Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота магістерського рівня
на тему:

Методика вивчення геометричних перетворень в курсі математики сучасної школи

Виконав: студент II курсу магістратури
групи М-21
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
заочної форми навчання
Киричик Володимир Іванович

Керівник: канд. педагогічних наук,
професор кафедри математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: : канд. фізико-математичних
наук, доцент кафедри вищої математики
Демчик Світлана Петрівна

Рівне – 2023

ЗМІСТ

Вступ

Сучасний світ невпинно розвивається, вносячи непередбачувані зміни в різні сфери нашого життя. Однією з ключових галузей, яка активно розвивається, є математика. Основним завданням сучасної системи освіти є формування гармонійно розвиненої особистості, конкурентного фахівця на ринку праці, який вміє мислити, аналізувати, порівнювати, практично вирішувати поставлені перед ним життєві та професійні проблеми. Математика визначає не лише фундаментальні принципи науки, але і знаходить практичне застосування у багатьох аспектах нашого існування.

У сучасному світі геометрія має велике значення в різних галузях науки та техніки. Вона допомагає розуміти та аналізувати форми, розміри та взаємне розташування об'єктів у просторі.

Геометрія в шкільній освіті – не тільки основна математична дисципліна, але й один з компонентів загальнолюдської культури особистості. Однією з цілей навчання дисципліни є всебічний розвиток мислення учнів (логічного, образного, наочно-дійового).

Вивчення геометрії допомагає формувати та розвивати творчі здібності учнів, розуміти закономірності природи, мистецтва, архітектури та інших сфер людської діяльності, сприяє розвитку людини. Геометричну діяльність можна вважати первинною інтелектуальною діяльністю як людської цивілізації, так і окремого індивідуума.

Геометрія допомагає вивчати довкілля, досліджувати не тільки різні види фігур, їх розміри і форми, а й процеси. Для цього найбільше підходять геометричні перетворення.

Геометричні перетворення – важливий розділ курсу геометрії, на вивчення якого звертають мало уваги. Ідея геометричних перетворень є однією з основних у математиці та інших галузях її застосування.

У геометрії вони відіграють приблизно таку саму роль, як функції в алгебрі, які широко використовуються в практиці. На основі геометричних перетворень доводять складні твердження з різних розділів математики та розв'язують задачі, які іншими методами розв'язати важко чи зовсім неможливо. За їх допомогою визначають такі важливі геометричні поняття, як рівність та подібність фігур.

Геометричні перетворення використовують не тільки геометри. Знання з даної теми потрібні багатьом фахівцям: художнику, конструктору, архітектору, дизайнеру, майстру прикладного мистецтва, кінематографісту, фізику та іншим.

Геометричні перетворення пов'язані з такими поняттями як механічний рух, симетрія в природі, мистецтві та архітектурі.

Геометричні перетворення – це засіб для розв'язування геометричних задач, які розвивають математичне мислення. Зокрема: розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень дає змогу розглядати геометричні фігури на площині в динаміці, а це важливо для розвитку просторового мислення учнів. Крім того, володіючи методами геометричних перетворень, учні стають більш ініціативними. [29]

Знання з даної теми дуже важливі для учнів середньої школи.

Розв'язування задач за допомогою методів геометричних перетворень (метод симетрії, повороту, паралельного перенесення і подібності) служать для закріплення й більш глибокого засвоєння досліджуваного поняття. Розв'язування задач на побудову сприяє розвитку математичного та логічного мислення учнів, формуванню вмінь та навичок аналізувати та застосовувати знання в інших математичних прикладах та задачах. Для підвищення ефективності навчання необхідно, щоб, крім уявлень про саме перетворення, учні вміли виконувати побудову образів фігур при цьому перетворенні, тому що використання образу шуканої фігури при побудові є основою кожного із цих методів.

Відомий психолог І. С. Якиманська вважає, що з усіх тем геометрії найбільше впливає на розвиток просторового мислення учнів вивчення перетворень фігур на площині і в просторі. [24]

Про значення вивчення геометричних перетворень В. Г. Болтянський зазначав: «Знання властивостей рухів і інших геометричних перетворень, вміння застосовувати їх до доведення теорем і розв’язування задач – важливий елемент математичної культури, мабуть, найважливіший метод, який повинні винести учні з шкільного курсу геометрії».

При вивченні даної теми з певними труднощами часто стикаються не тільки вчителі, але й учні. Для вчителів досить важко організувати унаочнення геометричних перетворень на папері чи дошці, на вивчення геометричних перетворень відводиться мало часу.

Все вищесказане вказує на те, що вивчення геометричних перетворень відіграє важливу і необхідну роль в шкільному курсі геометрії.

Об’єкт дослідження – процес вивчення геометричних перетворень при вивченні шкільного курсу геометрії.

Предмет дослідження – методика викладання теми «Геометричні перетворення» та розробка дидактичного забезпечення.

Мета дослідження полягає у розробці методики вивчення теми "Геометричні перетворення", яка сприяє розвитку математичного і логічного мислення в учнів та перевірці її ефективності.

Для досягнення поставленої мети необхідно було розв'язати наступні завдання:

1) вивчення стану проблеми в теорії та практиці сучасної школи;
2) аналіз літератури щодо вивчення геометричних перетворень в шкільному курсі математики;
3) розробка методики вивчення теми "Геометричні перетворення";
4) перевірка ефективності розробленої методики;
5) застосування програмного забезпечення до вивчення теми у шкільному курсі.

Для виконання поставлених завдань застосовувались такі методи дослідження: теоретичний аналіз психолого-педагогічної, навчальнометодичної літератури, пов’язаної з проблемою дослідження; спостереження; бесіди з вчителями, анкетування; аналіз контрольних робіт.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що матеріали роботи, задачі, контрольні роботи можуть бути використані вчителями математики в 9 класах закладів загальної середньої освіти при вивченні геометричних перетворень.

Апробація результатів. Основні положення наукової роботи обговорювались на ІІ Всеукраїнській науково-практичній конференції «Підготовка педагогів до професійної діяльності в умовах змішаного навчання», яка проводилась 30-31 травня 2023 року в Рівненському державному гуманітарному університеті.

Розділ 1. Науково-теоретичні основи дослідження теми

1.1. З історії розвитку геометричних перетворень

Теорія геометричних перетворень виникла у зв'язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Перші спроби відобразити на плоскому рисунку природні форми предметів здійснювалися задовго до виникнення писемності − люди малювали на стінах печер, скелях, посуді різноманітні рослини, тварин тощо.

Тривала практика підказувала митцям, як передати на рисунку зображуваний предмет, − так зароджувалося вчення про відповідності й перетворення. Раніше за інші були встановлені й вивчені закони перспективи. Стародавні греки дотримувалися їх уже в V - IV ст. до н.е.

В епоху Відродження з'явилися перші фундаментальні дослідження з теорії перспективи, це роботи видатних художників Леонардо да Вінчі (1452-1519) і Альбрехта Дюрера (1471-1528). Розробником математичних основ теорії проективних перетворень (теорії перспективи) став французький інженер і архітектор Жерар Дезарг (1593-1662).

Завдяки теорії перспективи вдалося досягнути достатньої наочності зображень. Однак технічний прогрес вимагав точного відтворення об'єктів із дотриманням розмірів.

Багато вчених доклали зусиль до створення теорії взаємно однозначних відповідностей на площині й у просторі. Серед них французький математик Мішель Шаль, який довів фундаментальну теорему про геометричні перетворення (відома як теорема Шаля - будь-яке зображення зберігає орієнтацію, рух на площині являє собою або поворот, або паралельне перенесення).

Підсумував наукові пошуки в галузі геометричних перетворень французький геометр Гаспар Монж (1746-1818), створивши новий розділ геометрії − нарисну геометрію.

Здобутки вчених у вивченні перетворень склали математичну основу для розвитку багатьох галузей сучасної техніки.

Пізніше на основі розподілу геометричних перетворень на групи було виділено ще декілька розділів геометрії − афінна, проективна та інші. Здобутки вчених у вивченні перетворень склали математичну основу для розвитку багатьох галузей сучасної техніки. [4]

Геометричні перетворення розглядались ще за часів Евкліда, проте в різні періоди розвитку математики їм приділялась неоднакова увага. Евклід уникав говорити про переміщення. Його послідовники також намагалися менше використовувати переміщення в геометрії. Д. Гільберт побудував геометрію, в якій зовсім не згадувалось поняття переміщення. В середній школі досить довго викладали геометрію, майже не використовуючи це поняття.

Проте розвиток геометричної науки показав, що нехтувати цим поняттям у геометрії не слід. Виявилось, що воно відіграє важливу роль у геометрії.

Поштовх у розвитку ідеї геометричних перетворень зробив німецький математик Фелікс Клейн (кін. 19 – почат. 20 ст.). Він запропонував зробити геометричні перетворення провідною ідеєю геометрії. Хоча цілком реалізувати її не вдалося, однак у 60-х роках XX ст. у період активізації руху за реформу, цікавість до геометричних перетворень у шкільному курсі знову зросла.

У прийнятій 1968р. програмі шкільного курсу геометричні перетворення вважалися однією з провідних змістових ліній геометрії і основою для доведення теорем та розв'язування задач.

Вперше значну увагу цьому матеріалу було приділено відомим вітчизняним математиком і методистом А.Н. Колмогоровим. Цей погляд було реалізовано у навчальних посібниках А. М. Колмогорова (планіметрія) та З. О. Скопця (стереометрія). В підручниках Погорєлова А. В. й Атанасяна Л.С. рух та перетворення подібності розглядалися як об'єкт вивчення, ніж апарат для розв'язування задач. Спроба в цих посібниках трактувати геометричні перетворення як відображення площини (простору) на себе з використанням термінології і символіки множин призвела до труднощів у сприйманні. [22] У підручнику Погорєлова О.В. рухи вивчались у 8 класі, а подібність фігур – у 9 класі.

Ідея перетворень є однією з провідних у сучасній математичній науці і в різних галузях її застосувань.

У деяких підручниках передбачено вивчення у 8 класі центральної та осьової симетрії без зв'язку з рухом, теми «Подібні трикутники» – без зв'язку з поняттям перетворення подібності.

Переміщення (рухи) розглянуто у 9 класі. Рухи пов'язані з такими важливими поняттями, як механічний рух і симетрія в природі й мистецтві. Ця тема служить загальному розвитку учнів і сприяє підвищенню інтересу до курсу геометрії.

1.2. Значення геометричних перетворень в процесі навчання математики

Теорія геометричних перетворень відіграла важливу роль у формуванні поглядів на предмет геометрії. Якщо проаналізувати основні теореми і положення, які вивчають у курсі елементарної геометрії, то можна зробити висновок, що в цій дисципліні вивчають такі властивості геометричних фігур, які не змінюються при певних геометричних перетвореннях. У більшості випадків такими перетвореннями є перетворення подібності або руху. У деяких випадках розглядають властивості, які не змінюються при загальних перетвореннях.

Теорія геометричних перетворень лежить в основі загального означення геометрії, яке дає можливість виявити подібності і відмінності між різними гілками цієї дисципліни.

Нехай α — деяка група перетворень точок площини. Фігуру F називатимемо еквівалентною фігурі P відносно групи перетворень α, якщо в множині α існує таке перетворення, яке фігуру P переводить у фігуру F.

Якщо фігура P_1 еквівалентна фігурі P_2, то в множині α міститься таке перетворення F, яке фігуру P_1 переводить у фігуру P_2, але в цій самій множині α міститься перетворення F_1, яке фігуру P_2 переводить у фігуру P_1. Отже, якщо фігура P_1 еквівалентна фігурі P_2, то P_2 еквівалентна P_1.

Слово «еквівалентність» замінюють словом «рівність». Зокрема, ці терміни використовують тоді, коли α є група рухів. Якщо α - група перетворень подібності, то термін «еквівалентність» замінюють терміном «подібність».

Дамо загальне означення геометрії. Геометрія – це наука, що вивчає такі властивості фігур, які не змінюються при всіх перетвореннях деякої групи α. З цього означення випливає, що коли дві групи еквівалентні, то вони мають ті самі властивості, які називають геометричними. Серед геометрій найбільш поширені: афінна геометрія, де як групу α беруть групу афінних перетворень; евклідова геометрія, де як групу перетворень взято групу перетворень подібності або головну групу, і симетричну геометрію, де за α прийнято групу рухів. Кожна з цих геометрій є змістовною самостійною наукою.

Вступні поняття руху використовував і Евклід, зокрема рівність фігур він означав за допомогою суміщення, а сферу уявляв як результат обертання півкола навколо діаметра. Але намагався не говорити про рухи. Його послідовники також менше намагалися використовувати рухи в геометрії.
Д. Гільберт побудував геометрію, в якій зовсім не згадувалось поняття руху. В середніх школах досить довго викладали геометрію, майже не використовуючи цього поняття.

Проте нехтувати цим поняттям у геометрії недоцільно. Виявилось, що воно, як і взагалі геометричні перетворення, у геометрії відіграє важливу роль. Ф. Клейн геометричні перетворення поклав в основу означення геометрії: геометрія — це наука, яка вивчає властивості фігур, що зберігаються при перетвореннях деякої групи перетворень.

Були спроби і шкільний курс геометрії будувати на основі геометричних перетворень, але вони виявились невдалими.

Здебільшого розглядають геометричні перетворення всієї площини чи простору. Так, геометричним перетворенням площини називають відображення площини на себе, при якому будь-які дві різні точки мають різні образи.

Найважливішими перетвореннями площини є:

а) рухи (осьова і центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення);

б) перетворення подібності (усі вони зводяться до гомотетії і руху);

в) афінні перетворення (усі вони зводяться до стиску і перетворення подібності);

г) кругові перетворення (всі вони зводяться до інверсії і перетворення подібності).

В сучасній загальноосвітній школі розглядають тільки рухи і перетворення подібності. Учнів ознайомлюють не з перетворенням всієї площини, а тільки з перетвореннями окремих фігур на площині. Пояснювати доцільно так: «Якщо кожну точку даної фігури змістити яким-небудь способом, але так, щоб різні точки даної фігури перейшли у різні точки одержаної, то говорять, що ця фігура утворилась перетворенням даної».

Хоч тепер, геометричні перетворення в шкільній геометрії і не відіграють такої ролі, як раніше, але не слід їх недооцінювати. Ця тема сприяє загальному розвитку учнів і насиченню курсу геометрії живим матеріалом.

В пропедевтичному плані деякі рухи розглядаються ще в 5 класі. Систематично ж рухи фігур на площині вивчаються в 7 класі. Ще недавно їх називали переміщеннями, але від цього терміну школа відмовилась. Не слід, рухи ототожнювати з механічними рухами, які вивчаються у фізиці. Механічний рух характеризується траєкторією, швидкістю, часом, а рухи, про які йдеться в геометрії, мають інші характеристики.

При введенні поняття геометричного перетворення слід навести кілька конкретних прикладів (симетрії відносно точки, симетрії відносно прямої і гомотетії) і звернути увагу учнів на те, що при двох перших перетвореннях відстані між точками зберігаються, а при гомотетії - ні. Геометричні перетворення фігур, при яких зберігаються відстані, називаються рухами. Формулюючи це означення, бажано розкрити учням зміст словосполучення «при яких зберігаються відстані».

Доцільно показати подібність і відмінність понять «геометричне перетворення» і «числова функція». Кожне геометричне перетворення являє собою деяку функцію, тільки області визначення і значення цієї функції є не числовими, а множинами точок.

Особливий інтерес у вивченні представляє перетворення різних фігур, тому необхідно з'ясувати, які «деформації» фігур пов'язані з тими чи іншими перетвореннями, інакше кажучи, які властивості фігур змінюються при тих чи інших перетвореннях, які залишаються незмінними.

Перетворення, які розглядаються у шкільному навчанні, відносяться до трьох груп:

а) перетворення не деформують фігури, тобто різні види рухів, що переводять будь-яку фігуру в рівну їй (при цьому лише осьова симетрія змінює орієнтацію фігури);

б) перетворення, змінюють розміри, але зберігають форму фігур, тобто переводять будь-яку фігуру в подібну їй (гомотетія і взагалі перетворення подібності);

в) перетворення, що змінюють і розміри, і форму фігур, що зберігають лише прямолінійне розташування (колінеарність) точок і паралельність прямих; це - афінні перетворення, які, хоча і не вивчаються в школі, але зустрічаються при зображенні просторових тіл на площині.

Важливо, щоб учні розуміли, який «вплив» на різні фігури має кожне досліджуване геометричне перетворення.

1.3. Особливості викладання даної теми згідно діючої програми та підручників

Ідея перетворень є однією з провідних у сучасній математичній науці і в різних галузях її застосувань.

У відповідності до програми з математики формування знань про геометричні перетворення відбувається в 9 класі. Раніше (програми з математики 1996 р., 2001 р.) тема «Рухи фігур на площині» вивчалась у 8 класі.

В діючих шкільних підручниках з геометрії матеріал представлений у вигляді двох тем: "Подібність трикутників" (8 клас) і "Геометричні перетворення" (9клас).

Тема «Подібні трикутники» раніше входила до теми «Перетворення подібності» і вивчалася у 9 класі. Такий підхід звужував кількість та тематику змістовних задач. Тому доцільним є виділення окремо подібних трикутників і вивчення їх здійснювати у 8 класі [21]

Геометричні перетворення вивчаються в основній школі в II півріччі 9 класу. Основна мета вивчення геометричних перетворень - учні повинні розуміти суть кожного виду переміщень (паралельне перенесення, симетрія відносно точки і прямої, поворот, подібність і гомотетія), знати їх властивості, вміти застосовувати вивчені означення й властивості перетворень до розв'язування задач.

Дана тема посідає важливе місце у пізнавальному та інтелектуальному розвитку особистості.

Навчання математики у 9 класах загальноосвітніх навчальних закладів здійснюється за основними підручниками: Геометрія 9 клас (автори Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.), Геометрія 9 клас (автори Єршова А. П., Голобородько В.В., Крижановський О.Ф., Єршов С.В.), Геометрія 9 клас (автори Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г.), Геометрія 9 клас (автори Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.), Геометрія для 9 класу з поглибленим вивченням математики (автори Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.). Ці підручники створено відповідно до Державного стандарту та нових програм, рекомендовані МОН України для використання в закладах загальної середньої освіти.

Детальний аналіз підручників з геометрії для 9 класу з вивчення геометричних переміщень фігур на площині засвідчив, що автори підручників по-різному підійшли до представлення відповідного навчального матеріалу. У кожному альтернативному підручнику геометрії є свої методичні переваги та недоліки. Достатньо широко у всіх сучасних підручниках геометрії для 9 класу подані добірки вправ для формування знань та умінь учнів у процесі вивчення геометричних перетворень.

Діюча шкільна програма та дані підручники передбачають вивчення переміщень в 9 класі.

У темі «Геометричні перетворення» розглянуто переміщення та його види, гомотетію, перетворення подібності, властивості цих перетворень.

Тепер подібність фігур розглядається в більш загальному, ніж у 8 класі, аспекті – як результат перетворень на площині. Значну увагу слід приділити опису переміщень за допомогою декартових координат на площині, встановленню відповідності між сутністю перетворення та його алгебраїчною інтерпретацією. Цей математичний апарат надає інструментарій для розв’язування широкого класу задач, у тому числі й тих, що розв’язувалися раніше іншими способами.

В підручнику «Геометрія. 9 клас» А. П. Єршова, О.Ф. Крижановський, С. В. Єршов дається теоретичний матеріал, вправи і задачі для розв’язування. Разом з цим, у порівнянні з попередніми підручниками, з’являються нові дидактичні акценти, пов’язані зі специфікою «геометрії методів».

Структура, обсяг і співвідносність розділів навчального матеріалу повністю відповідають діючій програмі. Однак порівняно з традиційними підходами до розгляду відповідного навчального матеріалу запропоновано декілька важливих інновацій. Зокрема, введення описового значення співнапрямлених променів дає змогу задавати паралельне перенесення напрямом і відстанню. Матеріал про основні види симетрій (центральну та осьову) доповнено відомостями про поворотну та переносну симетрії (що вкрай важливо з огляду на вивчення тригонометрії в 10 класі) та прикладами застосування геометричних перетворень у різних сферах практичної діяльності людини. Розділ «Геометричні перетворення» завершується додатковим параграфом, у якому викладено особливості відповідного методу геометрії. Значно збільшено кількість практичних вправ і задач, урізноманітнено задачі на готових кресленнях.

Ознаки подібності трикутників прийнято викладати окремо, хоча спільні ідея і засіб доведення роблять можливим одночасне сприйняття учнями усіх трьох ознак. Такий підхід не тільки прискорює процес засвоєння матеріалу, а зміцнює його у цілісну систему, оволодіння якою звільняє учнів від необхідності запам'ятовування зайвої інформації.

Розділ 2. Методика вивчення геометричних перетворень

2.1. Перетворення фігур

У шкільних підручниках поняття "геометричне перетворення" вводиться по-різному. Деякі автори наводять повне означення, тобто безпосередньо дається саме поняття, а в інших за допомогою розгляду нескладних прикладів, а також через наочний опис. [22]

В підручнику з геометрії для 9 класу Мерзляка А.Г. [16] немає означення геометричного перетворення фігур, а є наглядний опис на прикладах.

Приклад 1: На рисунку 1 зображено відрізок АВ, пряму *a* і точку О, яка не належить ні прямій *a*, ні прямій АВ. Кожній точці X відрізка АВ поставимо у відповідність точку X_1 прямої *a* так, щоб точки О, X і X_1 лежали на одній прямій. Точці А відповідатиме точка A_1, точці В - точка B_1. Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1.

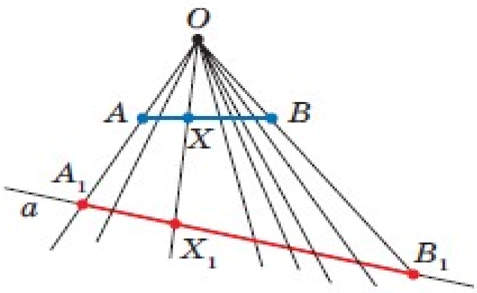


Рис.1

Це правило, за допомогою якого кожній точці *X* відрізка АВ поставлено у відповідність єдину точку X_1 відрізка A_1B_1. У цьому разі кажуть, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті **перетворення** відрізка АВ.

Приклад 2: На рисунку 2 зображено півколо АВ і пряму *a*, паралельну діаметру АВ. Кожній точці X півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої *a* так, щоб пряма XX_1 була перпендикулярна до прямої *a*. Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1. У цьому разі говорять, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті перетворення півкола АВ.

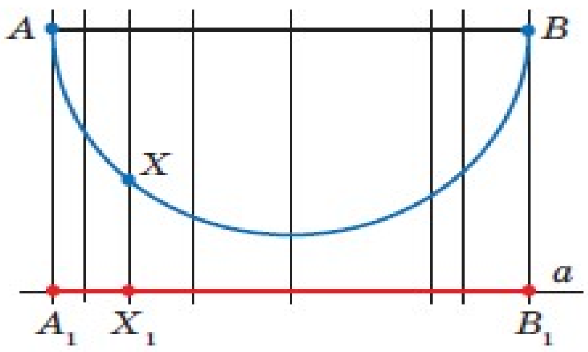


Рис. 2

Автор говорить про образ фігури і прообраз фігури.

У прикладі 1 відрізок A_1B_1 є образом відрізка AB. Точка X_1 є образом точки X. Відрізок AB – це прообраз відрізка A_1B_1.

Якщо кожну точку даної фігури змістити яким-небудь способом, то дістанемо нову фігуру. Тоді кажуть, що ця фігура утворилася перетворенням даної.

В підручнику геометрія 9 клас Єршова А.П. [4, с. 91] дається чітке означення перетворення.

Означення. **Перетворенням** фігури F у фігуру F´ називається така відповідність, за якої:

1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F´;

2) кожній точці фігури F´ відповідає певна точка фігури F;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F´ .

Фігура F´ називається **образом** фігури F при даному перетворенні.

Не кожна відповідність між точками фігур буде перетворенням цих фігур.

Нехай дано деяке перетворення фігури F у фігуру F', при якому точці X фігури F відповідає точка X' фігури F'. Перетворення фігури F' у фігуру F, при якому точці X' відповідає точка X, називається **перетворенням, оберненим до даного.**

Наприклад, відповідність, при якій кожній точці X півкола відповідає основа X' перпендикуляра, опущеного з точки на діаметр (рис. 3), є перетворенням півкола на діаметр. Перетворенням оберненим до даного, є перетворення діаметра на півколо.

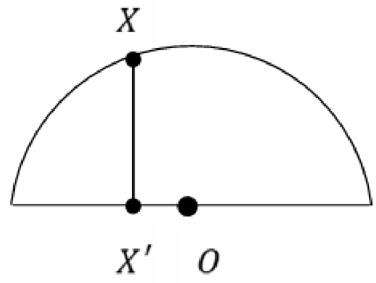


Рис. 3

Для будь – якого перетворення існує обернене перетворення.

Розглянемо тепер перетворення, при якому образом фігури F є вона сама, тобто **перетворення фігури F у себе**.

Нехай $ABCD$ - паралелограм і O - точка перетину його діагоналей (рис. 4). Кожній точці X паралелограма поставимо у відповідність точку X' перетину прямої XO із стороною паралелограма. Тоді дістанемо перетворення паралелограма у себе.

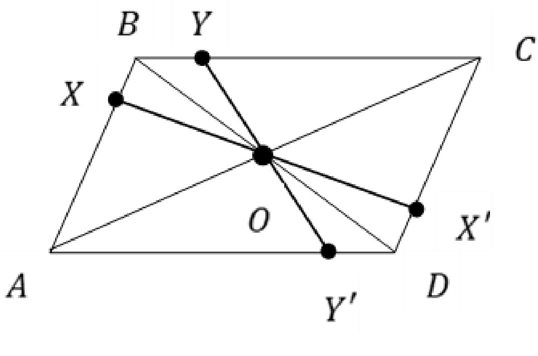


Рис. 4

2.2. Рух та його властивості

У геометрії Єршової дається означення руху [4].

Означення. **Переміщенням (або рухом)** називається перетворення фігури, внаслідок якого зберігаються відстані між точками цієї фігури.

Якщо фігура F′ є образом фігури F, отриманим унаслідок переміщення, то будь-які дві точки X і Y фігури F переходять у точки X′ і Y′ фігури F′ так, що XY=X′Y′ (рис. 5).

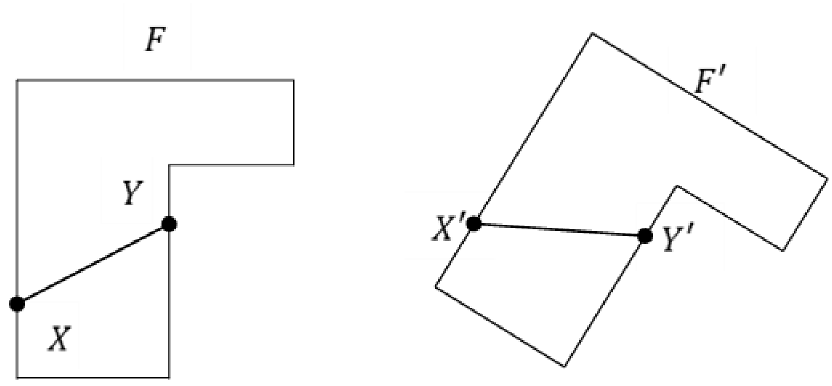


Рис. 5

Найпростішим прикладом руху є тотожне перетворення.

У підручника Мерзляка без доведень вказано властивості руху:[16]

1. Кожен відрізок даної довжини переходить у відрізок тієї самої довжини, тобто відстані між будь-якими точками зберігаються.
2. Промінь переходить у промінь, пряма – у пряму.
3. Під час руху фігура відображається в рівну їй фігуру.
4. Рух є оберненим. Відображення, зворотне руху, є рухом.
5. Композиція двох рухів також є рухом.

За підручником Бурди М. І. властивості переміщень пояснюються так:

Теорема 1. Точки, що лежать на прямій, під час переміщення переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення. Це означає, що коли точки A, B, C, які лежать на прямій, переходять у точки A_1 ,B_1, C_1, то ці точки також лежать на прямій [3].

Одне із завдань вивчення рухів у курсі геометрії – формування в учнів поняття про рівність геометричних фігур, вироблення навичок виконувати побудови за допомогою циркуля та лінійки.

Якщо шукану фігуру відразу побудувати важко, то її перетворюють у яку-небудь іншу фігуру, побудову якої можна зробити легше.

В шкільному курсі геометрії розглядається такі геометричні перетворення:

Після поняття руху наводять поняття "рівність фігур". З цим поняттям учні знайомі раніше. Дві фігури називаються **рівними**, якщо вони переводяться (суміщаються) переміщенням [4].

Якщо дві фігури поєднати одну з одною за допомогою руху, то ці фігури будуть однакові, рівні.

У підручнику Геометрія з поглибленим вивченням математики Мерзляка наводиться означення рівних фігур.

О з н а ч е н н я. Дві фігури називають **р і в н и м и,** якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої [17].

Запис $F = F_1$ означає, що фігури F і F_1 рівні.

Раніше рівними фігурами називали такі фігури, які збігалися при накладанні. Але геометричні фігури не можна накласти в буквальному розумінні цього слова. Тепер накладання фігури F на фігуру F_1 можна розглядати як рух фігури F, при якому її образом є фігура F_1.

Термін «рух» також асоціюється з певною фізичною дією: зміною положення тіла без деформації. Саме із цим пов’язана поява цього терміна в математиці.

Розглянемо введення видів переміщень

Центральна симетрія (Симетрія відносно точки)

Нехай *O* - фіксована точка, *M* - довільна точка площини (рис. 6).

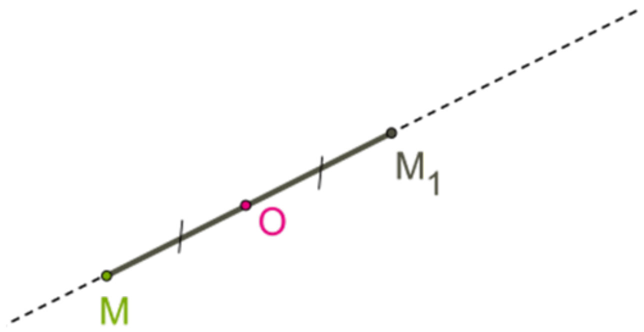


Рис. 6

1) Проводимо промінь MO;

2) по інший бік від точки O відкладаємо на промені відрізок $OM_1 = OM$.

Означення: Точки M і M_1 називаються *симетричними відносно точки* O, якщо точка O - середина відрізка MM_1.

Точкою, симетричною точці M_1 відносно точки O, є точка M. Точка O називається **центром симетрії.**

Перетворенням симетрії (симетрією) відносно точки O називають таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну точці X відносно точки O
(рис. 7)

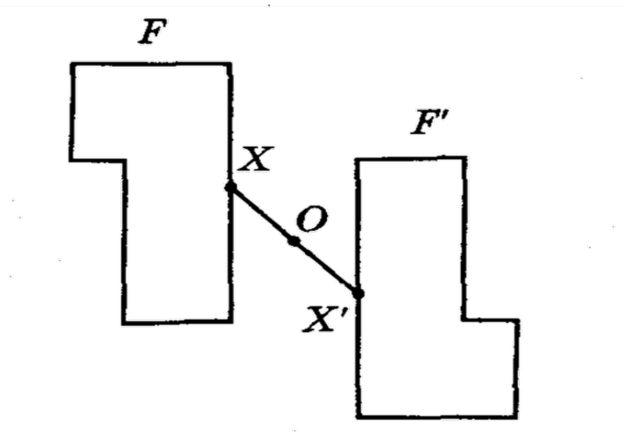


Рис. 7

При цьому фігури F і F' називають *симетричними відносно точки* O.

Симетрію відносно точки називають також *центральною симетрією.*

Розглянемо довільний паралелограм, проведемо діагоналі, точка O - центр симетрії (рис. 8).

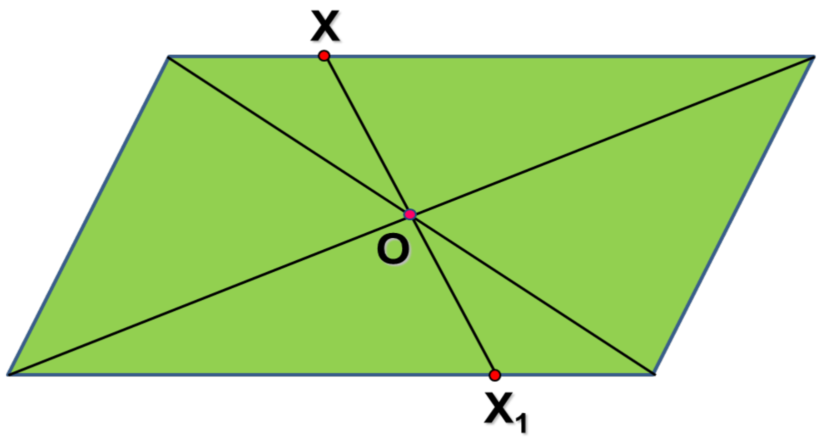


Рис. 8

Побудуємо образ паралелограма з центром симетрії – O, X_1 - образ точки X.

Даємо загальне означення центрально-симетричної фігури: якщо перетворення симетрії відносно точки O перетворить фігуру F у себе, то така фігура називається *центрально - симетричною, а точка O - центром симетрії фігури F*.

Прикладом центрально-симетричної фігури є квадрат, коло (рис. 9).

Рис. 9

Центром симетрії квадрата є точка перетину його діагоналей, а кола - його центр.

Необхідно розмежувати поняття: фігура, симетрична іншій фігурі відносно даного центру і центрально-симетрична фігура, навести необхідну кількість прикладів.

Осьова симетрія (Симетрія відносно прямої)

Нехай на площині зафіксовано пряму f і позначено довільну точку X (рис. 10). Опустимо з точки X перпендикуляр XO до прямої f і відкладемо на промені XO відрізок OX_1, який дорівнює XO. Отримаємо точку X_1, симетричну точці X відносно прямої f.

Рис. 10

Означення: Точки X і X_1 називаються *симетричними відносно прямої* f, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX_1 і проходить через його середину.

Очевидно, що точкою, симетричною точці X_1 відносно прямої f, є точка X. Точки прямої f вважаються симетричними самі собі. Пряма f є серединним перпендикуляром до відрізка XX_1 і називається *віссю симетрії*.

Далі показуємо симетрію відрізка, трикутника і довільної фігури відносно прямої.

Перетворенням симетрії (симетрією) відносно прямої a називають таке перетворення фігуру F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точки X' фігури F', симетричну X відносно прямої a (рис. 11).

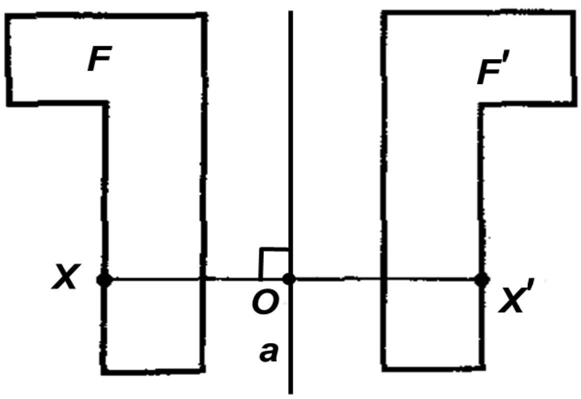


Рис. 11

При цьому фігури F і F' називають *симетричними відносно прямої a.*

Симетрію відносно прямої називають також *осьовою симетрією*.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої a переводить фігуру F у себе, то така фігура називається *симетричною відносно прямої* a, а сама пряма a - *віссю симетрії фігури F*.

Віссю симетрією рівнобедреного трикутника ABC є пряма, що проходить через вершину B перпендикулярно до основи AC, оскільки симетрія відносно цієї прямої переводить даний трикутник у себе (рис. 12)

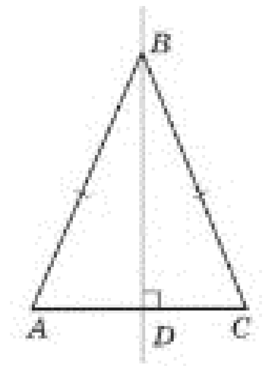


Рис. 12

Властивості осьової симетрії

- Перетворення осьової симетрії є переміщенням.
- Осьова симетрія перетворює пряму на пряму, відрізок - на відрізок, многокутник – на рівний йому многокутник.
- Точки, що належать осі симетрії, відображаються самі на себе.
- Якщо точки A(x;y) і B(x_1;y_1) симетричні відносно осі Ox, то виконується

умова $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y \end{cases}$, а відносно осі Oy - $\begin{cases} x_1 = -x \\ y_1 = y \end{cases}$.

__Поворот__

Позначимо на площині точку O й оберемо точку X (рис. 13).

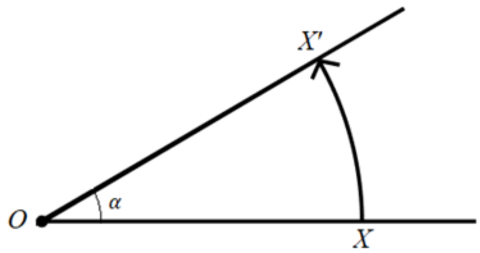


Рис. 13

Відкладемо від променя OX у заданому напрямі кут із заданою градусною мірою α і позначимо на другій стороні кута точку X' так, що

OX'=*OX*. Такий перехід точки *X* у точку *X'* є *поворотом* навколо точки *O* на кут α.

Означення: Поворотом фігури *F* навколо точки *O* на кут α називається *перетворення фігури F у фігуру* F', унаслідок якого кожна точка *X* фігури *F* переходить у точку *X′* фігури *F′* так, що *OX′*=*OX* і кут *XOX'*= α.

Точку *O* називають **центром повороту**, а кут α - **кутом повороту** (у шкільному курсі геометрії розглядаються кути повороту в межах від 0° до 360°). Окрім центра і кута, поворот задається також напрямом - за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки. Проти годинникової стрілки буде додатний кут повороту, а за годинниковою стрілкою – від'ємний (так само, як кути повороту в одиничному колі) (рис. 14).

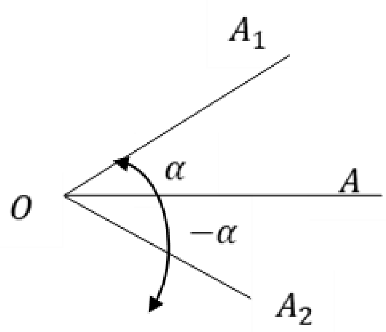


Рис. 14

Кут α в першому випадку вважається додатним , а в другому випадку від’ємним. Знак кута α визначає напрям повороту.

Поворот з центром O на кут α фігуру F переводить у ту саму фігуру F', що й поворот навколо точки O на кут $360° - \alpha$**,** але в протилежному напрямі (рис. 15). Один з кутів α або 360° — ***a*** не перевищує 180°. Отже, будь-який поворот на кут, більший від 180°, можна замінити поворотом на кут, менший від 180°.

Поворот навколо точки O на кут α позначають R_0^{α}**.**

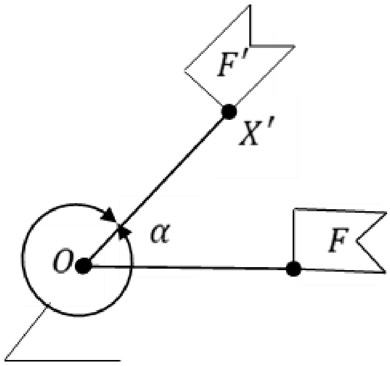


Рис. 15

Трикутник ABC повернений у додатному напрямі (приблизно на $\alpha = 45°$).

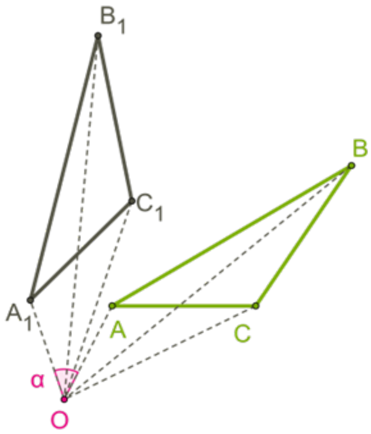


Рис. 16

Якщо кут повороту дорівнює $180°$ або $-180°$, то фігура відображається як центрально симетрична даній, і цей поворот називається центральною симетрією.

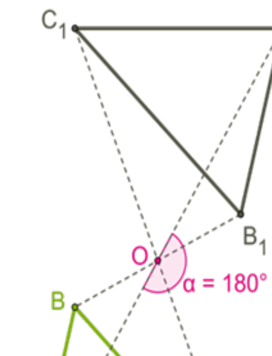


Рис. 17

Очевидно, що внаслідок будь-якого повороту положення центра повороту не змінюється. Повороти на 0° і 360° є тотожним перетворенням.

Властивості повороту

- Перетворення повороту є переміщенням.
- Центральна симетрія є поворотом на 180°.
- При повороті пряма переходить у пряму; кут – у рівний кут; відрізок – у рівний відрізок; будь-яка фігура переходить у рівну їй фігуру.
- Правильний многокутник при повороті навколо свого центра на кут <u>360°</u> переходить у себе.
- Якщо точка B(x_1; y_1) є образом точки A(x; y) при повороті на 90° відносно початку координат за годинниковою стрілкою, то виконується умова $\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = -x \end{cases}$, якщо проти годинникової стрілки - $\begin{cases} x_1 = -y \\ y_1 = x \end{cases}$.

Розглянемо фігури, зображені на рис. 18. Кожна з цих фігур внаслідок повороту навколо точки O на деякий кут переходить у себе.

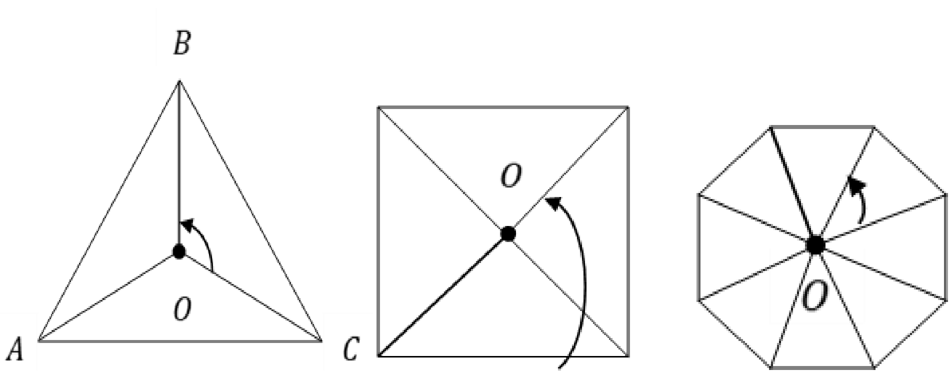


Рис. 18

Правильний трикутник переходить у себе при повороті на $120°$ (тобто $\frac{360°}{3}$) навколо його центра $O -$ центра описаного навколо трикутника кола,

квадрат переходить у себе при повороті на кут $\frac{360°}{4}$ навколо його центра,

правильний шестикутник – при повороті на кут $\frac{360°}{6}$ навколо його центра.

Паралельне перенесення

Перед введенням означення паралельного перенесення вводяться означення понять: співнапрямлені (або однаково напрямлені) промені, протилежно напрямлені промені. [4, с.107]

Два промені називаються **співнапрямленими**, якщо виконується одна з умов:

- дані промені паралельні й лежать по один бік від прямої, що проходить через їхні початкові точки;
- дані промені лежать на одній прямій, один з них є частиною іншого.

Два промені називаються **протилежно напрямленими**, якщо один із них співнапрямлений з променем, що доповнює інший.

Нехай на площині задано промінь *OA*, причому довжина відрізка *OA* дорівнює *a* (рис. 19).

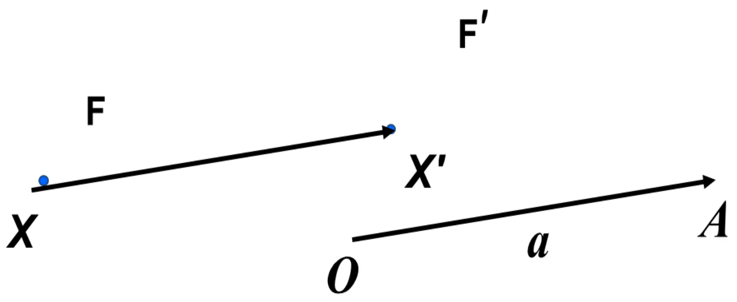


Рис. 19

Виберемо довільну точку *X* і побудуємо точку *X'* так, щоб промені *XX'* і *OA* були співнапрямлені і відрізок *XX'* дорівнював *a*. Таке перетворення точки *X* у точку *X'* є паралельним перенесенням в напрямі променя *OA* на відстань *a*.

Означення: *Паралельним перенесенням* фігури *F* у напрямі променя *OA* на відстань *a* називається перетворення фігури *F* у фігуру *F'*, унаслідок якого кожна точка *X* фігури *F* переходить у точку *X'* фігури *F'* так, що промені *XX'* і *OA* співнапрямлені і *XX'*=*a*.

На рис. 20 фігура *F′* отримана з фігури *F* унаслідок паралельного перенесення в напрямі променя *OA* на відстань *a*.

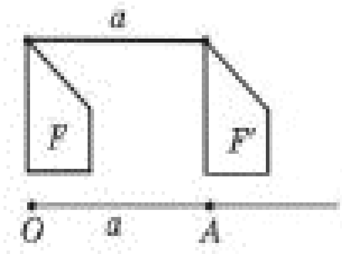


Рис. 20

Приклади такого геометричного перетворення ілюструються у прямокутній системі координат, де паралельне *перенесення* - це рух, який переводить точку (x;y) у точку (x';y'), задається формулами: $x' = x+a$, $y' = y + b$.

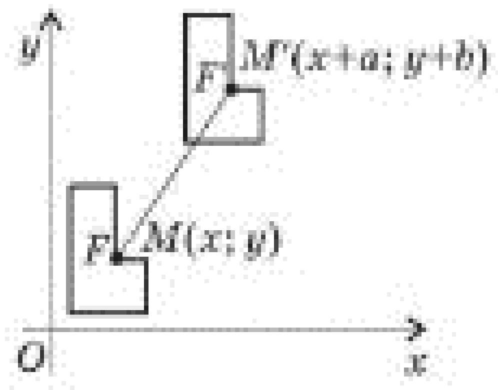


Рис. 21

Паралельне перенесення використовується для конструювання графіків функцій. На рис. 22 зображена парабола і два результати паралельного перенесення.

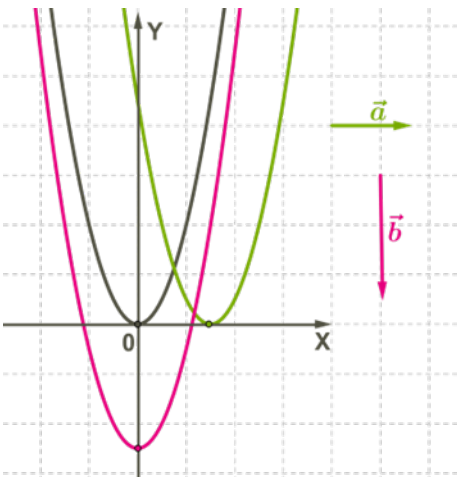


Рис. 22

Властивості паралельного перенесення:

1. Паралельне перенесення є рух.
2. При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму (або в себе).
3. Кути між прямими зберігаються.
4. Якщо точка C належить відрізку AB, то при паралельному перенесенні у відповідні точки A_1, B_1, C_1 точка C_1 належатиме відрізку A_1B_1 .
5. Композиція двох паралельних перенесень є паралельне перенесення.
6. Існує єдине паралельне перенесення, що переводить точку A у точку A_1.

Після розгляду всіх видів руху необхідно розв'язувати з учнями завдання, що направлені не тільки на виконання геометричних перетворень, а й на їх розпізнавання. Наприклад: на яких рисунках дані фігури симетричні відносно центра симетрії або відносно прямої?

При розгляді всіх переміщень необхідно підкреслювати збереження відстані між точками даної фігури і відповідними точками отриманої фігури.

Властивості геометричних перетворень можна подати у вигляді таблиці, яка заповнюється поступово: властивості руху - властивості подібності.
При вивченні властивостей руху не обов'язково, щоб учні доводили ці властивості, головне, щоб вони вміли їх виконувати.

Розгляд окремих видів геометричних перетворень здійснюється за приблизним планом:
1. Виконується побудова і одночасно проговорюється означення того чи іншого виду перетворення (конструктивне означення).
2. Пропонується завдання на побудову фігур, отриманих шляхом дії руху (перетворення подібності) на дані фігури: геометричне перетворення вводиться для точки, відрізка, трикутника, довільної фігури.
3. Неявно вводиться тотожне перетворення як перетворення, що переводить фігуру саму в себе (в підручнику Мерзляка сформульовано означення).
4. Завдання на розпізнавання.

5. Доведення того, що дане перетворення є переміщенням (перетворенням подібності) зазвичай показано за допомогою задачі на побудову із послідовним вимірюванням або обчисленням відстаней.
6. Доведення специфічних властивостей даного виду перетворень.

2.3. Перетворення подібності. Гомотетія

Після вивчення геометричних перетворень, які зберігають відстань між точками, розглядається геометричне перетворення, яке може змінювати відстані між точками, - перетворення подібності. Поняття подібності для трикутників учням знайоме з курсу 8 класу. [4, с. 117]

1 підхід. Автори підручника [Єршова] пропонують ввести поняття подібності довільних фігур і розглянути гомотетію як окремий вид геометричного перетворення подібності.

2 підхід. В підручнику Мерзляка розглядається гомотетія як вид геометричного перетворення і узагальнюється поняття подібності довільних фігур як результат композиції двох перетворень: гомотетії і руху.

У підручника геометрія Єршової А.П. дається означення: **Перетворенням подібності** (подібністю) називається таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого відстань між точками змінюється (збільшується чи зменшується) в тому самому відношенні *k* (k > 0). [4]

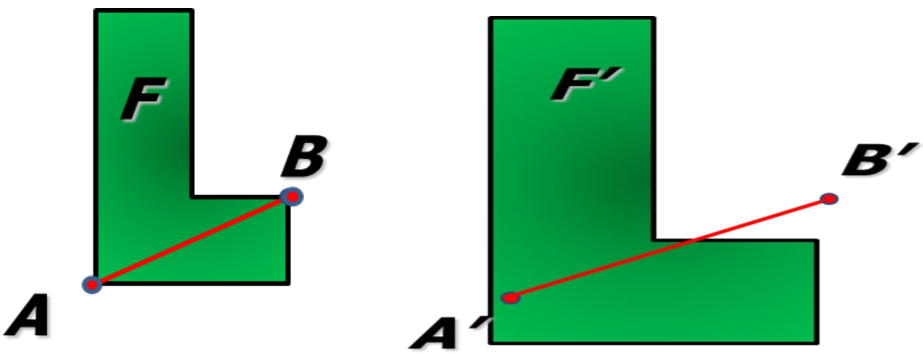


Рис. 23

Це означає, що коли точки A і B фігури F унаслідок перетворення подібності переходять у точки A´ і B´фігури F´, то A´B´=kAB (рис. 23).

Число k називають **коефіцієнтом подібності** і є додатним числом. При $k = 1$ відстані між точками фігури зберігаються, перетворення є рухом;
якщо коефіцієнт подібності менший від одиниці, то відстань між точками зменшується;
якщо коефіцієнт подібності більший від одиниці, то відстань між точками збільшується.

Перетворення подібності переводить прямі в прямі, промені — в промені, відрізки — у відрізки. Так само, як і переміщення, перетворення подібності зберігає кути між променями.

Нехай на площині зафіксовано точку O, точка X — довільна точка фігури F (рис. 24). Відкладемо на промені OX відрізок OX′, що дорівнює kOX (k — фіксоване додатне число). Провівши такі побудови для кожної точки фігури F, одержимо фігуру F′, яка є образом фігури F, отриманим унаслідок перетворення, що називається **гомотетією**.

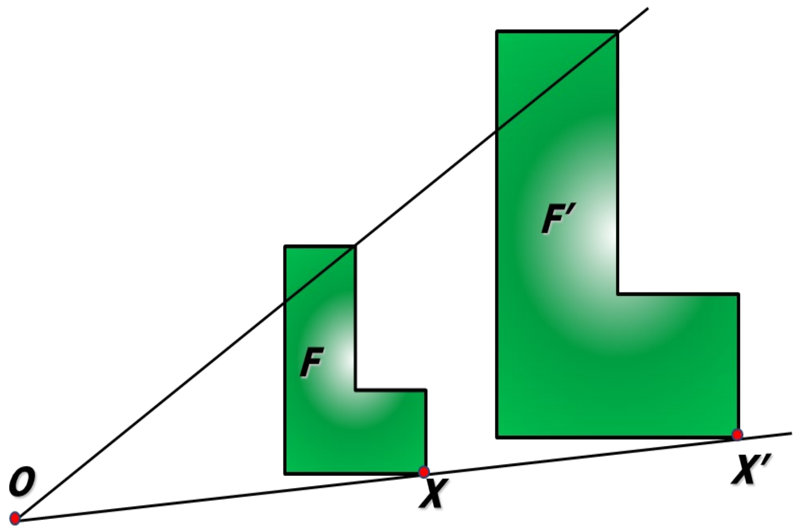


Рис. 24

Означення (автор підручника Єршова А.П.): **Гомотетією** з центром O називається таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', так що точка X лежить на промені OX і OX' = kOX (k - фіксоване додатне число). [4]

Число k називають коефіцієнтом гомотетії, а самі фігури F і F′ — гомотетичними.

У підручнику Мерзляка не дається строгого означення гомотетії, а вводиться при розгляданні конкретних прикладів в контексті.

Нехай F − дана фігура і O − фіксована точка (рис. 25). Через кожну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX' , що дорівнює $k \cdot OX$, де $k > 0$. Дістанемо фігуру F'.

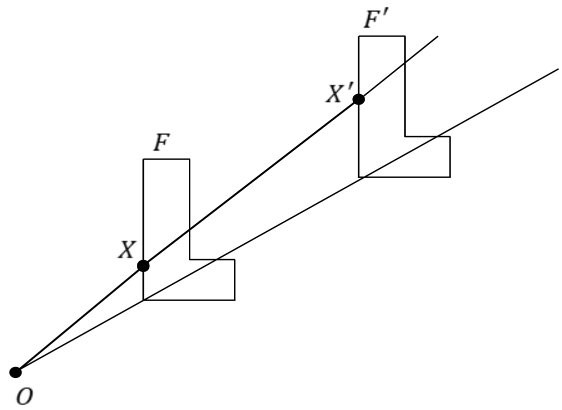


Рис. 25

Якщо $k > 0$, то для кожної точки X фігури F знайдемо точку X' фігури F', відклавши відрізок $OX' = k \cdot OX$ так, щоб пів прямі OX і OX' були доповняльними (рис. 26).

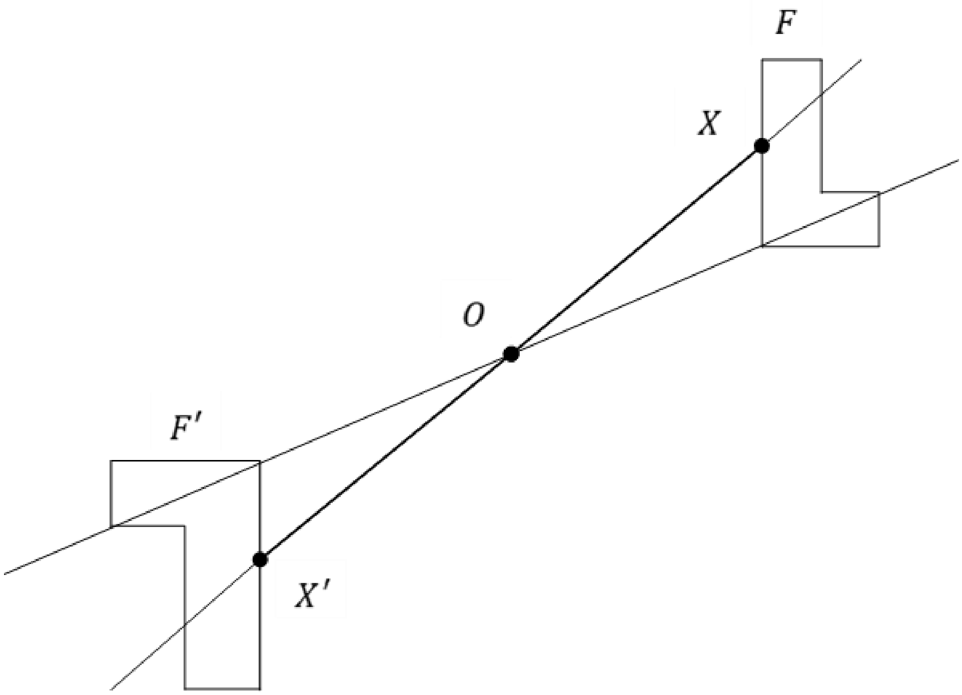


Рис. 26

Розглянуті способи побудови фігури F' приводять нас до перетворення, яке називається гомотетією.

Перетворення фігури F у фігуру F' називається **гомотетією**, якщо воно переводить кожну точку X фігури F у точку X' фігури F' так, що $OX' = k \cdot OX$, де $k -$ будь яке число, відмінне від нуля, $O -$ фіксована точка.

Число k називається **коефіцієнтом гомотетіії,** точка $O -$ **центром гомотетії**. Фігури F і F' називаються **гомотетичними**. Гомотетією з центром O і коефіцієнтом k позначають H_O^k.

При гомотетії відрізка, променя, прямої образами є відповідно відрізок, промінь, пряма. При гомотетії кута образом є кут, рівний даному. При гомотетії трикутника образом є трикутник, подібний даному.

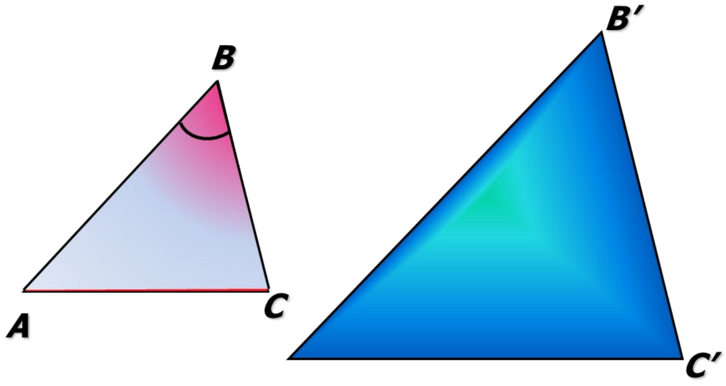


Рис. 27

Трикутник ABC подібний трикутнику A´B´C´ (рис. 27)

∠ABC=∠A´B´C´

Якщо перша фігура подібна другій фігурі з коефіцієнтом k, то друга фігура теж подібна першій фігурі, але з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$ (обернене до k).

Перетворення подібності з коефіцієнтом k=1 є рухом. [17]

Слід зазначити, що при k=-1 гомотетія є центральною симетрією відносно центра О (рис. 28), якщо k=1, то гомотетія є тотожним перетворенням.

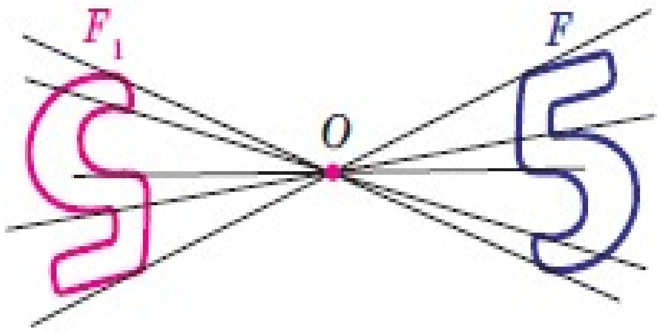


Рис. 28

При $k\neq 1$ і при $k\neq -1$ гомотетія не є рухом.

Задати гомотетію можна різними способами, наприклад, центром і парою відповідних точок (всі три точки розташовані на одній прямій), двома парами відповідних точок, коефіцієнтом та центром гомотетії. Гомотетію фігури F з центром у точці $\boldsymbol{O}$ і коефіцієнтом k позначають $H_0^k(F)$ [18].

Означення [Мерзляк]: Дві фігури називають п о д і б н и м и, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху.

Це означення ілюструє схема

Подібність = Гомотетія + Рух

Запис $F \sim F_1$ означає, що фігури F і F_1 подібні. Говорять, що фігура F_1 - образ фігури F при перетворенні подібності.

При перетворенні подібності фігури F відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.

Оскільки тотожне перетворення є рухом, зі схеми випливає, що гомотетія це окремий випадок перетворення подібності.

Подібність фігур означає, що незалежно від розмірів і положення на площині ці фігури мають однакову форму.

Гомотетичні фігури подібні, але подібні фігури не завжди гомотетичні (в гомотетії важливе розташування фігур).

В орнаментах можна бачити безліч подібних фігур, але зазвичай вони не гомотетичні, тому в них неможливо визначити центр гомотетії.

2.4. Методи геометричних перетворень

У підручнику Геометрія 9 клас Єршової є параграф, в якому розглянуто методи геометричних перетворень.

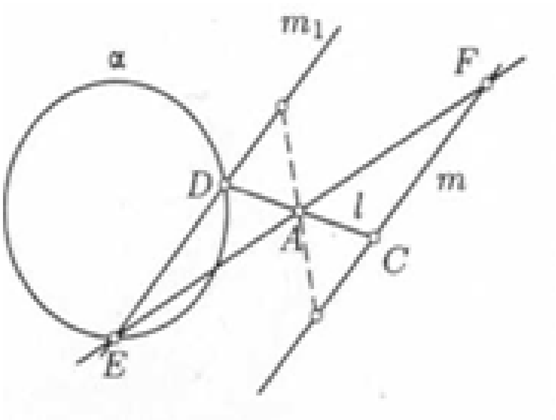
Ідея застосування методів геометричних перетворень до розв'язування задач на побудову така: якщо властивості шуканих елементів фігури, яку потрібно побудувати, неможливо знайти при безпосередньому вивченні малюнка (ескізу), то перетворюють геометрично або всю фігуру, зображену на малюнку (ескізі), або її елементи. Після цього легше виявити властивості шуканих елементів фігури і знайти спосіб побудови. [18]

В залежності від того, яке геометричне перетворення використовують відповідно й називається метод - методом "паралельного перенесення", методом "осьової симетрії", повороту.

Метод центральної симетрії

Симетрією щодо точки О (центральною симетрією) Z_0 простору називається перетворення простору, який точку О відображає на себе, а будь-яку іншу точку М відображає на таку точку M_1, якщо точка О є серединою відрізка MM_1.

Даний метод застосуємо до тих задач, в умові яких зазначена точка, що є центром шуканої симетрії або допоміжної фігури.

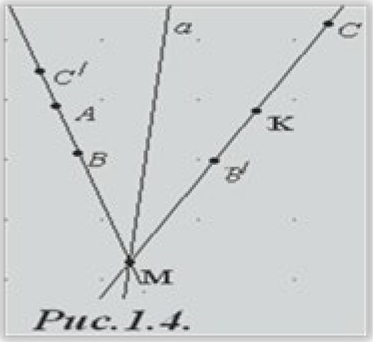


Задача. Через дану точку А провести пряму так, щоб її відрізок з кінцями на даних прямій і окружності ділився точкою навпіл.

Розв'язання. Нехай m і б — дані пряма й окружність, CD - шуканий відрізок, C$\in$ m, D $\in$a. Тоді Z_A(C) = D. Якщо $Z_A(m) = m_1$, то D$\in m_1$ і, отже, D$\in a \cap$ m_1. Звідси випливає така побудова: будуємо образ m_1 прямій m при симетрії Z_A, точки D і E перетинання прямій m_1 з даною окружністю α визначають разом із крапкою A шукані прямі DA і EA .

Метод осьової симетрії

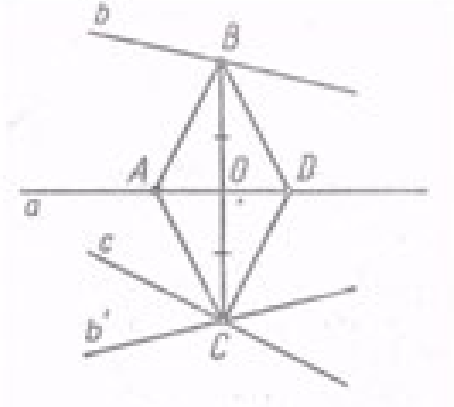
Осьовою симетрією називається таке перетворення, при якому кожній точці M даної фігури F ставиться у відповідність точка M', яка симетрична їй відносно прямої a – вісі симетрії .



Використовуючи, *метод осьової симетрії*, поряд із даними та шуканими фігурами розглядають фігури, симетричні деяким із них відносно обраної осі. Вдало обравши вісь симетрії, можна значно полегшити процес відшукання розв’язку задачі. [18]

Симетрією простору щодо даної прямої *l* (осьова симетрія) називається перетворення, яке кожну точку прямої *l* відображає на себе, а будь-яку іншу точку M простору відображає на таку точку M_1, якщо пряма *l* служить серединним перпендикуляром до відрізка MM_1. Пряма l називається віссю симетрії. Важко вказати загальні ознаки задач, які розв'язуються методом осьової симетрії. Застосування осьової симетрії доцільно для задач, які легко вирішуються, якщо частина даних розташована по одну сторону деякої прямої, а інші – по іншу.

Задача. Побудувати ромб так, щоб одна з його діагоналей дорівнювала даному відрізку r і лежала на даній прямій a, а інші дві вершини ромба лежали відповідно на даних прямих *b* і *c*.



Аналіз. Нехай ABDC — шуканий ромб, AD = *r*. Зауважимо, що задача про побудову ромба зводиться до побудови однієї якої-небудь із його вершин, наприклад вершини C. За властивостями ромба точки B і C симетричні відносно прямої a. Тому при осьовій симетрії відносно прямої a точка B перетвориться в точку C, a, отже, пряма b — у деяку пряму b', що проходить через точку C. Таким чином, точка C може бути побудована як точка перетину прямих *c* і b', з яких одна дана, а інша легко будується.

Побудова. Будуємо послідовно: пряму b', симетричну прямій *b* відносно прямої *a*; точку C, загальну для прямих *c* і b'; пряму BC; точку O; точки A і D на прямій a, що знаходяться від точки O на відстані $\frac{r}{2}$; ABCD — шуканий ромб.

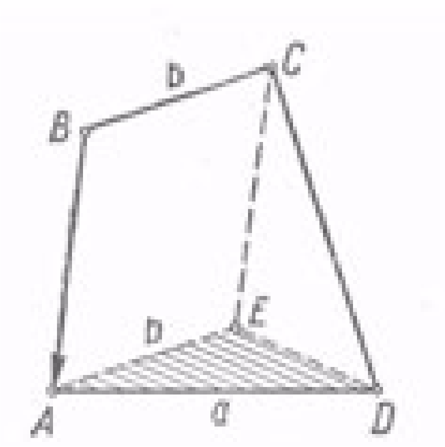
Дослідження. Можливі наступні випадки: 1) c || b', розв'язків немає; 2) c ≡ b', розв'язків нескінченно багато; 3) прямі c і b' перетинаються поза прямою *a*, один розв'язок; 4) прямі *c* і b' перетинаються на прямій *a*, розв'язків немає .

Метод паралельного переносу

Паралельним переносом на вектор $\vec{a}$ називається відображення площини на себе, при якому кожна точка M відображається в таку точку M_1, що вектор $\vec{MM_1}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Методом паралельного переносу розв’язують задачі, при аналізі яких важко знайти залежність між даними елементами, що дозволяє побудувати шукану фігуру, але якщо яку-небудь частину або всю фігуру перенесемо паралельно в деякому напрямку на певну відстань, то одержимо допоміжну фігуру, яку легко можна побудувати. Побудувавши допоміжну фігуру, виконують паралельне перенесення в протилежному напрямку на ту ж саму відстань і дістають шукану фігуру. Паралельний перенос фігури F на вектор $\overline{a}$ позначають $P_{\overline{a}}(F)$. [18]

Задача. Побудувати опуклий чотирикутник, знаючи три його кути й дві протилежні сторони.

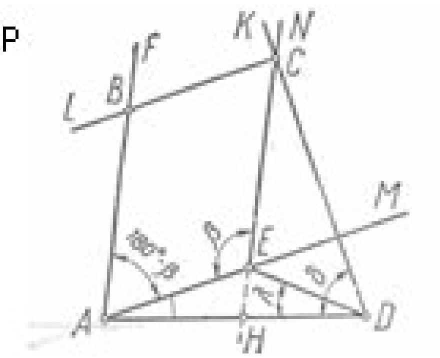


Дано два відрізки а й b і три кути б, в, д. Потрібно побудувати чотирикутник ABCD так, щоб ∠A = *б*, ∠B = *в*, ∠D = д, AD = *a*, CB = b. Передбачається, що 0° < *б* < 180, 0° < *в* < 180, 0°< *д* < 180°.

Аналіз. Допустимо, що ABCD— шуканий чотирикутник. Перенесемо сторону BC на вектор $\vec{BA}$, і нехай відрізок BC займе після переносу положення AE. Тоді в ΔAED відомі: AD = *a*, AE = *b*, ∠DAE = ∠BAD –∠ BAE = ∠A – (180° – ∠B) = *б* + *в* – 180°. За цим даними ΔAED може бути побудований.

Побудова. 1) На довільній прямій будуємо відрізок AD = a ; 2) Через точку A проводимо промінь AM під кутом *б* + *в* – 180° до променя AD; 3) Відкладаємо на промені AM відрізок AE = b; 4) Будуємо промінь EN, що утворює з EA кут *в* й розташований із точкою D по різні сторони від прямої AM; 5) Будуємо промінь DK так, щоб ∠ ADK був рівний *д* і щоб промінь DK розташовувався

.P



по ту ж сторону прямої DE, що й промінь EN; 6) Відзначаємо точку C перетин променів EN і DK — третю вершину чотирикутника; 7) Четверта вершина B знаходиться на перетині прямої AF, паралельній CE, із прямою CL, паралельній AE.

Доведення. ∠BAD = ∠BAE+∠ DAE = (180° – *в*) + (*б* + *в* – 180°) = *б*. ∠ABC = ∠CEA, як кути, сторони яких відповідно паралельні й протилежно спрямовані. ∠CEA = *в* за побудовою. ∠ADC = *д* за побудовою. Відрізок AD = *a* за побудовою. Але AE = *b*, а виходить, і BC = *b* .

Метод повороту

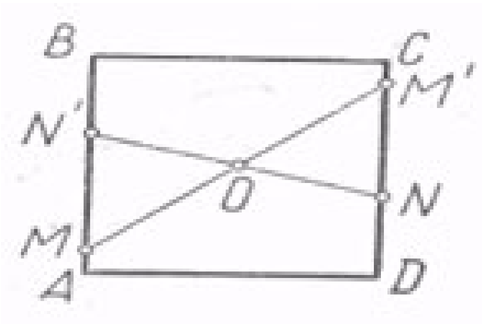
Поворотом площини навколо точки O на кут α називається відображення площини на себе, при якому кожна точка M відображається в таку точку M_1, що OM = OM_1 і кут MOM_1 = α .

Даний метод застосовується до тих задач, де або частини фігур зближаються в положення, зручне для побудови, або при заданих явно або не явно центрі й куті повороту потрібно відшукати дві відповідні точки, що лежать на даних або шуканих фігурах.

Задача. Земельна ділянка квадратної форми була обгороджена. Від огорожі збереглися два стовпи на паралельних сторонах квадрата. Крім того, залишився стовп у центрі квадрата. Потрібно відновити границю ділянки.

Аналіз. Нехай ABCD — шуканий квадрат, O — його центр, M і N- дані точки відповідно на сторонах AB і CD . Якщо повернути квадрат на 180° близько його центру O, то він перетвориться сам у себе. Точка M займе деяке положення M' на стороні CD, а точка N — деяке положення N' на стороні AB. Після цього неважко побудувати прямі AB і CD і відновити шуканий квадрат.

Побудова. 1) Будуємо точку M', симетричну M відносно O, і точку N',



симетричну N відносно O. 2) Будуємо прямі MN' і NM'. 3) Повернемо побудовані прямі близько точки O на 90°. Чотири побудовані прямі обмежують шуканий квадрат.

Дослідження. За змістом задачі неможливий випадок, коли точки M і N розташовуються із точкою O на одній прямій, але не симетричні відносно O. Якщо точки M і N симетричні відносно O, то задача стає невизначеною. В інших випадках задача має єдиний розв'язок.

Метод подібності полягає в тому, що в задачі на побудову опускають одну з умов так, щоб отримати множину подібних геометричних фігур, які задовольняють іншим умовам. Серед отриманої множини фігур буде шукана фігура. Даний метод зазвичай використовують у тих випадках, коли серед даних лише один відрізок і кути або співвідношення між відрізками.

Задати гомотетію можна різними способами, наприклад, центром і парою відповідних точок (всі три точки розташовані на одній прямій), двома парами відповідних точок, коефіцієнтом та центром гомотетії. [18]

2.5. Інверсія

У підручнику Мерзляка Геометрія 9 клас з поглибленим вивченням математики після розгляду перетворень фігур, які зберігали прямолінійність, учнів знайомлять з перетворенням фігур, яке називають **інверсією** (з латин. перегортання, обернення). Це перетворення не зберігає прямолінійність. [17]

Нехай дано коло радіуса R із центром O. Розглянемо фігуру F, якою є вся площина за винятком точки O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність таку точку X_1 променя OX, що $OX_1 \cdot OX = R^2$.

Таке перетворення фігури F називають **інверсією відносно кола** із центром O. Точку O називають **центром інверсії**.

Дане коло називають колом інверсії, число R — радіусом інверсії (рис. 29).

Інверсію з центром O та радіусом R позначають I_O^R.

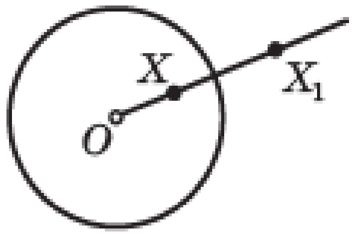


Рис.29

Вказано властивості інверсії, які випливають з означення.

Властивість 1. Образами точок, які лежать усередині кола інверсії (не включаючи центр кола), є точки, які лежать поза колом, і навпаки, образами точок, які лежать поза колом інверсії, є точки, які лежать усередині кола.

Властивість 2. Всі точки кола інверсії є нерухомими точками цього перетворення.

Властивість 3. Інверсія є оборотним перетворенням.

Властивість 4. Образом прямої, яка проходить через центр інверсії, є ця сама пряма.

Властивість 5. Образом прямої, яка не проходить через центр інверсії, є коло, яке проходить через центр інверсії.

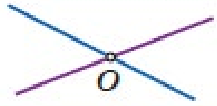
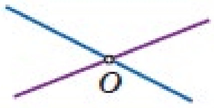
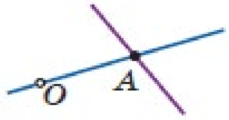
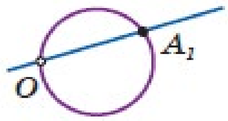
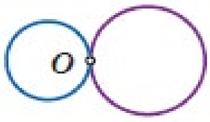
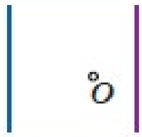
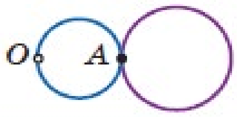
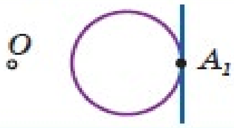
Властивість 6. Образом кола, яке проходить через центр інверсії, є пряма, яка не проходить через центр інверсії.

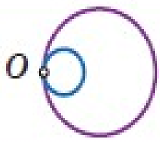
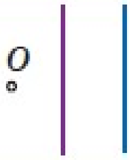
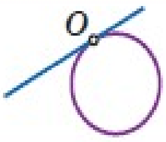
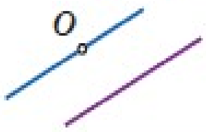
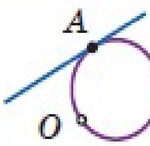
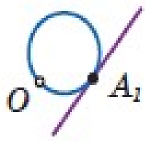
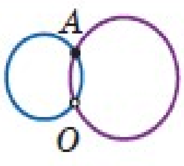
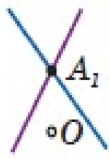
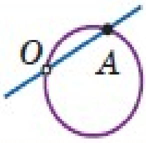
Властивість 7. Образом кола, яке не проходить через центр інверсії, є коло, яке не проходить через центр інверсії [17]

Інверсія розширює ряд задач, які можна розв’язати за допомогою перетворень фігури.

Для того, щоб розв’язати задачу на побудову методом інверсії роблять припущення, що задача розв’язана. На робочому столі зображують задані фігури і шукану. Потім дані фігури, шукану фігуру або їх елементи піддають перетворенню інверсії так, щоб одержати нову задачу, яка розв’язується простіше, ніж задана. Побудувавши допоміжну фігуру і знайшовши для неї образ при тій самій інверсії, одержують розв’язок задачі. Для використання даного методу слід вдало обрати центр інверсії (доцільно обирати центр інверсії на одному з заданих чи шуканому колах), а радіус обрати таким чином, щоб деякі точки перейшли самі в себе. Слід зазначити, що даний метод з одного боку дає можливість розв’язувати найбільш складні задачі, а з іншого – він є найбільш громіздким, що пов’язано з необхідністю виконання великої кількості побудов. [18]

Наведено приклади фігур та їхніх образів при інверсії із центром у точці O (образ показано схематично, точка A_1 — образ точки A).

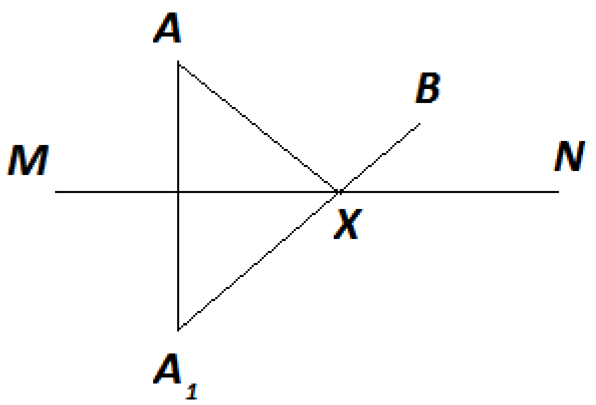
Фігура	Образ фігури
	
	
	
	

Фігура	Образ фігури
	
	
	
	
	

2.6. Розв'язування задач з використанням геометричних перетворень

Задача 1. На прямій MN знайти точку X, щоб сума відстаней від даних точок A і B була найменшою. Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої MN.

Розв'язання



1) Будуємо точку A_1, симетричну точці A, відносно прямої MN.

2) З'єднуємо точки A_1 і B.

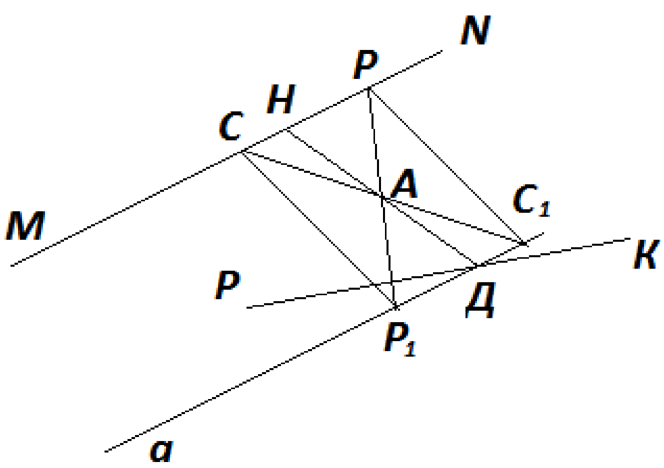
3) Точку перетину прямих MN і A_1B позначимо X.

4) Точка X – шукана. Відстань AX+XB – найменша.

Задача 2. Побудуйте відрізок, середина якого є дана точка , а кінці належать двом даним прямим.

Побудова

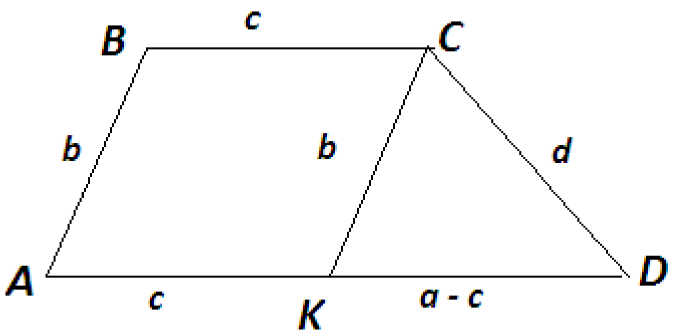
Нехай дано прямі MN, PK і точка A.



Будуємо пряму, симетричну одній з даних, наприклад MN, відносно даної точки А. Одержимо пряму а, а II MN. Точка Д – точка перетину прямих РК і а. CP_1C_1P – паралелограм, тому відрізок ДН ділиться точкою А навпіл. ДН – шуканий.

Задача 3. Побудувати трапецію за чотирма сторонами a, b, c, d, де a і c основи, b і d – бічні сторони.

Розв'язання

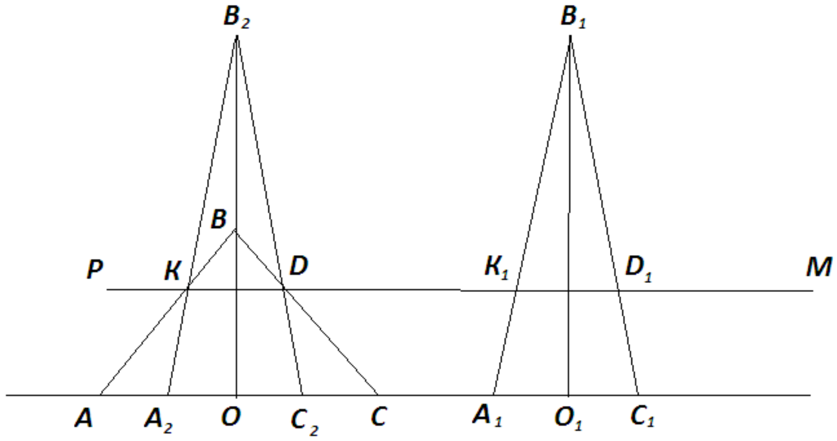


Малюємо довільну трапецію АВСД і відмічаємо на ній відомі елементи. Виконаємо паралельне перенесення АВ, одержимо СК‖АВ, СК=АВ. Одержимо трикутник СКД, в якому СК = b, СД = d, КД = a – c і будуємо його за трьома сторонами, а потім добудуємо і трапецію.

Інколи при розв'язуванні задач потрібно паралельно переносити не окремі частини фігури, а всю фігуру.

Задача 4. Через два рівнобедрених трикутника, основи яких знаходяться на одній прямій, провести пряму, паралельну основам так, щоб відрізки цієї прямої, які містяться всередині трикутників, були рівні між собою.

Розв'язання



Виконуємо паралельне перенесення трикутника $A_1B_1C_1$ так, щоб вісь симетрії одержаного трикутника $A_2B_2C_2$ співпадала з висотою трикутника ABC, тобто з BO. Точки перетину бічних сторін трикутників ABC і $A_2B_2C_2$ будуть К і Д. Пряма PM проведена через ці точки – шукана пряма. КД = $К_1Д_1$.

Задача має один розв'язок, якщо висота першого трикутника менша висоти другого, а основа першого, навпаки, більша основи другого. Задача не матиме розв'язку, якщо і основа, і висота одного трикутника будуть менше висоти і основи другого трикутника, або коли висоти рівні, а основи не рівні.

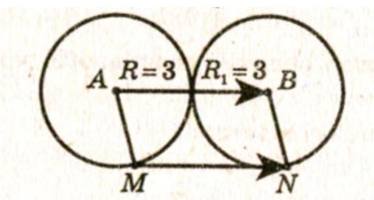
Якщо висоти і основи обох трикутників рівні, то трикутники співпадуть і задача матиме безліч розв'язків.

Задача 5. Позначте довільні точки А і В. Побудуйте коло з центром А і радіусом 3 см. Побудуйте фігуру, в яку перейде це коло під час переміщення, що переводить точку А в точку В.

Розв’язання :

$A \to B,\ R=R_1\ ;\ M \to N.$

$AB = MN.$



Задача 6. Чи існує переміщення, що переводить ΔABC у $\Delta A'B'C'$, якщо:

1. $\angle A=110^0$, $\angle B'=120^0$;
2. $\angle C=20^0$, $\angle A=60^0$;
3. AC=6 см, $A'B'=B'C'=3$ см?

Розв'язання :

1) Не існує, бо $\angle A\rightarrow \angle A'$, а якщо $\angle A'$- тупий, то $\angle B'$ повинен бути гострим.

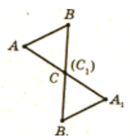
2) Існує, $\angle C\rightarrow \angle C'=20^0$, а $\angle A'$ може бути будь-яким.

3) Не існує, бо AC A'C'=6; трикутник з сторонами 3,3,6 не існує.

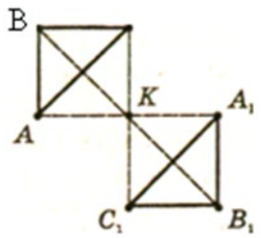
Задача 7. Дано трикутник ABC. Побудуйте фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно: 1) вершини; 2) точки K, яка лежить поза трикутником.

Розв'язання:

1) $A_1B_1C_1$ симетричний ABC відносно точки O.



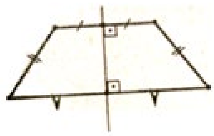
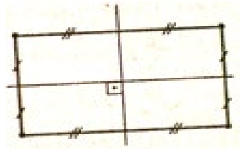
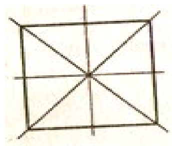
2) Трикутники симетричні відносно точки K.



Задача 8. Скільки осей симетрії може мати чотирикутник? Наведіть приклади.

Розв'язання:

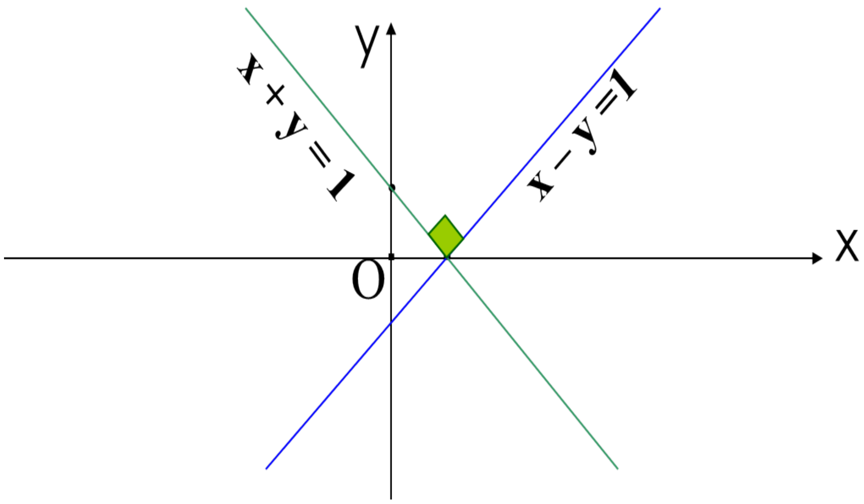
У рівнобічної трапеції одна вісь симетрії. У прямокутника і ромба - дві; у квадрата - чотири.

Задача 9. Дано пряму x + y = 1. Запишіть рівняння прямої, яка утвориться з даної внаслідок її повороту навколо початку координат на кут 90^0 за годинниковою стрілкою.

Розв’язання

За властивістю повороту довільна точка A(x; y), що належить прямій, при повороті на 90^0 відносно початку координат за годинниковою стрілкою відобразиться у точку $A_1(x_1;y_1)$, де $x_1 = y$ і $y_1 = -x$. Тому рівняння шуканої прямої матиме вид: x – y =1.



Геометричні перетворення на площині

Задача 10. Точки $A(x;2)$ і $B(-3;y)$ симетричні відносно точки $O(4;-5)$. Знайти x та y.

Розв’язання

Точка $O(4;-5)$ – середина відрізка AB. За формулами середини відрізка: $4 = \frac{x-3}{2}$ і $-5 = \frac{2+y}{2}$, звідси: $x = 11, y = -12$.

Задача 11. Знайдіть координати точок, симетричних точці $A(-2;3)$ відносно осей координат.

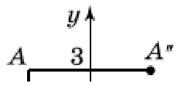
Розв’язання

Нехай точка A' симетрична точці A відносно осі x. Тоді AA' буде перпендикулярною до Ox і точка M середина відрізка AA'. Тому абсциса точки A' дорівнює абсцисі точки A, а ординати цих точок – протилежні числа. Отже, $A'(-2; -3)$.

Нехай точка A'' симетрична точці A відносно осі y. Міркуючи аналогічно, матимемо $A''(2; 3)$.

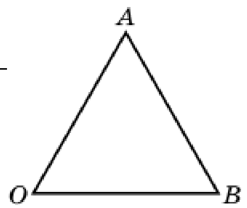
Задача 12. Трикутник AOB – рівносторонній.

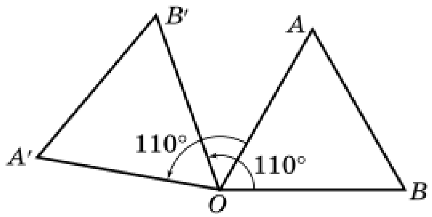
1) Побудувати відрізок $A'B'$, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут $110°$ проти годинникової стрілки.



2) Знайти градусну міру кута AOB'.

—





Розв’язання

1) Побудову зображено на правому малюнку.

2) $\angle AOB' = \angle B'OB - \angle AOB = 110° - 60° = 50°$.

Геометричні перетворення в просторі

Задача 13. Довести, що точкою, яка симетрична точці $A(x; y; z)$ відносно осі Oz, є точка $A(-x; -y; -z)$.

Доведення

1) Якщо точка A належить осі Oz, то її абсциса й ордината дорівнюють нулю, тоді точка $A(0; 0; z)$ симетрична сама собі відносно Oz. Оскільки $A'(0; 0; z)$, то у цьому випадку твердження задачі доведено.

2) Якщо точка A не належить осі Oz, то точка M – середина відрізка AA' має координати $\frac{x+(-x)}{2} = 0$ $\frac{y+(-y)}{2} = 0$ і $\frac{z+z}{2} = z$. Точка $M(0; 0; z)$ належить осі аплікат. Оскільки аплікати точок A і A' рівні, то відрізок AA' перпендикулярний до осі Oz. Таким чином, вісь аплікат є серединним

перпендикуляром до відрізка AA', а отже, точки A і A' - симетричні відносно цієї осі.

Задача 14. Записати формули паралельного перенесення, при якому точка $A(-3; 7; 11)$ переходить у точку $A'(0; 2; -1)$.

Розв'язання

$$x' = x + a; \qquad y' = y + b; \qquad z' = z + c;$$

$$0 = -3 + a; \qquad 2 = 7 + b; \qquad -1 = 11 + c;$$

$$a = 3; \qquad b = -5; \qquad c = -12.$$

Отже,

$$x' = x + 3; \qquad y' = y - 5; \qquad z' = z - 12.$$

Задача 15. Паралельне перенесення задано формулами

$$x' = x + 3; \qquad y' = y + 5; \qquad z' = z.$$

Яка точка при цьому паралельному перенесенні переходить у точку $A'(-3; 2; -7)$?

Розв'язання

Нехай це буде точка $A(x; y; z)$. Тоді,

$$-3 = x - 3; \;\; x = 0;$$

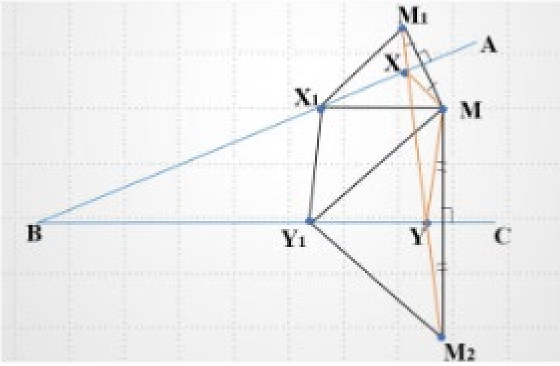
$$2 = y + 5; \;\; y = -3;$$

$$-7 = z.$$

Отже, шукана точка $A(0; -3; -7)$.

Задача 16. Дано гострий кут ABC і точка M всередині нього. Знайти на стороні кута такі точки X і Y, щоби ΔMXY мав найменший периметр.

Розв'язання



Будуємо точку M_1симетрично точці M відносно променю BAі точку M_2 симетрично точці Mвідносно променю BC. Пряма M_1M_2перетинає BAі BCвідповідно в точках Xі Y. ΔMXY– шуканий.

Треба довести, що периметр ΔMXYбуде найменшим. Візьмемо довільні точки X_1і Y_1на сторонах кута ABC, відмінні від точок Xі Y, і доведемо, що $P_{MX_1Y_1} > P_{MXY}$.

$P_{MXY} = MX + XY + YM = M_1X + XY + YM_2 = M_1M_2$,

оскільки $M_1X = MX, MY = YM_2$ як симетричні відрізки.

$P_{MX_1Y_1} = MX_1 + X_1Y_1 + Y_1M = M_1X_1 + X_1Y_1 + Y_1M_2$, оскільки $M_1X_1 = MX_1, Y_1M = Y_1M_2$як симетричні відрізки.

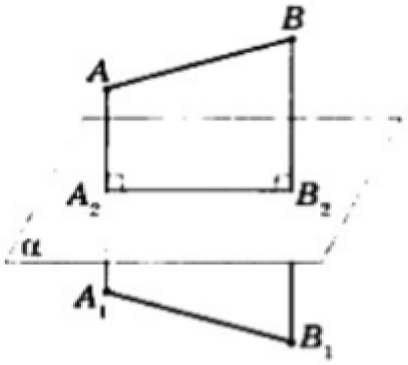
Довжина ламаної $M_1X_1Y_1M_2$більше за довжину відрізка M_1M_2, звідки $P_{MX_1Y_1} > P_{MXY}$. А це значить, що P_{MXY}– найменший.

Задача 17. Два відрізки симетричні один одному відносно площини. Яка утвориться фігура, якщо послідовно сполучити кінці цих відрізів?

Розв’язання

Нехай AB– даний відрізок, α– площина симетрії, A_1B_1– відрізок, симетричний даному відносно α, тоді $AA_1\alpha$, $BB_1\alpha$, тоді $AA_1 \| BB_1$, A_2і B_2– точки перетину AA_1і BB_1з αвідповідно. За властивістю симетрії відносно площини: $AA_2 = A_1A_2$; $BB_2 = B_1B_2$, тоді ABB_1A_1 – рівнобічна трапеція з основами AA_1і BB_1.

У випадку: $AB \| \alpha$, $ABAA_1$, тоді ABB_1A_1 – прямокутник.



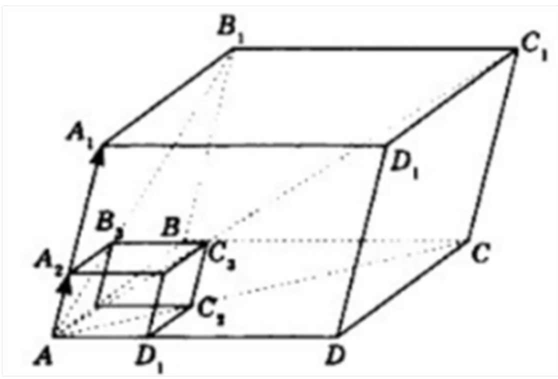
Задача 18. Дано зображення паралелепіпеда. Побудуйте зображення паралелепіпеда, гомотетичного даному з центром гомотетії у одній з його вершин і коефіцієнтом гомотетії. Знайдіть відношення площ поверхонь даного і побудованого паралелепіпедів.

Розв'язання

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед, A – центр гомотетії, $k = \frac{1}{3}$.

$AB_2C_2D_2A_2B_3C_3D_3$ – образ даного паралелепіпеда.

Оскільки при гомотетії величини кутів не змінюються, а довжини відрізків зменшуються в 3 рази, $\overline{AA_2} = \frac{1}{3}\overline{AA_1}$, то $S_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot S_1 = \frac{1}{9}S_1$, де S_1 – площа поверхні даного паралелепіпеда, а S_2 – площа поверхні образу; $\frac{S_1}{S_2} = 9$.



2.7. Застосування програмного забезпечення при вивченні геометричних перетворень та практична перевірка ефективності

Геометричні переміщення тісно поєднані із людською діяльністю, багатьма науками, природою, тому важливим фактором для розвитку пізнавальної активності учнів під час вивчення теми є міжпредметні зв’язки, які легко продемонструвати учням за допомогою комп’ютерної техніки та наочного матеріалу [20]. Поняття перетворення фігури доцільно вводити описово на наочному рівні.

В сучасній школі часто використовують електронні дидактичні матеріали - це цілеспрямовано розроблені документи з допомогою прикладних програм загального призначення. Використання електронних дидактичних матеріалів дозволить вчителю:

- інтенсифікувати процес навчання;
- підвищити мотивацію навчання за рахунок використання різних видів діяльності і джерел інформації;
- контролювати із зворотним зв'язком результати діяльності учня;
- візуалізувати навчальну інформацію;
- моделювати об'єкти, що вивчаються;
- формувати інформаційну компетенцію вчителя та учнів.

Вивчення теоретичного матеріалу потрібно супроводжувати наочним матеріалом і практичними завданнями, при цьому діти будуть сприймати не лише геометричні фігури і тіла, а й самостійно створювати та відтворювати геометричні форми. Адже отримані знання з теми використовуються школярами на практиці не тільки на уроках математики, а й у повсякденному житті.

Не завжди вчитель має достатню кількість моделей, що ілюструють відповідний теоретичний або задачний матеріал. Для вирішення цієї проблеми є використання на уроках математики комп’ютера з відповідним програмним забезпеченням.

При вивченні даної теми ефективним засобом у її засвоєнні є використання програмного забезпечення: Power Point, DG, Gran2d.

У середовищі Gran2d можна здійснювати паралельне перенесення, поворот, гомотетію, деформацію (стиснення) об’єктів типу *Точка, Пряма, Ламана, Коло* за допомогою пункту головного меню *Об’єкт/Перетворення*. В програмі доступні також такі геометричні перетворення, як інверсія та деформація, які не розглядаються в шкільному курсі геометрії.

Параметри перетворення можна задавати як через введення координат вектора чи кута повороту у відповідні поля (*Об’єкт/ Перетворення параметрично*), так і графічно через *Об’єкт/Перетворення з екрану*.
Якщо не обрати послугу *Створити результуючий об’єкт*, то вихідний об’єкт не зберігається, а замінюється його образом при перетворенні.

Приклад 1. (*Gran2d*) Дано рівні відрізки AB і A_1B_1. Знайдіть центр повороту, при якому відрізок AB переходить у відрізок A_1B_1. [5, с.127]

Спочатку знайдемо відповідь традиційними побудовами.

Нехай задано два рівних відрізки AB і A_1B_1. Для побудови точки, що є центром повороту, яким відрізки переводяться один в одного, досить визначитися з відповідністю точок (A переходить у A_1, B переходить у B_1) і побудувати серединні перпендикуляри до відрізків AA_1 і BB_1. Точка перетину серединних перпендикулярів шукана.

Побудови здійснимо вбудованими інструментами. За допомогою динамічних надписів дослідимо кути AEA_1 і BEB_1, які є кутами повороту для точок A і B – вони будуть однаковими при всяких положеннях кінців вихідних відрізків (рис. 3.1).

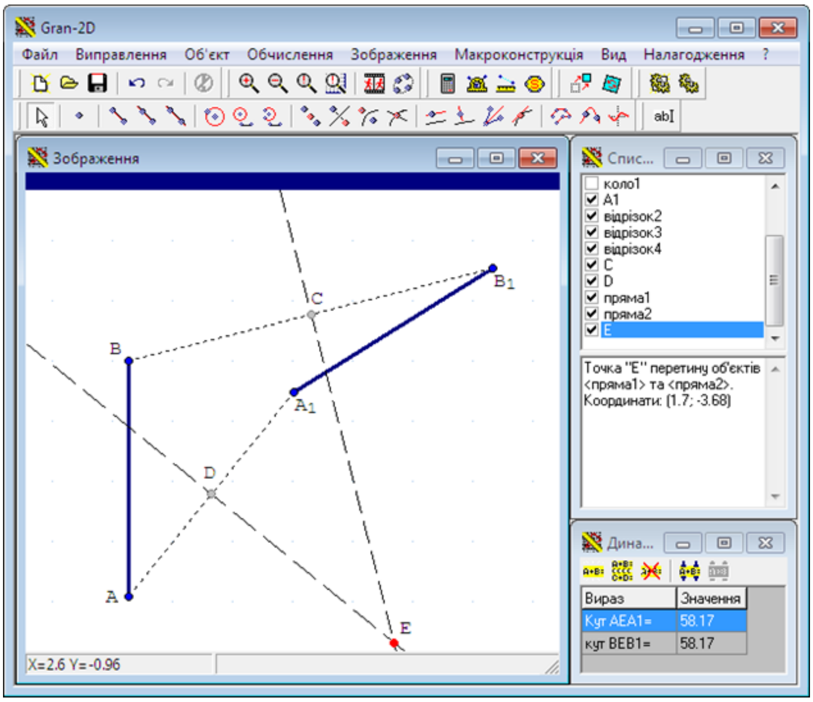


Рис. 3.1. Поворот відрізка *AB* навколо центра *E*

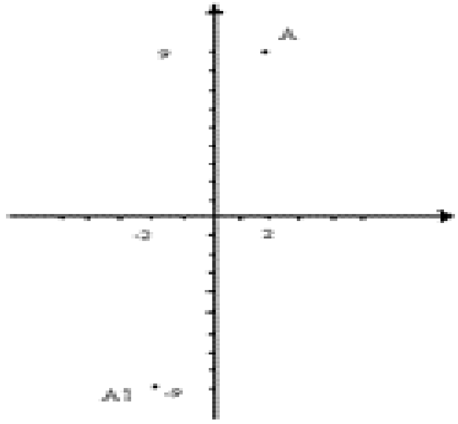
Тепер комп’ютерними інструментами середовища здійснимо поворот відрізка *AB* на зафіксований у динамічних виразах кут (*Об’єкт/ Перетворення*) і побачимо, що були створені три нові об’єкти (дві точки і відрізок на них), які повністю співпали з відрізком A_1B_1.

Зауважимо, що вбудований інструмент вчителю слід використовувати для перевірки одержаного учнем результату. Його використання відразу на початку вивчення теми не сформує розуміння суті повороту, а тому неможливим далі буде його використання при розв’язуванні інших задач.

Застосуємо програму для розв’язання задачі:

Знайдіть точку симетричну точці (2;9) відносно початку координат.

Спроектуємо точку A на вісь *x*. Маємо координату 2 і симетричну їй -2. Аналогічно спроектуємо точку на вісь *y*, симетричною буде координата -9. Отже, точкою симетричною точці A відносно початку координат буде точка A_1 з координатами (-2;-9).



За GRAN – 2D створимо задану точку, скориставшись послугою програми Об’єкт → Створити – точку. На вкладниці Конструктор об’єкта вводимо координати точки *x* і *y*, далі Застосувати.

Потім натискаємо Створення симетричної точки, після чого наводимо курсив на точку для якої створюємо симетричну і натискаємо ліву клавішу миші. Аналогічно створюємо симетричну. В результаті отримаємо точку симетричну даній (Рис. 3.2.)

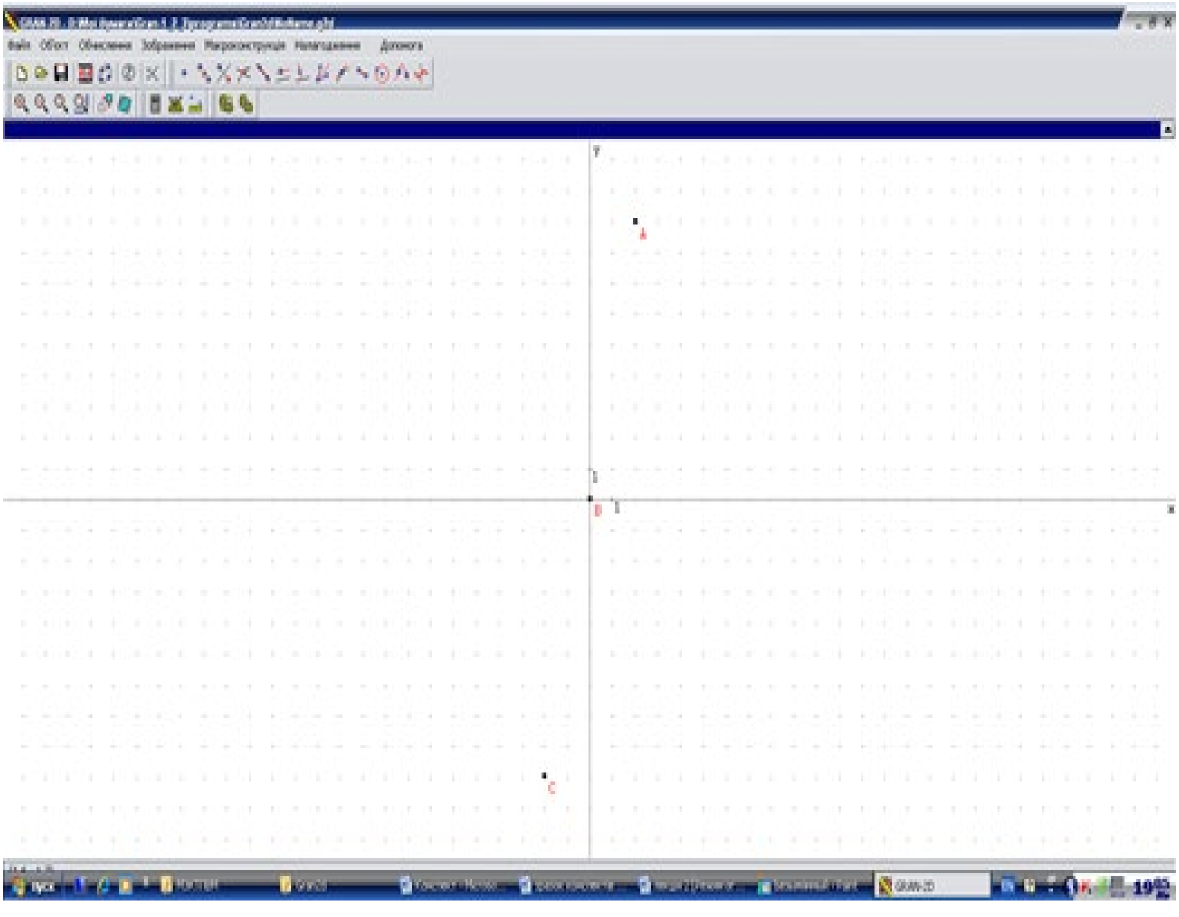
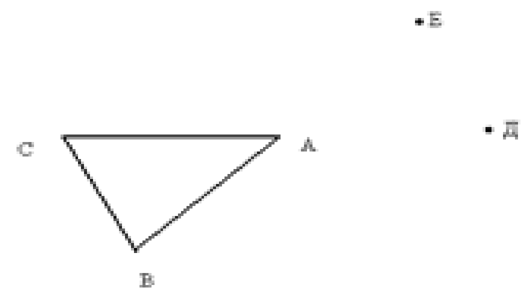


Рис. 3.2

Для побудови точок, симетричних двом вершинам трикутника відносно третьої його вершини, будуємо довільний трикутник АВС. Продовжуємо сторону ВА і від точки А відкладаємо її довжину, отримаємо точку Е, симетричну точці В. Аналогічно знаходимо точку Д симетричну точці С.



За програмою GRAN – 2D будуємо довільний трикутник АВС (Об'єкт → Створити →Ламана). У вікні Конструювання об'єкта вводимо координати вершин трикутника (довільні). Потім натискаємо на панелі інструментів кнопку Створити симетричну точку. Натискаємо лівою кнопкою миші на точці С і точці А, в результаті отримаємо точку Д симетричну С відносно А. Аналогічно будуємо точку Е симетричну точці С (рис. 3.3)

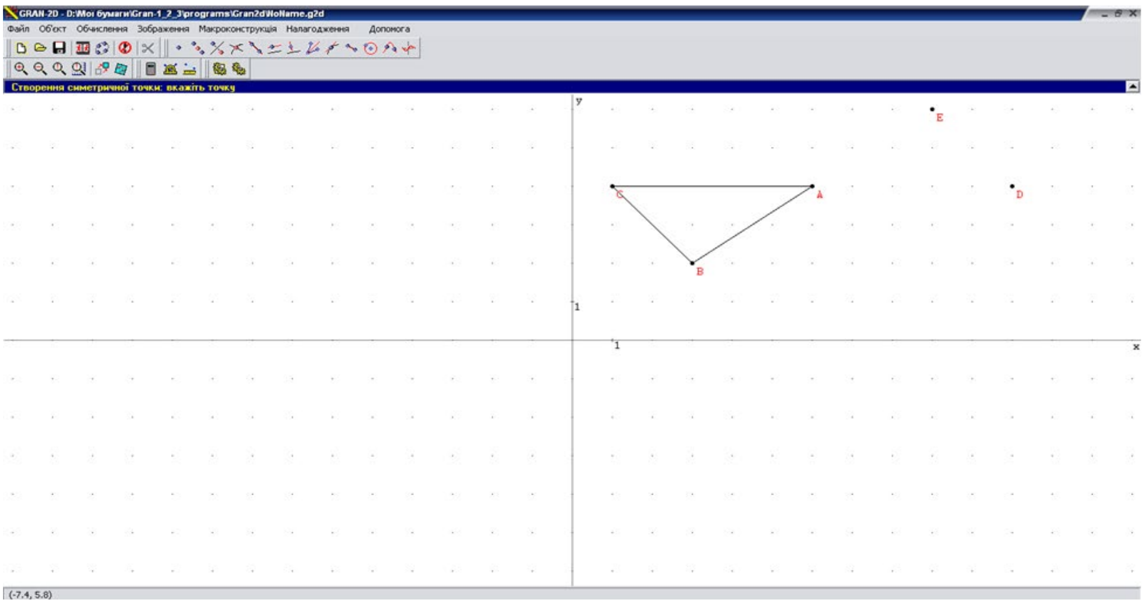


Рис. 3.3

При вивченні повороту в учнів виникають певні труднощі.

Для побудови фігури, в яку перейде трикутник ABC під час повороту навколо вершини C на кут 90° за годинниковою стрілкою, використаємо GRAN – 2D.

Спочатку побудуємо довільний трикутник ABC (Об’єкт → Створити →Ламана). У вікні Конструювання об’єкта вводимо координати вершин трикутника (довільні). Потім звернемося до послуги Об’єкт– Перетворення – Параметрично. У вікні Перетворення об’єктів вибираємо Поворот, вводимо центр повороту, кут повороту і вказуємо об’єкт, до якого застосовуватиметься операція. Натискаємо кнопку Виконати і отримуємо результат (рис. 3.4.).

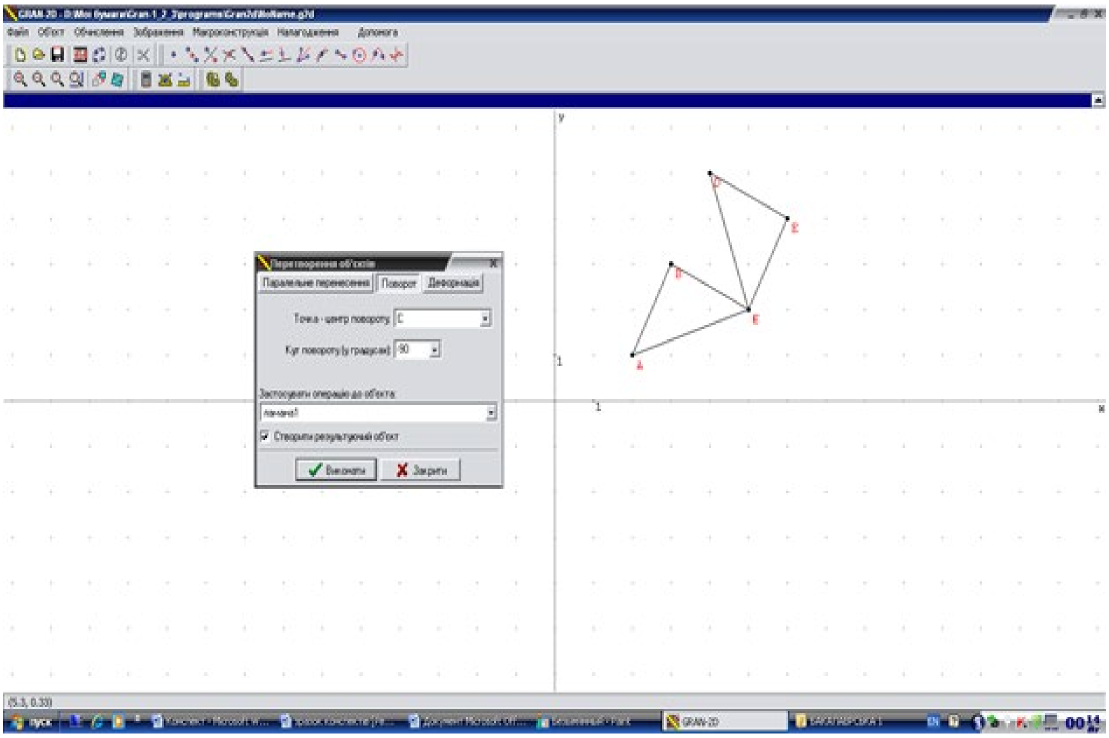


Рис. 3.4

Виконаємо подібну задачу на поворот кола навколо точки A на кут 90°, якщо точка A лежить поза колом.

В програмі GRAN – 2D цю задачу можна розв’язати таким способом.

Спочатку побудуємо коло, для цього використаємо послугу Об’єкт – Створити – Коло. Потім у вікні Конструювання об’єкта вводимо центр кола і точку через яку буде проходити коло. У вікні Перетворення об’єктів вибираємо Поворот, вводимо центр повороту (точку, що лежить за колом), кут повороту і вказуємо об’єкт, до якого застосовуватиметься операція (коло).

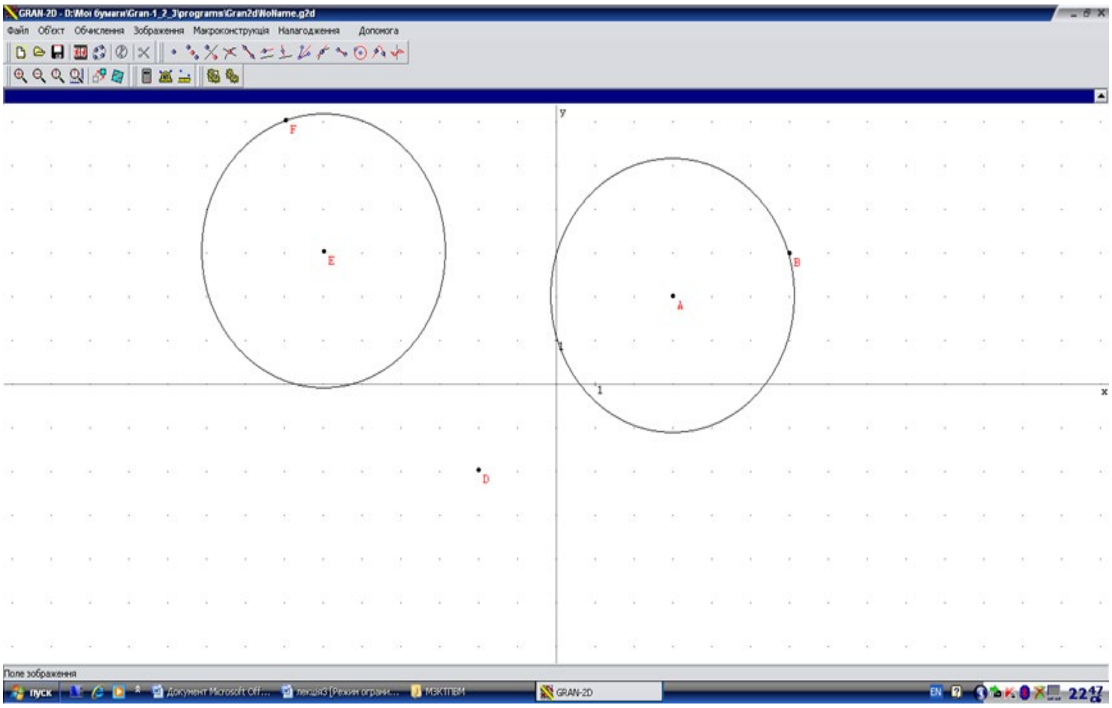


Рис. 3.5

Використання програми для побудови фігури, в яку переходить квадрат АВСД при повороті навколо вершини С на кут 60° за годинниковою стрілкою.

Через послуги Об’єкт – Створити – Ламану, вводимо координати точок і будуємо квадрат. Потім у вікні Перетворення об’єктів вибираємо Поворот, вводимо центр повороту, кут повороту і вказуємо об’єкт, до якого застосовуватиметься операція. В результаті отримаємо (рис. 3.6).

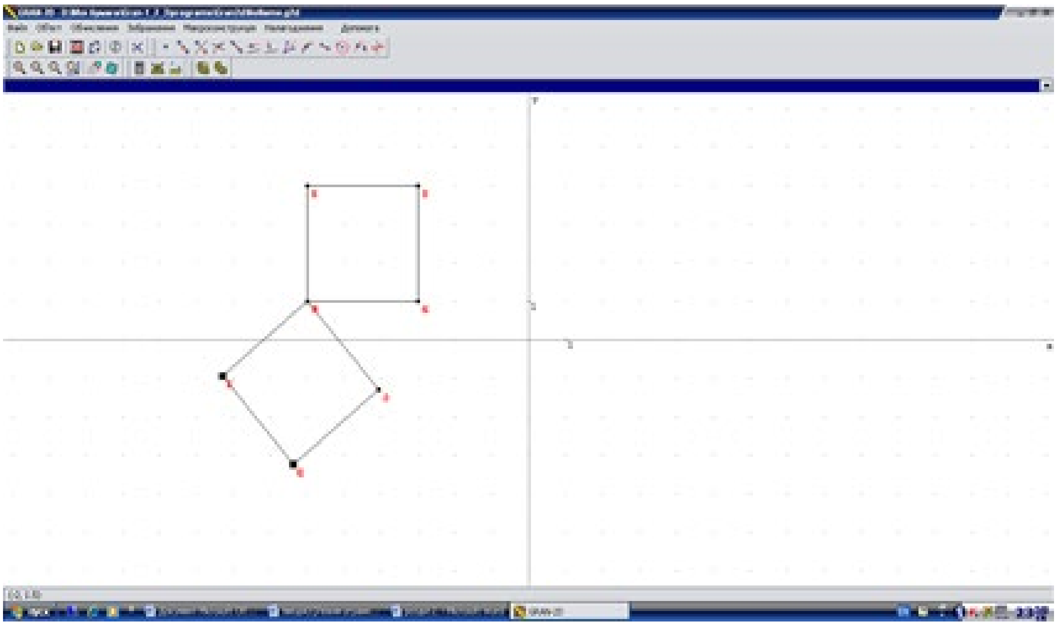


Рис. 3.6

Аналогічно виконуємо поворот прямокутника.

Об’єкт – Створити – Ламану, будуємо прямокутник (у вікні Конструювання об’єкта вводимо координати вершин прямокутника (довільні) після чого натискаємо кнопку Застосувати). У вікні Перетворення об’єктів вибираємо Поворот, вводимо центр повороту, кут повороту (150°) і вказуємо об’єкт, до якого застосовуватиметься операція. Отримаємо результат (рис. 3.7).

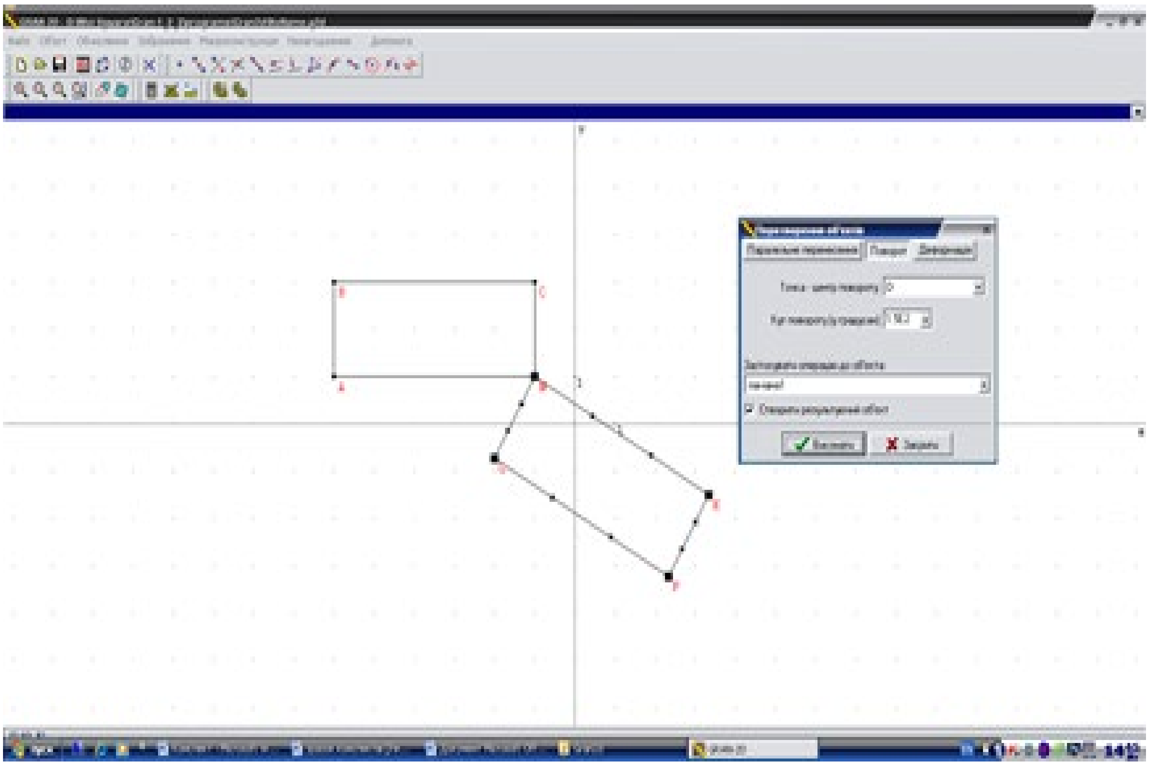


Рис. 3.7

Задача. У чотирикутнику ABCD з шести відрізків AB,AC,AD,BC,BD,CD не більше, ніж один, має довжину більшу за 10. Яку максимальну величину може мати сума AB+AC+AD+BC+BD+CD.

Дії з використанням комп’ютера виконуємо в наступній послідовності:

Створюємо точки A(0;0) та C(x;0). «Об’єкт» «Створити» «Точка» ”Конструювання об’єкта”. Координата точки C має задовільняти нерівність $10 \le x \le 20$, тому обирається довільно ($x = 16$).

Будуємо два кола з центрами в точках A і C. Для цього спочатку будуємо ще дві точки, які лежатимуть на осі Ox, відстань від яких до точок A і C відповідно дорівнюватиме 10: (-10;0),(26;0). «Об’єкт» «Створити» «Коло» «Конструювання об’єкта».

Створюємо точки перетину цих кіл (точки B і D). Щоб прискорити цей процес, потрібно на панелі інструментів за допомогою покажчика (стрілки) відшукати позначку, що відповідає послузі «Точка перетину об’єктів» та натиснути на ліву кнопку «миші». Програма запропонує вказати об’єкти, які перетинаються. Для цього достатньо по черзі навести курсор на кожне з двох кіл та натиснути на ліву кнопку «миші».

Будуємо ромб ABCD. Встановлюємо курсор на позначку, що відповідає послузі «Ламана» та натискуємо на ліву кнопку «миші». Програма запропонує вказати точки для створення ламаної. Для цього достатньо по черзі навести курсор на кожну з точок A B C D та натиснути на ліву кнопку «миші». Після цього з’являється вікно «Конструювання об’єкта» з вказаними координатами цих точок. Потрібно не забути при встановленні параметрів ламаної встановити «прапорець» біля запису «Замкнена».

Будуємо діагоналі ромба ABCD. Для цього:

а) Створюємо пряму, що проходить через точки A і C. Вибираємо позначку, що відповідає послузі «Пряма, що проходить через дві дані точки». По черзі наводимо курсор на кожну з точок A і C та натискуємо ліву кнопку «миші».

б) Створюємо точку, яка лежить посередині між точками А і С. Вибираємо позначку, що відповідає послузі «Серединна точка». По черзі наводимо курсор на кожну з точок А і С та натискуємо ліву кнопку «миші».

в) Через середину відрізка АС проводимо перпендикуляр до прямої АС. Вибираємо позначку, що відповідає послузі «Пряма, перпендикулярна до заданої прямої». По черзі наводимо курсор на серединну точку та на пряму АС і натискуємо ліву кнопку «миші».

Використання програми GRAN-2D дає можливість показувати біля зображення об’єктів числові значення величин відрізків та кутів. Використавши вказану можливість, виведемо на екран значення довжин половин діагоналей ромба та значення кута ∠BAC.

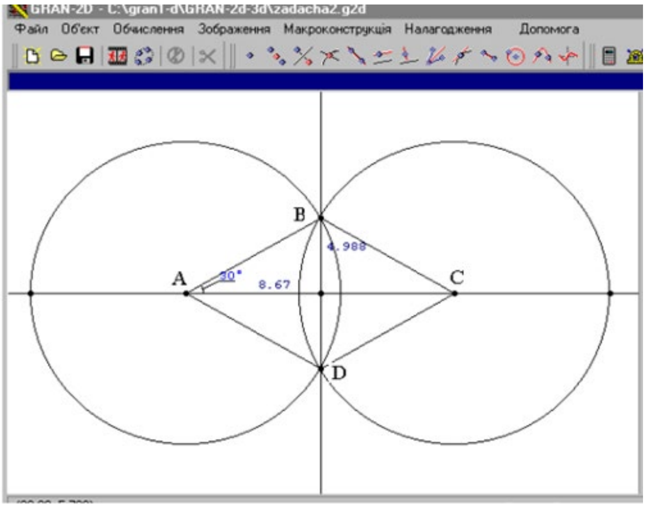


Рис. 3.8

Надзвичайно ефективною є можливість за допомогою програми GRAN-2D переміщувати зображення об’єктів безпосередньо на екрані. Навівши курсор на коло, натиснувши ліву кнопку «миші» не відпускаючи її, але рухаючи курсор, можна перемістити зображення даного кола в інше місце на екрані. При цьому змінюють своє положення точки перетину кіл, а отже і довжини діагоналей ромба. Також змінюються відповідно числові значення кута ∠BAC і половин діагоналей.

На рис. 3.9 показано саме таку умову: ∠BAC = 30°, BD = 2·4,988 = 9,976 ≈ 10, AC = 2·8,67 = 17,34.

Отже: AB+AC+AD+BC+BD+CD ≈ 40 +10 + 17,34 ≈ 67,34.

За допомогою програми здійснимо поворот довільного шестикутника проти годинникової стрілки на 77°.

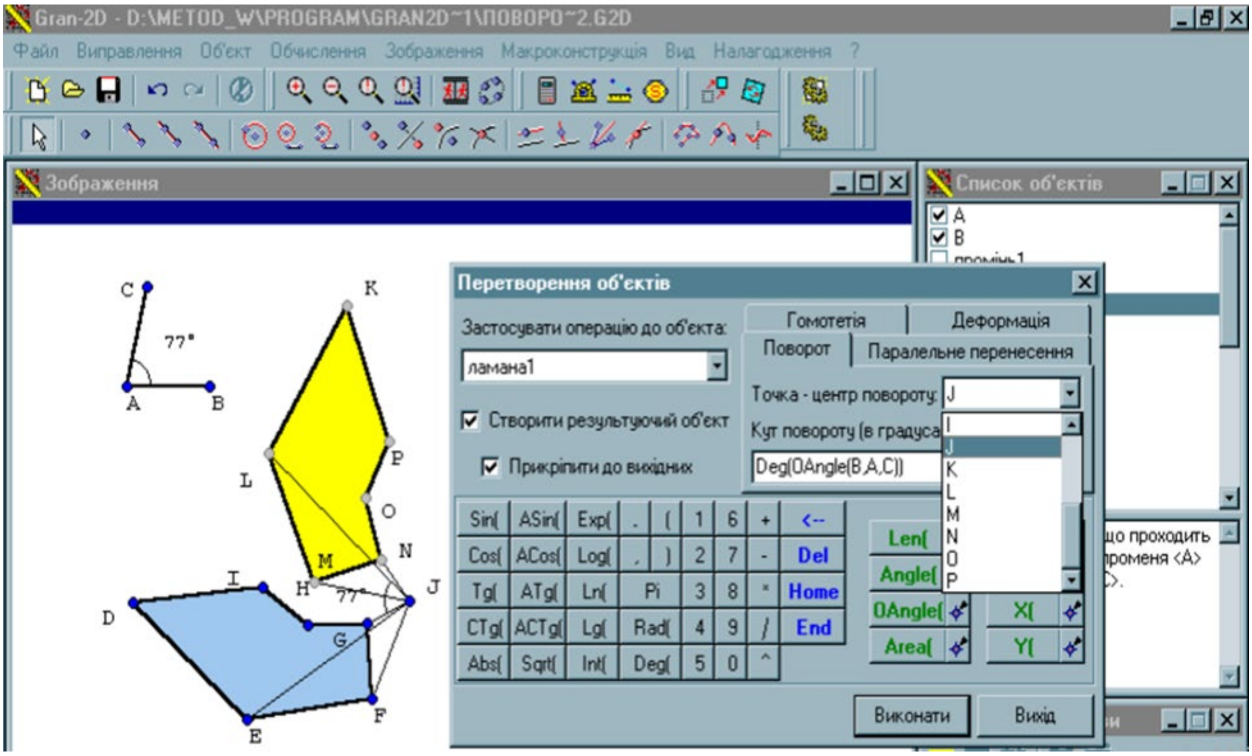


Рис. 3.9

Так як останні 3 роки в Україні, через пандемію коронавірусу, війну, відбувається обмеження можливості дітей відвідувати школу, тому навчання у закладах загальної середньої освіти проходить в дистанційній формі або змішаному форматі. Змішане навчання – це навчання, за якого частина пізнавальної діяльності учнів відбувається на уроці під керівництвом вчителя, а інша – у самостійній роботі з електронними ресурсами.

Для вчителів математики і учнів пропонуються різні освітні сайти, онлайн-сервіси, програми на доступних платформах.

З метою аналізу ефективності застосування програмного забезпечення при вивченні теми було проведено опитування вчителів Рудківської гімназії Вараської міської ради Рівненської області (Додаток).

Вивчаючи розділ «Геометричні перетворення» у 9 класі на уроках геометрії було застосовано інформаційні технології.

Використання програмного забезпечення на уроках математики (зокрема, програми GRAN-2D) дає можливість краще викладати математичний матеріал учням для успішного його засвоєння, сприяє розвитку логічного та аналітичного мислення, інформатичній грамотності, підвищує інтерес учнів до вивчення геометрії.

За результатами проведеної роботи можна зробити висновки, що використання інформаційних технологій на уроках дає позитивні результати процесу навчання.

Висновки

Геометричні перетворення оточують нас у повсякденному житті, вони спостерігаються у будові тіла людини, тварин, рослин і квітів, молекул ДНК, симетричні будівлі ваблять око, симетричне розташування елементів побуту приносить гармонію у наше світосприйняття. Вони допомагають доводити складні твердження з різних розділів геометрії, які виходять за межі шкільного курсу. За допомогою геометричних перетворень і комп’ютерної графіки кінематографісти створюють дивовижні образи, ефекти та незвичайні перевтілення на екрані. Перетворення допомагають художникам правильно будувати композиції картин. У архітектурі та інженерії перетворення фігур дозволяють проектувати та будувати складні структури.

Геометричні перетворення стають ключовим інструментом для аналізу та моделювання геометричних об'єктів, а їхнє вивчення є фундаментальним для розуміння принципів науки. Вони не лише допомагають розв'язувати практичні завдання, але й сприяють розвитку теоретичних концепцій у галузі геометрії.

Метод геометричних перетворень є досить продуктивним методом розв’язування геометричних задач. Геометричні побудови займають значне місце в курсі елементарної геометрії і є одним з найбільш цікавих його розділів.

Задачі даного розділу доцільно більш детально вивчати на факультативах та гуртковій роботі, адже вони сприяють розвитку логічного мислення, уяви та пам’яті, дають цікавий матеріал для дослідницької роботи учнів. Розв’язування таких задач сприяє кращому розумінню і засвоєнню геометрії. [18]

На основі проведеного дослідження можна стверджувати:

1. Вивчення геометричних перетворень сприяє підвищенню розуміння геометрії, розвитку просторового мислення, формування в учнів вмінь розв’язувати вправи на застосування переміщень, вміння застосовувати їх при розв’язуванні задач з планіметрії і стереометрії.

2. Знання цієї теми широко використовується в подальшому вивченні геометрії, їх застосовують в архітектурі, будівництві.
3. Метод геометричних перетворень є досить продуктивним методом розв'язування геометричних задач. Математична теорія симетрії, симетрія у живій та неживій природі, мистецтві, архітектурі, інженерії отримали спільне підґрунтя у геометричних перетвореннях.

Дана тема дає можливість для інтелектуального розвитку особистості, розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, спостережливості й уваги, вироблення навичок пізнавальної і творчої активності, розвиває геометричного мислення, навички математичного мовлення.

У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про геометричні перетворення. Активізація творчості, самостійності учнів, формування їх мислення в процесі оволодіння математикою ефективно здійснюється через розв'язування задач на застосування геометричних перетворень.

Використання інформаційних технологій (програми GRAN-2D) дає змогу учням краще засвоїти програмовий матеріал, можливість розв'язати більше задач, розвиває логічне та аналітичне мислення, загалом дає позитивні результати.

Матеріали магістерського дослідження, як джерело додаткової інформації, можуть бути використані вчителями математики для поглибленого вивчення предмету або учнями, які цікавляться математикою.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Бевз Г. П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.: іл.

2. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Вид 2-е, перероб. і доп. Навч. посібник для студ. мат. фак. пед. інст. Київ: Вища школа. 1977. 376с.

3. Бурда М. І., Тарасенкова Н.А. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: УОВЦ «Оріон», 2017. 224 с.

4. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / А. Є. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. Харків: Видавництво «Ранок», 2017. 256 с.

5. Істер О. С. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза, 2017. 240 с.: іл.

6. Коваль В. В., Крайчук О. В., Клекоць Г. Я. Загальна методика викладання математики. Рівне, РДГУ. 2005. 165с.

7. Кравчук М. О. Геометричні перетворення. Частина 1. Луцьк, 2018.

8. Кулик Н. Л. Тема. Геометричні перетворення. Геометрія. 9 клас. *Математика в школах України*. 2016. № 1-2. С. 37-41.

9. Кушнір І. А. Методи розв’язання задач з геометрії. Київ: Абрис, 1994.

10. Ленчук І. Метод перетворень: паралельне перенесення. *Математика в рідній школі*. 2016. № 3. С. 37-42.

11. Ленчук І. Перетворення фігур: задачі на метод подібності. *Математика в рідній школі*. 2016. № 7-8. С. 29-38.

12. Ленчук І. Перетворення фігур: осьова симетрія. *Математика в рідній школі*. 2016. № 4. С. 35-43.

13. Ленчук І. Перетворення фігур: поворот. *Математика в рідній школі*. 2016. № 5. С. 26-32.

14. Матяш О. І. Формування методичної готовності майбутніх учителів математики до навчання учнів геометричним переміщенням фігур. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці

фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. 2013. Вип. 34. С. 401- 405. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Sitimn_2013_34_86

15. Машбиця Ю.І. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів. Київ: ІЗМН, 2000. 264 с.

16. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2021. 255 с.

17. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2017. 304 с.

18. Методи геометричних перетворень. URL: https://formula.kr.ua/konstruktivna-geometriya-tsirkulya-ta-liniyki/metodi-geometrichnikh-peretvoren.html

19. Мурач М. М. Геометричні перетворення і симетрія. Київ, 1987.

20. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів «Математика. 5-9 класи». URL: https://mon.gov.ua

21. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://mon.gov.ua

22. Основні методи геометричних перетворень. URL: https://knowledge.allbest.ru/pedagogics/3c0a65625b2ad79a4c53b89421316d27_0.html

23. Попадюк І. М. Поворот. *Математика в школах України*. 2013. №7. С. 32-35.

24. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за ред. В.О. Швеця. Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. 267 с.

25. Присяжнюк М. М., Морочинець Л. К. Геометричні перетворення площини. Переміщення. Перетворення подібності: метод. посіб. Рівне: РДГУ, 2011. 80 с.

26. Рудченко І.І. Види рухів. Геометрія. 8 клас. *Математика в школах України*. 2007. № 15. С. 32-39.

27. Семенець С. Навчання учнів основної школи методам геометричних перетворень. *Математика в школі*. 2007. №1. С. 17- 20.

28. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. Київ: Вища шк., 2006. 582 с.

29. Чашечникова О. С. Методичні особливості навчання геометричних перетворень учнів з різними стилями мислення. URL: https://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/13730

30. Чижова О.І. Перетворення фігур на площині. *Математика в школах України*. 2004. № 25. С. 1-8.

31. Шипілова І.Ю. Перетворення симетрії. *Математика*. 2003. №7. С.12-14.