

Мета дослідження - опрацювати методичну літературу, присвячену даній темі, систематизувати методи і прийоми навчання розв’язування задач зі стереометрії учнів гуманітарного профілю.

Гіпотеза дослідження полягає тому, що розроблений блочний метод проведення уроків стереометрії у гуманітарних класах, а також використання наочності**,** сприятимуть розвитку просторової уяви учнів, покращенню вміння розв’язувати стереометричні задачі, а також їхньому загальному інтелектуальному розвитку**.**

Відповідно до мети дослідження поставлені такі **завдання:**

1. Проаналізувати стан досліджуваної проблеми у психолого-педагогічній теорії та практиці шкільного навчання стереометрії учнів-гуманітаріїв.

2. Розробити моделі стереометричних тіл, а також методику для їх застосування на уроках стереометрії.

3.Розробити теоретичні і практичні рекомендації для вчителів і методистів з даної проблеми.

Для розв’язання поставлених завдань використано такі **методи дослідження**: системний аналіз психолого-педагогічної і навчально-методичної літератури з проблеми дослідження, моделювання педагогічних процесів, спостереження, бесіди з учнями і вчителям, вивчення та узагальнення передового досвіду викладачів і методистів.

Дана магістерська робота складається з вступу, трьох розділів, висновку, списку використаної літератури і додатку. У першому розділі висвітлені питання загальної методики навчання розв’язуванню задач зі стереометрії. Зокрема розглянуто мету, завдання і принципи організації профільного навчання. У другому розділі розглянуто методику навчання учнів гуманітарного класу розв’язуванню стереометричних задач, розроблені моделі стереометричних тіл. Результати роботи були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету в 2022 – 2023 роках.

Розділ 1
Теоретико-психологічні основи дослідження

1.1. Мета, завдання і принципи організації профільного навчання

Освітня галузь України, поряд із кризовими явищами в ній, перебуває на етапі системної модернізації. Надзвичайно важливим при здійсненні таких змін є глибокий аналіз проблем щоби правильно та ефективно вибудувати траєкторію руху вперед, враховуючи при цьому інтереси усіх стейкхолдерів процесу.

Головними проблемами загальної середньої освіти є її непрактичність, перезавантаженість учнів на усіх етапах навчання, затеоретизований зміст навчальних програм та підручників, незацікавленість у кінцевому результаті як здобувачів освіти, так і педагогів.

Саме це і зумовило процес реформування галузі та старт Нової української школи з 1 вересня 2018 року [28, с. 4].

Профільне навчання – вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті та структурі організації навчання [25, с. 47].

Профільне навчання повинне забезпечувати загальноосвітню підготовку учнів, глибоку їх допрофесійну готовність із формуванням стійкої орієнтації на продовження навчання. Професійну ж підготовку отримує невелика кількість випускників шкіл, які навчаються за окремими спеціальностями у міжшкільному навчально - виробничому комбінаті, професійному ліцеї чи окремих школах.

Зміст профільної освіти і методи навчання обумовлені цілями, а цілі – якостями особистості випускника, його моделлю, яка в свою чергу детермінується змінами соціально-економічних умов життя суспільства.

Отже, зміст профільної освіти прямо пов'язаний з формуванням стійкої системи соціально значущих якостей особистості [5, с.53-54].

Мета профільного навчання – забезпечення можливостей для рівного доступу учнівської молоді до здобуття загальноосвітньої профільної та початкової допрофесійної підготовки, неперервної освіти впродовж усього життя, виховання особистості, здатної до самореалізації, професійного зростання й мобільності в умовах реформування сучасного суспільства. Профільне навчання спрямоване на набуття старшокласниками навичок самостійної науково-практичної, дослідницько-пошукової діяльності, розвиток їхніх інтелектуальних, психічних, творчих, моральних, фізичних, соціальних якостей, прагнення до саморозвитку та самоосвіти [5, с. 77].

Досить влучно звучать слова Жозефа де Местра, що стосуються глибинних основ і самої суті одного з найважливіших напрямів сучасної реформи, а саме переходу до моделі профільної школи (профільного навчання у старших класах). Граф Жозеф де Местр писав міністру просвіти Росії О.К.Розумовському з приводу багатопредметної програми Царськосільського ліцею: „Зверніть увагу, п. граф, на мудрість наших предків. Оскільки всі повинні вміти добре мислити, добре говорити і добре писати, вони обмежили загальну освіту цими трьома пунктами. Потім кожний приймав своє рішення і віддавався тій окремій науці, котра була йому потрібна. Ніколи вони не думали, що треба було б знати хімію, щоб стати єпископом, чи математику, щоб бути адвокатом. Початкова освіта не виходила за рамки, котрі я зобразив. Так були виховані Копернік, Кеплер, Галілей, Декарт, Ньютон, Лейбніц, обидва Бернуллі, Фенелон, Боссюе та багато інших" [25, с. 50]. Мотивування навряд чи втратило у своїй актуальності: „ Немає більш надійного методу привити назавжди відразу до науки нещасної молоді, у якої голова буде завжди завалена і, так би мовити, засмічена цією колосальною купою неперетравлених знань, чи, що ще гірше, наповнити її всіма пороками, які завжди тягнуть за собою верхоглядність, не врівноважуючи їх ані найменшими перевагами" [10, с. 45].

Основними завданнями профільного навчання є:

1) створення умов для врахування й розвитку навчально-пізнавальних і професійних інтересів, нахилів, здібностей і потреб учнів старшої школи в процесі їхньої загальноосвітньої підготовки;

2) виховання в учнів любові до праці, забезпечення умов для їхнього життєвого і професійного самовизначення, формування готовності до свідомого вибору й оволодіння майбутньою професією;

3) формування соціальної, комунікативної, інформаційної, технічної, технологічної компетенції учнів на допрофільному рівні, спрямування підлітків щодо майбутньої професійної діяльності;

4) забезпечення наступно-перспективних зв'язків між загальною середньою і професійною освітою відповідно до обраного профілю [10, с.47-48].

У класах з профільним навчанням учні мають право і можливість обирати різні профілі навчання з урахуванням їх індивідуальних інтересів, нахилів і здібностей. Це дозволяє їм зосереджувати переважну увагу на поглибленому вивченні теоретичних основ обраного профілю у блоці відповідних дисциплін.

Крім того, профілізація освіти передбачає посилення підготовки старшокласників в області прикладних знань за обраним профілем, формування у них первинних елементів професіонально-важливих якостей.

Така форма освіти старшокласників дозволяє їм отримати за обраним профілем більш глибокі, різносторонні теоретичні і прикладні знання, уміння і міцні практичні навички дослідницького характеру, підготувати себе до успішного продовження освіти у середньому (вищому) професіональному навчальному закладі відповідного напряму чи до праці у сфері матеріального виробництва.

Цьому сприяє також і те, що профільна диференціація освіти учнів на старшому етапі являє собою логічне продовження рівневої диференціації освіти учнів, здійснюваної на середньому ступені, у V-IX класах, у формі професійної орієнтації та інших видів допрофільної підготовки [18].

З вищесказаного випливає, що профільна освіта за своїми цілями і змістом займає проміжне положення між загальною середньою та професійною освітою.

Профільне навчання ґрунтується на таких принципах:

1) фуркації (розподіл учнів за рівнем освітньої підготовки, інтересами, потребами, здібностями і нахилами);

2) варіативності й альтернативності (освітніх програм, технологій навчання і навчально-методичного забезпечення);

3) наступності та неперервності (між допрофільною підготовкою і профільним навчанням, професійною підготовкою);

4) гнучкості (змісту і форм організації профільного навчання, у тому числі дистанційного; забезпечення можливості зміни профілю);

5) діагностико-прогностичної реалізованості (виявлення здібностей учнів для їх обґрунтованої орієнтації на профіль навчання) [10, с.52-53].

Здійснення профільного навчання потребує цілеспрямованого формування контингенту учнів, розробки відповідного навчально-методичного забезпечення за кожним напрямом навчання, використання специфічних форм і методів роботи з учнями, що мають підвищену мотивацію до навчання, вимагає відповідної перепідготовки і підвищення кваліфікації вчителя, модернізації матеріально-технічної бази.

1.2. Навчальні задачі з математики. Поняття "задача" в психолого-педагогічній літературі

Дослідження педагогів, психологів, методистів показують, що найбільш ефективним засобом розвитку математичної діяльності учнів є навчання "через задачі". Тому виникає проблема підготовки майбутнього вчителя математики до цього виду діяльності, з допомогою якої можна було б провести учня послідовно через всі аспекти математичної діяльності (виявлення проблемних ситуацій і задач, математизація конкретних ситуацій, розв'язування задач, які мотивують необхідність розширення теорії, тощо).

Розв'язування проблеми не можливо без уточнення понять проблемної ситуації, задачі, без структурного аналізу задач, який дозволив би нам оцінити "складність" задач і визначити послідовність їх розв'язування. В цій послідовності кожна задача повинна нести визначене навчальне навантаження.

Поняття "задача" в психолого-педагогічній літературі

Поняття "задача" належить до загальнонаукових понять, яке використовується в галузі різних наук. Психологи, педагоги, методисти з різних позицій, як правило, трактують дане поняття. В одному вони всі одностайні, що використання задач відіграє важливу роль у навчально-виховному процесі. Відповідно задачі стануть не тільки засобом та метою навчання, але й об'єктом психолого-педагогічних досліджень.

У методичній літературі тривалий час користувались терміном "задача", "математична задача" без їх визначення. Одне із перших означень задачі дає відомий російський математик С. О. Шатуновський у вступній статті до книги Адлера "Теорія геометричних побудов" пише: "Задача" є виклад вимоги "знайти" за "даними" речами інші, "шукані" речі, що перебувають одна з одною і з даними речами в зазначених співвідношеннях"[29, с.43-44]. Роз'яснюючи це означення С. О. Шатуновський говорить, що в кожній задачі розглядаються два класи речей (конкретних або абстрактних). Речі першого класу дані, зазначені, відомі, доступні спогляданню, розумінню або уявленню. Вони перебувають у нашому розпорядженні, ми їх знаємо, можемо уявити і т.д. Речі другого класу не дані, не відомі, не визначені. Вони повинні бути знайдені, визначені. Розв'язання задачі і полягає в переведенні речей з другого класу в перший. Потім С. О. Шатуновський уточнює, що це переведення слід розуміти як зведення до спеціальних постулатів. "Пропозиції, якими встановлюються ті факти обставини або умови, при наявності яких шукана річ стає даною, ми називатимемо постулатами, що лежать в основі розв'язання певної задачі або певної групи задач, розглядуваних у тій або іншій дисципліні (ці постулати можна назвати логічними засобами розв'язування)"[8, с. 61].

Ми не будемо аналізувати дане трактування розуміння задачі, чи порівнювати з іншими, що зустрічається в науковій літературі, з більш вдалими, але й вони не можуть нас задовольнити.

Перш ніж ми вкажемо причину такого відношення, слід відзначити, по-перше, що даній проблемі присвячено дуже багато ґрунтовних досліджень серед психологів, дидактів, методистів. При цьому, різні дослідники, даючи характеристику та трактуючи дане поняття не прийшли до консенсусу. Різні автори по-різному підходять до питання про відношення між суб'єктом і задачею. Різнорідні сучасні підходи до поняття "задача" можна об'єднати в дві групи в залежності від того, до яких систем застосовується це поняття. До першої групи відносяться трактування поняття задача розповсюджені в працях по кібернетиці, дидактиці, методиці. Тут задача трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка може бути проаналізована і описана відокремлено від суб'єкта, який здійснює діяльність. Такий підхід позбавляє поняття "задача" певного психологічного змісту. До другої групи відносяться трактування поняття "задача", яке включає психологічний зміст і зводиться до загальної характеристики задачі, як мети, даної в визначених умовах, як особливої характеристики діяльності суб'єкта. Задача в трактуванні цієї групи розглядається, як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта [29, с.64].

По-друге, переважна більшість досліджень присвячена проблемі використання задач у навчанні учнів або студентів, для яких задача не є засобом їхньої майбутньої професійної діяльності (вивчення математики з метою навчання розв'язуванню задач; навчання математики супроводжується розв'язуванням задач; навчанню математики через розв'язування задач). Це і є та причина по якій ми в нашому дослідженні не можемо приєднатись до одного із вище описаних підходів до трактування поняття "задача" [29, с.70].

У нашому дослідженні ці підходи тісно переплітаються, адже з однієї сторони майбутній вчитель математики повинен оволодіти поняттям "задача" як засобом майбутньої професійної діяльності і в той же час з іншої сторони задача стає логіко-психологічною категорією, коли вона пропонується іншому суб'єктові і приймається ним до розв'язання. Суб'єкт переформульовує, довизначає задачу, шукає спосіб її розв'язання, що свідчить про включення процесу мислення. Тому, підсумовуючи все сказане в нашому дослідженні ми під задачею будемо розуміти те, що вимагає виконання, розв'язування.

С. Л. Рубінштейн, характеризуючи психологічну природу розумового процесу , вказував: "Будь який розумовий процес є по своїй внутрішній будові дією або актом діяльності, яка направлена на розв'язування певної задачі. Задача ця заключає в собі мету для розумової діяльності індивіда, співвіднесену з умовами, якими вона задана... Початковим моментом розумового процесу, як правило, є проблемна ситуація. Міркувати людина починає, коли у неї появляється потреба щось зрозуміти. Мислення, як правило, починається з проблеми або запитання, із здивування або нерозуміння, з протиріччя"[29, с. 71-72].

Що таке проблемна ситуація? Згідно С. У. Гончаренко проблемна ситуація – ситуація, для оволодіння якою окремий суб'єкт (або колектив) має знайти й застосувати нові для себе знання чи способи дій. У проблемній ситуації слід розрізняти її об'єктивний бік (суперечність між складністю, яку треба подолати, і недостатністю наявних засобів для досягнення цієї мети) та її суб'єктивний бік (усвідомлення суб'єктом цієї суперечності й прийняття або постановка ним відповідного проблемного завдання).

Усвідомлення проблеми відбувається в проблемній ситуацій і залежить від рівня знань, спрямованості пізнавальних інтересів людини, яка вчиться.

Те, що є проблемним для одного, може не бути проблемним для іншого. Кожна людина бачить тим більше нерозв'язаних проблем, чим ширше коло її знань. Уміння побачити проблему – функція знання.

Таким чином, проблемна ситуація характеризує певний психічний стан суб'єкта, що виникає під час виконання завдання і допомагає йому усвідомити суперечність між необхідністю виконати завдання і неможливістю здійснювати це за допомогою наявних знань. Усвідомивши суперечність, суб'єкт відчуває потребу відкрити (засвоїти) нові знання про предмет, спосіб чи умови виконання дій.

У процесі вивчення математики учні усвідомлюють проблему найчастіше під керівництвом учителя.

Наприклад, учням 6 класу запропонована задача: “Обчислити суму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{19\cdot 20}.\text{”}$$

Як правило, учні, ніколи раніше не зустрічалися з розв'язуванням аналогічних задач з допомогою перетворення дробів, обчислюють значення кожного дробу, а потім їх додають. Виникає проблемна ситуація. Учні зустрілись із завданням, яке не можна раціонально виконати, використовуючи лише наявність знання. Виникає здогад: кожний із дробів представити у вигляді різниці.

Тільки в цих умовах у суб'єкта виникає активна розумова діяльність. Він пробує "децентрувати" ситуацію (до цих пір він був центром цієї ситуації, а зараз він хоче вийти за її межі, поглянути на неї зі сторони). Це дає можливість суб'єкту детально проаналізувати ситуацію виявити всі її складові частини, зв'язки і співвідношення між ними, з'ясувати суть невідомого (перешкоди), якого не вистачає в наявному фонді знань і яке треба знайти в результаті виконання завдання, тобто вичленовується задача (проблема).

Таким чином, генезис задачі можна розглядати як моделювання проблемної ситуації, а саму задачу – як модель проблемної ситуації, яка представлена на звичайній і (в нашому випадку) математичній мові.

Зрозуміло, що задача як модель відображає лише деякі сторони проблемної ситуації, яка моделюється. Остання завжди багатогранніше своєї знакової моделі, хоча в структурному відношенні вони подібні. Але сама суттєва відмінність між ними полягає в тому, що елементом проблемної ситуації є сам суб'єкт і тому її не можна "передати" іншому суб'єктові. Між тим задача – це уже об'єкт (знаковий, в нашому випадку математичний), який можна передати іншому суб'єкту. Тому задачі можна складати, змінювати, переробляти.

У випадку, коли об'єкт утримує задачу зовні в готовому, сформульованому виді процес мислення починається з етапу "прийняття" суб'єктом цієї задачі. І якщо суб'єкт цю незнайому задачу приймає і робить її розв'язування метою своєї діяльності, то він тим самим попадає в проблемну ситуацію.

У навчальному процесі проблемні ситуації виникають не спонтанно, а в результаті цілеспрямованої діяльності вчителя. Тому їх правильно називати навчальними проблемними ситуаціями, які створені вчителем і втягують учнів в активну розумову діяльність.

Важливе питання про зв'язок понять "задача" і навчальна проблема. У навчальну проблему трансформується не кожна задача, а лише та, для розв'язування якої учням потрібні нові знання, при чому засвоюються ці знання саме в процесі роботи над задачею.

Задача – явище об'єктивне, для майбутніх учителів математики вона існує в матеріалізованій формі (записана на дошці, в зошиті, книжці, виражена в звуках чи знаках) і перетворюється в суб'єктивне, у навчальну проблему лише тоді, коли буде осмислена ними і прийнята як особиста [29, с. 82].

М. І. Махмутов вказує десять різних способів створення навчально-проблемних ситуацій. В царині навчання математиці всі ці способи можна згрупувати в наступні:

1. Постановка перед учнями теоретичної проблеми пояснення зовнішніх суперечностей в фактах, які спостерігаються, доведення тверджень, отриманих на основі спостережень в результаті вимірювання, обчислення, виведення формули, правила і т. д.

2. Створення проблемної ситуації шляхом викладу історії виникнення і розвитку якого-небудь математичного поняття або практичного його застосування в сучасних умовах.

3. Постановка перед учнями навчальної проблеми аналізу і засвоєння засвоєних раніше знань і умінь.

4. Постановка перед учнями проблеми знаходження шляхів і способів задач нового або видозміненого виду [4, с.2-3].

Головна дидактична трудність при створенні проблемного завдання полягає в тому, стверджує А. М. Матюшкін, – що виконання учнем запропонованого завдання привело до потреби в тих знаннях або способах дії, які складають невідоме. Мистецтво вчителя полягає в тому, щоб запропонувати потрібні засвоєнню знання як систему невідомих знань, які повинні відкрити учні на уроці .

Ідея проблемності в навчанні знайшла відображення й у методах навчання математики. За класифікацією І. Я. Лернера і М. Н. Скаткіна такими методами є: проблемний виклад, евристична бесіда, частково-пошуковий і дослідницький методи. Усі вони різняться ступенем пізнавальної самостійності й активності учнів.

В якості загальнодидактичної теорії навчання математиці ми приймаємо сучасну дидактичну систему проблемного навчання.

Ця система будується на базі відомих принципів дидактики (науковості, систематичності і послідовності у навчанні, свідомості засвоєння, активності учнів, наочності навчання, міцності знань, індивідуального підходу), доповнених принципом проблемності навчання, згідно якого процес навчання протікає як створення і зняття послідовності проблемних ситуацій.

При цьому ми притримуємось думки І.Я.Лернера, М.Н.Скаткіна, які справедливо стверджують: "Проблемне навчання... не є особливим типом навчання, який приходить на зміну попереднім типам, не грає ролі універсального методу навчання. Воно є необхідною складовою частиною сучасної цілісної системи навчання, яка передбачає різноманітність цілей, видів змісту освіти, методів навчання"[6, с. 11-16].

Згідно А.А.Столяра є конкретизація загально дидактичної системи проблемного навчання і її поєднання з навчанням математичної діяльності дозволяє виділити три основних типи проблемних ситуацій. Вони специфічні для цього навчання, відрізняються навчальними цілями, природою відомого і невідомого, (розбалансованість) суперечність яких породжує проблему і результатами зняття (розв'язування) цієї ситуації. Зрозуміло, що в навчанні математиці можуть зустрічатись і інші типи проблемного навчання. Але основними є три типи, характеристики яких дані в Табл. 1.

Табл. 1.

Основні типи проблемних ситуацій у навчанні математичної діяльності

Основні	Основні типи проблемних ситуацій			
	Мета	Відоме	Невідоме	Результати
МЕМ (математизація емпіричного матеріалу)	Введення нових понять	ЕМ, який підлягає математичному опису	Математичний апарат, необхідний для опису ЕМ	Нові математичні знання
ЛОММ (логічна організація математичного матеріалу)	Систематизація знань	ММ- сукупність математичних тверджень, які описують ЕМ, які взяті з досвіду,	Спосіб логічної організації ММ	Систематизація математичних знань
ЗМТ (застосування можливостей математичної теорії)	Розкриття застосування знань в нових ситуаціях	ЕМ (конкретн ситуація, задача) і необхідна МТ (математична теорія)	Спосіб застосування МТ до нового ЕМ, в нових ситуаціях	Перенос математичних знань

1.3. Про навчання геометрії в гуманітарних класах

В основі профільного навчання лежить ідея диференціації навчання, яка не являється новою для школи.

В основі будь-якої диференціації лежать індивідуально-психологічні особливості учнів. Дослідженням індивідуальних відмінностей займається спеціальний розділ психології, який називається «Диференціальна психологія». Вона назбирала значний експериментальний матеріал про варіативність як окремих психічних властивостей людини (пам’ять, сприйняття, увага, уява, мислення і т. п.), так і про складні комплексні утворення (характер, темперамент, інтереси, схильності, мотивації і т.д.).

Завдання школи – не нав’язувати дитині готову систему навчання, а, в відповідності з її індивідуальними особливостями, запропонувати індивідуальну програму, траєкторію вивчення предмету, зокрема, геометрії.

Вибір профілю навчання залежить більшою мірою від вибору майбутньої спеціальності, від того, яке місце буде займати в ній, зокрема математика. Серед спеціалізованих профільних класів найбільш часто зустрічаються математичні, фізико-математичні, технічні; гуманітарні, серед яких історичні, філологічні, філософські; природно-біологічні, хімічні, географічні; юридичні, економічні та ін. Для профільних класів повинні створюватися спеціальні курси математики, зокрема, геометрії.

Головне питання, яке ставилося при написанні підручника геометрії для гуманітарних класів, є питання про те, яким повинне бути викладання математики в класах гуманітарного профілю? Що спільного і чим відрізняється навчання математики в цих класах? Чи потрібна взагалі математика в класах гуманітарного спрямування? Це не просте питання, як може здатися на перший погляд. Існує думка, згідно якої предмет – математика, зовсім не обов’язковий для учнів гуманітарних класів. Звичайно, з цим не можна погодитись. Добре відомо, що математика являється об’єктом загальної культури людини. Вона в однаковій степені потрібна художнику і математику. Це пов’язано з тим, що однаковою мірою необхідно розвивати раціональні і ірраціональні психічні функції людини. До перших, наприклад, відноситься мислення, до других – відчуття, інтуїція. Для будь-якої людини важливо турбуватися про розвиток як лівої так і правої півкуль головного мозку. Як відомо, ліва пов’язана з розвитком логічного, а права – художнього мислення. Якщо одна з них не буде розвинена із людини не вийде гармонійно розвиненої особистості. Математика представляє для цього як раз багаті можливості.

Неправильною варто вважати точку зору, згідно з якою викладання математики в нематематичних класах відводиться другорядна роль. Навпвки, значення математичної освіти в цих класах не тільки не менше, але навіть і більше, ніж в спеціалізованих математичних класах. Пов’язано це з тим, що в гуманітарних класах математична освіта, як правило, завершується, а після спеціалізованих математичних класів освіта продовжується в відповідних вищих навчальних закладах.

Учні на загальнокультурному рівні навчання повинні отримати більш широку математичну освіту. В той же час необхідно враховувати гуманітарну спрямованість особистості учнів. Це виражається в більшому значенні для них питань світоглядного характеру математики, її історії і застосувань в різних областях і сферах людської діяльності [31, с.5-6].

Виходячи із аналізу спостережень, достатньо великої кількості відповідних анкетувань і тестувань, а також з досвіду викладання в гуманітарних класах, були виділені наступні психолого-педагогічні особливості учнів гуманітарних класів, а саме:

- домінуванням наочно-образного мислення;
- сприйняття краси математики направлене в учнів гуманітарних класів на її прояв в живій природі, в витворах мистецтва, через красиві конкретні математичні об’єкти;
- увага на уроці може бути стійкою в середньому не більше 12 хвилин;
- серед компонентів змісту навчання у гуманітаріїв найбільшим попитом користуються питання історії математики, прикладні аспекти, цікавий матеріал;

- із форм роботи на уроці гуманітарії виділяють наступні: пояснення учителем нового матеріалу, лабораторні роботи, ділові ігри, виконання індивідуальних завдань з застосуванням науково-популярної літератури;

- гуманітарії надають перевагу активним колективним методам роботи. Наприклад, при розв'язанні задачі в класі віддають перевагу дискусіям, в процесі яких відбувається пошук розв'язку задачі всім класом;

- в учнів гуманітарних класів добре розвинена уява, активно проявляються емоції;

- в гуманітарних класах по складу учнів більше дівчат, фактор, який не знайшов в нашій школі поки належної уваги і врахування .

Для того, щоб це все відбити в буденній шкільній практиці ми розробили спеціальну методику, котру назвали відкритою методикою. Основними її принципами стали наступні:

- спрямування навчання на розвиток особистості учня, формування для кожного учня свого власного індивідуального стилю діяльності;

- варіативність навчання, яка передбачає різноманітність змісту, форм і методів навчання, забезпечуючи можливість вибору учням, в відповідності зі своїми індивідуальними можливостями, схильностями і інтересами, посильного навчального матеріалу, бажаних форм і методів роботи. При цьому основний зміст навчання, звичайно, не може бути вільним, добровільним чи вибірковим;

- валідність навчання, яка означає достатньо високу значимість матеріалу,

- який вивчається для досягнення результатів навчання, розв'язання задач навчання, виховання і розвитку;

- успішність навчання, під якою розуміється те, що у кожного учня повинен бути свій, нехай маленький, але власний успіх в навчанні. Успіх породжує натхнення, упевненість в своїх силах. Завдання вчителя – допомогти кожному своєму учневі досягти такого успіху;

- наявність стійкого інтересу до навчання. Інтерес являється необхідною умовою процесу навчання. Чим нижчий інтерес, тим формальніше навчання, нижчі його результати. Відсутність інтересу призводить до низької якості навчання, швидкому забуванню і навіть втраті набутих знань, умінь і навиків. Чим вищий інтерес, тим активніше йде процес навчання, вищий результат навчання;

- відкритість методичної роботи учителя. При цьому мова йде не тільки про розуміння учнями цілі навчання, але і про те, щоб учні уявляли собі чому, наприклад, вони доводять деяку теорему чи розв'язують дану задачу, або чим добре запропоноване індивідуальне завдання і т.д. Учням повинна подобатись побудова уроків, їх основні етапи, техніка проведення кожного з них. Саме в цьому сенсі ми називаємо нашу методику відкритою [24, с. 4-10].

Серед методів навчальної діяльності, які відповідають запропонованим принципам відкритої методики, були розроблені і представлені наступні: усна робота, як необхідна умова формування і розвитку діалогової культури учнів; різноманітні види дискусій на уроках стереометрії, ділових ігор, індивідуальних завдань, робота з науково-популярною літературою; лабораторні роботи з стереометрії. В курсі стереометрії для гуманітарних класів велика увага приділяється історичним аспектам, філософським і світоглядним питанням.

Велике значення приділяється наочності, яка являється одним із дидактичних принципів навчання.

З самого початку вивчення геометрії вводяться многогранники (паралелепіпед, призма, піраміда, правильні многогранники). Це дозволяє, з однієї сторони, проілюструвати на многогранниках властивості паралельності і перпендикулярності, а з другої – поступово формувати вміння учнів із знаходження геометричних величин, відстаней, кутів [13, с.14].

Пропонуються різні способи виготовлення моделей многогранників із розгорток і геометричного конструктора. Моделювання многогранників сприяє розвитку у школярів просторових уявлень, конструкторських раціоналізаторських здібностей, формуванню поняття математичної моделі, розкриттю прикладних можливостей геометрії, вихованню естетичних почуттів.

Саморобні моделі являються засобом конкретної наочності – першої стадії, котра веде до абстрактної наочності – кресленню. Моделі можуть бути використані учителем для ілюстрації нових понять, доведень теорем, розв’язків задач. Красиво зроблені моделі являються прикрасою будь-якого кабінету математики, робочого куточка школярів.

Розвиток просторових уявлень учнів передбачає вміння правильно зображати основні геометричні фігури і досліджувати їх взаємне розташування. Саме від цього в багато чому залежить успіх вивчення геометрії. Тому багато уваги приділяється питанням зображення просторових фігур. Попри зображення просторових фігур в паралельній проекції, розглядаються методи зображення просторових фігур в ортогональній і центральній проекціях, наводять приклади таких зображень (зображення прямокутного паралелепіпеда і сфери в ортогональній проекції, зображення куба в центральній проекції та ін.).

Включення в курс геометрії різноманітного матеріалу, який враховує інтереси кожного школяра, сприяє підвищенню інтересу і бажання учнів займатися геометрією. Спираючись на цей інтерес і бажання, можна подолати і відомі труднощі навчання [30,с. 115-116].

1.4. Аналіз програми з математики для учнів старших класів шкіл (класів) гуманітарного спрямування

Перехід до профільного навчання у старших класах створив зовсім нову, багато в чому унікальну ситуацію для шкільної математики. Математична, як і будь-яка інша освіта, була універсальною, однаковою, стандартною. Навчання не орієнтувалося на учня, учень пристосовувався до «прокрустового ложа» програм. Математику тихо боялися і вимушено поважали.

Постійно зростаючий обсяг інформації, її багатопрофільність привели до того, що ні в кого не викликає сумніву теза про неможливість знати і вміти все. Таким чином, найбільш цінним стало вміння досягти мети через суміжні знання, шукати і знаходити розв’язання. А одним з головних якостей особистості учня стає його готовність до самостійної діяльності зі збору, обробки, аналізу та організації інформації, вміння приймати рішення і доводити їх до виконання. Відповідно, змінюються і завдання вчителя. Тепер він повинен бути не тільки і не стільки джерелом інформації, що дає знання, але й організатором самоосвіти учнів, спонукає до творчого пошуку.

У класах філологічного, суспільно-гуманітарного, технологічного, спортивного, художньо-естетичного профілів вивчається інтегрований курс «Математика».

Розгляд теми «Координати і вектори» в 11-му класі дозволить повторити навчальний матеріал із стереометрії 10-го класу і застосувати новий підхід до вивчення прямих і площин у просторі. Окремим завданням вивчення теми «Координати і вектори» є узагальнення векторного і координатного методів у випадку простору[12, с.19-20].

У темі «Геометричні тіла. Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл» розглядаються основні види геометричних тіл та їхні властивості. Вона є центральною у стереометричній підготовці учнів. При вивченні даної теми дуже важливим є підхід, що передбачає формування навичок конструювання і класифікації тіл та їх поверхонь. Такий підхід вимагає використання конструктивних означень. Конструктивні означення дозволяють встановити спільність між призмами і циліндрами, пірамідами та конусами. Паралельне розглядання зазначених груп тіл дає перевагу при вивченні їхніх властивостей.[2, с. 14-16]

У процесі вивчення теми мають бути розглянуті різні методи обчислення об'ємів і площ поверхонь. Особливу увагу необхідно приділити методу розбиття, який має велике практичне значення. Використання аналогії між вимірюваннями площ плоских фігур і об'ємів сприятиме засвоєнню матеріалу учнями. При вивченні площ поверхонь тіл доцільно широко користуватися природною та важливою з практичної точки зору ідеєю розгортки [9].

У навчальній програмі зазначається також, що обов'язковим елементом навчання має стати індивідуальне завдання з теми. Його варто пропонувати на завершальному етапі вивчення теми для самостійного опрацювання після всіх контролюючих заходів. Мета завдання — охопити матеріал теми в цілому, привернути увагу до головного, дати додаткові приклади і пояснення окремих складних моментів, підкреслити особливості й тонкощі, переконати учнів у можливості розв'язання задач основних типів. Індивідуальні завдання перевіряються, оцінюються вчителем та захищаються учнем [9, с.11-16].

З усього вище викладеного розглянемо спосіб організації навчання стереометрії таким чином, щоб максимально виконати описані в нормативних документах вимоги щодо викладання математики в старшій школі (старших класах) гуманітарного профілю.

Розділ 2
Методика навчання учнів гуманітарного профілю розв’язуванню стереометричних задач

2.1.Стереометричні задачі та їх класифікація

Одним з основних засобів досягнення високого рівня творчої діяльності учнів є розв’язання геометричних, в тому числі й стереометричних, задач. «Мистецтво розв’язувати геометричні задачі» нагадує чимось трюки ілюзіоніста – іноді, навіть знаючи розв’язок задачі, важко зрозуміти, як можна було до нього додуматись [27, с. 254]. Цьому мистецтву потрібно навчати.

Які задачі називають стереометричними? Найчастіше такі, в яких ідеться про неплоскі фігури. Але це не зовсім правильно. Важливо не тільки те, які фігури згадуються в задачі, а й у якому просторі їх розглядають. Ось одна з таких задач.

Задача 1. Доведіть, що точки $A(2; 4; -4)$; $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$, D $(-1; 3; 4)$ є вершинами паралелограма.

Тут ідеться про точки і паралелограм, тобто про плоскі фігури, але в тривимірному просторі. Тому цю задачу слід вважати стереометричною.

Задача 2. На розгортці тетраедра побудуйте точки, у яких вписана в цей тетраедр куля дотикалася б до його граней.

Розгортка тетраедра — фігура плоска. Але, щоб розв'язати цю задачу, треба спочатку побудувати або уявити тетраедр із вписаною кулею, дослідити, як розміщені точки дотику. Знань лише з планіметрії для розв'язування задачі недостатньо. Тому ця задача стереометрична [27, с. 255].

Отже, стереометричними задачами називатимемо геометричні задачі, в яких ідеться про фігури тривимірного простору.

Будь-яка задача з стереометрії побудована так, що в ній за даними елементами потрібно знайти інші (шукані) елементи геометричного тіла, які перебувають між собою та даними елементами в певних співвідношеннях, або визначити розміри окремих елементів.

У стереометричних задачах різних типів – на обчислення, доведення, побудову чи дослідження терміни «знайти», «шукані» мають конкретний зміст, який слід добре зрозуміти [14, с. 2-6].

Основні задачі, які пропонуються при вивченні курсу стереометрії, можуть бути розбиті на наступні групи:

- визначення кута: між прямими, між прямою і площиною, між площинами;
- визначення відстані: від точки до прямої, від точки до площини, між прямими, між прямою і площиною, між площинами;
- обчислення площ перетинів і площ поверхонь (як багатогранників, так і тіл обертання);
- обчислення об'ємів геометричних тіл і їх частин.
- комбінація геометричних тіл: двох багатогранників, двох тіл обертання, багатогранника і тіла обертання [3, с.110-111].

Слід зазначити, що серед перерахованих розділів є один, який не може бути віднесений до базового рівня, а саме «Комбінація геометричних тіл», так як для розв’язання завдань в рамках даного розділу необхідно наявність вже сформованого алгоритмічного апарата.

Залежно від вимог, які ставляться в стереометричній задачі, розрізняють задачі на обчислення, на побудову, на доведення і на дослідження.

Вимоги задач на обчислення формулюють найчастіше словами «обчисліть», «визначте», «знайдіть» тощо. Ці задачі найпоширеніші. Не менш половини всіх стереометричних задач, які розв'язують в школі, — на обчислення.

Під задачею на обчислення розуміють таку задачу, в якій вимагається дані про стереометричне тіло довести до встановлення числового результату.

Задача на обчислення характеризується вимогою встановити дані про невідомий елемент геометричної фігури за допомогою суто геометричних викладок з використанням алгебраїчних залежностей.

Задача на обчислення з числовими даними є окремим випадком задачі з параметричними даними, тому часто виникає потреба розглядати саме їх. Вважається усталеною думка про те, що в розв'язування стереометричної задачі на обчислення з параметричними даними повинно увійти дослідження області існування геометричного тіла. Також стверджується, що розв'язування стереометричної задачі на обчислення з параметром зводиться до задання функції-формули, яка показує, які операції і в якому порядку потрібно виконати, щоб знайти розмір шуканого елементу [1, с.21-23].

Задача 3. Довжина сторони основи правильної трикутної піраміди дорівнює а, двогранний кут при основі дорівнює α. Обчисліть об'єм піраміди.

Будемо вважати, що нам дано (або вона існує) правильну трикутну піраміду із стороною а та двогранним кутом при основі α. Треба обчислити об'єм цієї піраміди.

Виходитимемо з того, що коли дано правильну трикутну піраміду із стороною а та двогранним кутом при основі α, то її висота $\frac{1}{6}a\sqrt{3}tg(\alpha)$, а об'єм - $\frac{1}{24}a^3tg(\alpha)$.

Вираз для знаходження об'єму піраміди є функцією від параметрів а і α, знаходження якої становить мету розв'язування задачі. Стереометричну задачу можна вважати розв'язаною лише тоді, коли, крім шуканої величини, встановлено необхідні і достатні умови існування тіла, про яке йдеться в умові задачі. Для розглянутої задачі необхідними умовами будуть а>0, 0°<α<90°. Щоб переконатись, що вони будуть достатніми, досить довести можливість побудови правильної трикутної піраміди дорівнює з стороною основи а, і двогранний кут при основі дорівнює α, де а>0, 0°<α<90°.

Задачі на обчислення бувають абстрактні й прикладні. Стереометричну задачу вважають абстрактною, якщо в ній ідеться про абстрактні геометричні фігури та їх відношення. Прикладними називають задачі про реальні, матеріальні об'єкти та зв'язки між ними.

До стереометричних задач на побудову традиційно відносять задачі, у яких вимагається в тривимірному просторі побудувати фігуру з певними властивостями.

До таких задач належать: задачі на уявлювані побудови, задачі на проекційних малюнках і задачі на моделях.

Під час розв'язування задач першого типу побудови за допомогою інструментів не виконують, а тільки пояснюють, спираючись на аксіоми і наслідки з них, що і в якій послідовності «будують».

Задача 4. Через точку, яку дано поза прямою, проведіть площину, перпендикулярну до цієї прямої.

Це — задача на уявлювану побудову. А ось задача іншого типу.

Задача 5. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини трьох попарно мимобіжних його ребер.

Мається на увазі, що на проекційному малюнку зображено куб і на ньому позначено три дані точки. Таку побудову можна виконати за допомогою креслярських інструментів [27, с.289].

Загальна схема розв’язування задач на побудову з стереометрії складається із чотирьох частин, як і для задач з планіметрії: аналіз, побудова, доведення, дослідження.

Задача на доведення у стереометрії характеризується вимогою обґрунтувати певне математичне твердження, сформульоване в її умові. Розв’язати таку задачу означає вивести твердження задачі з аксіом та раніше доведених теорем чи наслідків з них. Стереометричні задачі на доведення є двох типів: такі, під час розв’язування яких припускають, що описані в їх умовах геометричні тіла існують; такі, факт існування геометричних тіл, про які йдеться в умові, ще треба довести.

Задача 6. Доведіть, що в правильній трикутній піраміді протилежні ребра взаємно перпендикулярні.

Умову задачі можна переформулювати, наприклад: «Якщо дано (вона існує) правильну трикутну піраміду, то в ній протилежні ребра взаємно перпендикулярні».Як правило, у даному випадку доведення достатності знайдених умов існування геометричного тіла не вимагається.

Задача 7. Доведіть, що існує призма, відмінна від куба, і така, що в неї всі грані рівні між собою.

У ході розв’язання виникає потреба дослідити існування математичного об’єкта, описаного в умові. Результати такого дослідження можуть суттєво впливати як на хід розв’язування задачі, так і на вираз у відповіді [31, с.279].

Задачею на дослідження називатимемо кожну задачу, в якій вимагається що-небудь дослідити. Для них характерні вимоги «дослідіть», «порівняйте», «з'ясуйте» або запитання «чи існує?», «за якої умови?», «чи правильно?», «як зміниться?», «чи залежить?» тощо. Наприклад, чи існує призма, що має 200 ребер?

Одним з видів задач на дослідження є задачі на знаходження геометричних місць точок.

В навчальній практиці розрізняють прості й складні, легкі й важкі задачі. Слід також розрізняти «складність задачі» і «складність її формулювання».

Крім названих вище, розглядають і такі види стереометричних задач: тренувальні, стандартні, шаблонні, пошукові, конкурсні, практичні, історичні, проблемні,навчальні і т. д. Самі назви розкривають особливості кожного з цих видів, хоч загальновживаними їх вважати не можна.

Усі задачі, які використовують і які можна використовувати в навчальному процесі, називають навчальними [29, с. 155].

2.2. Усні стереометричні задачі як засіб розвитку просторового мислення учнів

Особливості змісту програми по стереометрії спричиняються необхідність удосконалювання традиційних форм і методів навчання для того, щоб забезпечити високу якість засвоєння учнями програмного матеріалу.

Особливе місце при цьому займає проблема розвитку просторових уявлень, просторової уяви й просторового мислення учнів. Термін, «просторове мислення» у методиці математики чомусь практично ігнорується. Звичайно прийнято говорити про просторові подання й просторову уяву, а просторове мислення виступає при цьому якщо не їхньою підмножиною, то, принаймні. синонімом (найчастіше відбувається ототожнення просторової уяви й мислення). Таке ототожнення неправомірно, оскільки уява й мислення, різні процеси.

У сучасній психології уява розуміється як «необхідний елемент творчої діяльності людини, що виражається в побудові образа продуктів праці, а також забезпечує створення програми поведінки в тих випадках, коли проблемна ситуація характеризується невизначеністю», а мислення – як «соціально-обумовлений, нерозривно пов'язаний з мовою психічний процес пошуків і відкриття істотного нового, процес опосередкованого й узагальненого відбиття дійсності в ході її аналізу й синтезу. Мислення виникає на основі практичної діяльності з почуттєвого пізнання й далеко виходить за його межі»[29, с. 344].

Випереджальне відбиття дійсності, здійснюване в процесах уяви, відбувається в конкретнообразній формі, у вигляді яскравих подань, у той час, як випереджюче відбиття в процесах мислення відбувається шляхом оперування поняттями, що дозволяють узагальнено й опосередковано пізнавати світ.

Таким чином, на наш погляд, доцільно розрізняти просторову уява й просторове мислення, хоча ці процеси мають багато загального (наприклад, їхня проблемність, аналітико-синтетичний характер). Найчастіше важко навіть з'ясувати, який саме із цих процесів «працює» при розв’язанні тієї або іншої задачі.

Однією з особливостей мислення є його опосередкованість: мислення поза мовою не існує й не може розвиватися без розвитку мови. Інша найважливіша особливість процесів, мислення – його проблемність.

Виходячи з цих особливостей, ми вважаємо за необхідне включення усних стереометричних задач у систему вправ по розвитку просторового мислення учнів. Розв’язання задачі відповідає проблемній спрямованості мислення, а усна форма розв’язання сприяє розвитку мови учнів, розвиває в такий спосіб їхнє мислення. Відзначимо також, що усне мовлення по своїй природі найбільш близька до внутрішньої мови, у якій формується й існує думка.

Зрозуміло, усне розв’язання задач не може повністю замінити письмове й не повинне йому протиставлятися. Необхідно розумне сполучення обох форм розв’язання, що буде сприяти більше ефективному розвитку просторового мислення учнів.

Усне розв’язання стереометричних задач може здійснюватися;

а) без наочної опори;

б) з опорою на наочність.

Таке ділення трохи умовно, оскільки необхідність застосування наочних опор багато в чому залежить від ступеня підготовки учнів [23, с.18].

2.2.1. Усні вправи без наочної опори

З розвитком просторового мислення учнів тісно зв'язане використання усних стереометричних задач практичного характеру. Ми маємо на увазі, насамперед, групу задач-ілюстрацій до аксіом і теорем. У них потрібно (посилаючись на вивчений матеріал) пояснити, чому має місце той або інший факт.

1) Чому мотоцикл із коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоциклу без коляски потрібна додаткова опора?

2) Чому штатив фотоапарата стоїть стійко завжди, а стілець на чотирьох ніжках – не завжди?

3) Чому листи жерсті зшивають по прямих, перпендикулярним до гребеня даху?

В іншій групі задач учні самі повинні відшукати ілюстрацію до тої або іншої теореми.

а) Як використовується ознака паралельності площин при установці геодезичних інструментів?

б) Як використовується ознака перпендикулярності площин при перевірці вертикальності кладки стін?

У третій групі задач учнів повідомляють про прийоми виконання окремих видів робіт що зустрічаються на практиці, вимірів й обчислень. Учні встановлюють, чи правильний розглядуваний прийом, порівнюють його з викладеним у підручнику; якщо прийом неточний, установлюють його точність, допустимість застосування й т. д.

Всі ці задачі розвивають просторове мислення учнів, підготовлюють їх до майбутньої трудової діяльності.

Корисні для розвитку просторового мислення задачі, розв’язання яких припускає кілька відповідей. Тут, на перший план виступає аналіз різних можливих випадків.

Наприклад. 1) Скільки площин можуть визначати чотири різні точки простору?

2) Чи завжди існує пряма, паралельна одночасно двом даним площинам?

3) Скільки площин можна провести через дану точку паралельно даній прямій [4, с.11-14]?

Усне розв’язання стереометричних задач без опори на наочність припускає, що або дана геометрична конфігурація легко уявляється без креслення, або задача розв'язується на понятійному рівні й образні подання відіграють другорядну роль.

Приведемо приклади таких задач.

1) Чи існує багатогранник, у якого рівно сім ребер?

Якби всієї грані багатогранника були трикутниками, то число ребер ділилося б на 3. Отже, не всі грані трикутники. Якщо ж одна грань має *К* ребер (більше 3), то загальне число ребер не може бути менш *2К*, тобто більше 7. Отже, такого багатогранника не існує.

2) Що можна сказати про призму, у якої діагоналі всіх бічних граней конгруентні?

3) Чи існує правильна шестикутна піраміда, всі бічні грані якої правильні трикутники?

4) Площа основи й площа бічної грані правильної чотирикутної піраміди рівні по 64 см^2. Знайти довжину апофеми.

Усні задачі не слід вважати обов'язково легкими задачами. Мається на увазі, що розв'язання проходить без письмового оформлення й не містить складних викладень. При цьому усне розв'язання не означає що воно не має доведення. Всі необхідні міркування, обґрунтування проводяться так само, як і при письмовому розв'язуванні задач [29, с.360].

2.2.2. Усні вправи з опорою на наочність

Наочною опорою може служити як модель геометричної фігури, так й її креслення. Креслення виконується або по ходу розв'язання задачі, або готується заздалегідь.

У нашій практиці усне розв'язання задач по готових кресленнях виступало в декількох варіантах.

1)Умова задачі прочитана. Відповідь потрібно знайти саме на кресленні.

Наприклад, визначити, яким ребрам правильної чотирикутної піраміди *MABCD* або діагоналям основи паралельна пряма, що проходить через середини ребер: а) MA й MB? б) MA й MC? в) MA й AB?

2)Умова задачі доповнена кресленням.

Наприклад, $MABCDEF$ – правильна шестикутна піраміда. Чи можуть перетин MAD й одна з бічних граней виявитися а) конгруентними? б) рівновеликими?

Розв'язання цієї задачі набагато полегшується, якщо на кресленні зображені апофеми й висота піраміди.

3)Умова задачі повністю не формулюється.

Наприклад. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти кут між (AD_1) і (DC_1).

Так як умова в цьому випадку повністю не сформульована, то учні повинні велику увагу приділити аналізу просторових відносин між елементами даної фігури.

4) Креслення, містить план розв'язання або вказівки, що допомагають скласти такий план.

Такими вказівками можуть служити виділені на кресленні тим або іншим способом відрізки, кути, трикутники й т.п. Являє собою інтерес так називана «колірна підказка»

Наприклад. Дано квадрат $ABCD$. CK – відрізок перпендикулярний до площини квадрата; кінець його з'єднаний відрізками прямих з вершинами A і B. Довести, що трикутник KAB прямокутний.

Елементами, що підказують, тут можуть бути виділені одним кольорами кути ABC і BCK, і позначені іншими кольорами відрізки AB і KB (суцільна лінія) і відрізок BC (пунктирна лінія). Таке виділення елементів креслення дозволяє сконцентрувати увага на певній групі елементів даної фігури, стимулює учнів до пошуку тих просторових відносин, які мають тут місце.

Залежно від складу учнів, ступеня їхньої підготовки «підказуючих» елементів може бути більше або менше. Тут дуже зручне демонстрування креслень із кодопозитиву прямо на дошку, що дає можливість додаткових зображень на дошці кольоровими крейдами (або сполучення двох або декількох кодопозитивів).

5) По даному кресленню необхідно проаналізувати дану геометричну конфігурацію

Наприклад, даний рівнобедрений прямокутний трикутник *ABC*. $\angle A$ = 90° град. *AM* – відрізок перпендикулярний до площини трикутника. Точка *D* – середина (*BC*). Проведено відрізки *MB*, *MD*, *MC*, *AD*. Охарактеризувати отриману фігуру.

У цій задачі учням необхідно встановити якнайбільше залежностей між елементами даної фігури, знайти конгруентні відрізки, кути, трикутники, вказати можливість знаходження величин тих або інших елементів при різних варіаціях заданих величин (наприклад, знаючи величини відрізків *AC* й *AM* скласти план знаходження величин інших елементів даної конфігурації).

Задачі такого типу, активізуючи аналітико-синтетичну діяльність мозку, сприяють розвитку просторового мислення учнів.

Розвивають просторове мислення учнів і задачі на знаходження множин точок, що володіють зазначеними властивостями. При цьому необхідно привчати учнів давати мотивовані відповіді, досліджуючи всі можливі випадки. У міру необхідності може бути виконане у ході розв’язання відповідне схематичне креслення.

Нехай, наприклад, необхідно знайти множину всіх точок, що належать даній площині *b* і рівновіддалених від даних точок *A* і *B*.

Відповідь: «Шукана множина точок є пряма, по якій площина симетричні точок *A* і *B* перетинає площину *b*», – є недостатнім, оскільки він справедливий тільки для випадку, коли пряма АВ не перпендикулярна до площини, *b*.

Якщо ж (*AB*) || *b*, то може мати місце один із двох випадків:

1) точки A і B симетричні щодо площини *b*.

2) точки A і B не симетричні щодо площини *b*.

У першому випадку шуканою множиною є вся площина *b*, а в, другому – шукана множина порожня.

Як видно з швидкого огляду, усне розв’язання стереометричних задач може застосовуватися для розвитку просторового мислення учнів у різних формах.

Було б помилкою протиставляти усне розв’язання стереометричних задач іншим формам роботи з розвитку просторового мислення учнів. Тільки в сполученні з іншими формами роботи усне розв’язання стереометричних задач дасть належний ефект [29, с. 124].

2.3. Методи розв’язання стереометричних задач

Способи розв’язування і прийоми, що застосовуються при розв’язуванні стереометричних задач на обчислення, досить різноманітні. Усіх їх вказати неможливо, та в цьому немає потреби. Більш того, було б шкідливо, коли б усяку задачу із стереометрії учні намагалися підвести під якийсь шаблон. Але ясне й чітке з’ясування учням основних, найбільш уживаних способів і прийомів розв’язування стереометричних задач дуже допомагає їм в опануванні потрібного навчального матеріалу. Набуті знання розширюють кругозір учнів, дають їм можливість легко орієнтуватися у складних задачах і розчленовувати їх на простіші.

Озброєння учнів методами і способами розв’язування задач, навчання їх самостійному пошуку розв’язків задач – одна із важливих проблем шкільного математичного навчання. Методи і способи розв’язування задач визначаються як характером самих задач, так і тими засобами, якими володіють учні на даному етапі навчання. Коли говорять про методи чи способи розв’язування задач, то мають на увазі деякі передумови, вказівки про способи дій людини, які варто виконати, щоб розв’язати певну задачу. Для більшості стандартних задач шкільного курсу можна сформулювати алгоритми їх розв’язку. Значного ефекту в навчання розв’язувати задачі можна досягнути за умови, що вчитель не повідомляє учням готових алгоритмів розв’язку, а на прикладі однієї-двох задач-моделей організовує їх діяльність на самостійний чи колективний пошук алгоритму розв’язку і його формулювання [11, с. 121-126].

2.3.1. Алгебраїчний метод

Методи розв’язування стереометричних задач, в яких застосовуються теореми й ознаки елементарної евклідової геометрії, часто називають традиційними. До традиційних методів розв'язування стереометричних задач слід віднести також методи геометричних місць, подібності або рівності і алгебраїчний метод.

При розв’язуванні стереометричних задач на обчислення алгебраїчний метод (метод безпосереднього обчислення) найчастіше здійснюється так: знаходять таку фігуру (найчастіше трикутник), в якій є достатня кількість даних для знаходження інших її елементів. Далі, розглядають ряд інших прилеглих до неї фігур (теж найчастіше трикутники) так, щоб в результаті послідовного визначення певних елементів цих фігур можна було знайти шукану величину.

Задача 8. Висота трикутної піраміди DABC, опущена з вершини D, проходить через точку перетину висот трикутника *ABC.* Окрім того, відомо,

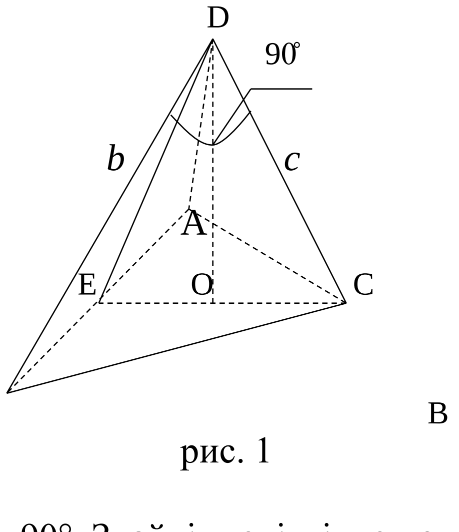

рис. 1

DB = b, DC = c, ∠BDC = 90°. Знайдіть співвідношення площ граней ADB і ADC.

За умовою висота *DO* піраміди проходить через точку перетину висот основи. Тому, з'єднавши точку О з вершиною С і продовживши до перетину з АВ, отримаємо відрізок СЕ, що є висотою трикутника АВС, опущеною на сторону АВ (рис. 1.). Пряма АВ перпендикулярна до *DO* і *EC,* отже, прямі *AB* і *CD* теж перпендикулярні один одній. Таким чином, пряма *CD* перпендикулярна до двох прямих *BD* і *AB* площини *ABD,* а тому перпендикулярна до прямої AD. Ми довели, що кут *ADC* прямий. Аналогічно можна довести, що прямі *BD* і *AD* теж перпендикулярні.

Тепер неважко відповісти на питання задачі: площа трикутника ADB дорівнює ½b*AD,* а площа трикутника *ADC* становить *½cAD.* Співвідношення площ рівне співвідношенню нерівних катетів, тобто b/c [11, с.134].

2.3.2. Метод введення допоміжного елемента

Якщо в процесі розв’язання задачі не вдається безпосередньо пов’язати дані та шукані величини, то користуються прийомом введення допоміжного елемента. Ним може слугувати відрізок, кут, площа, об’єм.

Під час розв’язання задачі може трапитись два випадки: а) допоміжний елемент доводиться знаходити (обчислювати); б) він не вимагає знаходження числової величини.

Розв’язання таких задач введенням допоміжного відрізка зводиться до складання рівняння знаходження одного з невідомих відрізків (допоміжних відрізків), величину знаходять за допомогою знайденого відрізка.

При складанні рівнянь слід користуватися прикладами:

1) Слід знайти такий відрізок (або два рівних між собою), які можна виразити двома різними способами через введений відрізок та дані величини і порівняти ці вирази. Таким відрізком може бути і один з двох відрізків.

2) Якщо не вдається першим способом, то слід шукати геометричні зв’язки між елементами фігури (подібність, відрізок, що дорівнюють сумі або різниці двох даних відрізків, і т.д.) і у співвідношення, що дається цим зв’язком, підставити величини, виражені через ведений відрізок, дані

величини.

Задача 9. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α, а висота h. Знайдіть об’єм піраміди.

Нехай SABCD – зображення даної піраміди (рис. 2).

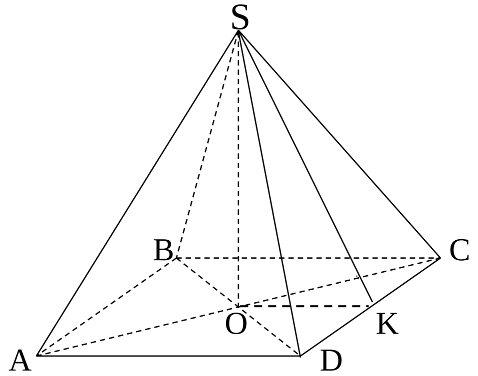

рис.2

За умовою задачі: SO=h; ∠CSD=α. Об’єм піраміди обчислимо за формулою $V = \frac{1}{3}DC^2 \cdot SO$.

Побудуємо $OK \perp DC$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $SK \perp DC$. Введемо допоміжний $\angle SKO = x$, де $0^o < x < 90°$. Знайдемо SK з прямокутних трикутників SKO і SKD. Отримаємо $SK = \frac{OK}{\cos x}$, $SK = \frac{DK}{tg\frac{\alpha}{2}}$. Оскільки OK=DK, тому $\cos x = tg\frac{\alpha}{2}$. Тоді $tgx = \frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. З прямокутного трикутника SOK: $OK = \frac{h}{tg\,x} = \frac{h \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$ $DC = 2OK = \frac{2h \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$, $V = \frac{4}{3}\frac{h^3 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Очевидно, задача має розв’язки при h>0, $0^o < \alpha < 90°$.

Задача 10. В основі піраміди лежить трикутник з кутами α і β і площею *S*.

Всі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут φ. Знайти площу поверхні сфери, описаної навколо піраміди.

Провівши аналіз задачі, учні розв’язують узагальнену задачу, а потім в результат підставляють значення даної задачі.

Нехай *SABC* — дана піраміда (рис. 3), основа якої є ΔABC, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $S_{\Delta ABC} = S$. *SO* — висота піраміди. За умовою $ASO = BSO = CSO = \varphi$.

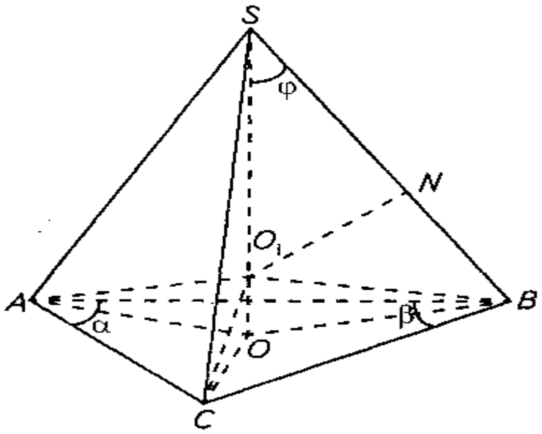

рис.3

Нехай O_1 — центр сфери, описаної навколо піраміди.

$S_{сф}=4\pi R^2$, де $R=O_1S$ — її радіус. Позначимо $R=x$.

З точки O_1 проведемо $O_1N \perp SB$. З ΔO_1SN $SB=2SN=2x\cos\varphi$.

З Δ SOB: $OB=SB\sin\varphi=2x\cos\varphi*\sin\varphi=x\sin 2\varphi$.

З ΔABC за наслідком з теореми синусів $\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\alpha}=2\ OB=2x\sin 2\varphi$,

$AC=2x\sin 2\varphi*\sin\beta$, $BC=2x\sin 2\varphi*\sin\alpha$.

Тоді:

$$S_{\Delta ABC}=S=\frac{1}{2}AC*BC*\sin(180^0-\alpha-\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}*2x\sin 2\varphi*\sin\beta*2x*\sin 2\varphi*\sin(\alpha+\beta)=$$

$$=2x^2sin^2 2\varphi*\sin\alpha*\sin\beta*\sin(\alpha+\beta)$$

Звідси $x^2=\frac{S}{2sin^2 2\varphi*\sin\alpha*\sin\beta*\sin(\alpha+\beta)}$.

Отже, $S_{\text{сф.}}=4\pi R^2=\frac{2\pi S}{sin^2 2\varphi*\sin\alpha*\sin\beta*\sin(\alpha+\beta)}$.

Підставимо в знайдений результат числові значення кутів і площі, отримаємо:

$$S_{\text{сф.}}=\frac{2\pi S}{sin^2 2\varphi*\sin\alpha*\sin\beta*\sin(\alpha+\beta)}=\frac{50\pi}{1*\frac{1}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*1}=\frac{50*4*\pi}{\sqrt{2}}=100\sqrt{2}\pi\ (\text{см}^2).$$

Тут потрібно наголосити, ми розв'язували узагальнену задачу, а потім уже конкретизовану. Тому, що на практиці при розв'язувані задач високого рівня простіше розв’язати узагальнену задачу, а потім в отриманий результат підставити конкретні значення.

Розв’язуючи геометричні задачі, іноді зручно використовувати так званий метод введення допоміжного кута.

Суть цього методу полягає в тому, що шукані лінійні елементи виражають спочатку через лінійні елементи і тригонометричні функції допоміжного (невідомого) кута, а потім тригонометричні функції допоміжного кута або виключають (наприклад, виражають через тригонометричні функції відомих кутів), або обчислюють їх значення.

Задача 11. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює *a,* а плоский кут при вершині піраміди α. Визначити радіус кулі, вписаної в дану піраміду(рис. 4).

Центр O_1 кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду SABCD, є точкою перетину висоти SO піраміди з бісектрисою O_1F лінійного кута двогранного кута, утвореного бічною гранню і основою піраміди.

Невідомий радіус OO_1 вписаної кулі можна визначити з прямокутного трикутника

OO_1F, в якому $OF = |\frac{\alpha}{2}|$. Кути трикутника OO_1F невідомі, а тому один з них, наприклад $\angle SOF$, можна взяти за допоміжний і позначити його через φ.

Тоді $O_1FO = |\frac{\varphi}{2}|$; з ΔOOF_1 маємо $|O_1O| = \frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\varphi}{2}$.

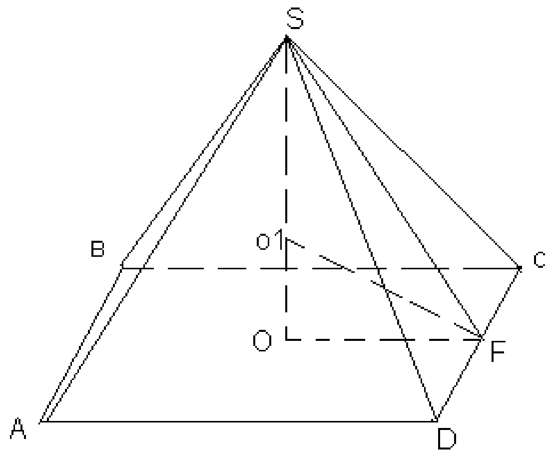

рис. 4.

Щоб розв'язати задачу до кінця, треба виразити $tg\frac{\varphi}{2}$ через тригонометричні функції кута *a*.

Відомо,що

$$\sqrt{tg\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}}\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)}\,(0° < \varphi < 90°),$$ лишається

cosφ виразити через функції кута α; з ΔSOF маємо cosφ=$\frac{|OF|}{|SF|}$

З ΔSCF маємо $tg\frac{\varphi}{2}=\frac{|CF|}{|SF|}$, але |CF|=|OF|, то cos φ= $tg\frac{\varphi}{2}$.

Остаточно маємо:

$$|OO_1| = \frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)} = \frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{(1-tg\frac{\varphi}{2})/(1+tg\frac{\varphi}{2})} = \frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}$$

Отже, в цій задачі за допоміжний доцільно було взяти лінійний кут двогранного кута при основі правильної піраміди.

Дослідимо даний розв'язок.

Очевидно, що *a* >0. Крім цього, за властивістю плоских кутів многогранного кута при вершині S даної піраміди 0<4α<2π, тому 0< $\frac{\alpha}{2}$ < $\frac{\pi}{4}$, отже,

$tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$ >0.

При *a >0, і 0*< α < $\frac{\alpha}{2}$ радіус OO1 виражається додатнім числом.

Відповідь. |OO1|= $\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}$, де 0< $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$.

2.3.3. Метод заміни одного геометричного тіла іншим

Суть методу заміни даного геометричного тіла іншим полягає в тому, що шукану величину знаходять з іншого геометричного тіла, яким заміняють дане.

Проілюструємо даний метод за допомогою наступної задачі.

Задача 12. Довжина ребра правильного тетраедра дорівнює а. Знайдіть радіус кулі, яка дотикається всіх його ребер.

Замінимо тетраедр кубом, у якого діагоналі граней – ребра даного правильного тетраедра. Тоді радіуси кулі, вписаної в куб, і кулі, яка дотикається до всіх ребер тетраедра, мають однакову довжину, що дорівнює $\frac{a}{2\sqrt{2}}$.[11, с. 132]

2.3.4. Векторний метод

Оскільки багато стандартних шкільних задач розв'язуються за визначеними правилами, то озброївши школярів навчальними алгоритмами розв'язування таких задач – найбільш ефективний шлях навчити розв'язувати задачі. Але при цьому не виключається небезпека формалізму, шаблонів, нетворчого підходу учнями до розв'язання задач. Ці негативні фактори можна ослабити і навіть усунути, якщо учні будуть не лише навчатись готовим алгоритмам, але й під керівництвом вчителя самостійно знаходити алгоритми розв'язання типових стандартних задач. Алгоритмізація навчання в поєднанні з проблемним підходом допомагає прискорити вивчення програмного матеріалу і тим самим розвиває інтуїцію, творчу діяльність для розв'язання нестандартних задач.

Навчальні алгоритми стають у пригоді учням при розв'язанні зокрема геометричних задач векторним методом. Векторний метод розв'язання стереометричних задач пов'язаний з використанням властивостей векторів. Як відомо, розв'язуючи задачу векторним методом, спочатку подані в задачі співвідношення перекладають на «мову векторів», тобто записують їх відповідними векторними рівностями; потім, користуючись правилами векторної алгебри, ці векторні рівності перетворюють і, нарешті, від мови векторів знову переходять до мови геометрії. Зрозуміло, чим більше геометричних співвідношень учні можуть записати у вигляді векторних рівностей, тим ширший клас геометричних задач вони зможуть розв'язати векторним методом[11, с.133]

Так, наприклад, алгоритм векторного методу обчислення величини кута наступний:

- вибрати три не компланарні основні вектори, для яких відомі довжини (чи їх відношення) і кути між ними;
- вибрати вектори, які задають шуканий вектор, і розкласти їх за основними векторами;
- обчислити $\cos(\vec{a}, \vec{b}\,) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Задача 13. Знайти кути між діагоналлю куба і діагоналлю якої-небудь його грані.

Поставимо за ціль визначити кути за допомогою векторів. Можна скористатись формулою $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Для даної задачі (рис. 5) формула набере вигляду $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}}{|\overrightarrow{DB_1}|\cdot|\overrightarrow{DC_1}|}$,

$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{CD_1}}{|\overrightarrow{DB_1}|\cdot|\overrightarrow{CD_1}|}$.

Введемо основні вектори $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{c}$ і приймемо, що їх модулі рівні m. Виразимо вектори, кути між якими нам потрібно знайти, через основні вектори, а їх довжини через m.

$\overrightarrow{DB_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{DC_1} = \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{CD_1} = \vec{b} - \vec{c}.\ |\overrightarrow{DC_1}| = \sqrt{2}m, |\overrightarrow{DB_1}| = m\sqrt{3}.$

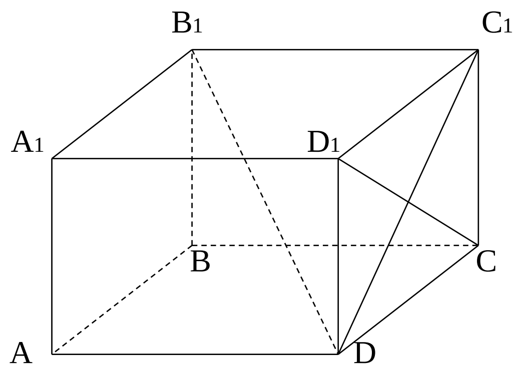

рис. 5.

Підставимо значення векторів і їх модулів в формулу для обчислення косинуса кута і отримаємо $\cos\varphi = \frac{2m^2}{m^2\sqrt{6}} \approx 0.86, \varphi = 36°$, $\cos\varphi = 0, \varphi = 90°$ [11, с.144].

2.4.Як навчити учнів розв'язувати задачі раціональним способом

Характерною рисою курсу математики є розв'язування великої кількості задач. Таке насичення курсу математики вправами допомагає, насамперед, досягненню міцності знань.

Розв'язування задач є найбільш поширеною формою поєднання теорії з практикою під час вивчення математики.

В одних випадках математичні задачі дають змогу закріпити пройдене, в інших – показують застосування певних теоретичних питань на практиці. Розв'язання задач виявляє глибину знань учнів і показує на наявні прогалини в їх підготовці, привчає учнів до послідовності й систематичності в роботі, виховує наполегливість, працьовитість, кмітливість.

Таким чином, задачі є невід'ємною складовою частиною курсу математики.

Виконання будь-якої вправи з математики незалежно від ступеня трудності завдання, вимагає пригадати і застосувати певні математичні положення. У своїй книзі «Як розв'язувати задачу» Д. Пойа вказує на чотири ступені в процесі розв'язання задачі: «По-перше ми повинні зрозуміти задачу, ми повинні бачити, що в ній є шуканим. По-друге, ми повинні побачити, чк пов'язанні один з одним різні елементи задачі, як невідоме пов'язане з відомим. Це необхідно, щоб дістати уявлення про розв'язування, щоб скласти план. По-третє, ми здійснюємо наш план. По-четверте, оглядаючись назад на одержане розв'язання, ми знову вивчаємо і аналізуємо його» [22, с. 366].

Реалізація цих вказівок є для учнів нелегким завданням. Крім вимог правильно розв'язувати (правильний план, безпомилкові перетворення й обчислення, добре виконані рисунки, пояснення, додаткові дослідження і т.д.), перед учнями ставиться вимога виконати завдання раціональним способом, тобто так, щоб обраний шлях до мети був найкоротшим, з найменшою кількістю перетворень і обчислень. За існуючими методами, якщо спосіб розв'язання нераціональний, оцінку знижують.

Іноді проти цього заперечують, посилаючись на те, що за обмежений час учні не встигають порівняти різні шляхи розв'язування. Прихильники такої теорії вважають, ніби до початку роботи не можна встановити, що обраний спосіб розв'язання нераціональний.

Таке заперечення не можна вважати серйозним. Розв'язуючи задачу нераціональним способом, учні витрачають більше часу і сил, а через це часто не встигають виконувати завдання вчасно. Труднощі відшукання раціональних способів, звичайно, є. Але з цього випливає лише необхідність систематично тренувати учнів у відборі найбільш зручних способів розв'язування, вироблення в них потрібних навичок.

Отже, мова йде про планомірне навчання учнів протягом кількох років. Без цього вони не зможуть опанувати раціональні способи розв'язування задач.

Протягом багатьох років автор дотримується певної методичної послідовності в навчанні учнів розв'язувати задачі раціональним способом.

Основні вимоги цієї роботи такі:

- Під час навчання учнів у школі від них вимагають виконувати обчислення найпростішим способом – на основі застосування законів арифметичних дій, використання формул скороченого множення та ін..
- Ознайомлюючи учнів з методами розв'язування задач з кожної теми, треба вказувати, в яких випадках певний метод слід застосувати, а в яких він виявляється нераціональним.

- Добираючи вправи до певної теми треба виділити ті з них, які можна розв'язувати особливо дотепними прийомами. Передбачаючи пропозиції учнів розв'язувати вправу звичайним способом, слід підготувати раціональний спосіб виконання вправи. Якщо таких вправ у стабільному задачнику виявиться мало, їх треба добрати з інших збірників або скласти самому.
- У процесі розв'язування задачі слід чуйно реагувати на всі можливі прийоми раціоналізації розв'язування і привчати учнів уважно ставитися до таких прийомів. Для успішного здійснення цього заходу треба відзначити всі випадки раціонального розв'язування задачі, всіляко заохочувати учнів щоразу відшукувати найкращий спосіб розв'язування вправи [21, 21-27].

Докладніше про методику роботи в цьому напрямі розкажемо нижче.

Насамперед учнів треба переконати, що не слід обирати спосіб розв'язування поспішно. Річ у тім, що очевидний шлях розв'язування, який, як кажуть, кидається в очі, далеко не завжди є найкращим.

Маючи це на увазі, іноді треба не заперечувати, коли учні пропонують розв'язувати задачу очевидним, але складним способом. Проте й після розв'язання обов'язково слід розглянути спосіб раціональний. Це справляє на учнів сильне враження, і тому час, витрачений на нераціональне розв'язання, не пропав марно.

З другого боку, автор систематично пропонував учням такі задачі, на яких зручно було демонструвати саме необхідність попередньої роботи для визначення раціонального методу розв'язування.

Пояснимо це на прикладі.

Задача.Основою піраміди є трикутник зі сторонами 15 см, 16 см і 17 см; кожне бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45°. Визначити об'єм піраміди.

Як відомо, об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі основи на висоту. Тому природним здається таке розв'язання: визначити площу основи за формулою Герона.

$$Q = \sqrt{24 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 24\sqrt{21} \text{ (см}^2\text{)}.$$

За умовою висота піраміди MO дорівнює проекції кожного бічного ребра піраміди. Отже, точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC, тобто є центром кола описаного навколо основи піраміди. Таким чином,

$$MO = H = R = \frac{abc}{4Q},$$

тобто

$$H = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{4 \cdot 24 \cdot \sqrt{21}} = \frac{85}{2\sqrt{21}} \text{ (см)}.$$

Шуканий об'єм:

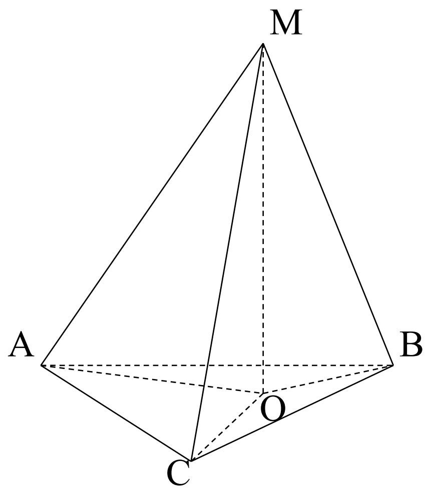

рис. 6

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2\sqrt{21}} \cdot 24\sqrt{21} = 340 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Таке розв'язування правильне, але воно громіздке і вимагає великої роботи. Справді, спробуємо розв'язати задачу в загальному вигляді.

$$V = \frac{1}{3}QH = \frac{1}{3}Q \cdot R = \frac{1}{3}Q \cdot \frac{abc}{4Q} = \frac{abc}{12}.$$

Як бачимо,обчислювати площу основи і висоту піраміди не треба. Досить визначити $V = (15 \cdot 16 \cdot 17): 12 = 340$ (см^3).

2.5. Розв’язування, розв’язки і розв’язання стереометричних задач
Розв'язування задачі

Розв'язування задачі – це процес. Можна говорити про тривалість розв'язування, про його початок, хід та кінець.

Схематично розв'язування задачі можна подати так, як показано на мал. 7. Цей малюнок відповідає випадку, коли задачу не було розв'язано з шести спроб. Розв'язаній задачі відповідає неперервний ланцюжок стрілок, які сполучають умову задачі з вимогою.

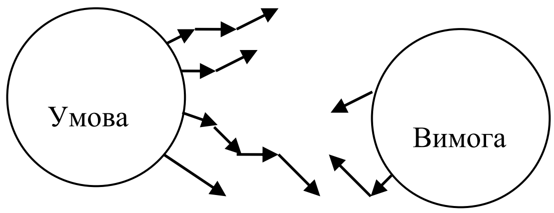

рис. 7

Починають розв'язувати задачу, звичайно, з її умови і переходять до вимоги. Коли ж це не приводить до мети, міркують у зворотному напрямі, тобто розв'язують «з кінця». Шукаючи спосіб розв'язання, можна користуватись й аналізом Евкліда [5, с.131], але на заключному етапі треба стежити, щоб усі міркування були бездоганними в логічному відношенні. Іноді задачу розчленовують на кілька частин (метод повної індукції), або використовують метод від супротивного.

Сказане стосується, звичайно, нешаблонних задач, методів розв'язування яких учні ще не знають. У школі ж часто розв'язують стереометричні задачі, які стосуються якоїсь однієї теореми або властивості, причому саме тієї, яку вивчено на даному або попередньому уроці. Наприклад, на уроці, присвяченому поверхні кулі, насамперед пропонують учням такі задачі:

1. Визначте площу поверхні кулі, радіус якої дорівнює 5 см.

2. Діаметр кулі d; визначте площу її поверхні.

3. Визначте радіус кулі, площа поверхні якої дорівнює Q.

Щоб розв'язати такі задачі, досить пригадати потрібну формулу, підставити в неї числове значення і виконати обчислення. Такі вправи неважко виконувати й усно. Схематично розв'язування можна зобразити єдиною стрілкою від умови до вимоги задачі.

Якщо задача порівняно складна, то її розв'язують письмово, записуючи в зошитах або на класній дошці формули, перетворення, обчислення і т. д. Ці записи можуть бути стислими, лаконічними або розгорнутими, з докладними поясненнями.

На уроках розв'язують задачі колективно або самостійно залежно від того, з якою метою це робиться. Якщо вчитель планує ознайомити учнів, наприклад, з новим для них методом чи прийомом, то ту саму задачу доцільно розв'язувати колективно всім класом. Якщо вчитель бажає проконтролювати, як учні засвоїли той чи інший метод розв'язання, роботу бажано організувати так, щоб кожний учень розв'язував запропоновані задачі самостійно.

Розв'язок задачі

Розв'язок – це кінцевий результат розв'язування задачі на обчислення, побудову або дослідження. Розв'язком задачі на обчислення є число (або вираз, якщо задача містить параметри). Розв'язок стереометричної задачі на побудову – деяка фігура, розв'язок задачі на дослідження – висловлення. Розв'язування задачі на доведення не зводиться до відшукання розв'язку.

Розв'язки задач бувають **правильні** і **неправильні**, **точні** і **наближені**, **загальні** і **частинні**. Нерідко розв'язок тієї самої задачі можна подати в різних формах.

Задача. У правильній чотирикутній піраміді центри вписаної і описаної куль збігаються. Визначте двогранний кут при ребрі основи піраміди.

Задачі відповідає рис. 8, на якому

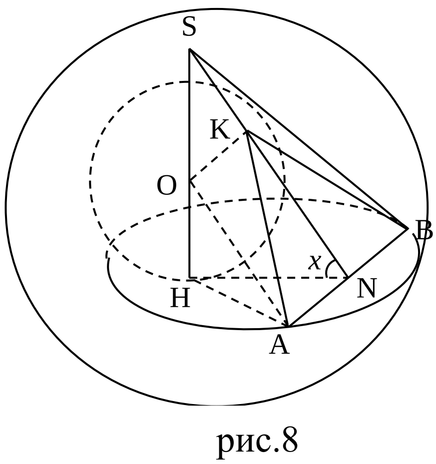

рис.8

$KO = OH$, $AO = OS$, $KS = KA = KB$,

$\angle NKA = \angle NHA = 45^0$.

Позначивши $\angle SNH = x$, матимемо:

$$\cos = \frac{NH}{NS} = \frac{NH}{NK + KA} = \frac{NH}{NH + \sqrt{2}NH} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Отже, $x = \arccos(\sqrt{2} - 1)$, або $x = \arccos 0{,}41421$.

Можна визначити величину шуканого кута в градусах і мінутах: $x \approx 65^0 32'$.

Кожний з написаних трьох розв'язків правильний. Учитель має сказати учням, який розв'язок вони повинні записати. Проте треба передбачити й інші способи розв'язування, які часто ведуть до інших за формою розв'язків. Наприклад, згадану задачу учні можуть розв'язати й інакше. Врахувавши, що $NH = NA$ і $\angle NSA = \frac{1}{2}\angle NKA = 22{,}5^0$, маємо:

$\cos x = \frac{NH}{NS} = \frac{NA}{NS} = ctg\, 22{,}5^0$, звідки $x = \arccos(tg\, 22{,}5^0)$.

Можна показати, що $tg\, x = \sqrt{2} ctg \frac{x}{2}$, тому

$tg \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$, $x = 2 arctg \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Розв'язок цієї задачі може мати й інші форми запису.

Бажано стежити, щоб учні не плутали число розв'язків задачі з числом способів, якими її розв’язано.

Розв'язання задачі

Розв'язання – це логічна конструкція з різних висловлень або висловлювальних форм, що веде до розв'язку або до обґрунтування сформульованого в задачі твердження. Розв'язання задачі може бути правильним або неправильним, обґрунтованим або необґрунтованим, повним або неповним, раціональним або нераціональним. Його дістають внаслідок розв'язування задачі. Розв'язуючи задачу, ми записуємо або тримаємо в пам'яті різні формули, теореми, їх наслідки, робимо обчислення, перетворення. Остаточно записуємо тільки ті з них, які потрібні для правильного висновку. Послідовність таких логічно пов'язаних висловлень або висловлювальних форм і становить розв'язання задачі.

Одна й та сама задача може мати кілька розв'язань (її можна розв'язати кількома способами).

Кожне розв'язання задачі, яке пропонує вчитель учням, повинно бути: безпомилковим, обґрунтованим, повним, по можливості раціональним. Розглянемо докладніше ці вимоги.

Безпомилковість розв'язання. Розв'язання задачі не повинно містити помилок. Завдання вчителя – не тільки застерігати учнів від помилок, а й використовувати допущені помилки в навчальному процесі (на помилках навчаються). Для цього треба добре знати найбільш поширені помилки, їх причини, найкращі способи виправлення.

У розв'язаннях стереометричних задач найчастіше допускають помилки алгоритмічні, логічні, графічні, мовні і помилки моделювання.

До **алгоритмічних** відноситимемо помилки в обчисленнях і перетвореннях виразів.

Логічними вважатимемо помилки в міркуваннях, що виникли внаслідок порушення законів логіки.

Графічні помилки – це помилки в малюнках, діаграмах, графіках. До них відносять і порушення ГОСТів, і неправильні проекції. Причиною графічних помилок найчастіше буває недостатньо розвинута просторова уява учнів, тому насамперед треба подбати про її поліпшення.

Із мовних помилок у розв'язаннях стереометричних задач найбільш поширені неправильне користування термінами і вживання неграмотних словосполучень.

Наприклад, учні нерідко пишуть:

«рішення задачі» замість «розв'язання задачі»,

«апофема бічної грані піраміди» замість «апофема піраміди»,

«об'єм сфери» замість «об'єм кулі»,

«пунктирна лінія» замість «штрихова лінія»,

«люба пряма», «так як» замість «довільна пряма», «оскільки» і т. ін.

Якщо, розв'язуючи стереометричну задачу, використовують не ту формулу або фігуру, яку потрібно, тобто якщо створюють модель задачі, яка не відповідає її умові, то допускають **помилку моделювання**. Причина помилок цього виду – недостатнє знання теорії.

У розв'язаннях стереометричних задач допускають помилки, які впливають на відповідь задачі, і такі, що не впливають. Але якими б помилки не були, їм треба запобігати, виправляти їх та враховувати при оцінюванні знань учнів.

Обґрунтованість розв'язання. Якщо учень на запитання задачі дасть правильну відповідь і не зробить помилок, але допустить істотні прогалини в обґрунтуванні, то таке розв'язання не можна вважати бездоганним. Розглянемо це на прикладі.

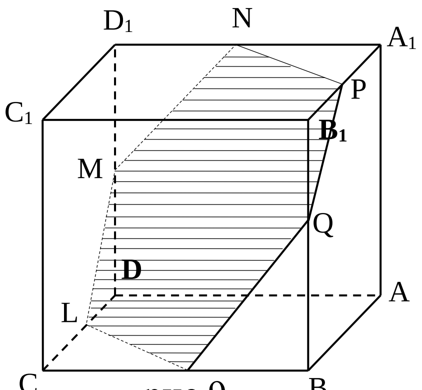

рис.9

Задача. В кубі проведено переріз площиною, яка проходить через середини двох ребер, що виходять з однієї вершини, і середини протилежних їм ребер. Визначте площу цього перерізу, якщо довжина ребра куба дорівнює a.

Побудувавши потрібний переріз (рис.9), далі міркують так.

Переріз $KLMNPQ$ – правильний шестикутник. Він складається з шести рівносторонніх трикутників.

З прямокутного трикутника KC_1L, кожний з катетів якого дорівнює $\frac{a}{2}$, маємо: $KL = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Отже, шукана площа перерізу:

$$S = 6 \cdot \frac{KL^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Відповідь правильна, але розв'язання не можна вважати обґрунтованим, оскільки не показано, що в перерізі буде правильний шестикутник.

Задача. Знайдіть геометричне місце точок простору, кожна з яких однаково віддалена від прямих, визначених сторонами даного трикутника.

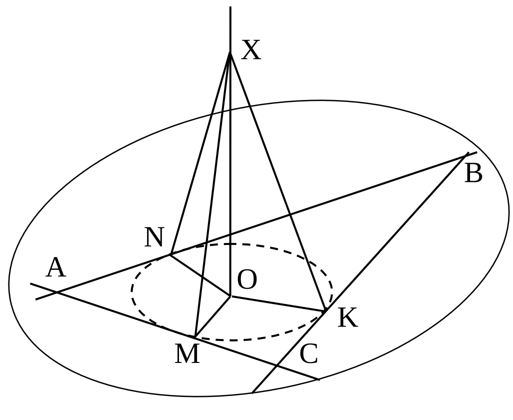

рис. 10

Часто, розв'язуючи цю задачу, учні міркують так: у площині трикутника існує одна точка, однаково віддалена від його сторін. Це – центр вписаного кола *O* (рис.10). Очевидно, що кожна точка *X* прямої, яка проходить через точку *O* перпендикулярно до площини трикутника, також рівновіддалена від трьох прямих, визначених сторонами даного трикутника. Справді, якщо проекції *OM*, *OK*, *ON* похилих *XM*, *XK*, *XN* рівні, то рівні й похилі.

Отже, шуканим геометричним місцем точок є пряма, яка перпендикулярна до площини даного трикутника і проходить через центр вписаного кола.

Це розв'язання задачі має деяке доведення, але воно не достатнє для формулювання відповіді. Те, що кожна точка прямої *XO* задовольняє умову задачі, доведено, а що не існує інших точок – ні. Цього й не можна довести, бо такі точки існують. Шукане геометричне місце точок складається з чотирьох прямих, перпендикулярних до площини даного трикутника. Одна з них проходить через центр кола, вписаного в даний трикутник, а три – через центри зовні вписаних кіл.

З обґрунтованістю розв'язання задачі тісно пов'язане питання про правомірність використання учнями теорем і формул, які в школі не вивчаються Припустимо, що учень, розв'язуючи задачу, використав теорему Гульдіна, формулу Сімпсона або властивості векторів, які не вивчалися в школі. Чи можна вважати таке розв'язання достатнім? Ні, одного посилання на такі формули або теореми, взяті з різних довідників, мало. Якщо в екзаменаційній роботі учень скористається якимось позапрограмним твердженням, він має його обгрунтувати.

Говорячи про обґрунтованість розв'язання стереометричних задач, ми, однак, не повинні впадати в крайність і вимагати від учнів обґрунтовувати очевидні істини. Наприклад, можна не пояснювати, чому центр вписаної в конус кулі лежить на висоті конуса, що діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди ділить її на дві рівні трикутні піраміди тощо.

Зазначимо також, що в процесі розв'язування задачі не слід щоразу вимагати від учнів обґрунтовувати кожний крок його, оскільки це може загальмувати пошук розв'язання. У цьому разі радимо після розв'язування задачі доводити твердження, які спочатку приймались на віру.

Повнота розв'язання. Однією з важливих вимог, які ставляться до розв'язання стереометричних задач; є його повнота. Розв'язуючи задачу, слід визначити всі її розв'язки, розглянути всі можливі випадки. Якщо задача на обчислення або на побудову має кілька розв'язків, а учень знайде тільки деякі з них, то таке розв'язання неповне. Сказане не стосується задач на доведення, бо їх розв'язування не зводиться до знаходження розв'язків. Проте й розв'язання задачі на доведення буває неповним, коли твердження обґрунтовується не для всіх можливих випадків, а тільки для деяких.

Розв'язання задачі на дослідження також вважають неповним, якщо не розглянуто всіх можливих ситуацій щодо досліджуваних фігур або їх відношень.

Задача. Навколо призми, в основі якої лежить трапеція, описано кулю радіуса R. Висота призми дорівнює H, а основи трапеції дорівнюють a і b. Знайти об'єм призми.

Розв'язання. Оскільки навколо призми описано кулю, то навколо її основи можна описати коло. А це означає, що дана трапеція рівнобічна. Радіус кола, описаного навколо згаданої трапеції, $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - H^2}$. Знайдемо висоту трапеції (рис. 11). Точка M – центр описаного навколо трапеції $ABCD$ кола – лежить на перетині серединних перпендикулярів FM і KL до сторін трапеції.

Отже, $AL = \frac{a}{2}$, $BK = \frac{b}{2}$ і трикутники BKM, AML – прямокутні. З них за теоремою Піфагора знаходимо:

$$ML = \sqrt{AM^2 - AL^2} = \sqrt{R^2 - \frac{H^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - H^2 - a^2}\ ,$$

$$KM = \sqrt{BM^2 - BK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{H^2}{4} - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - H^2 - b^2}$$

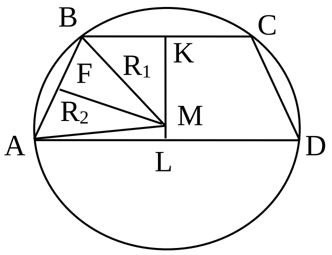

Рис.11

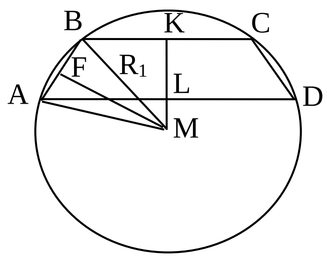

рис.12

Висота трапеції

$$KL = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4R^2 - H^2 - a^2} + \sqrt{4R^2 - H^2 - b^2}\right).$$ Отже,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}KL(AD + BC) = \frac{a+b}{4} \text{X}\left(\sqrt{4R^2 - H^2 - a^2} + \sqrt{4R^2 - H^2 - b^2}\right)$$

$$V_{пр.} = H \cdot S_{ABCD} = \frac{H(a+b)}{4} \text{X}\left(\sqrt{4R^2 - H^2 - a^2} + \sqrt{4R^2 - H^2 - b^2}\right).$$

Чи можна таке розв'язання задачі вважати повним? Ні, бо воно стосується лише випадку, коли центр описаного навколо трапеції кола лежить усередині трапеції. Можливий й інший випадок (рис.12). Для нього $KL = KM - ML$. Отже, задача має ще один розв'язок:

$$V_{пр.} = \frac{H(a+b)}{4}\left(\sqrt{4R^2 - H^2 - a^2} - \sqrt{4R^2 - H^2 - b^2}\right), (a > b).$$

Не знайти цього розв'язку – те саме, що не визначити. наприклад, одного з двох коренів квадратного рівняння. Таке розв'язання не можна вважати бездоганним.

Задача. Доведіть, що коли *M* – точка перетину медіан трикутника *ABC*, а *O* – довільна точка простору, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OM}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Нехай ΔABC і точка *O* – довільні (рис.13), точка A_1 – середина відрізка *BC*, а точки *P* і *K* такі, що чотирикутники

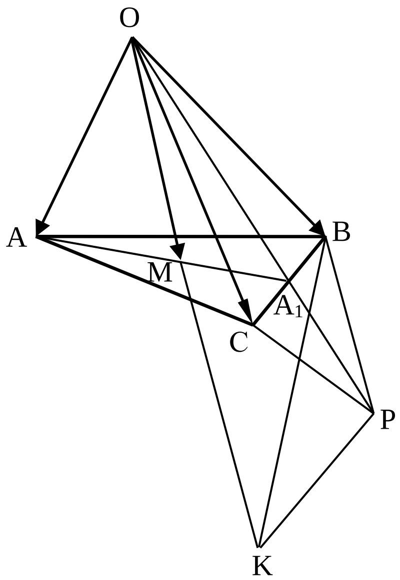

рис.13

OBPC і *OPKA* – паралелограми. Тоді медіана AA_1 даного трикутника лежить у площині паралелограма *AOPK* і перетинається діагоналлю *OK* паралелограма в точці *M*. З подібності трикутників OMA_1 і KMA` випливає, що $A_1M : MA = OA_1 : KA = 1:2$, тобто *M* – точка перетину медіан ΔABC. З того, що $OM : MK = 1:2$, випливає рівність $3 \cdot OM = OK$.

Отже,

$$3 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

що й треба було довести,

Таке доведення неповне. Воно правильне тільки для таких точок *O*, для яких існують паралелограми *OBPC* і *OPKA*. Якщо, наприклад точка *O* належить прямій *BC*, то паралелограма *OBPC* побудувати не можна. Для цього випадку треба було б пропонувати інше доведення.

Щоб не розглядати кількох випадків, радимо розв'язувати задачу іншим способом.

Другий спосіб. Для будь-яких точок *A*, *B*, *C, O*:

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC}$.

Додавши ці векторні рівності, і врахувавши, що

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MA_1} = -\overrightarrow{MA}$,

дістанемо

$$3 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Особливо часто неповні розв'язання задач допускають учні під час розв'язування задач на тіла обертання.

Задача. Правильний трикутник, довжина сторони якого дорівнює *a*, обертається навколо осі, що проходить поза ним через його вершину під гострим кутом β до сторони. Трикутник і вісь обертання лежать в одній площині. Визначте об'єм тіла обертання.

Часто учні, уявивши утворену фігуру обертання, як показано на рис. 14, вважають, що вона становить зрізаний конус, від якого відокремлено два конуси. Відповідно шукають і розв'язок. Таке розв'язання неповне, бо можливі ще інші випадки (рис. 15). Тільки розглянувши всі ці випадки, можна прийти до вичерпної відповіді.

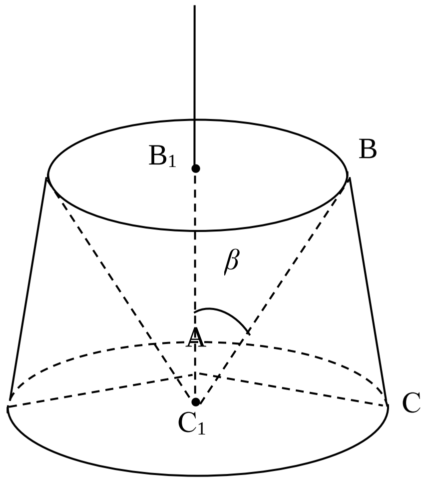

рис. 14

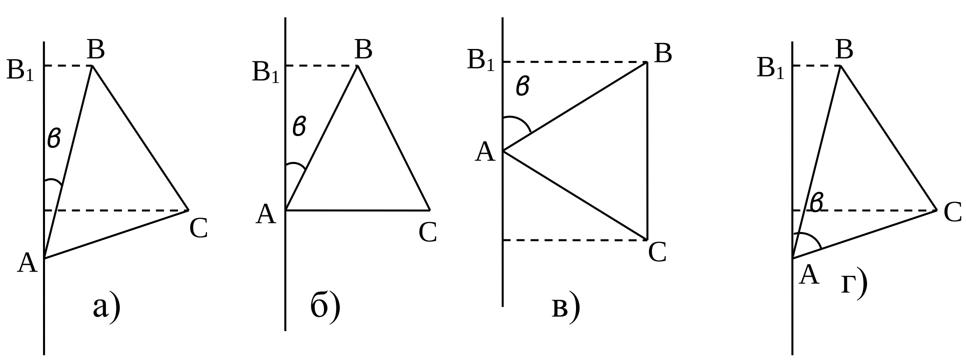

Рис.15

Якщо $\beta \le 60^0$, то задача має один розв'язок:

$$V = \frac{\pi}{2} a^3 \sin\left(\beta + 30^0\right).$$

Якщо $60^0 < \beta < 90^0$, то задача має два розв'язки:

$$V = \frac{\pi}{2} a^3 \sin\left(\beta + 30^0\right) \text{ і } V = \frac{\pi}{2} a^3 \sin\left(\beta - 30^0\right)$$

Іноді такі задачі, крім параметрів a і β, містять ще й числові дані. Наприклад, додатково ставиться вимога: «Обчислити при a = 6 см, β = 60°». Чи можна для сформульованої так задачі обмежитись тільки одним випадком? Чи можна вважати достатнім таке розв'язання?

Об'єм тіла обертання (рис. 15, в) дорівнює об'єму циліндра з твірною BC без об'ємів конусів з твірними AB і AC, тобто

$$V = V_{BC} - V_{AB} - V_{AC}$$

$\angle CAC_1 = \angle BAB_1 = 60^0$, тому $\Delta ACC_1 = \Delta ABB_1$;

$$BB_1 = a \cdot \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \; AB_1 = a \cdot \cos 60^0 = \frac{1}{2}.$$

$$V = \pi BB_1^2 \cdot BC - \frac{1}{3}\pi BB_1^2 \cdot AB_1 - \frac{1}{3}\pi BB_1^2 \cdot AC_1 = \frac{2}{3}\pi BB_1^2 \cdot BC = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot a = \frac{1}{2}\pi a^3$$

Таке розв'язання не вважаємо повним, оскільки розв'язки задачі треба визначати через дані в умов і параметри. Тільки знайшовши загальну формулу, слід в неї підставляти числові значення.

Зрозуміло, що повне розв'язання такої задачі досить громіздке, тому пропонувати подібні задачі на екзаменах не бажано. А якщо й трапиться така задача, і учень встигне розглянути всіх можливих випадків, то з дозволу екзаменатора він може ввести додаткові обмеження, наприклад, записати: «розглянемо тільки один випадок, коли $30^0 < \beta < 60^0$» [30,с. 115-125].

2.6.Оформлення стереометричної задачі. Загальні зауваження

Питання про оформлення розв'язань цікавить як учителів математики, так і учнів.

Зробимо кілька зауважень щодо оформлення, розв'язань стереометричних задач в учнівських робочих зошитах і на класній дошці.

Розв'язуючи задачі в зошиті, учні повинні дотримуватись певних правил оформлення. Іноді вчителі старших класів не дуже зважають на те, що в учнівських зошитах немає полів, абзаців, розділових знаків, вважають це дрібницею. Це не дрібниця! З культури письма учня починається культура праці майбутнього працівника. Якщо учень знає, що його робота перевірятиметься вчителем, і все-таки виконує її недбало, пише нерозбірливо, малограмотно, цим він проявляє своє ставлення і до учителя. Іноді дискутують, чи треба знижувати оцінки за правильні, але неакуратно оформлені розв'язання задач. Треба! У противному разі не можна виховати культуру письма. Оцінку «5» за недбало написану роботу ставити не радимо. Записуючи розв'язання задачі на дошці, можна обмежитись малюнком, послідовністю формул і стислими записами вигляду «з ΔABC», «отже», «або», «існує», «тоді» тощо. Формули краще писати стовпчиком, щоб легше було перевіряти записане; рівності можна записувати ланцюжком, наприклад

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2b^2\cos\alpha = 2b^2(1-\cos\alpha) = 4b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Знаком рівності сполучають тільки рівні числа, тотожні вирази, однакові однойменні величини. Наприклад, не можна писати 2 • 3 = 6 см (треба так: 2-3 = 6 (см)). Не слід ставити математичні знаки та інші символи між словами або між числом і словом, наприклад «висота < бічного ребра», «площа основи = 10 см^2».

Бажано уникати позначень з громіздкими індексами, наприклад, $V_{пр.зр.пір.}$, $S_{фіг.об.}$ тощо. Хоч такі позначення допустимі і не можна знижувати за них оцінок, все-таки краще, коли учень, розв'язуючи задачу, напише: «позначимо об'єм даної правильної зрізаної піраміди буквою V», і далі об'єм цієї зрізаної піраміди позначатимемо тільки так.

Іноді учень позначає, наприклад, вершину піраміди і площу її основи тією самою буквою S, або те саме значення якоїсь величини різними символами, наприклад $S_{осн.}$, S_{ABC}, S. Це – недолік. Однак щодо символіки не треба ставити перед учнями дуже жорсткі вимоги. Нерозумно, наприклад, площу основи призми завжди позначати символом $S_{осн.}$. Різні учні можуть позначити цю площу інакше: S, Q, M, Q_{ABC}, S_1.Об'єм тіла, утвореного обертанням чотирикутника $ABCD$ навколо прямої AB, можна позначати символом V_{CD} і т.д.

Наведемо приклад оформлення розв'язання стереометричної задачі.

Задача. Дано правильну чотирикутну зрізану піраміду, висота якої дорівнює 6 см, а сторони основ дорівнюють відповідно 4 см і 8 см. Знайдіть бічну поверхню цієї піраміди.

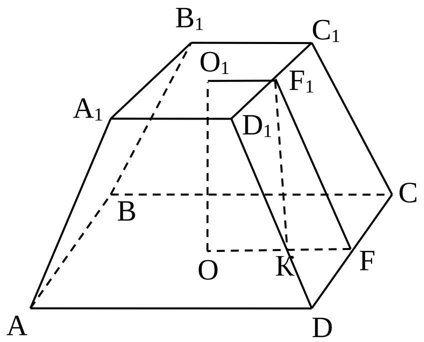

рис.16

Розв'язання сформульованої задачі можна оформити на класній дошці так:

Розв'язання

F_1F – апофема, F_1K – висота.

$KF = OF - O_1F_1 = 4 - 2 - 2$ (см),

$F_1F = \sqrt{KF^2 + F_1K^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ (см),

$S_{біч.} = \frac{1}{2}(P + P_1)\cdot F_1F = \frac{1}{2}(32 + 16)\cdot 2\sqrt{10} = 48\sqrt{10}$ (см^2).

Відповідь. $48\sqrt{10}$ см^2.

У зошитах учні мають дати докладніше пояснення. Замість другого рядка можна записати: «Нехай F_1F – апофема, F_1K – висота даної зрізаної піраміди. $F_1F \perp DC$, тому і $KF \perp DC$ (теорема про три перпендикуляри). Отже, K лежить на відрізку OF, $OK = O_1F_1$».

Не треба вважати, що подана форма запису єдино можлива. Цілком допустимо, якщо учень на дошці не випише окремо відповідь, а підкреслить її в попередньому рядку. Можна розв'язання почати з рівності

$S_{бiч} = \frac{1}{2}(p + p_1) \cdot F_1F$ [31, с. 254].

Скорочений запис задачі

У процесі навчання і вчителям, і учням часто доводиться задачі записувати скорочено. Це роблять не тільки для того, щоб зекономити час і місце на класній дошці або в зошиті, а й для кращого вивчення задачі. Записуючи скорочено задачу, ми по суті формулюємо її іншими словами, а цього не можна зробити, не вникнувши в її умову і вимогу.

Раніше на скорочений запис стереометричної задачі дивились, як на необхідну складову частину її розв'язання. Тому навіть тоді, коли учень записував повний текст задачі, він обов'язково мав записати її ще й скорочено, причому «скорочений» запис вимагалось робити так, що він нерідко був набагато довший, ніж повний текст.

Тепер таку вимогу слід вважати застарілою, записувати двічі задачу немає потреби. Звичайно, якщо учень у контрольній чи екзаменаційній роботі запише задачу двічі, знижувати оцінку йому за це не слід.

У процесі навчання скорочений запис задачі (не тільки її умови, а й вимоги) корисний, але треба, щоб він був справді скороченим. І одночасно повним, тобто відповідав тексту задачі.

Крім рівностей та інших відношень, що замінюють поняття їх означеннями, радимо писати, наприклад, «*ABCD* – тетраедр», «*AM* – медіана», «*SABCD* – правильна піраміда», бо, наприклад, запис

$SA = SB = SC = SD;\ AB = BC = CD = DA$

ще не означає, що йдеться про правильну чотирикутну піраміду *SABCD*.

Ось кілька можливих коротких записів задач різних типів.

1) Дано: *SABC* – прав. піраміда,

$SB = b,\ \angle BSC = \alpha$.

Визначити: *V*.

2) Дано: AC_1 – куб,

K, P, T – середини $AA_1,\ B_1C_1,\ CD$.

Побудувати: переріз (*KPT*).

3) Дано: $A \notin \alpha$.

Побудувати: $\beta \parallel \alpha$, щоб $A \in \beta$.

4) Дано: *V, S, r* – об'єм, площа поверхні, радіус вписаної кулі тетраедра.

Довести: $V = \frac{1}{3}Sr$.

5) Дано: *ABC* – трикутник, *XA* = *XB* = *XC*.

Визначити: *ГМТ X*.

6) Дано: $\alpha \perp \beta,\ \beta \perp \gamma$.

Дослідити, чи завжди $\alpha \perp \gamma$.

Зрозуміло також, що в робочому зошиті або на дошці окремі слова можна скорочувати. Можна домовитись не писати щоразу «Дано» і «Визначити», а відокремлювати умову задачі від вимоги рискою. Малюнок до задачі з позначеними на ньому даними і шуканими величинами також можна вважати скороченим записом задачі [19, с.91].

Малюнки до задач

Особливо важливу роль під час розв'язування стереометричних задач відіграють малюнки. Але малюнок тут – не мета, а тільки допоміжний засіб. Якщо учень може розв'язати задачу без малюнка, він може його й не виконувати.

Розв'язання переважної більшості стереометричних задач, поданих в учнівських навчальних посібниках, бажано супроводити малюнками. Треба намагатись, щоб малюнки були правильними, наочними і щоб їх легко можна було виконувати. Іноді вважають, що учнівські малюнки до стереометричних задач повинні бути також повними і метрично визначеними. Однак не слід вимагати виконувати такі малюнки до кожної задачі. До тієї самої задачі можна пропонувати той чи інший малюнок.

Деякі вчителі різні просторові фігури іноді зображають на частинах площини. В окремих випадках можна малювати не всю просторову фігуру, а її осьовий переріз або одну з кількох секцій, або лінію перетину фігур. Не обов'язково малювати всі вектори, про які йдеться в розв'язанні задачі. Замість кулі, вписаної або описаної навколо многогранника, можна малювати коло великого круга, а в деяких випадках – тільки центр і окремі точки її поверхні.

У зошитах учні можуть виконувати малюнки олівцем, але зобов'язувати всіх малювати тільки олівцем було б неправильно. Непогано, коли окремі учні малюють ручкою або фломастерами. Малюючи на дошці, можна використовувати різноколірну крейду, особливо під час розв'язування задач на комбінації тіл, на побудову. Звичайно пропонують учням користуватись лінійкою та іншими креслярськими інструментами. Але треба, щоб вони вміли малювати і від руки.

Виконуючи малюнки до стереометричних задач, слід дотримуватись правил і вимог, встановлених у кресленні. Зокрема слід використовувати такі види ліній: суцільна основна, суцільна потовщена, суцільна тонка, штрихова, штрихпунктирна.

Суцільними основними обводять лінії видимого контура фігури, потовщеними користуються для виділення тієї чи іншої частини фігури, суцільні тонкі використовують як розмірні і виносні лінії, для штриховки тощо. Штриховими малюють лінії невидимих контурів, штрихпунктирними – осьові і центральні лінії.

Не слід штриховку (перерізів) робити штриховими лініями, не треба розривати розмірні лінії. Еліпси можна малювати від руки або за допомогою спеціальних лекал.

На малюнках можна позначати значення довжин, величини кутів, прямі кути, рівні відрізки тощо. Букви і цифри слід писати так, щоб вони не перетинали ліній [16, с. 57-59].

Пояснення розв'язання

Поясненням розв'язання називають або всю частину розв'язання, що передує відповіді, або тільки аргументацію, посилання на теореми, властивості тощо. Слід лише дбати про те, щоб пояснення не були надто громіздкими, багатослівними.

Задача. Нижньою основою прямої призми з висотою h є правильний трикутник ABC, сторона якого дорівнює a. Через середню лінію KL цього трикутника, паралельну стороні AB, проведено переріз так, що він утворює гострий двогранний кут α із півплощиною KLC. Визначте площу перерізу

Розв'язання. З умови задачі випливає, що дана призма правильна. Залежно від її висоти h і величини кута а у перерізі можна дістати чотирикутник $KLMN$ (мал. 17,а) або трикутник KLP (рис. 17,б). Розглянемо спочатку перший випадок.

Оскільки основи призми паралельні, то січна площина перетинає їх по паралельних відрізках. Отже, $MN \parallel KL$ і чотирикутник $KLMN$ – трапеція.

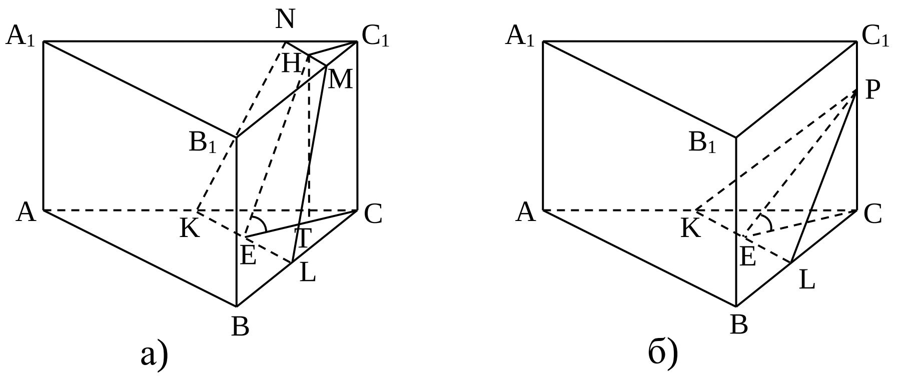

рис.17

Нехай E – середина відрізка KL. Тоді $CE \perp KL$, бо ΔCKL – правильний, він подібний до ΔCAB. Відрізок KL перпендикулярний до CC_1 і, отже, до площини ECC_1.

Якщо MN перетинає площину ECC_1 в точці H, то $EH \perp KL$, EH – висота трапеції $KLMN$. Опустимо перпендикуляр з H на площину ABC. Його основа

T належить відрізку EC – згідно з теоремою про три перпендикуляри. Отже, $AB = a$, $HT = h$, $\angle HET = \alpha$. Крім того, $\Delta C_1MN \sim \Delta CLK$ і $CT = C_1H$.

Докладніших пояснень вимагати від учнів не слід. Визначення різних величин та перетворення також не доцільно супроводити громіздкими поясненнями. Наприклад, в розв'язанні немає потреби формулювати відомі теореми, досить їх тільки назвати: «За теоремою синусів...», «згідно з теоремою про три перпендикуляри...» тощо. Але якщо учень і не напише, наприклад, «За теоремою Піфагора», то це не слід вважати недоліком. Однаково допустимим в учнівських роботах вважаємо запис: «ΔABC прямокутний, тому $\sqrt{AB^2 - BC^2}$» і «У прямокутному трикутнику ABC сторона AB – гіпотенуза, тому, за теоремою Піфагора, $AC^2 = AB^2 - BC^2$, звідки $= \sqrt{AB^2 - BC^2}$» [16, с. 57-59].

2.7. Блочний метод на уроках стереометрії в класах гуманітарного профілю

У гуманітарних класах незважаючи на малу кількість тижневих годин, має залишатися незмінною роль математики в розвитку мислення учнів: абстрактного і логічного, алгоритмічного. Засобами шкільної математики ці якості формуються на основі чіткого засвоєння математичних понять, прийомів математичного доведення, навичок встановлення логічних зв’язків.

При викладанні стереометрії теми зручно подавати блоками. Шляхом дедуктивних міркувань проводиться обґрунтування всіх тверджень, що розглядаються. На наочно – інтуїтивній основі вводиться переважна більшість аксіом, понять, формул. Проте не слід відмовлятися від доведення тверджень, оскільки доведення цінне для усвідомлення методів математики, розвитку мислення, формування їхньої логічної культури.

Структурування навчального матеріалу здійснюється з урахуванням укрупнення дидактичних одиниць змісту. Зокрема поняття, теореми, формули, пов'язані деякою спільністю, подаються паралельно.

У гуманітарному класі в курсі геометрії теми „Геометричні тіла", „Площі поверхонь і об'єми геометричних тіл" особливо зручні для використання блочного методу їх викладання.

Кожна тема розділяється на чотири частини.

На першому етапі вчитель за допомогою учнів повідомляє відповідний матеріал теми, а також дає пояснення і рекомендації для подальшого навчання, виконання індивідуального завдання до теми. Основною метою перших уроків теми є вивчення, узагальнення, систематизація, розширення та поглиблення знань набутих в молодших класах про геометричні тіла. Такі уроки проводяться у формі лекції, бо саме на них вчитель викладає принципову частину теоретичного матеріалу.

На другому етапі відбувається відтворення та корекція необхідних знань та навичок, розв'язання опорних задач, аналіз задач та способи їх виконання, раціоналізація способів виконання завдань, здійснюється контроль і самоконтроль під час виконання пробних вправ. На цьому етапі розширюються та поглиблюються знання з теми, закріплюються знання здобуті на попередньому етапі за допомогою розв'язання задач, перевірки засвоєння відповідного матеріалу.

Третій етап – це консультації. На цьому етапі відбувається цілеспрямована робота не лише з ліквідації прогалин в знаннях учнів, узагальнення та систематизація матеріалу, але й набуття навичок – застосовувати набуті знання, логічно обґрунтовувати хід роз'язку задачі, шукати раціональний спосіб розв'язання задачі та його обґрунтування, вміння працювати самостійно, вдумливо, результативно. Учитель аналізує роботу учнів, систематизує питання, які викликають проблеми, враховує недоліки та помилки учнів. Учні, готуючись до таких уроків, продумують запитання, по ходу виконання індивідуальних завдань до теми. На цьому етапі вчитель має можливість краще пізнати учнів, їх рівень підготовки на даному етапі, має можливість консультувати індивідуально, в групах, виявити цікаві прийоми роботи, рекламувати їх, підтримати тих, хто відчуває проблеми, допомогти їм. Групові форми розв’язання задач включають такі методи колективної роботи: вся група приймає участь в оформленні роботи, коментуванні ходу розв’язку, аналізу умов, узагальнень і висновків, які з умови випливають, а також оформляють різні запропоновані способи розв’язання учнями групи. Після чого або представник групи пропонує всьому класу на свою думку самий оптимальний варіант розв’язання, або здають колективний звіт на контроль вчителю.

На четвертому етапі відбувається контроль знань за темою, яка вивчається.

Основною метою контролю є виявлення не лише досягнень та успіхів, а й проблем; окреслення шляхів удосконалення, поглиблення знань і навичок. Форми контролю, які найчастіше використовую, це самостійні роботи з диференційованим рівнем допомоги, тестові перевірки, самостійні роботи, заліки, захисти результатів виконання індивідуальних завдань, залік, контрольна робота. Основною метою таких видів контролю: діагностика рівня засвоєння знань і вмінь кожного учня на певному етапі навчання. Досвід показав, що оптимальніше проводити відкритий математичний залік (усно – письмовий контроль), що відбувається як завершальна перевірка наприкінці вивчення теми. Про зміст і термін проведення заліку повідомляється на початку вивчення теми. Вибір завдань для заліку залежить від індивідуальних здібностей учнів. Під час проведення контрольної роботи маю на меті встановити те, чи розуміє учень викладений матеріал, вміє безпосередньо використовувати його під час розв’язування задач, а також рівень засвоєння знань.

Контролюючи знання за допомогою тесту, проводжу попередній контроль, або контроль обов’язкового рівня знань учнів з теми. Завершує четвертий етап вивчення теми тематична залікова робота (різнорівнева), часто це 2 уроки).

Після закінчення четвертого етапу вивчення теми вчитель збирає контрольні завдання, які виконано вдома, та контрольні роботи, які виконувалися в класі. За результатами робіт виставляється оцінка з теми.

У запропонованій системі навчання учні проявляють зацікавленість, впевненість у своїх силах, комфорт, незалежно від рівня підготовки. Цьому сприяє те, що кожне запропоноване завдання та кожне запропоноване питання вимагає від учнів роздумів, самостійності, творчого підходу [25,с.61-63].

Приклад поурочного планування теми „Геометричні тіла” (24 год)

I етап.

1. Многогранні кути. Двогранний кут. Лінійний кут двогранного кута. Многогранники. Опуклі многогранники. Паралелепіпед, його властивості.
2. Призма. Піраміда. Правильна піраміда.
3. Перерізи многогранників, їх побудова. Двогранні кути піраміди. Побудова лінійного кута двогранного кута між бічною гранню та основою піраміди.
4. Правильні многогранники, їх побудова.
5. Циліндр. Конус. Вписані і описані призми, піраміди.
6. Куля. Перерізи кулі. Комбінації тіл.

II етап

7. Узагальнення і систематизація знань з теми. Класифікація геометричних тіл.
8. Розв’язування типових задач про піраміду, дві грані якої перпендикулярні до основи.
9. Розв’язування типових задач про піраміду, одна грань якої перпендикулярна до основи.
10. Розв’язування типових задач на комбінацію призми та циліндра, призми та конуса, куба та кулі.

11. Розв’язування типових задач на комбінацію піраміди і куба, конуса, кулі.

12. Первинна перевірка вмінь та навичок учнів з теми (один із видів попереднього контролю)

III етап

13. Узагальнення і систематизація знань учнів з теми. Практикум розв’язування задач.

14. Практикум розв’язування задач

15. Практикум розв’язування задач

16. Практикум розв’язування задач

17. Практикум розв’язування задач

18. Розв’язування задач. Самостійна робота.

IV етап

19. Семінар з теми „Геометричні тіла”.

20. Усно – письмовий залік з теми

21. Усно – письмовий залік з теми

22. Тестова перевірка знань

23 – 24. Тематична залікова робота з теми „Геометричні тіла”.

Приклад поурочного планування теми „Площі поверхонь і об’ємів геометричних тіл ” (20 год.)

I етап

1. Поверхня призми і піраміди. Поверхня циліндра і конуса.

2. Поняття об’єму. Об’єм прямокутного паралелепіпеда. Об’єм призми. Рівновеликі піраміди. Об’єм піраміди.

3. Об’єм циліндра і конуса. Об’єм кулі. Поверхня кулі.

II етап

4. Узагальнення і систематизація знань з теми.

5. Розв’язування типових задач на площі поверхонь геометричних тіл.

6. Розв’язування типових задач на об’єми геометричних тіл.

7. Первинна перевірка вмінь та навичок учнів з теми

(один із видів попереднього контролю)

III етап

8. Узагальнення і систематизація знань з теми.

9-13. Практикум розв’язування задач.

14. Розв’язування задач. Самостійна робота.

IV етап

15. Семінар з теми „Площі поверхонь і об’ємів геометричних тіл”

16. Усно – письмовий залік з теми

17. Усно – письмовий залік з теми

18. Тестова перевірка знань

19 – 20. Тематична залікова робота з теми „Площі поверхонь і об’ємів геометричних тіл ”

Приклади планування уроку в 11 класі

Тема. Перерізи многогранників, їх побудова. Двогранні кути піраміди.

Побудова лінійного кута двогранного кута між бічною гранню та основою піраміди.

Мета: Засвоєння поняття перерізів многогранників, двогранного кута та його лінійного кута; формування навичок доведення того, що побудований кут є лінійним кутом двогранного кута піраміди; оволодіння навичками побудови лінійних кутів двогранних кутів піраміди, перерізів куба; удосконалення вміння зображувати стереометричні фігури.

Тип уроку. Урок засвоєння нових знань.

Обладнання. Таблиці для розв'язування задач зі стереометрії, слайди із завданнями побудови перерізів многогранників, малюнками до задач.

ХІД УРОКУ

I. Актуалізація опорних знань.

1. Завдання для двох учнів.

• Назвати план побудови лінійного кута двогранного кута між бічною гранню та основою піраміди.

• Довести, що площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані лінійного кута. *(Двоє учнів працюють самостійно біля дошки.)*

2. З рештою учнів проводиться бесіда за такими завданнями.

• Дати означення піраміди.

• Показати на моделях і малюнках різні піраміди.

• Дати означення правильної, зрізаної та повної пірамід і їх елементів.

• Як зображається основа піраміди, якщо вона є трикутником, рівнобедреним трикутником, рівностоонnім трикутником, прямокутним трикутником, прямокутником, квадратом, ромбом, трапецією, рівнобічною трапецією?

• Де знаходиться основа піраміди, якщо дві її бічні грані зі спільним ребром перпендикулярні до основи піраміди?

• Що буде висотою піраміди, якщо одна її грань перпендикулярна до площини основи?

• Що буде висотою піраміди, якщо дві бічні грані піраміди перпендикулярні

до площини основи?

3. Задача 1**.** *PABCD* — піраміда, грані *APD* та *CPD* перпендикулярні до площини основи, *PD* — спільне ребро цих граней, основа *ABCD* — квадрат. Довести, що бічні ребра *PA* і *PC* перпендикулярні до сторін основи *AB* та *BC* відповідно. Назвати кути нахилу бічних ребер до площини основи.

Виконуючи завдання вчителя та розв'язуючи задачу, учні користуються таблицями, на яких зображено піраміди.

II. Мотивація навчання учнів.

Учням пропонується розв'язати задачу

Задача 2. *PABC* — піраміда, $\angle ACB = 90°$, пряма *PB* перпендикулярна до площини *ABC*. Довести, що кут *PCB* — лінійний кут двогранного кута з ребром *AC*. (*PB перпендикулярно (ABC).* Оскільки *BC перпендикулярно AC*, то *PC перпендикулярно AC* (за теоремою про три перпендикуляри) і $\angle$ *PCB* — лінійний кут двогранного кута з ребром *AC).*

III. Повідомлення теми, мети і завдань уроку.

Поняття двогранного кута та його лінійного кута засвоюються учнями легко, однак не завжди учні мають необхідні навички зображення лінійних кутів, що є однією з причин труднощів, які виникають у них під час розв'язування стереометричних задач.

Щоб побороти формалізм у засвоєнні цих понять та виробити відповідні навички побудови кутів, доцільно розв'язувати з учнями задачі чотирьох типів:

1) на доведення того, що позначений на малюнку кут є лінійним кутом двогранного кута;

2) на виділення шуканого лінійного кута серед кількох позначених;

3) на побудову лінійного кута даного двогранного кута;

4) на обчислення градусної міри кута та інших елементів піраміди.

У процесі розв'язування таких задач в учнів не лише формуються навички побудови лінійних кутів даних двогранних кутів, вони також повторюють означення понять, що стосуються піраміди, а також способи розв'язування задач, формули, правила зображення фігур на малюнку тощо.

Перший тип задач

1. $PABC$ — піраміда, $AB = BC$, $CD = DA$, $PB \perp (ABC)$. Довести, що кут PDB— лінійний кут двогранного кута з ребром AC.

2. $PABCD$ - піраміда, $BK \perp DC$, $PB \perp (ABC)$. Довести, що кут PKB — лінійний кут двогранного кута з ребром CD .

Другий тип задач

1. $PABC$ — піраміда, основою якої є правильний трикутник. Який із позначених кутів є лінійним кутом двогранного кута з ребром AC, якщо:

а) D — середина AC, пряма $PB \perp (ABC)$,

б) M — середина AC, пряма PO перпендикулярна до площини ABC, ON \\ BM

2. $PABC$ — піраміда, $CD = DA$, $PB \perp (ABC)$. Яким повинен бути трикутник ABC, щоб лінійним кутом двогранного кута з ребром AC був кут:

а) *PDB;*б) *PAR;* в) *PKB.*

Третій тип задач

1. Побудувати лінійний кут двогранного кута з ребром *AC,* якщо в піраміді *PABC:*

а) *AB* = *BC,* пряма *PB* перпендикулярна до площини *ABC;*

б) грань *ABC* — правильний трикутник, *O* — точка перетину медіан, пряма *PO* перпендикулярна до площини *ABC,*

в) грань *ABC* — правильний трикутник, *O* — середина сторони *AB,* пряма *PO* перпендикулярна до площини *ABC.*

2. Дано прямокутник*ABCD* і точку Р поза площиною *ABCD.* Побудувати лінійний кут двогранного кута з ребром *DC,* якщо**:** а) пряма $PB \perp (ABC);$

б) точка *O* належить відрізку *AB,* пряма $PO \perp (ABC);$

в) O — точка перетину діагоналей прямокутника *ABCD,* пряма *PO* перпендикулярна до площини *ABC.*

3. Дано ромб *ABCD,* пряма $PC \perp (ABC).$ Побудувати лінійний кут двогранного кута з ребром *BD.*

4. Побудувати лінійний кут двогранного кута з ребром *AD,* якщо: а) *ABCD* — трапеція, кут *BAD* — прямий, пряма *PB* перпендикулярна до площини *ABC;*

б) *ABCD* — трапеція, кут *BAD* — прямий, точка *O* належить відрізку *BC,* пряма $PO \perp (ABC);$

в) *ABCD*— рівнобічна трапеція, пряма $PB \perp (ABC);$

г) *ABCD* — рівнобічна трапеція, пряма $PD \perp (ABC).$

Четвертий тип задач

1. Дано піраміду *PABC.* Знайти величину двогранного кута з ребром *AC,* якщо: а) пряма $PB \perp (ABC),$ кут *ACB* — прямий, $BC = PB = A$ см;

б) пряма $PB \perp (ABC),$ $AB = BC = 5$ см, $BP = AC = 6$ см;

в) грань *ABC*— правильний трикутник, $AB = 6$ см, *O* — точка перетину медіан, пряма *OP* перпендикулярна до площини *ABC,* $OP = 4$ см;

г) грань *ABC*— правильний трикутник, точка *O* — середина відрізка *AB*, *AB*= 6 см, пряма ОР перпендикулярна до площини *ABC*, *OP* = 4 см.

2. *ABCD*— прямокутник, *BD* = 4/3 см, пряма $PB \perp (ABC)$, *BP* = 6 см, двогранний кут з ребром *DC* дорівнює 60°. Знайти сторони прямокутника.

3. *ABCD* — прямокутник, його площа дорівнює 48 см^2, *DC* = 4 см, пряма $PO \perp (ABC)$, *PO*= 6 см, О — точка перетину діагоналей. Знайти величину двогранного кута з ребром *DC*.

4. Дано піраміду *PABCD*, її основа *ABCD* — ромб. Пряма $PC \perp (ABC)$, *BD* = 4 см, *PC* = 8 см. Двогранний кут з ребром *BD* дорівнює 45°. Знайти площу ромба.

5. У паралелограмі *ABCD* $\angle ADC$ = 120°, *AD* = 8 см, *DC* — 6 см, пряма $PC \perp (ABC)$, *PC* = 9 см. Знайти величину двогранного кута з ребром *AD* і площу паралелограма.

Зауваження. Задачі четвертого типу 1 (а, б, г), 2, 3 і 4 розв'язуємо усно, а 1 (в) і 5 — письмово в зошитах.

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Задача 3**.** Основою піраміди є ромб зі стороною *a* і гострим кутом a . Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під однаковим кутом ф. Побудувати кути нахилу цих граней до площини основи і знайти об'єм піраміди.

V. Підсумок уроку.

1. За лінійний кут двогранного кута при даній стороні основи піраміди зручно брати кут, утворений висотою відповідної бічної грані, проведеною з вершини піраміди, і проекцією цієї висоти на площину основи.

2. Ребро двогранного кута перпендикулярне до площини лінійного кута отже і до будь-якої прямої в цій площині, зокрема до будь-якої прямої, що проходить через вершину лінійного кута.

3. Якщо в основі піраміди лежить паралелограм, то для побудови лінійних кутів двогранних кутів при всіх чотирьох сторонах основи досить через основу висоти піраміди провести висоти цього паралелограма і сполу-

чити кінці цих висот, що лежать на сторонах основи або їх продовженнях, з вершиною піраміди.

Учні записують ці опорні факти в зошити. Учитель оцінює роботу і відповіді учнів.

VI. Завдання додому. (За підручником: Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10—11 кл. серед, шк.

1. Повторити пп. 37—39, 47—51 з § 5.
2. Розв'язати задачі 58, 65, 66 з § 5.

2.8. Застосування стереометричних моделей на уроці

Моделі можна використовувати на всіх етапах процесу навчання: на етапі актуалізації знань, при поясненні нового матеріалу вчителем, при закріпленні вивченого матеріалу, при формуванні умінь і навичок, при виконанні домашніх завдань, на етапі контролю ступеня засвоєння навчального матеріалу.

Розглянемо застосування засобів наочності, при вивченні курсу стереометрії, на основних етапах уроку: актуалізації знань, вивчення нового матеріалу, закріплення вивченого матеріалу, контролю засвоєння вивченого матеріалу.

Етап актуалізації знань спрямований головним чином на підготовку учнів до засвоєння нового матеріалу, застосування наявних знань у стандартних та нових ситуаціях, оволодіння певними вміннями, стимулювання пізнавальної діяльності учнів, перевірку вчителем рівня засвоєння знань. З цією метою на початку уроку використовуються стереометричні моделі.

Етап актуалізації необхідний для встановлення зв'язків нового матеріалу з раніше вивченим, невідомого з відомим. Це сприяє систематизації матеріалу, більш глибокому розумінню його, формуванню міцних знань [17, с.88].

Говорячи про геометричні тілах на першому уроці геометрії необхідно вказати геометричні тіла, які будуть вивчатися в курсі математики - це куб, паралелепіпед, призма, піраміда, усічена піраміда, куля, циліндр, конус, зрізаний конус. Можна повідомити тут і назви, не даючи визначень; попередньо корисно переконатися, які терміни відомі, які, не відомі дітям. Також у розмові з учнями встановлюються особливості цих форм, їх відмінні ознаки . Можна виконати серії вправ на підрахунок числа граней, вершин, ребер у куба, піраміди і т. д. Цікаво зіставити кількість граней, вершин, ребер куба і прямокутного, прямого похилого паралелепіпедів (терміни не повідомляються). Допоможе зробити правильний висновок модель куба, у якої вертикальні ребра зроблені з гумок. У руках вчителя модель трансформується з куба в прямокутний, потім в похилий паралелепіпед. Познайомившись з поняттями плоскої та просторової фігур, намічаємо крейдою на моделях геометричних тіл різні плоскі і просторові фігури (на кубі, на циліндрі, на кулі та ін.) Корисно моделі цих фігур виготовити з дроту: коло і спіраль (криві на циліндрі), квадрат і просторова ламана лінія з ребер куба і т.п. Ввівши поняття рівних і нерівних відрізків, досліджуємо, які відрізки рівні і які не рівні у куба, паралелепіпеда, призми, піраміди. Разом з кубом можна розглянути прямий паралелепіпед, в основі у якого лежить ромб і висота дорівнює стороні підстави, і тетраедр. З'ясовується, що не тільки у куба всі ребра рівні. При введенні понять «окружність», «коло» співставляємо плоскі криві замкнуті лінії і просторові (на кулі і циліндрі). Тут доступні для школярів запитання на кшталт: «У чому подібність і відмінність між плоскими і просторовими замкнутими кривими на кулі?». Доступний розумінню учнів показ кіл і кіл на перетинах кулі, циліндра і конуса. Перетин можна показати наочно, розрізавши яблуко ножем; перетину різної форми отримаємо, налив у склянку циліндричної форми воду і поступово нахиляючи його. Показавши перетин циліндра у формі еліпса, вчитель звертає увагу учнів, що цю фігуру ми креслимо, зображуючи на площині креслення основу циліндра або конуса. Справа в тому, що якщо коло спостерігати під різними кутами зору (показує), то він змінює свою форму від «круглої» до «плескатої». Це можна використовувати на уроці вивчення фігури еліпса. При вивченні теми ламані і багатокутники необхідно звернути увагу учнів, що, перетинаючи площиною конус і циліндр, можемо отримати в перерізі не тільки криві лінії, але і ламані. Демонструємо відповідні каркасні або скляні моделі з виділеними на них перерізами. Поняття «багатокутник» добре ілюструється на багатогранника. Наприклад, розглядаючи піраміди різних видів, учні роблять висновок, що заснування цих тіл може бути трикутником, чотирикутником, п'ятикутником і т. д. (звідси відповідно і назви: трикутна, чотирикутна, п'ятикутна піраміди). Зате бічні грані пірамід завжди мають форму трикутників. Познайомившись з поняттям кута (утвореного променями й освіченого відрізками), розглядаємо різні кути на моделях геометричних тіл, підраховуємо, скільки кутів сходиться у вершинах цих тіл, знаходимо на моделях тупі, прямі і гострі кути. Види трикутників також добре ілюструються на пірамідах і трикутних призмах. Додаток понять «рівнобедрений трикутник», «рівні сторони», «рівні кути» до вивчення особливостей правильних в неправильних пірамід дозволяє моделювати своєрідний природничо-науковий метод дослідження. Нагадаємо, що учням невідомі визначення правильних і неправильних пірамід. Ці назви вчитель повідомив їм методом показу: «Ось ця група тіл - правильні піраміди, а ось ця неправильні» Вже в процесі вимірювання розмірів піраміди і визначення форми їх граней учні знаходять спільні ознаки пірамід: в основі лежить багатокутник, бічні грані - трикутники, що сходяться в одній загальній вершині. Потім знаходяться ознаки, які відрізняють правильну піраміду від неправильної [26, с. 63-66].

Розділ 3
Результати педагогічного експерименту

На першому етапі експерименту були проведені анкетування вчителів та учнів, контрольні роботи з математики для старшокласників, спостереження за їх роботою на уроках та під час самостійної роботи, вивчався досвід викладання математики в класах гуманітарного напряму, аналізувалася психолого-педагогічна, науково-методична та математична література з теми дослідження; проводився порівняльний аналіз різних підходів до розгортання змісту курсу в навчальних програмах для профільних класів у підручниках, посібниках з математики.

На цьому етапі було проведено діагностичну контрольну роботу для учнів 11-х класів Вараського ліцею № 3 (м. Вараш, Рівненської області) Учнів було поділено на два класи: учні класу гуманітарного напрямку (25 учнів) та учні класу не гуманітарного профілю (27). Перевірка знань учнів проводилася за допомогою діагностичного комплекту тестів (автори: О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. О. Глюза, О. В. Євтухова, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко). Вона здійснювалася за такими змістовими лініями: паралельність прямих і площин у просторі; перпендикулярність прямих і площин у просторі; геометричні тіла, об’єми і площі поверхонь геометричних тіл (загалом 25 завдань).

Результати тестування подано в таблицях 1 і 2.

Таблиця 1

Розподіл учнів за кількістю виконаних завдань (констатувальний зріз)

Кількість завдань	Кількість учнів, що виконали завдання (у %)	
	Клас ГН	Інший клас
0–5	16%	18,52%
6–10	24%	25,93%
11–15	32%	25,93%
16–20	28%	22,22%

21–25	0%	7,4%

Таблиця 2

Розподіл учнів за рівнями навчальних досягнень (констатувальний зріз)

Кількість учнів (у %)	Рівні навчальних досягнень учнів			
	початковий	середній	достатній	високий
Клас ГН	16	56	28	0
Інший клас	18,52	51,86	22,22	7,4

Отримані дані надали можливість обґрунтувати необхідність розробки й упровадження методики навчання стереометрії, спрямованої на формування в учнів вміння розв’язувати стереометричні задачі, сформулювати мету й завдання дослідження.

На другому етапі експерименту проводилися апробація та впровадження запропонованої методики навчання стереометрії в класах гуманітарного профілю, яка спрямовує навчальний процес на формування в учнів вмінь розв’язувати стереометричні задачі, розвивати просторову уяву та логічне мислення. Її ефективність перевірялася за допомогою педагогічних спостережень, опитування вчителів та учнів, порівняльного аналізу результатів виконання контрольних завдань у контрольній (КГ) та експериментальній (ЕГ) групах. За рівневими показниками навчальних досягнень учні ЕГ та КГ відрізнялися незначно. Статистична гіпотеза про однаковий розподіл школярів у ЕГ та КГ перевірена за допомогою критерію Пірсона. Учні ЕГ вивчали математику за розробленою методикою, а КГ – за традиційною.

На початку в 11-х класах було проведено вихідну контрольну роботу (ВКР) за курс стереометрії. Наприкінці формувального експерименту була проведена підсумкова контрольна робота (ПКР), в якій визначався рівень навчальних досягнень учнів за курс стереометрії вивчений за допомогою блочного методу. Результати виконання учнями контрольних робіт подано в таблицях 3 і 4 .

Таблиця 3

Результати виконання ВКР (початок експерименту)

Рівень	початковий	середній	достатній	високий
ЕГ $n_2 = 238$	7 (28%)	12 (48%)	6 (24%)	–
КГ $n_1 = 235$	5 (18,53%)	12 (44,44%)	10 (37,03%)	–

Загалом, якість виконання ВКР становила в ЕГ 24%, у КГ 37,03%, а успішність – в ЕГ 72%, у КГ 81,47%.

Таблиця 4

Результати ПКР (кінець експерименту)

Рівень	початковий	середній	достатній	високий
ЕГ $n_2 = 238$	3 (12%)	9 (36%)	10 (40%)	3 (12%)
КГ $n_1 = 235$	4 (14,82%)	11 (40,74%)	11 (40,74%)	1 (3,7%)

Загалом, якість виконання ПКР становила в ЕГ 52%, у КГ 44,44%, а успішність – в ЕГ 88%, у КГ 85,18%.

Таким чином, в ЕГ: 1) кількість учнів із початковим рівнем навчальних досягнень зменшилась на 16% (в КГ – на 3,71%); 2) кількість учнів із середнім рівнем навчальних досягнень зменшилася на 12% (в КГ – на 3,7); 3) кількість учнів із достатнім рівнем навчальних досягнень зросла на 16% (в КГ – на 3,71%); 4) кількість учнів із високим рівнем навчальних досягнень збільшилась на 12% (в КГ – на 3,7%). Якість навчання в ЕГ зросла, в основному, за рахунок переходу учнів із середнього рівня на достатній. Отже, експериментальна методика виявилася більш ефективною.

Висновки

У даній магістерській роботі було розглянуто методику навчання учнів гуманітарного профілю розв’язуванню стереометричних задач.

У першому розділі показано мету, завдання і принципи організації профільного навчання, розглянуто поняття задачі в психолого-педагогічній літературі, зроблено аналіз програми з математики для учнів старших класів гуманітарного спрямування.

У другому розділі розглянуто поняття стереометричної задачі, класифікацію стереометричних задач, а також методи їх розв’язання. Показано як навчити дітей розв’язувати задачі раціональним способом, розроблено блочний метод на уроках стереометрії, а також стереометричні моделі і їх застосування на уроці.

Педагогічний експеримент підтвердив ефективність розробленої методики проведення уроків стереометрії, яка спрямована на розвиток учнів вміння розв’язувати стереометричні задачі.

Поставлені завдання дослідження були виконані:

1. Проаналізовано стан досліджуваної проблеми у психолого-педагогічній теорії та практиці шкільного навчання стереометрії учнів-гуманітаріїв.

2. Розроблено моделі стереометричних тіл, а також методику для їх застосування на уроках стереометрії.

3.Розроблено теоретичні і практичні рекомендації для вчителів і методистів з даної проблеми.

Отже, матеріал даної магістерської роботи сприяє систематизації, поглибленню і розширенню знань, навичок та умінь у процесі навчання учнів гуманітарного профілю розв’язуванню стереометричних задач.

Список використаних джерел

1. Бабенко О. В. Прямі і площини в просторі, 9-й клас / Бабенко О. В. - К: Математика, 2004. – № 10. – 283 с.

2. Бевз В. Програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 5-11 класи / Бевз В., Мерзляк А., Слєпкань З. - К: Математика в школі, 2003. – № 6. – 44 с.

3. Бевз Г. П. Геометрія: Підруч. для 10-11 кл. з поглибл. вивч. матем. в загальноосвіт. серед. Закладах / Бевз Г. П. – К.: Освіта, 2000. – 347 с.

4. Белешко Д.Т. Методика розв’язування нестандартних математичних задач. Частина 1 / Д.Т. Белешко, М.А. Віннічук, О.В. Крайчук. – Х.: Вид. група "Основа", 2017. – 127с.

5. Белешко Д.Т. Методика розв’язування нестандартних математичних задач. Частина 2 / Д.Т. Белешко, М.А. Віннічук, О.В. Крайчук. – Х.: Вид. група "Основа", 2017. – 78с.

6. Білицький О. Управління процесом розвитку особистості засобами варіативного компоненту змісту освіти / Директор школи/ Білицький О. – 2002. – № 8. – 67 с.

7. Біляк Б. Профільне навчання в загальноосвітніх навчальних закладах // Директор школи, ліцею, гімназії/ Біляк Б., Дуда О. – 2003. – № 4. – 122 с.

8. Бродський Я. С. Проект програми з математики для 10-11 класів технічного та природничого профілів / Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К., Афанасьєва О. М. 1 вересня – 2000. – № 48. – 45 с

9. Бродський Я. Про нові програми з математики / Бродський Я., Павлов О. – К: Математика, 2000. – № 25-26. – 63 с.

10. Бродський Я. Готуємо майбутніх математиків / Бродський Я., Павлов О., Сліпенко А., Хаметова З. - Рідна школа, 2000. – Травень. – 164 с.

11. Бугайов О. І. Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі/ Бугайов О. І., Дейкун Д. І. – К.: Освіта, 1992 – 145 с.

12. Бурда М. І. Математика, 10-11: Навчальний посібник для шкіл (класів) гуманітарного спрямування/ Бурда М. І., Дубинчук О. С., Мальований Ю. І. – К.: Освіта, 2000. – 401 с.

13. Бурда М. І. Програма поглибленого вивчення математики в 10-11 профільних класах / Бурда М. І., Жалдак М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М., Шкіль М. І., Ядренко М. Й. - Математика в школі, 2003. – № 6. – 71 с.

14. Бурда М. Програма з математики для класів гуманітарного напряму, 10-11 класи / Бурда М., Мальований Ю. - Математика в школі, 2013. – № 6. – 66с.

15. Буркова Л. Дванадцятирічна освіта: реалії і перспективи / Буркова Л. – Рідна школа. – 2000. – Листопад. – 123 с.

16. Васильєва Р. Навчальний план у багатопрофільному ліцеї / Васильєва Р. - Директор школи, 2010. – № 10. – 127 с.

17. Василюк А. Основна школа в системі європейської середньої освіти / Василюк А., Жук О. - Директор школи. Україна, 2002. – № 1. – 87 с.

18. Войтенко Т. Разноуровневое обучение: положительные результаты и негативные последствия / Войтенко Т., Соколова М., Уланов В. - Директор школи. Україна, 2001. – № 2. – 100 с.

19. Диференціація та стандартизація математичної освіти в загальноосвітніх навчально-виховних закладах та вищих навчальних закладах першого та другого рівнів акредитації: Звіт про НДР (заключний) / www.home.skif.net

20. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл.закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. – Київ : Генеза, 2018. – 384 с.

21. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл.закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. – Київ : Генеза, 2019. – 304 с.

22. Концепція профільного навчання в старшій школі / Освіта України, 2003. – № 42-43. – 88 с.

23. Кремень В. Старша школа має перейти на профільне навчання / Кремень В. - Освіта України, 2002. – № 49. – 67 с.

24. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір.– Х.: Гімназія,2018.– 256с.

25. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 208 с.

26. Олійник В. Дистанційне навчання – не розкіш, а шлях до... відкритої освіти / Олійник В. - Освіта України. – 2002. – № 49. – 89 с.

27. Петренко С. В. Профільна освіта – вимога сучасності / Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції/ Петренко С. В., Барсук Н. О. – Чернігів: РВВЧДПУ, 2004. – 154 с .

28. Петренко С. В. Особливості навчання математики в профільній школі / Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції / Петренко С. В., Мартиненко О. В. – Чернігів: РВВЧДПУ, 2004. – 173 с.

29. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів/ Слєпкань З. І. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 410с.

30. Чернер С. Досвід організації варіативного і профільного навчання / Чернер С. – Завуч. – 2002. – № 16. – 83 с.

31. Япс А. В., Крайчук О. В. Методичні підходи до розв’язування геометричних задач в основній школі //Наука,освіта, суспільство, очима молодих: Матер. XIII Міжн. наук. – практ. конф.– Рівне: РДГУ. – 2020. – С.295-296.

Додаток 1

Тема. Побудова лінійного кута двогранного кута між бічними гранями піраміди.

Мета: навчити учнів будувати лінійний кут двогранного кута між бічними гранями піраміди (з включенням його до трикутника, утвореного лінійними елементами піраміди), доводити, що кути на малюнку позначено правильно.

Тип уроку. Урок засвоєння нових знань.

Обладнання. Стереометричні таблиці «Піраміда», слайди із малюнками до задач.

ХІД УРОКУ

І. Перевірка домашнього завдання.

На відкидних дошках учні записують розв'язання задач із домашньої роботи. Учитель разом з учнями перевіряють правильність розв'язання кожної задачі.

Для перевірки рівня засвоєння матеріалу пропонуємо учням виконати такі завдання (використовуємо малюнок):

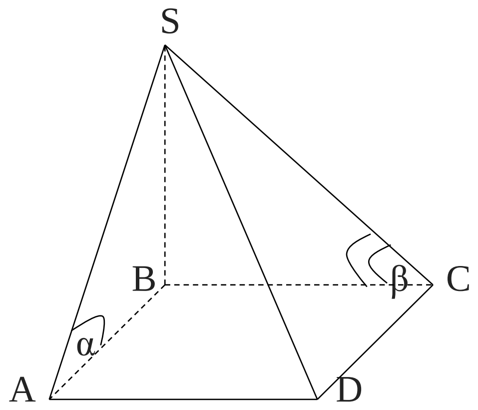

рис.1

Зробити відповідні добудови та дати відповіді за алгоритмом

- Закінчити речення, щоб отримати правильне твердження: «Якщо BA, AD і BC, CD, то SA, AD і … . отже, це - …, (- це…».
- Яка теорема використовується для побудови лінійного кута двогранного кута з ребром AD?
- Якою формулою варто скористатися в даному випадку щоб обчислити бічну поверхню піраміди?

- Чому побудова лінійного кута даного або шуканого двогранного кута

починають не з його вершини, а з однієї з його сторін?

II. Виконання самостійної роботи.

Мета роботи — перевірити, чи вміють учні будувати лінійний кут двогранного кута.

Троє учнів виконують роботу на відкидних дошках, інші самостійно працюють у зошитах.

Завдання для самостійної роботи

1. DABC – правильна піраміда. Побудувати лінійні кути двогранних кутів з ребрами AC та AD.

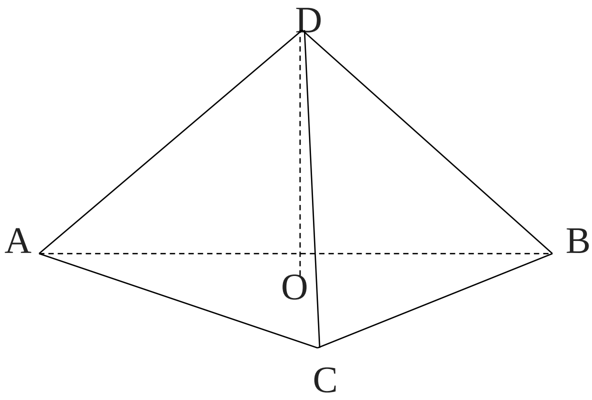

рис.2

2. SABCD – правильна піраміда. Побудувати лінійні кути двогранних кутів з ребрами SD, SA, BC.

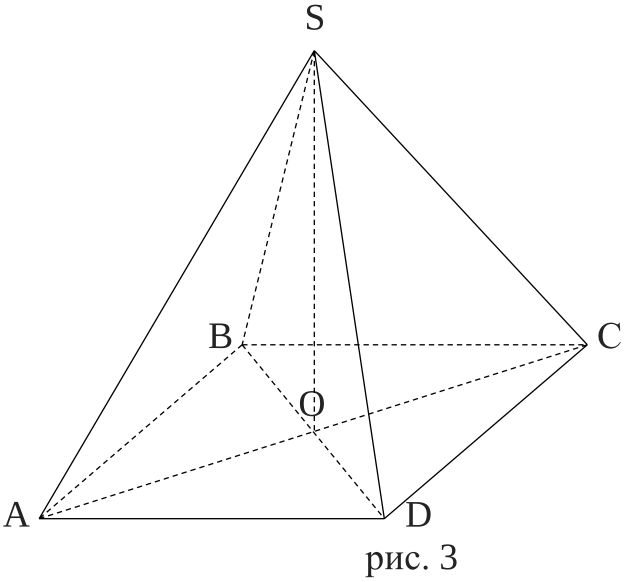

рис. 3

3. ABCD – прямокутник, SB (ABC). Побудувати лінійні кути двогранних кутів з ребрами SA, SB, SD

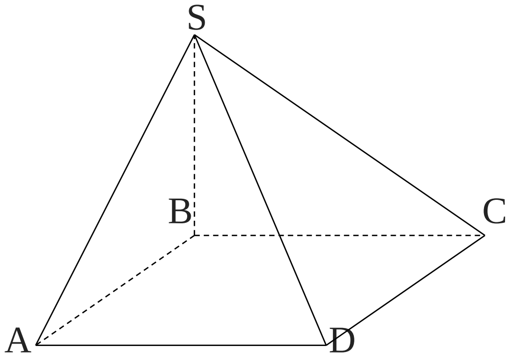

рис.4

Учні виконують завдання, працюючи в групах по 4 в кожній. Учитель контролює їхню роботу, вказує на допущені помилки, оцінює відповіді.

III. Повідомлення теми, мети і завдань уроку.

Побудова лінійного кута двогранного кута між бічними гранями піраміди з включенням його до трикутника, утвореного лінійними елементами даної піраміди, вимагає врахування конкретних властивостей фігури. Тому єдиного спільного правила для його побудови не існує.

Розглянемо випадки, що найчастіше зустрічаються під час розв'язування задач.

IV. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу.

Задача 20. Побудувати лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди.

Учні разом з учителем складають алгоритм побудови лінійного кута і виконують відповідний малюнок в зошитах та на дошці.

Зауважимо, що для правильної піраміди трикутник *BKD* — рівнобедрений. Тому медіана *OK* є також висотою і бісектрисою.

Задача 21. Побудувати лінійний кут двогранного кута між бічними гранями правильної чотирикутної піраміди, що проходять через протилежні сторони основи.

Розв'язання

Побудуємо $MF \backslash\backslash BC$. Тоді $MF \backslash\backslash DA$.

MK і MZ— апофеми бічних граней. Тому $BC \perp (KMZ)$ і $MF \perp (KMZ)$. Отже, $\angle KMZ = \alpha$ — лінійний кут двогранного кута.

Задача 3. В основі піраміди *SABC* лежить трикутник *ABC*. Бічне ребро *SA*

перпендикулярне до площини основи піраміди. Побудувати лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі *SC*.

Вказівка. Лінійний кут будуємо в такій послідовності: у площині *ABC* опускаємо перпендикуляр *BN* на *AC;* у площині *SBC* з *B* опускаємо перпендикуляр *BM* на *SC*. Сполучаємо точки *N* і М відрізком. Кут *NMB* — шуканий.

Задача 4. Основою піраміди *SABC* є рівнобедрений трикутник *ABC, AC* = *BC*. Бічне ребро *SC* утворює зі сторонами основи *CA* і *CB* гострий кут а . Побудувати лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі *SC*.

Вказівка. Кут *SDC*— лінійний кут двогранного куга при ребрі *AB*. Залежно від його величини основа висоти лежатиме всередині основи піраміди ($0° < \angle SDC < 90°$), належатиме відрізку *AB* ($\angle SDC = 90°$), не буде належати основі *ABC* ($90° < \angle SDC < 180°$).

V. Підсумок уроку.

Наприкінці уроку формулюємо теореми та означення, що застосовувалися під час розв'язування задач і повторюємо основні етапи побудов лінійних кутів двогранних кутів.

VI. Завдання додому. Опрацювати конспект уроку. Записати в зошиті розв’язки задач 3,4, за алгоритмом який складали в класі.