Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

магістра

на тему:

Методика вивчення нерівностей в основній школі

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,

групи М-М-21

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Вакулко Ірини Петрівни

Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент, професор кафедри математики з МВ
Крайчук Олександр Васильович

Рецензенти: кандидат педагогічних наук, доцент,
проректор МЕГУ ім. акад. Степана Дем’янчука
Ясінський Андрій Миколайович

кандидат педагогічних наук, доцент, професор кафедри ІКТ та МВІ Рівненського державного гуманітарного університету
Остапчук Наталія Олександрівна

Рівне – 2023 року

Зміст

ВСТУП

Актуальність дослідження. Тема «Нерівності» в шкільному курсі алгебри займає важливе місце і має значиме практичне застосування. Її розгорнутий зміст та різноманітні методи розв'язання нерівностей, а також способи доведення нерівностей, відкривають широкий спектр можливостей для застосування у різних галузях математики, а не лише при вивченні конкретних тем у шкільному курсі алгебри. Нерівності та їх системи використовуються для вирішення важливих прикладних задач. Вивчення цієї теми в шкільному курсі математики поділяється на такі етапи:

- Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей.
- Нерівності зі змінними. Лінійні нерівності з однією змінною.
- Числові проміжки.
- Рівносильні нерівності.
- Системи лінійних нерівностей з однією змінною
- Властивості функції. Нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції.
- Перетворення графіків функцій.
- Квадратична функція, її графік і властивості.
- Квадратна нерівність. Система двох рівнянь з двома змінними.
- Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі [18]

Після аналізу навчальної, науково-методичної літератури виявлено, що розв'язуванню нерівностей та систем нерівностей, відводиться значно більше уваги, ніж доведенню нерівностей. Проте, важливо, що під час навчання слід акцентувати увагу на доведенні числових нерівностей, оскільки такий підхід сприяє розвитку інтелектуальних умінь.

Мета дослідження: Створення методики для розвитку алгебраїчної культури учнів основної школи під час вивчення числових нерівностей передбачає розробку стратегії, спрямованої на систематичний розвиток ключових аспектів алгебраїчних навичок.

Об'єкт дослідження: процес навчання алгебри у основній школі.

Предмет дослідження:

1. Сформулювати мету теми «Методика вивчення нерівностей в основній школі» у курсі алгебри основної школи.

2. Розглянути теоретичний та практичний матеріал теми «Методика вивчення нерівностей в основній школі», провести аналіз шкільних підручників.

3. Провести аналіз освітніх програм для рівня стандарту та профільного рівня.

4. Скласти типологію завдань на тему «Квадратні нерівності».

5. Вивчити статті, методичні розробки та рекомендації вчителів.

6. Навести методичні рекомендації щодо навчання з теми " Методика вивчення нерівностей в основній школі ".

7. Написати тези з даної теми дослідження.

Методи дослідження, обрані для втілення визначених завдань:

- – теоретичні: ознайомлення та аналіз науково-педагогічної, навчальної та методичної літератури щодо даної теми з метою узагальнення інформації.
- – емпіричні: дослідження педагогічного досвіду, проведення спостережень та виконання порівняльного аналізу.

Апробації дослідження: Основні положення та результати дослідження обговорювалися на VI Всеукраїнській науково-практичній конференції «Методичний пошук вчителя математики» (м. Вінниця, 28-29 вересня 2023 р.) та на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету у 2022 та 2023 роках та анонсовані в роботі [31].

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох основних розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 31 найменування та трьох додатків. У вступі обґрунтована актуальність тематики, поставлена мета і завдання дослідження. Перший розділ роботи присвячений пропедевтиці змістової лінії нерівностей в основній школі . У другому розділі описані методичні особливості вивчення нерівностей. Третій розділ містить результати педагогічного експерименту.

I. ПРОПЕДЕВТИКА ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ НЕРІВНОСТЕЙ

1.1. Пропедевтичний етап

Основна мета навчання учнів цій темі - опанування методів розв'язування нерівностей, які можуть бути використані для вирішення математичних завдань і завдань з природничих наук та суміжних галузей знань. Вивчення цього матеріалу сприяє розвитку різних аспектів пізнавальних процесів, математичного мовлення, навичок навчання, алгоритмічного та абстрактного мислення та креативного розв'язання завдань алгебраїчним та графічним методами. По мірі вивчення нерівностей у школі, цю тему можна розділити на такі етапи:

- вступний (1-7 (8) класи),
- основний (курс алгебри у 9 класі основної програми та 8-9 класи з поглибленим вивченням математики) та
- завершальний (10-11 класи профільної школи).

Вивчення теми: «Нерівності» розпочинається з 1 класу, із вивченням арифметичного матеріалу. Програма з математики для I-III класів ставить завдання виконувати порівняння чисел, а також порівняння виразів з метою встановлення відносин "більше", "менше", "рівно"; навчити записувати результати порівняння за допомогою знаків «>», «<», «=» та читати отримані нерівності.

У п’ятому класі закріплюються та удосконалюються набуті в початковій школі навички, такі: порівняння натуральних чисел, числових виразів, дробів з однаковими знаменниками, розв’язування нерівностей зі змінними, подвійних нерівностей тощо. Крім того, розвиваються нові вміння, наприклад, порівняння звичайних дробів з однаковим знаменником (деякі програми включають порівняння дробів з різними знаменниками, коли один кратний іншому), правильних і неправильних дробів, змішаних чисел і порівняння десяткових дробів(12,458<12,452). Учні повинні використовувати відповідний метод порівняння залежно від типу чисел, з якими вони працюють.

У шостому класі в учнів формується вміння порівнювати раціональні числа різними способами, зокрема за допомогою координатної прямої. У цей період також було введено геометричне визначення нерівностей. Велике значення при формуванні теорії нерівностей надається засвоєнню учнями поняття «модуль числа». За допомогою цієї концепції учні вчаться порівнювати числа, обчислювати оцінки похибок, описувати межі та існування математичних об’єктів тощо. У цей період також вводяться нові символи «≤» і «≥». Тому крім строгих нерівностей зі знаками «<» і «>», які називають строгими нерівностями, використовують також нестрогі нерівності зі знаками «≤» і «≥».

У курсі алгебри 7-8 класу під час вивчення теми «Тотожно рівні вирази. Тотожності», «Властивості степеня з натуральним показником» у сьомому класі учні розв’язують вправи, які включають порівняння виразів. Наприклад:

- $(-15)^6 \cdot (-15)^3$ і $(-15)^{10}$
- $(4)^5$ і $(3)^6$

У 8 класі здобувачі освіти вдосконають навички порівняння виразів і функцій вивчити тему «Числові множини». У навчальній програмі передбачено завдання, що вимагають порівняння буквених виразів. Під час вивчення теми: «Квадратні рівняння» учні аналізують і порівнюють ірраціональні числа. Вони починають із простих завдань на відповідність чисел і поступово переходять до більш складних. Здобувачі освіти вчаться визначати області визначення та значення функцій, а також записувати їх за допомогою нерівностей.

1.2 Нерівності з курсу алгебра 8 – 9 клас

Згідно із Державним стандартом базової середньої освіти, який був затверджений Постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 року №898 та Типовою освітньою програмою для 5-9 класів у загальноосвітніх школах, затвердженою наказом Міністерства освіти і науки України від 19 лютого 2021 року №235, нерівності мають важливе значення у вивченні математики у 8-9 класах. Теорія нерівностей знаходить застосування при виконанні наступних завдань:

- Визначення областей визначення та областей значень функцій.

- Побудова графіків на обмежених областях визначення.

- Аналіз впливу знаків параметра на розташування графіків на координатній площині.

- Визначення властивостей функцій, таких як зростання і спадання.

Учні повинні оволодіти навичками використання нерівностей як інструменту для розв'язання завдань та побудови функцій. Вивчення нерівностей є підготовчим етапом для подальшого вивчення систем нерівностей і завдань лінійного програмування.

У класах з поглибленим вивченням математики тему: « Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей» вивчають у 8-му класі. У класах рівня стандарту дана тема вивчається у 9-му класі.

На основі аналізу навчальних програм з математики для 8-9 класів, які відповідають стандартному рівню [18] та рівню поглибленого вивчення математики [17], була підготовлена таблиця 1, в якій проводиться порівняння тем та обсягу навчання теми: «Числові нерівності» у кожному з цих класів.

Таблиця 1.

Аналіз програм з алгебри для 8-9 класу

К-сть год	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Поглиблений рівень вивчення математики(8 клас)		
20	**Тема 5. НЕРІВНОСТІ** Числові нерівності та їх властивості. Числові проміжки. Об'єднання та переріз числових проміжків. Нерівності з однією змінною. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Рівносильні нерівності.	Учень/учениця: **пояснює** поняття: числова нерівність, нерівність зі змінною; **формулює** означення понять: розв'язок нерівності з однією змінною, рівносильні нерівності, нерівність —

	Нерівність — наслідок даної. Системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною. Розв'язування лінійних нерівностей з параметром. Розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем[17]	наслідок даної, розв'язок системи і сукупності кількох нерівностей з однією змінною; **доводить** властивості числових нерівностей; **зображує** на координатній прямій множини, задані за допомогою нерівностей; **розв'язує**: лінійні нерівності, системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною, лінійні рівняння і нерівності з модулем[17]
Рівень стандарту(9 клас)		
14	**Тема 1. НЕРІВНОСТІ** Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей. Нерівності зі змінними. Лінійні нерівності з однією змінною. Числові проміжки. Рівносильні нерівності. Системи лінійних нерівностей з однією змінною[18]	**Учень/учениця:** **наводить приклади:** числових нерівностей; нерівностей зі змінними; лінійних нерівностей з однією змінною; подвійних нерівностей; **пояснює** що таке об’єднання та перетин числових проміжків; **формулює:** · властивості числових нерівностей, властивості нерівностей зі змінною; · означення: розв’язку лінійної нерівності з однією змінною, рівносильних нерівностей; **обґрунтовує** властивості числових нерівностей; **зображує** на координатній прямій: об’єднання та перетин числових проміжків, задані нерівностями числові проміжки; виконує обернене завдання; **записує** розв’язки нерівностей та їх систем у вигляді об’єднання числових проміжків або у вигляді відповідних нерівностей; **розв’язує:** лінійні нерівності з однією змінною; системи лінійних нерівностей з однією змінною[18]

<table>
<tr><td colspan="3">Поглиблений рівень вивчення математики(9 клас)</td></tr>
<tr><td>45</td><td>Тема 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ
Функції. Властивості функцій: парність і непарність, зростання і спадання, нулі і проміжки знакосталості, найбільше і найменше значення функції. [Використання властивостей функцій для розв'язування рівнянь і нерівностей.] Перетворення графіків функцій: $f(x) \to f(x) + b$, $f(x) \to f(x + a)$, $f(x) \to kf(x)$, $f(x) \to f(kx)$, $f(x) \to f(-x)$, $f(x) \to |f(x)|$, $f(x) \to f(|x|)$. [Функції $y = [x]$ і $y = \{x\}$ та їх графіки.] Квадратична функція, її графік і властивості.
Розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною.
Задачі на дослідження властивостей квадратного тричлена з параметрами. Графічні прийоми розв'язування задач з параметрами.
Метод інтервалів.[17]</td><td>Учень/учениця: пояснює алгоритми: побудови графіка квадратичної функції, перетворення графіків функцій: $f(x) \to f(x) + b$, $f(x) \to f(x+ a)$, $f(x) \to kf(x)$, $f(x) \to f(kx)$, $f(x) \to f(-x)$, $f(x) \to |f(x)|$, $f(x) \to f(|x|)$; характеризує функцію за її графіком; формулює означення: функції, парної та непарної функцій, зростаючої та спадної функцій, нуля функції, проміжку зростання і проміжку спадання функції, проміжку знакосталості функції, найбільшого і найменшого значень функції; розв'язує вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції, побудову графіків функцій з використанням зазначених вище перетворень, розв’язування квадратичних нерівностей аналітичним та графічним способом, розв'язування нерівностей методом інтервалів. [17]</td></tr>
<tr><td colspan="3">Рівень стандарту(9 клас)</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Тема 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ
Властивості функції. Нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції.
Перетворення графіків функцій. Квадратична функція, її графік і властивості.
Квадратна нерівність. Система двох рівнянь з двома змінними.</td><td>Учень/учениця:
наводить приклади квадратичної функції;
обчислює значення функції в точці
пояснює перетворення графіків функції: $f(x)\to f(x)+a$; $f(x) \to f(x+a)$; $f(x) \to kf(x)$, $f(x) \to -f(x)$; алгоритм побудови графіка квадратичної функції;
характеризує функцію за її графіком</td></tr>
</table>

	Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі. [18]	**розв'язує вправи, що передбачають:** побудову графіка квадратичної функції; розв'язування квадратних нерівностей; знаходження розв'язків систем двох рівнянь з двома змінними, з яких хоча б одне рівняння другого степеня; складання і розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей прикладних задач. [18]
Поглиблений рівень вивчення математики(9 клас)		
25	Тема 3. РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЇХ СИСТЕМИ Рівняння з двома змінними. Графік рівняння з двома змінними. Графічні методи розв'язування систем рівнянь з двома змінними. Розв'язання систем рівнянь з двома змінними методом підстановки та методами додавання і множення. Метод заміни змінної. [17]	Учень/учениця: пояснює суть графічного методу розв'язування систем рівнянь із двома змінними; формулює означення: розв'язку рівняння з двома змінними, графіка рівняння з двома змінними; розв'язує вправи, що передбачають: розв'язання систем двох рівнянь з двома змінними методами підстановки, додавання, заміни змінних, побудову графіків рівнянь з двома змінними, складання і розв'язання систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей реальних ситуацій. [17]
Поглиблений рівень вивчення математики(9 клас)		

23	Тема 4. НЕРІВНОСТІ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЇХ СИСТЕМИ. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ. Нерівність з двома змінними. Графік нерівності з двома змінними. Системи нерівностей з двома змінними. Геометрична інтерпретація розв'язків системи нерівностей з двома змінними. Основні методи доведення нерівностей. Нерівності між середніми величинами двох додатних чисел (середнє гармонічне, середнє геометричне, середнє арифметичне, середнє квадратичне). [Нерівність Коші-Буняковського]. [17]	Учень/учениця: пояснює: суть основних методів доведення нерівностей, використання означення нерівності, доведення від супротивного, використання відомої нерівності; формулює: означення: розв'язку нерівності з двома змінними, графіка нерівності з двома змінними, рівносильних систем нерівностей з двома змінними; доводить: нерівність Коші для двох невід'ємних чисел, нерівність для суми двох додатних взаємно обернених чисел; розв'язує вправи, що передбачають: використання основних методів доведення нерівностей, побудову геометричних образів нерівностей та їх систем. [17]

На основі аналізу навчальних програм з математики можна прийти до висновку, що на поглибленому рівні вивчення математики кількість годин, відведених на тиждень, значно відрізняється і учні вже з восьмого класу вміють розв’язувати нерівності. У 9 класі здобувачі освіти, як у поглибленому рівні та і в рівні стандарту вичають тему: «Квадратична функція», проте в рівні стандарту кількість годин, відведених на дану тему значно менша, ніж в поглибленому рівні. Учні, які навчаються у класах з поглибленим вивченням математики розглядають окремо теми: «Рівняння з двома змінними та їх системи» і «Нерівності з двома змінними та їх системи. доведення нерівностей», а в рівні стандарту ці теми входять до теми: «Квадратична функція». Така ситуація пояснює той факт, що навчальна програма з математики має різну мету та завдання на різних рівнях (стандарту і поглибленому рівні).

Окрім знань вчителя, основним джерелом є підручник. Аналіз підручників, які використовуються в навчальному процесі, дозволяє глибше розібратися у методиці вивчення нерівностей у шкільному курсі математики. Крім того, зміст підручників повинен відповідати вимогам чинної навчальної програми з математики.

Давайте проведемо детальний аналіз підручників, які використовуються в навчальному процесі.

Підручники з алгебри 9 клас:

1. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ : Генеза, 2017. - С.264[7]

2. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с.[1]

3. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 272 с. : іл.[14]

4. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. — 264 с.[10]

5. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 272 с.[27]

Під час аналізу підручників особлива увага приділялася на декілька ключових аспектів, таких як назви розділів та параграфів, пов'язаних з досліджуваною темою, виділення математичних об'єктів, наявність прикладів та їх відповідність завданням для розв'язування, питання після параграфа, розподіл завдань за рівнями складності. Також важливими були наявність завдань для підготовки до контрольної або самостійної роботи в кінці вивченої теми та включення нестандартних задач у параграф або пункт.

У таблиці 6, яка представлена у додатку А, відображені результати аналізу підручників для 9 класу. Підручники з алгебри для 9 класу розроблені відповідно до вимог Державного стандарту загальної середньої освіти та програми з математики, затвердженої розпорядженням від 07.06.2017 № 804.

Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ : Генеза, 2017. - С.264[7]

І. Метод викладання.

Під час вивчення теоретичного матеріалу потрібно звертати увагу на текст, який виокремлений жирним шрифтом. Ці частини слід запам'ятати. Для перевірки своїх знань та підготовки до оцінювання виконуйте завдання "Домашня самостійна робота" та "Завдання для перевірки знань". По завершенні кожного розділу є вправи для повторення, а в кінці підручника розташовані "Завдання для перевірки знань за курс алгебри 9 класу". "Задачі підвищеної складності" допоможуть вам підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Крім того, підручник включає зразок варіанта атестаційної письмової роботи. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі обов'язково опрацьовуйте його вдома. Підручник містить численні вправи, більшість з яких ви розглядатимете на уроках та виконуючи домашні завдання, а інші рекомендується розв'язувати самостійно.

Розділ "Нерівності" виокремлена окремими параграф. Підтеми цієї теми розглядаються наступним чином:

§ 1. Числові нерівності.

§ 2. Основні властивості числових нерівностей.

§ 3. Почленне додавання і множення нерівностей.

§ 4. Нерівності зі змінними. Розв'язок нерівності.

§ 5. Числові проміжки. Переріз та об'єднання множин.

§ 6. Лінійні нерівності з однією змінною. Рівносильні нерівності.

§ 7. Системи лінійних нерівностей з однією змінною, їх розв'язування.[7]

Розділ "Квадратна функція" виокремлена окремими параграф. Підтеми цієї теми розглядаються наступним чином:

§ 8. Функції. Область визначення, область значень і графік функції

§ 9. Властивості функції

§ 10. Найпростіші перетворення графіків функцій

§ 11. Функція $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, її графік і властивості

Завдання для перевірки знань до § 8-11

§ 12. Квадратна нерівність 111

§ 13. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними

§ 14. Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель текстових і прикладних задач

Завдання для перевірки знань до § 12-14[7]

Вправи для повторення розділу 2

II. Система задач.

Після теоретичного викладення в підручнику наведено приклади розв'язання задач. Кожен параграф має завдання для самостійного вирішення. Також включені вправи для повторення, розділ "Життєва математика", завдання, на які потрібно надати відповіді, та завдання для підготовки до вивчення нового матеріалу. Вправи представлені на чотири рівні складності: (1) – початковий, (2) - середній; (3) – достатній, (4) – високий, (*) – задачі підвищеної складності. Завдання різних рівнів складності, вправи для повторення, численні прикладні задачі, а також виділення кольорами номерів вправ: синій – рекомендовані для домашнього завдання, чорним – завдання, які можна розв'язувати усно за вибором вчителя. Ключі до вправ і вказівки надані для допомоги у розв'язанні. У підручнику також є оповідання про видатних математиків. Додатково надано вправи для повторення матеріалу 8 класу, рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал; а також предметний покажчик. Після кожної теми міститься Домашня самостійна робота та вправи для повторення певного розділу.

Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с.[1]

I. Метод викладання.

Кожен параграф підручника містить теоретичні відомості та задачі для закріплення матеріалу. В кінці кожного розділу наведено історичні відомості про видатних математиків. Загальна структура підручника охоплює чотири розділів, які поділені на параграфи для зручності вивчення, додатки в яких містяться навчальні проекти, задачі та вправи на повторення, задачі та вправи підвищеної складності, тренувальні тести, відомості з попередніх класів, відповіді та вказівки до задач і вправ, предметний покажчик.

Тема «Нерівності» виділена окремим розділом.

Параграфи виділено наступнім чином:

Розділ 1. НЕРІВНОСТІ

§ 1. Загальні відомості про нерівності

§ 2. Властивості числових нерівностей

§ 3. Подвійні нерівності

§ 4. Розв’язування нерівностей з однією змінною

§ 5. Об’єднання і переріз множин. Числові проміжки

§ 6. Системи нерівностей з однією змінною

§ 7. Доведення нерівностей[1]

Тема «Квадратична функція» виділена окремим розділом.

Параграфи виділено наступнім чином:

Розділ 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§ 8. Функції

§ 9. Властивості функцій

§ 10. Перетворення графіків функцій

§ 11. Квадратична функція

§ 12. Квадратні нерівності

§ 13. Системи рівнянь другого степеня

§ 14. Розв’язування задач складанням систем рівнянь[1]

II. Система задач.

Перед кожним параграфом є рубрика «Використовуємо набуті компетентності». Приклади розв'язання задач подані після теоретичного матеріалу у кожному параграфі, перед вправами міститься рубрика «Хочете знати більше»., можна перевірити себе за допомогою наведених запитань «Перевірте себе». Вправи представлені у вигляді усних вправ та письмових; письмові вправи в свою чергу поділені на два рівні складності: «Рівень А», «Рівень Б». Номери вправ виділені різними кольорами: «чорний» - для роботи в класі, «синіми» - рекомендовані для домашнього завдання. З метою контролю і самоперевірки усвідомлення навчального матеріалу після кожного параграфу є рубрика «Вправи на повторення» Відповіді на ці питання можна знайти у відповідному параграфі, а розв'язання задач – у кінці підручника.

3. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. —Х. : Гімназія, 2017. — 272 с. : іл.[14]

І. Метод викладання.

Підручник використовує абстрактно-дедуктивний підхід і вдало впроваджує наочність. Він розділений на три параграфи, кожен з яких складається з пунктів, де подано теоретичний матеріал. Важливі факти виділені жирним шрифтом, а також слід звертати увагу на ті, що виділені курсивом, оскільки вони також мають значення. Кожен пункт завершується прикладами розв'язування задач, які можна розглядати і як спосіб оформлення самостійного вирішення задач. Крім того, до кожного пункту представлені задачі для самостійного опрацювання, але їх рекомендується вирішувати після вивчення теоретичного матеріалу. Підручник включає в себе різноманітний дидактичний матеріал, що дає вчителю можливість вибрати найбільш доцільні завдання з кожної теми.

Тема «Нерівності» виділена окремим параграфом.

Підтеми виділено наступнім чином:

§ 1. Нерівності

1. Числові нерівності

2. Основні властивості числових нерівностей

3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу

4. Нерівності з однією змінною

5. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки

6. Системи лінійних нерівностей з однією змінною[14]

Тема: «Квадратична функція» виокремлена наступним чином:

§ 2. Квадратична функція

7. Повторення та розширення відомостей про функцію

• З історії розвитку поняття функції

8. Властивості функції

9. Як побудувати графік функції y = kf (x), якщо відомо графік функції y = f (x)

10. Як побудувати графіки функцій y = f (x) + b і y = f (x + a), якщо відомо графік функції y = f (x)

11. Квадратична функція, її графік і властивості

12. Розв'язування квадратних нерівностей

13. Системи рівнянь із двома змінними

14. Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель прикладної задачі[14]

II. Система задач.

У підручнику наведено приклади розв'язування задач після теоретичного викладення. Кожен параграф супроводжується завданнями для самостійного розв'язування, які включають в себе вправи для повторення, завдання для підготовки до вивчення нового матеріалу та завдання на різних рівнях складності – від початкового до високого, а також задачі для математичних гуртків і факультативів. Ці завдання відзначено різними кольорами: червоний вказує на рекомендовані для домашнього завдання, синій - завдання, які можна розв'язувати усно за розсудом вчителя, закінчення доведення теореми, розв'язування прикладу; завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера; рубрика «Коли зроблено уроки». Завдання подані великою кількістю прикладних задач, що дає можливість учням різних рівнів засвоїти основні поняття теми. Ключ до синіх завдань надає відповіді, які можна використовувати для розв'язання інших завдань.

У підручнику присутні інформація про видатних українських математиків, які відзначено синім кольором. Крім того, в підручнику знаходяться:

1) Завдання для повторення з восьмого класу;

2) Дружимо з комп'ютером

3) Відповіді та вказівки до вправ

4) Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі

5) Предметний покажчик

4. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. — 264 с.[10]

I. Метод викладання.

Мета цього підручника полягає в тому, щоб допомогти учням освоїти основи алгебри та розвинути їх математичні навички. Його структура спрямована на систематичне вивчення матеріалу, поділеного на тематичні розділи, які об'єднані конкретними темами алгебри. Кожен розділ включає теоретичний матеріал, приклади його застосування у вирішенні задач, а також вправи для самостійного закріплення. По завершенні кожного розділу надаються завдання для самостійного розв'язування, які допомагають учням перевірити свої знання та вміння. Вправи охоплюють як прості, так і більш складні завдання, що дозволяє учням поетапно удосконалювати свої знання та розвивати алгебраїчні навички.

Тема «Нерівності» виділена окремими параграфами.

§ 1. НЕРІВНОСТІ

1. Числові нерівності. Доведення нерівностей

2. Властивості числових нерівностей

3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значень виразів

4. Числові проміжки. Об'єднання та переріз множин

5. Нерівності з однією змінною. Розв’язування нерівностей

6. Лінійні нерівності з однією змінною

7. Системи нерівностей з однією змінною [10]

Тема: «Квадратна функція» розділена на підтеми наступним чином:

§ 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

8. Функція. Область визначення та область значень функції

9. Властивості функцій

10. Перетворення графіків функцій

11. Функція $y = ax^2$

12. Квадратична функція

13. Квадратні нерівності

14. Системи рівнянь із двома змінними

15. Розв’язування задач за допомогою систем рівнянь[10]

II. Система задач.

Автор під час викладу теоретичного матеріалу найперше пояснює матеріал на конкретному прикладі, далі формулює означення, властивість. Після теоретично матеріалу міститься рубрика: «Приклади розв’язання вправ» де пояснюється як потрібно правильно розв’язувати завдання. Насамперед автор пропонує розглянути усні вправи, лиш тоді перейти до письмових вправ, завдання в підручнику поділені на рівні складності: «Рівень А», «Рівень Б», «Рівень В». В свою чергу завдання виділині двома кольорами: «чорний» рекомендований для розгляду вправ у класі, «синім» рекомендований для домашнього завдання. Після кожної теми є вправи на повторення та рубрика «Поміркуй» в якій розглядаються задачі підвищеної складності.

Після кожного параграфа є запитання і вправи для повторення та завдання для самоперевірки знань здобувачів освіти. Підручник містить:

1) Задачі підвищеної складності

2) відповіді та вказівки

3) предметний покажчик

5. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 272 с. [27]

І. Метод викладання.

У підручнику для учнів дев'ятого класу весь матеріал організовано у чотири розділи, які, в свою чергу, поділені на параграфи. Кожен параграф включає теоретичний матеріал та задачі, де ключові формулювання висвітлені жирним шрифтом. Також присутні поради під позначенням "Зверніть увагу", а наукові терміни відзначені курсивом. У розділі "Дізнайтеся більше" доступний цікавий додатковий матеріал.

Розділ "Нерівності" виокремлена окремими параграф. Підтеми цієї теми розглядаються наступним чином:

РОЗДІЛ 1. НЕРІВНОСТІ

§ 1. Числові нерівності та їх властивості

§ 2. Нерівності зі змінною. Рівносильні нерівності

§ 3. Числові проміжки

§ 4. Лінійні нерівності з однією змінною

§ 5. Системи лінійних нерівностей з однією змінною. [27]

Розділ "Квадратична функція" виокремлена окремими параграф. Підтеми цієї теми розглядаються наступним чином:

РОЗДІЛ 2. **КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ**

§ 6. Функція та її властивості

§ 7. Перетворення графіків функцій

§ 8. Квадратична функція

§ 9. Квадратна нерівність

§ 10. Система двох рівнянь із двома змінними.

§ 11. Прикладні задачі [27]

ІІ. Система задач.

При пояснені теоретичного матеріалу насамперед розглядається проблемна задача на основі якої є сформульоване означення, властивість або теорема. Після викладу теоретичного матеріалу є наведено декілька задач з покроковим розв’язанням. У підручнику міститься пункт : «Зверніть увагу» в якому наголошується важливість теоретичного матеріалу, в рубриці: «Дізнайтеся більше» можна прочитати про видатних математиків, завдання є різнорівневі.

Підручник містить:

1) Готуємося до контрольної роботи
2) Відповіді
3) Додатки
4) Предметний покажчик

У кожному підручнику з алгебри тема: «Нерівності» вивчається основне понять та властивості нерівностей, подвійну нерівність, числові проміжки, об’єднання і переріз множин, системи нерівностей з однією змінною.

Вивчаються нерівності з різними видами, такими як лінійні, квадратичні та модульні. Розвивають навички розв’язання різних типів нерівностей. Розв’язання задач, де потрібно використовувати нерівності для моделювання різних ситуацій. Зображення графіків функцій та нерівностей на числовій прямій. Вивчення взаємозв'язку між графіками та розв'язками нерівностей. Опанування навичок розв'язування систем нерівностей та їх застосування в різних контекстах. Виконання вправ та завдань для закріплення отриманих знань.

1.3 Приклади застосування нерівностей у різних галузях життя

Нерівності мають широке застосування в багатьох сферах життя, включаючи математику, економіку, фізику, соціологію та психологію. Ось кілька прикладів того, як використовуються нерівності:

1. економіка: В економіці нерівності використовуються для аналізу розподілу доходів і багатства в суспільстві. Наприклад, нерівності Джині

використовуються для вимірювання рівня нерівності доходів між групами населення.

2. оптимізація: нерівності використовуються для встановлення меж або обмежень в оптимізаційних задачах. Наприклад, нерівності використовуються для обмеження кількості ресурсів або мінімізації витрат у задачах максимізації прибутку в бізнесі.

3. фізика: нерівності використовуються у фізичних законах і рівняннях для встановлення взаємозв'язків між фізичними величинами. Наприклад, нерівність Гейзенберга у квантовій механіці встановлює межу точності, з якою можна одночасно виміряти дві взаємодоповнюючі величини, такі як положення та імпульс частинки.

4. соціологія: У соціології нерівність використовується для вивчення соціальних відносин і нерівностей між групами людей. Наприклад, нерівність у доступі до освіти та охорони здоров'я можна виміряти та проаналізувати за допомогою нерівності.

5. математика: нерівності використовуються в математиці для порівняння чисел і виразів. Наприклад, нерівність Коші-Буняковського встановлює зв'язок між нормами векторів у лінійному просторі.

6. психологія: у психології нерівності використовуються для вивчення гендерної рівності, емоційних станів та розумових здібностей. Наприклад, нерівність у пропорціях чоловіків і жінок у різних професіях може свідчити про гендерну нерівність у суспільстві.

Це лише кілька прикладів того, як нерівність використовується в різних сферах життя. Нерівності широко використовуються в науковому, соціальному та практичному контекстах для аналізу, моделювання та вирішення різних проблем.

II. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

2.1 Властивості нерівностей та основні правила розв'язування

Ми маємо можливість порівняти будь-яке число та виразити результат порівняння у вигляді рівності чи нерівності за допомогою символів «<», «>» або «=». Для будь-якого числа виконується лише одне з таких співвідношень: "<", ">" або "=".

На числовій прямій більше число позначає точку, розташовану праворуч, а менше — точку, розташовану ліворуч.

Залежно від типу чисел використовується відповідний спосіб порівняння. Однак зручно мати спосіб порівняння чисел, який охоплює всі можливі ситуації. Це робиться шляхом визначення різниці між числами та визначення, чи є різниця додатним числом, від’ємним числом чи нулем. Цей спосіб порівняння чисел заснований на математичному означенні.

Означення: Число a більше від числа b, якщо різниця $a – b$ — додатне число; число a менше від числа b, якщо різниця $a – b$ — від’ємне число.

Зрозуміло: якщо різниця $a – b$ дорівнює нулю, то число a дорівнює числу b. [10].

Числові нерівності описують відносини між числовими величинами. Основні властивості числових нерівностей включають:

1. Якщо $a>b$, то $b<a$; якщо $a<b$, то $b>a$.

Доведення: Оскільки $a > b$, то $a - b>0$. Тоді $(a - b) < 0$, але $-(a - b) = b - a$, тому $b - a < 0$. Отже, $b < a$. Аналогічні міркування можна провести, коли $a < b$. [7]

2. Якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$.

Доведення: Оскільки за умовою $a>b$ і $b>c$, то різниці $a – b$ і $b – c$ є додатними числами. Тоді додатною буде їхня сума $(a – b) + (b – c)$. Маємо: $(a– b) + (b – c) = a – c$. Отже, різниця $a – c$ є додатним числом, тому $a>c$. Алналогічно доводиться властивість: якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$. [14]

Геометрична ілюстрація властивості:

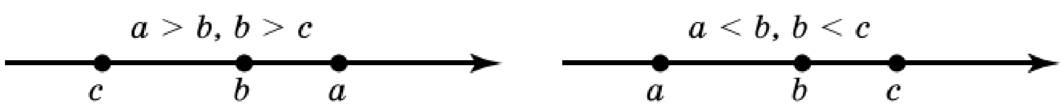


Рис.1

3. Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай a < b і c — будь-яке число. Доведемо, що a + c < b +c.

Розглянемо різницю (a + c) – (b + c) = a + c – b – c = a – b. Оскільки a <b, то a – b < 0, а тому й (a + c) – (b + c) < 0. Отже, a + c < b + c.

Аналогічно проводять доведення для випадку a > b і будь-якого числа c.

Наслідок 1. Якщо від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.

Це твердження випливає з того, що віднімання від обох частин нерівності деякого числа c можна замінити додаванням до обох її частин числа –c.

Наслідок 2. Якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в іншу, змінивши знак доданка на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай a < b + c — правильна нерівність. Додаємо до обох її частин число -c, одержимо правильну нерівність $\mathrm{a} + (-\mathrm{c}) < b + c + (-\mathrm{c})$ або $\mathrm{a} - \mathrm{c} < b$. Отже, якщо перенести доданок c у ліву частину нерівності, змінивши його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність.[10]

4. Якщо a>b і c — додатне число, то ac>bc.

Доведення. Розглянемо різницю $ac - bc$. Маємо: ac – bc = c (a – b). За умовою a>b, отже, різниця a – b є додатним числом. Якщо c>0, то добуток c(a – b) є додатним числом, отже, різниця ac – bc є додатною, тобто ac>bc. [14]

5. Для будь-яких чисел a і b, якщо $a < b$ і c – будь-яке від’ємне число, то $a \cdot c > b \cdot c$.

Доведення. За умовою теореми a < b, тобто a – b < 0. Добуток двох від’ємних чисел є числом додатним, тому: a · c – b · c = (a – b) · c > 0. А це означає, за означенням, що $a \cdot c > b \cdot c$, що й вимагалося довести. [27]

Наслідок. Якщо $a > 0, b > 0$ і $a > b,$ то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доведення. Поділимо ліву і праву частини нерівності a > b на додатне число ab. Матимемо: $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$; $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ тобто $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. [Істер]

6. Якщо a < b і c < d, то a + c < b + d.

Доведення. До обох частин нерівності a < b додамо чис- ло с, а до обох частин нерівності c < d - число 6, отримаємо дві правильні нерівності: a + c < b + c і c + b < d + b, тому a + c < b + d. Доведено.

Аналогічно можна довести, що коли a > bіc > d, то a + c > b + d.

Зауважимо, що властивість справджується і для більш ніж двох нерівностей. [7]

7. Якщо a>b, c>d і a, b, c, d — додатні числа, то ac>bd.

Доведення. Розглянемо різницю ac – bd. Маємо:

ac – bd = ac – bc + bc – bd = c (a – b) + b (c – d). За умовою a – b>0, c – d>0, c>0, b>0. Отже, різниця, що розглядається, є додатною. Із цього випливає, що ac>bd. [14]

Наслідок. Якщо a>b і a, b — додатні числа, то an>bn, де n — натуральне число.

Доведення. Запишемо n правильних нерівностей a>b:

$$\text{n нерівностей}\begin{cases} a > b \\ a > b \\ \dots \\ a > b \end{cases}$$

Оскільки a і b — додатні числа, то можемо перемножити почленно n записаних нерівностей. Отримаємо: an>bn.

Зазначимо, що всі розглянуті властивості нерівностей є правильними й у тому випадку, коли нерівності є нестрогими:

якщо $a \geq b$ і $c \geq d$, то $a + c \geq b + d$;

якщо $a \geq b$, $c \geq d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac \geq bd$;

якщо $a \geq b$ і a, b — додатні числа, то $a^n \geq b^n$, де n — натуральне число. [14]

Приклад 1. Порівняйте d і c, якщо $d + 5 > n > c + 6$.

Розв'язання: Якщо $d + 5 > n > c + 6$, тоді $d + 5 > c + 6$, звідси $d > c + 1$, тоді $d > c$.

Відповідь: $d > c$.

Приклад 2. Маса трьох ідентичних індиків складає a кг, де 36 кг< b <48 кг. Знайдіть масу одного індика, позначивши її як b (у кілограмах).

Розв'язання: Маса одного індика дорівнює $\frac{b}{3}$. Поділимо подвійну нерівнсть на 3, $36 < \ b \ < 48 |: 3 \ \Rightarrow \frac{36}{3} < \ \frac{b}{3} \ < \frac{48}{3} \Longrightarrow 12 < \ \frac{b}{3} \ < 16.$

Масо одного індика $12 < \ \frac{b}{3} \ < 16.$

Приклад 3. Доведіть, що $10a - 18 \leq 82$, якщо відомо, що $a \leq 20$.

Доведення: Якщо $a \leq 20$, тоді знайдемо $10a$, помножимо нерівність $a \leq 20$ на 10, $a \leq 20 |\cdot 10 \Rightarrow 10a \leq 200$. Знайдемо $10a - 18$, для цього віднімемо від всієї нерівності 18, маємо:

$10a \leq 200 |-18 \Rightarrow \quad 10a - 18 \leq 200 - 18 \Rightarrow 10a - 18 \leq 182$, що й треба було довести.

Приклад 4. Доведіть, що $\sqrt{37} + \sqrt{50} > 13$.

Доведення:. Оскільки $\sqrt{37} > 6$ і $\sqrt{50} > 7$, то $\sqrt{37} + \sqrt{50} > 6 + 7 = 13$.

Приклад 5. Доведіть, що периметр чотирикутника більший за суму його діагоналей. [14]

Доведення.

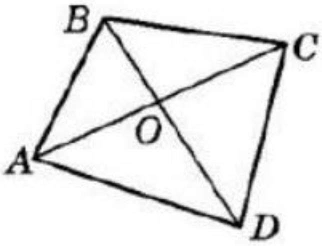


Рис.2

За теоремою про нерівність трикутника маємо:

$$+\begin{array}{l}AC < AB + BC\\ AC < AD + DC\\ \hline 2AC < AB + BC + AD + CD,\end{array}\qquad 2AC < P_{\Delta ABCD}.$$

Аналогічно:
$$+\begin{array}{l}BD < BC + CD\\ BD < AB + AD\\ \hline 2BD < BC + CD + AB + AD,\end{array}\qquad 2BD < P_{ABCD}.$$

$$+\begin{array}{l}2AC < P_{ABCD}\\ 2BD < P_{ABCD}\\ \hline 2(AC + BD) < 2P_{ABCD};\end{array}\qquad AC + BD < P_{ABCD}.$$

Приклад 6. Доведіть нерівність:

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \geqslant 4, \text{ якщо } x > 0,\ y > 0$$

Доведення.

$x + \frac{1}{x} \ge 2$; $1 + x + \frac{1}{x} \ge 3$. **Аналогічно** $y + \frac{1}{y} \ge 2$; $1 + y + \frac{1}{y} \ge 3$. **Перемножимо ці дві нерівності:**

$$\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)\left(1 + y + \frac{1}{y}\right) \ge 3 \cdot 3; \quad \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)\left(1 + y + \frac{1}{y}\right) \ge 9.$$

2.2 Нерівності з однією змінною та їх розв’язування

Розв’язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність. [10]

Розв’язати нерівність означає знайти всі її розв’язки або довести, що розв’язків немає. [10]

Зручно виражати множину розв'язків нерівності, використовуючи числові проміжки. Розглянемо різні випадки:

Приклад 7. Розглянемо множину чисел, які менші 5, але більші за -5, називають числовим проміжком. Значення, які належать даному проміжку зображенні на координатній прямій між числами -5 і 5. Проміжок зображаться наступним чином.

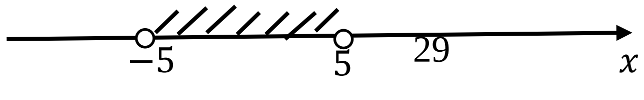


Рис.3

Проміжок (-5; 5) включає всі дійсні числа x, які задовільняють умову $-5 < x < 5$. Таким чином, можна сказати, що цей проміжок визначає нерівність $-5 < x < 5$. Для конкретних значень, наприклад, x = 3, ця нерівність істина, але для x = 6 хиба. Таким чином, можна зазначити, що 3 належить проміжку (-5, 5), тоді як 6 не належить цьому проміжку.

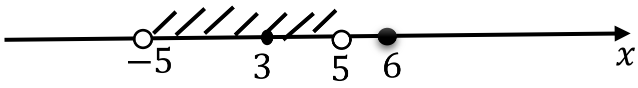


Рис.4

Множина всіх дійсних чисел, які не менше -5 і не більше 5, позначається як [–5; 5]. Це означає, що вона включає усі числа, починаючи від -5 і закінчуючи 5, враховуючи обидва кінці проміжку. Графічно на координатній прямій цей проміжок зображується у вигляді відрізка, який охоплює всі числа від -5 до 5 включно.

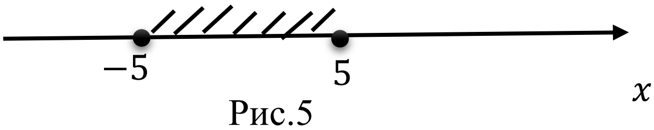


Рис.5

Звертаючи увагу на позначення проміжку, можна визначити, що [–5; 5) включає усі числа від -5 до 5, включаючи -5(дужка квадратна), але не включаючи 5(дужка кругла). З іншого боку, (–5; 5] включає усі числа від -5 до 5, включаючи 5(дужка квадратна), але не включаючи -5(дужка кругла). Ці проміжки відповідають нерівностям $-5 \leq x < 5$ і $-5 < x \leq 5$ відповідно. Графічно їх можна представити на координатній прямій у вигляді відкритих або закритих відрізків, вказуючи, які кінці включені або виключені.

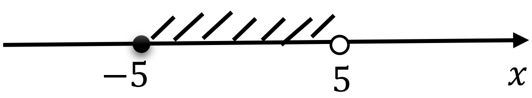


Рис.6

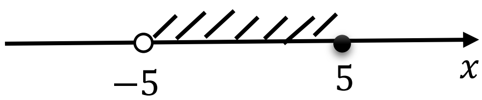


Рис.7

Приклад 8. Розглядаючи множину усіх дійсних чисел, які більші 6, можна зазначити, що точки координатної прямої, представляючи такі числа, розташовані праворуч від точки, яка відображає число 6. Таким чином, цю множину можна зобразити як промінь, розташований праворуч від точки, що представляє число 4, без включення самої цієї точки (див. рисунок 8). Такий промінь називається проміжком від 6 до плюс нескінченності і позначається (6; +∞). Цей проміжок визначає нерівність x > 6.

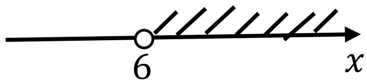


Рис.8

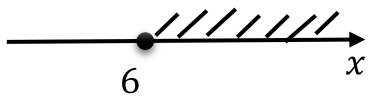


Рис.9

На рисунках 9–11 зображено відповідно такі числові проміжки:

[6; +∞) — проміжок від 6 до плюс нескінченності, включаючи число 6(дужка квадратна);

(–∞; 9) — проміжок від мінус нескінченності до 9, без включення самого числа 9(дужка кругла);

(–∞; 9] — проміжок від мінус нескінченності до 9, включаючи число 9(дужка квадратна).

Ці числові інтервали представляють різні набори дійсних чисел і можуть використовуватися для опису різних умов і областей на числовій прямій.

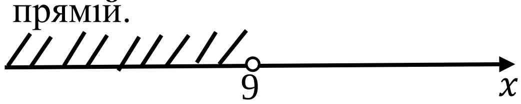


Рис.10

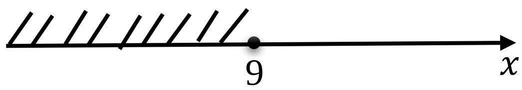


Рис.11

Узагальнюючи, числові проміжки визначаються за допомогою математичних символів та вказівок на координатній прямій.

Таблиця 2

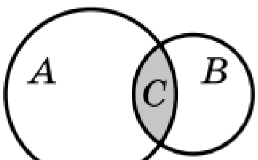
Нерівність, яка задає проміжок	*Позначення проміжку*	*Читання проміжку*	*Зображення*
$a < x < b$	$(a; b)$	Проміжок від a до b	
$a < x \le b$	$(a; b]$	Проміжок від a до b, включаючи b	
$a \le x < b$	$[a; b)$	Проміжок від a до b, включаючи a	
$a \le x \le b$	$[a; b]$	Проміжок від a до b, включаючи a і b	
$x > a$	$(a; +\infty)$	Проміжок від a до плюс нескінченності	
$x \ge a$	$[a; +\infty)$	Проміжок від a до плюс нескінченності, включаючи a	
$x < b$	$(-\infty; b)$	Проміжок від мінус нескінченності до b	
$x \le b$	$(-\infty; b]$	Проміжок від мінус нескінченності до b, включаючи b	

Множину всіх чисел можна зобразити як усю координатну пряму та позначити як $(-\infty; +\infty)$. З іншого боку, порожню множину, яка не містить жодного числа, позначають $\emptyset$ і називають порожньою множиною.

Множини можна комбінувати та опрацьовувати за допомогою різних дій, таких як переріз і об'єднання.

Перерізом множин A і B називають множину, яка складається з елементів, що належать кожній з множин A і B. [7]

Для представлення перерізу множин використовують символ "$\cap$". Зручно зображувати перетин множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна(рис.12).



$$A \cap B = C$$

Рис.12

Приклад 9. Знайдіть переріз множин A і B, якщо A={10, 20, 30}, B={20, 30, 40} і C={60, 70}.

Розв'язання: $A \cap B = \{20, 30\}$; $A \cap C = \emptyset$.

Перерізом двох числових проміжків називають їх спільну частину. [1]

Приклад 10.$[-5; 7) \cap [1; 12] = [1; 7)$. Розв'язок представлено на рис.13

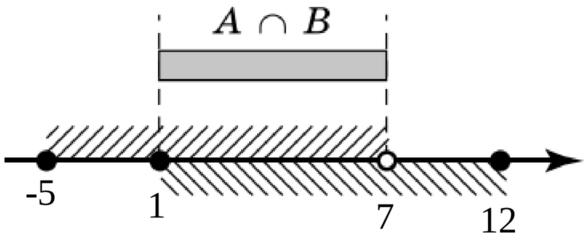


Рис.13

Приклад 11. Знайдіть перетин проміжків (-5; 0) і [2; 10).

Розв'язання: Проміжки (-5; 0) і [2; 10) не містять спільних точок(рис.14). Отже, їх переріз є порожня множина. $(-5;\ 0) \cap [2;\ 10) = \emptyset$.

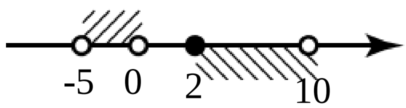
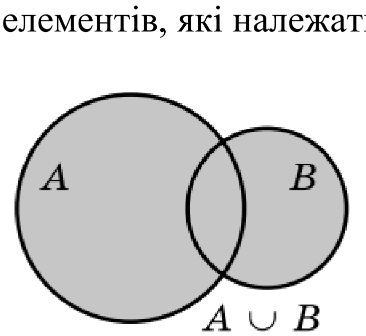


Рис.14

Об'єднанням множин A і B називають множину, що складається з усіх елементів, які належать хоча б од ній з множин A або B. [7]



Для запису об'єднання множин використовується символ "∪". Зручно відображати об'єднання множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна (рис.15).

Рис.15

Приклад 12. Задано множини A={10, 20, 30}, B={20, 30, 40} і C={60, 70}.

Розв’язання: Знайдемо об’єднання множин A і B:

$A \cup B = \{10, 20, 30, 40\}$, знайдемо об’єднання множин A і C:

$$A \cup C = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}.$$

Об’єднанням числових проміжків називається така числова множина, яка містить усі числа кожного з проміжків і не містить інших чисел. [27]

Приклад 13. Знайдіть об’єднання проміжків $[-5; 7)$ і $[1; 12]$.

Розв’язування: $[-5; 7) \cup [1; 12] = [-5; 12]$.

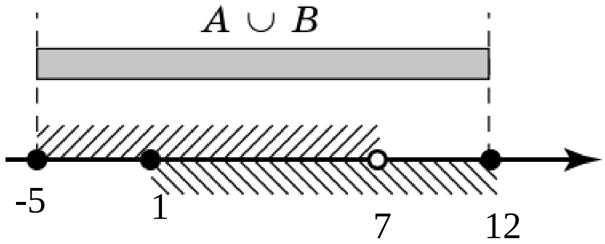


Рис.16

2.3 Лінійні нерівності з однією змінною

Лінійними нерівностями з однією змінною називаються нерівності виду: $ax > b$, $ax < b$, $ax \leq b$, $ax \geq b$, де x — змінна, a і b — деякі числа. [27]

Нерівності, які мають ті самі розв’язки, називають рівносильними. Нерівності, які не мають розв’язків, теж називають рівносильними. [10]

Для нерівностей зі змінними властивості аналогічні тим, що справджуються для рівнянь.

1) якщо в будь-якій частині нерівності розкрити дужки або звести подібні доданки, то отримаємо нерівність, рівносильну даній; [7]

2) якщо в нерівності перенести доданок з однієї її частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній; [7]

3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній; якщо ж обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній. [7]

Приклад 14. Розв’яжіть нерівність: $\frac{x+4}{6} - \frac{x+8}{9} \geq \frac{x}{18}$

Розв’язання: Помножимо нерівності на найменший спільний знаменник дробів, 18. $\frac{x+4}{6} - \frac{x+8}{9} \geq \frac{x}{18} \Big| \cdot 18 \Rightarrow 18 \cdot \frac{x+4}{6} - 18 \cdot \frac{x+8}{9} \geq 18 \cdot \frac{x}{18} \Rightarrow$

$$3(x+4) - 2(x+8) \geq x$$

Далі розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$3x + 12 - 2x - 16 \geq x$$

$$x - 4 \geq x$$

Перенесемо доданки зі змінною в ліву частину нерівності, а без змінної у праву змінивши знак на протилежний.

$$x - x \geq 4$$

$$0x \geq 4$$

Таким чином, маємо нерівність, еквівалентну початковій. Вона не має розв'язків, оскільки для будь-якого значення х ліва частина нерівності буде рівна нулю, а сама нерівність 0 > 4 є хибою.

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 14. Розв’яжіть нерівність: $-(x+2)^2 + x^2 + 4 > -(4x+1)$.

Розв’язання: Розкриємо дужки

$-x^2 - 4x - 4 + x^2 + 4 > -4x - 1.$

Зведемо подібні доданки: $-4x > -4x - 1$.

Перенесемо доданки зі змінною в ліву частину нерівності змінивши знак на протилежний: $-4x - 4x > -1 \Rightarrow 0x > -1$.

Таким чином, маємо нерівність, еквівалентну початковій істиною для будь-якого значення x. Тому що при будь-якому значенні x, ліва частина нерівності дорівнює нулю, а нерівність 0>1 є істиною. То ж розв'язком нерівності буде будь-яке число, тобто множиною розв'язків буде проміжок $(-\infty;\ +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;\ +\infty)$.

З прикладів 13 і 14 можна зробити висновок:

Нерівності вигляду $0\text{x} > b, 0x \geq b, 0\text{x} < b, Ox \leq b$ або не мають розв'язків, або їх розв'язком є будь-яке число. [7]

Приклад 15. Розв'яжіть нерівність для всіх значень а: $ax > 3$.

Розв'язання:

$ax > 3$. Якщо $a > 0$, то $x > \frac{3}{a}$.

Якщо $a = 0$, то $0 \cdot x > 3$ — немає розв'язків.

Якщо $a < 0$, то $ax > 3$, $x < \frac{3}{a}$.

2.3.1 Нерівності з параметром

Розберемо алгоритм розв'язання лінійних нерівностей із параметрами:

1) вирішення лінійних нерівностей з однією змінною та додатним коефіцієнтом при цій змінній;

2) вирішення лінійних нерівностей з однією змінною та негативним коефіцієнтом при цій змінній;

3) розв'язання нерівностей з коефіцієнтом, рівним нулю. Цей момент вимагає особливо пильного розгляду. Результат аналізу корисно записати у вигляді таблиці.

Алгоритм розв'язання лінійних нерівностей з однією змінною

Таблиця 3

	$kx > p$	$kx \geq p$	$kx < p$	$kx \leq p$

$k = 0, p = 0$	$\emptyset$	**R**	$\emptyset$	**R**
$k = 0, p > 0$	$\emptyset$	$\emptyset$	**R**	**R**
$k = 0, p < 0$	**R**	**R**	$\emptyset$	$\emptyset$
$k > 0$	$\left(\frac{p}{k};\ +\infty\right)$	$\left[\frac{p}{k};\ +\infty -\right)$	$\left(-\infty;\ \frac{p}{k}\right)$	$\left(-\infty;\ \frac{p}{k}\right]$
$k < 0$	$\left(-\infty;\ \frac{p}{k}\right)$	$\left(-\infty;\ \frac{p}{k}\right]$	$\left(\frac{p}{k};\ +\infty\right)$	$\left[\frac{p}{k};\ +\infty -\right)$

Приклад 16. При яких значеннях параметра a кожне розв'язок нерівності
$(3x+1)^2 - 3 \geq 9x(x+2) - a$ є розв'язком нерівності $3x + a \leq 2x + 1$?

Розв'язання:

Розв'яжемо першу нерівність:

$$(3x+1)^2 - 3 \geq 9x(x+2) - a$$

Розкриємо дужки

$$9x^2 + 6x + 1 - 3 \geq 9x^2 + 18x - a$$

Зведемо подібні доданки:

$$9x^2 + 6x - 2 \geq 9x^2 + 18x - a$$

$$9x^2 + 6x - 9x^2 - 18x \geq -a + 2$$

Помножимо всю нерівність на (-1) при цьому змінимо знак нерівності на протилежний:

$$-12x \geq -a + 2 | \cdot (-1)$$

$$12x \leq a - 2$$

$$x \leq \frac{a-2}{12}$$

Розв'яжемо другу нерівність: $3x + a \leq 2x + 1$

Перенесем зміну з протилежним знаком у ліву частину нерівності, а параметр a в праву частину з протилежним знаком:

$$3x - 2x \leq 1 - a$$

Зведемо подібні доданки в лівій частині нерівності:

$$x \leq 1 - a.$$

Щоб кожний розв'язок першої нерівності було розв'язком другої, необхідно, щоб $\frac{a-2}{12} \leq 1 - a$.

Звідси $a - 2 \leq 12 - 12a, a \leq \frac{14}{13}$.

Відповідь: при $a \leq \frac{14}{13}$.

Приклад 17. При яких значеннях параметра a хоча б один розв'язок нерівності $\frac{x-a}{12} - \frac{a+x}{8} \leq 1$ буде розв'язком нерівності $3 - \frac{1}{2}x > a$?

Розв'язання:

Розв'яжемо першу нерівність відносно змінної x :

$$\frac{x-a}{12} - \frac{a+x}{8} \leq 1$$

Помножимо всю нерівність на 24 і отримаємо:

$$2(x-a) - 3(a+x) \leq 24$$

Розкриємо дужки:

$$2x - 2a - 3a - 3x \leq 24$$

Зведемо подібні доданки:

$$-x - 5a \leq 24$$

Помножимо всю нерівність на (-1) при цьому змінимо знак нерівності на протилежний:

$$x + 5a \geq -24$$

Перенесемо $(-5a)$ в праву частину з протилежним знаком:

$$x \geq -24 - 5a.$$

Розв'яжемо другу нерівність відносно змінної x :

$$3 - \frac{1}{2}x > a$$

Перенесемо константу у праву частину:

$$-\frac{1}{2}x > a - 3$$

Помножимо всю нерівність на (-2) при цьому змінимо знак нерівності на протилежний:

$$x < -2(a-3)$$

Розкриємо дужки:

$$x < 6 - 2a.$$

Для того, щоб хоч би один розв'язок першої нерівності був розв'язком другої , необхідно, щоб

$$6 - 2a > -5a - 24.$$

Перенесемо значення $(-5a)$ з протилежним знаком у ліву частину:

$$6 - 2a + 5a > -24$$

Перенесемо сталу з протилежним знаком у праву частину нерівності:

$$-2a + 5a > -24 - 6$$

Зведемо подібні доданки:

$$3a > -30$$

Поділимо всю нерівність на 3 і отримаємо:

$$a > -10.$$

Відповідь: при $a > -10$.

2.3.2 Системи нерівностей з однією змінною

Розгляньмо ситуацію. Турист вирушив із турбази в напрямку зупинки, розташованої на відстані 20 км. Якщо турист збільшить швидкість на 1 км/год, то за 4 години він пройде відстань, більшу за 20 км. Якщо він зменшить швидкість на 1 км/год, то навіть за 5 годин не встигне дійти до зупинки. Яка є швидкість туриста?

Розв'язання:

Нехай швидкість туриста дорівнює x км/год. Якщо турист рухатиметься із швидкістю (x + 1) км/год, то за 4 години він пройде відстань 4(x + 1) км. За умовою завдання 4(x + 1) > 20. Якщо турист рухатиметься із швидкістю (x - 1) км/год, то за 5 годин він пройде відстань 5(x - 1) км. За умовою задачі 5(x - 1) < 20.

Необхідно знайти значення x, при яких одночасно справедливі нерівності 4(x + 1) > 20 та 5(x - 1) < 20. У таких випадках кажуть, що потрібно вирішити систему нерівностей і використовують запис:

$$\begin{cases} 4(x + 1) > 20 \\ 5(x - 1) < 20 \end{cases}$$

Замінивши кожну нерівність у системі на рівносильну йому нерівність, отримаємо систему.

$$\begin{cases} 4x + 4 > 20 \\ 5x - 5 < 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x > 16 \\ 5x < 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 5 \end{cases}$$

Отже, значення x повинно задовольняти умову $4 < x < 5$.

Відповідь: швидкість туриста більше 4 км/год, але менше 5 км/год.

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, при якому правильною є кожна з нерівностей системи. [7]

Розв’язати систему двох нерівностей з однією змінною — означає знайти всі її розв’язки або показати, що розв’язків немає. [27]

Аби розв’язати систему нерівностей, рекомендується виконувати наступні кроки в такій послідовності:

1) розв'язати кожну з нерівностей системи;

2) зобразити множину розв'язків кожної з нерівностей на координатній прямій;

3) знайти переріз цих множин, який і буде множиною розв'язків системи;

4) записати відповідь. [7]

Приклад 18. Розв’яжіть систему нерівностей: $\begin{cases} 1{,}2(3 - x) - 0{,}8x \geq 6 \\ -2(1 - 4x) - 5x < x \end{cases}$

Розв’язання: Розв’яжемо кожну нерівність окремо:

$$\begin{cases} 1{,}2(3 - x) - 0{,}8x \geq 6 \\ -2(1 - 4x) - 5x < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3{,}6 - 1{,}2x - 0{,}8x \geq 6 \\ -2 + 8x - 5x < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x \geq 2{,}4 \\ 2x < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-2x}{-2} \geq \frac{2,4}{-2} \\ \frac{2x}{2} < \frac{2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1,2 \\ x < 1 \end{cases}$$

Зобразимо множину розв'язків системи $\begin{cases} x \leq -1,2 \\ x < 1 \end{cases}$ на координатній прямий і запишемо відповідь у вигляді числового проміжку:

$x \in (-\infty\ ;\ -1,2]$

Рис.17

Приклад 19. Розв'яжіть систему нерівностей:
$$\begin{cases} 0,7(5a+1) - 0,5(1+a) < 3a \\ 2a - (a-1,7) > 6,7 \end{cases}$$

Розв'язання: Розв'яжемо кожну нерівність окремо:

$$\begin{cases} 0,7(5a+1) - 0,5(1+a) < 3a \\ 2a - (a-1,7) > 6,7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3,5a + 0,7 - 0,5 - 0,5a < 3a \\ 2a - a + 1,7 > 6,7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3,5a - 0,5a - 3a < -0,7 + 0,5 \\ 2a - a > 6,7 - 1,7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0a < -0,2 \\ a > 5 \end{cases}$$

Отримали нерівності 0 < −0,2 та a > 5. Перша нерівність є хибною і не має розв'язків. Розв'язок другої нерівність a > 5 є всі числа, які більші за 5. Але оскільки перша нерівність є хиба при будь-якому значенні a, то можна зробити висновок, що у нерівностей немає розв'язку. Отже не має розв'язку початкова система $\begin{cases} 0,7(5a+1) - 0,5(1+a) < 3a \\ 2a - (a-1,7) > 6,7 \end{cases}$.

Відповідь: система розв'язків немає.

Приклад 20. Знайдіть область визначення функції

$$\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{x^2-4}.$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x + 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \geq -1 \\ x > -4 \\ x^2 \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \geq -1 \\ x > -4 \\ x \neq \pm\sqrt{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -4 \\ x_1 \neq -2, \quad x_2 \neq 2 \end{cases}$$

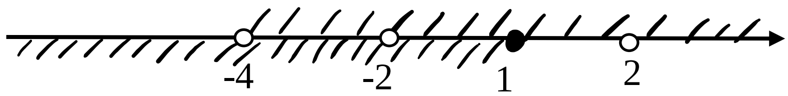


Рис.18

$$x \in (-4;\ -2) \cup (-2; 1]$$

Відповідь: $(-4;\ -2) \cup (-2; 1]$

2.4 Розв’язування квадратних нерівностей

Квадратні нерівності дуже схожі на квадратні рівняння, але основна відмінність полягає в тому, що у квадратних нерівностях є знак нерівності, тоді як у квадратних рівняннях — знак дорівнює. Розв'язання квадратних рівнянь включає добування коренів або перетин парабол з віссю x, а розв'язання квадратних нерівностей - це інтервали між коренями параболи на графіку.

Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$,

$ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому a ≠ 0, називають квадратними. [Мерзляк]

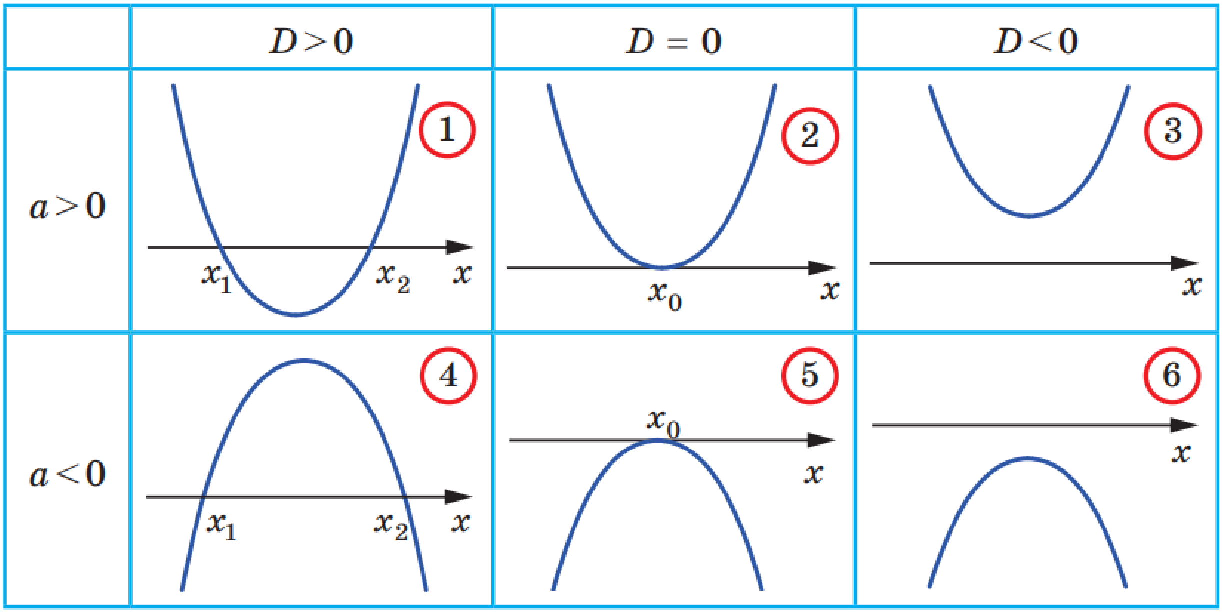
Розглянемо, як визначити розташування графіка квадратичної функції y = $ax^2 + bx + c$ відносно вісі абсцис.

Кількість розв’язків квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначаються за допомогою дискримінанта D. Якщо D > 0, то у функції два нулі; якщо D = 0, то один нуль; якщо D < 0, то нулів немає.

Знак старшого коефіцієнта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначає напрям віток параболи y = $ax^2 + bx + c$. При a > 0 вітки напрямлені вгору, при a < 0 - вниз.

Розташування параболи y = $ax^2 + bx + c$ відносно вісі абсцис можна схематично представити у таблиці, враховуючи знаки чисел a і D. В таблиці відображено, де знаходяться нулі функції (x_1 і x_2), а також абсциса вершини параболи (x_0).

Таблиця 4



1) знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (якщо вони існують);

2) якщо нерівність має строгий знак (> або <), то коре- ні квадратного тричлена позначаємо на осі x «виколо- тими» точками (вони виключатимуться з множини розв'язків нерівності); якщо знак нерівності нестрогий (або), то корені квадратного тричлена позначаємо зафарбованими точками (вони включатимуться де множини розв'язків нерівності);

3) схематично зображуємо графік функції $y = ax^2 + bx + c$, враховуючи напрям гілок параболи та точки її перетину з віссю x (якщо вони існують);

4) знаходимо на осі x проміжки, на яких функція $y = ax^2 + bx + c$ задовольняє дану нерівність;

5) записуємо відповідь. [7]

Приклад 21. Розв'яжіть нерівність: $(x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) - 8 > 0$

Розв'язання: Введемо заміну $x^2+2x=t, t>0$, тоді

$$t^2-7t-8>0$$

Прирівняємо квадратний тричлен до нуля і знайдемо критичні точки:

$$t^2-7t-8=0$$

За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1+t_2=7 \\ t_1\cdot t_2=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=8 \end{cases}.$

Повертаємося до заміни $x^2+2x=t$

1) $x^2+2x=-1, x^2+2x+1=0, D=2^2-4\cdot 1\cdot 1=4-4=0$

$x=\frac{-b}{2a}, x=-1$

$x^2+2x+1>0$

$x\,\epsilon(-\infty;\ -1)\cup(-1;+\infty)$

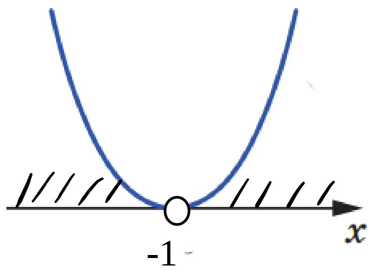


Рис.19

2) $x^2+2x=8, x^2+2x-8=0$

$$D=2^2-4\cdot 1(-8)=4+32=36>0$$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, x_1=-4, x_2=2$

$x^2+2x-8>0$

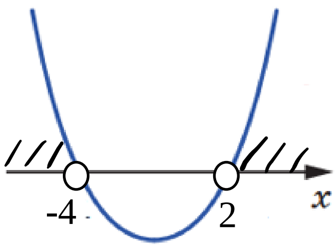


Рис.20

$$x\,\epsilon(-\infty;\ -4)\cup(2;+\infty)$$

Знайдемо загальний розв'язок для нерівності

$(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8>0.$

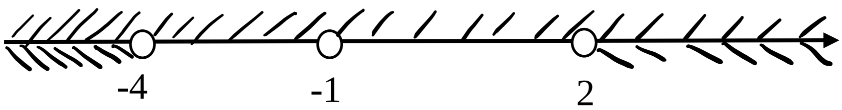


Рис.21

$$x \in (-\infty;\ -4) \cup (2; +\infty)$$

Відповідь: $(-\infty;\ -4) \cup (2; +\infty)$

Приклад 22. Розв'яжіть нерівність: $(3-4x)^2 \leq a-1$

Розв'язування: Виконаємо тотожні перетворення і отримажмо:

$$(3-4x)^2 \leq a-1 \Rightarrow 9-24x+16x^2 \leq a-1 \Rightarrow 16x^2-24x+10-a \leq 0$$

Прирівняємо квадратний тричлен до нуля та знайднемо критичні точки:

$$D = b^2-4ac = 576-640+64a = 64(a-1);$$

1) $a = 1 \Rightarrow D = 0, x = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

2) $a < 1 \Rightarrow D < 0$, так як вітки параболи напрямлені вгору, а нас цікавить нижня частина координатної прямої, то при $a < 1$ нерівність розв'язків немає.

3) $a > 1 \Rightarrow D > 0$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{24-8\sqrt{a-1}}{32} = \frac{3-\sqrt{a-1}}{4}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{24+8\sqrt{a-1}}{32} = \frac{3+\sqrt{a-1}}{4}$

$$x \in [\frac{3-\sqrt{a-1}}{4};\ \frac{3+\sqrt{a-1}}{4}]$$

Відповідь: Якщо $a = 1,$ то $x = \frac{3}{4}$;

Якщо $a < 1$, то нерівність розв'язків немає;

Якщо $a > 1$, то $x \in [\frac{3-\sqrt{a-1}}{4};\ \frac{3+\sqrt{a-1}}{4}]$.

2.5 Основні методи доведення нерівностей

В Державному стандарті базової середньої освіти передбачено, що учні, починаючи з 9 класу, повинні вивчити методи доведення нерівностей.

Давайте розглянемо, як використовуючи означення порівняння чисел, можна довести нерівность.

Приклад 23. Довести нерівність: $(a+9)(a-2) < a(a+7a)$

Доведення: Розглянемо різницю лівої і правої частини нерівності та спростимо її: $a^2 - 2a + 9a - 18 - a^2 - 7a = -18 < 0$.

Оскільки різниця дорівнює від'ємному числу, то (a+9)(a-2)<a(a+7a).

Що й потрібно було довести.

Приклад 24. Довести, що при будь-якому дійсному значенні змінної х нерівність істина: $9x^2 + 48 > 30x$.

Доведення:

Оцінюємо різницю лівої та правої частин нерівності:

$9x^2 + 48 - 30x = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 48 = (3x - 5)^2 + 23$.

$(3x - 5)^2 \geq 0$ за будь-якого значення змінної х.

23>0.

Отже, $(3x - 5)^2 + 23 > 0$ за будь-якого х.

Отже, нерівність $9x^2 + 48 > 30x$ виконується за будь-якого дійсного значення х. Що й потрібно було довести.

Приклад 25. Довести нерівність: $x^2 + y^2 + 16x - 20y + 190 > 0$.

Доведення:

Виділимо повний квадрат у лівій частині нерівності:

$$x^2 + y^2 + 16x - 20y = (x^2 + 16x) + (y^2 - 20y) + 190 =$$

$$= (x^2 + 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2) - 8^2 + (y^2 - 2 \cdot y \cdot 10 + 10^2) - 10^2 + 190 =$$
$$= (x + 8)^2 + (y - 10)^2 + 26.$$

$(x + 8)^2 \geq 0$ за будь-якого значення х,

$(y - 10)^2 \geq 0$ за будь-якого значення у,

26>0.

Отже, $(x+8)^2+(y-10)^2+26>0$ при будь-яких дійсних значеннях змінних x та y.

А це означає, що $x^2+y^2+16x-20y+190>0$. Що й потрібно було довести.

Приклад 26. Довести, що $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}, a>0, b>0$

Доведення:

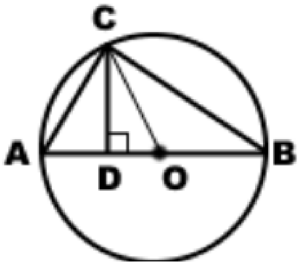


Рис.22

Нехай $AD = a, BD = b.$

Побудуємо коло з діаметром AB=a+b.

З довільної точки C кола проведемо до діаметра перпендикуляр CD.

Кут ACD – прямий (як вписаний кут, що спирається на діаметр).

За властивістю прямокутного трикутника, висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює середньому геометричному між проекціями катетів на гіпотенузу:

$$CD=\sqrt{AD\cdot BD}$$

тобто

$$CD=\sqrt{a\cdot b}$$

З’єднаємо точку C з центром кола, точкою O. CO — радіус, отже, він дорівнює половині діаметра:

$$CO=\frac{1}{2}AB$$

$$CO=\frac{a+b}{2}$$

тобто довжина CO дорівнює середньому арифметичному a та b.

У прямокутному трикутнику COD: CD – катет, CO – гіпотенуза.

Так як гіпотенуза завжди більше катета, CO>CD, отже, середнє арифметичне a і b більше їх середнього геометричного.

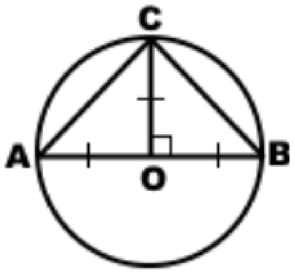


Рис.23

D збігається з точкою O, якщо AO = BO, тобто $a = b$. В цьому випадку $CO = CD = AO = BO = a = b$,

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a+a}{2} = a, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a \cdot a} = a$$

(оскільки a>0), і і в цьому випадку середнє арифметичне a і b дорівнює їх середньому геометричному.

Таким чином, середнє арифметичне додатне чисел a і b не менше їх середнього геометричного.

Що й потрібно було довести.

Метод спрощення нерівності

У випадках спрощення виразів, які утворюють нерівність, робить цю нерівність очевидною.

Приклад 27. Довести нерівність:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Нерівність, що доводиться, набуває вигляду

$$1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

і стає очевидною.

Метод застосування очевидної нерівності

Цей прийом полягає в такому: задану нерівність отримують урезультаті перетворення очевидної нерівності або почленного додавання чи множення кількох очевидних нерівностей. Як опорні нерівності в цьому методі можуть використовуватись, наприклад, такі нерівності:

$$a^2 \geq 0; \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \text{де} \ \ a \geq 0, b \geq 0;$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 0, \quad \text{де} \ \ ab > 0;$$

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \text{де} \ \ a > 0, b^2 - 4ac < 0.$$

Приклад 28. Доведіть нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Розв'язання. Очевидно, що при будь-яких значеннях a, b і c виконується така нерівність:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Звідси

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Метод застосування раніше доведеної нерівності

Застосування нерівності $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Приклад 29. Доведіть, що коли $a > 0, b > 0, c > 0$ то

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a};$$

$$\frac{b+c}{b^2+c^2} \leq \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b};$$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{c+a}{2ca} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}.$$

Звідси

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2.6 Нерівності між середніми величинами. Нерівність Коші Буняковського

Значення виразів

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \qquad \frac{a+b}{2}, \qquad \sqrt{ab}, \qquad \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

називають відповідно *середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним* і *середнім гармонічним* чисел a і b.

Ці величини називають «*середніми*», оскільки при $0 < a \le b$ їхні значення належать проміжку $[a; b]$, тобто виконуються нерівності

$$a \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b, \qquad a \le \frac{a+b}{2} \le b, \qquad a \le \sqrt{ab} \le b, \qquad a \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le b.$$

Зв’язок між середніми величинами виражають такі три теореми.

Теорема 1. *При будь-яких значеннях a і b виконується нерівність*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

Доведення. Маємо:

$$a^2+b^2 \ge 2ab;$$

$$2a^2+2b^2 \ge 2ab+a^2+b^2;$$

$$2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2;$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4};$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{|a+b|}{2}.$$

Оскільки $|a+b| \geq a+b$, то

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Зауважимо, що в нерівності (1) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geq 0$.

Теорема 2. (нерівність Коші для двох чисел) *При будь-яких невід'ємних значеннях a і b виконується нерівність*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \qquad (2)$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

При будь-яких невід'ємних значеннях a і b ця різниця набуває невід'ємних значень. Отже, нерівність, що доводиться, є правильною.

Зауважимо, що в нерівності (2) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geq 0$.

Наслідок. *Якщо $a > 0$, то* $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Доведення. До додатних чисел a і $\frac{1}{a}$ застосуємо нерівність Коші

$$\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}.$$

Звідси

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Слід зауважити, що в даній нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = \frac{1}{a}$. З урахуванням того, що $a > 0$, отримуємо $a = 1$.

Під час доведення теореми 7 ми використовували нерівність $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Цю нерівність також можна розглядати як наслідок із нерівності Коші. Дійсно, оскільки $a^2 \geq 0$ і $b^2 \geq 0$, то можна записати:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}.$$

Відтак $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2|ab| \geq 2ab$.

Теорема 3. *Якщо* $ab > 0$*, то*

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \tag{3}$$

Доведення. Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < 0 \quad \text{і} \quad \sqrt{ab} > 0.$$

Звідки маємо, що нерівність (3) очевидно виконується.

Нехай $a > 0$ і $b > 0$. Застосуємо нерівність Коші до додатних чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Оскільки обидві частини цієї нерівності при $a > 0$ і $b > 0$ набувають додатних значень, то справедливою є така нерівність:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Зауважимо, що в нерівності (3) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a > 0$.

Теореми 7 – 9 дають змогу дійти висновку, що при $a > 0$ і $b > 0$ справедливим є такий ланцюжок нерівностей:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Для квадратного тричлена справедлива лема.

Лема. *Якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c, де $a>0$, при всіх значеннях x набуває невід'ємних значень, то його дискримінант D є недодатним.*

Теорема 4. (нерівність Коші–Буняковського) *При будь-яких значення $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ виконується нерівність*
$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$.

Доведення. Якщо $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то нерівність, що доводиться, є очевидною. Розглянемо випадок, коли хоча б одне із чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ не дорівнює 0.

При будь-якому значенні змінної x виконується нерівність

$$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\dots+(a_nx-b_n)^2 \geq 0.$$

Останню нерівність можна перетворити до такого вигляду:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x +$$
$$+b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 \geq 0.$$

Ліва частина останньої нерівності – це квадратний тричлен з додатним старшим коефіцієнтом. Цей квадратний тричлен набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінної x. Тоді згідно з лемою його дискримінант D є недодатним.

Маємо:

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$
$$- 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Оскільки $D \leq 0$, то

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Приклад 30: Доведіть нерівність

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} \geq \sqrt{2}.$$

Розв'язання. Скориставшись нерівністю (1), можна записати:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2}{2}}\geq\sqrt{2}\cdot\frac{x+1-y}{2};$$

$$\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{(1-x)^2+y^2}{2}}\geq\sqrt{2}\cdot\frac{1-x+y}{2}.$$

Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}\geq\sqrt{2}\left(\frac{x+1-y}{2}+\frac{1-x+y}{2}\right)=\sqrt{2}.$$

III. ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Під час вивчення теми: «Нерівності» та «Квадратна функція» в ліцеї було проведено педагогічний експеримент з метою поліпшення засвоєння учнями матеріалу, розвитку їхніх умінь та навичок, а також для підвищення інтересу до вивчення математики. Була задіяна паралель 9-х класів (загальною кількістю 56 учнів). В цих класах алгебра вивчається 2 год. На тиждень в І семестрі та 2 год на тиждень в ІІ семестрі, всього 70 год. На рік (рівень стандарту).

Об'єкт дослідження – процес навчання математики.

Гіпотеза експерименту: якщо в процесі вивчення матеріалу використовувати інтерактивні методи та використовувати різні технології та інтерактивних додатків для організації уроку, то це сприятиме усвідомленому та якісному формуванню умінь вирішувати рівняння та нерівності.

Мета: полягає в виявленні та обґрунтуванні можливості використання даної методики для формування умінь розв'язань нерівності.

У процесі дослідження проблеми та перевірки достовірності сформульованої гіпотези необхідно було вирішити такі завдання:

1. Виявити роль нерівностей в шкільному курсі математики.

2. Розробити методику формування умінь розв'язувати нерівності, спрямовану на розвиток критичного мислення здобувачів освіти.

3. Експериментально перевірити методику ефективність розробленої методики.

Для вирішення поставлених завдань було використано такі методи дослідження:

- ✓ аналіз педагогічної та методичної літератури;

- ✓ - Теоретичний метод;
- ✓ - Практичний метод.

Хід експерименту:

- ✓ - Навчальний етап;
- ✓ - Контрольний етап.

База дослідження «Немовицький ліцей Немовицької сільської ради Сарненського району Рівненської області»

Характеристика рівня навчальних досягнень учнів 9-А і 9-Б класів станом на вивчення тем (складено автором)

Таблиця 5

Характеристика рівня НДУ 9-А класу	Характеристика рівня НДУ 9-Б класу
В класі 27 учнів, з них мають достатній рівень 6 учнів, середній рівень 19 учнів, початковий рівень – 2 учні. Середній бал успішності учнів складає 7,5.	В класі 29 учнів, з них мають високий рівень 2 учня, достатній рівень 14 учнів, середній рівень – 10 учня, початковий рівень – 3 учні. Середній бал успішності учнів складає 8,9.

Навчальний експеримент.

Метою даного етапу є формування в учнів умінь розв’язання нерівності.

Для реалізації поставленої мети сформульовано завдання:

1. 1.Відповідно до результатів успішності 9-А та 9-Б класів підібрати методику та методи викладання в даних класах для вивчення теми «Числові нерівності»;

2. Застосовувати цю систему завдання під час уроків і додаткових заняттях зі слабкими учнями.

3. Організувати діяльність учнів на заняттях, спрямовану формування умінь розв’язувати нерівності.

Для реалізації цих завдань були проведені уроки на тему «Нерівності». Зміст цих занять включав теоретичну і практичну частину.

Були створені уроки та вправи, які акцентують увагу на конкретних аспектах теми «Нерівності» та теми «Квадратні функції». Включення практичних завдань та задач, які можуть зацікавити учнів та заохотити їх активну участь. Активно впроваджувалися інтерактивні методи навчання в роботу класів, таких як групова робота, дискусії, вирішення реальних завдань.

Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів.

При оцінюванні навчальних досягнень учнів враховуються:

- Характеристика відповіді учня, що включає правильність, повноту, логічність, обґрунтованість та цілісність.

- Якість знань, орієнтована на осмисленість, глибину, узагальненість, системність, гнучкість, дієвість та міцність.

- Ступінь сформованості загальнонавчальних та предметних умінь і навичок.

- Рівень володіння розумовими операціями, такими як аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, класифікація, узагальнення, висновки тощо.

- Досвід творчої діяльності, включаючи виявлення проблем та їх розв’язання, формулювання гіпотез.

- Самостійність оцінних суджень.

Відповідно до рівня оволодіння математичними знаннями та навичками виділяються чотири категорії навчальних досягнень учнів:

1. Початковий рівень:

- Учень може називати математичні об’єкти, але лише тоді, коли вони представлені безпосередньо.

- Здатний виконувати елементарні завдання лише за допомогою вчителя.

2. Середній рівень:

- Учень повторює інформацію та виконує дії, які вивчив(ла) у процесі навчання.

- Здатний розв’язувати завдання, дотримуючись зразків.

3. Достатній рівень:

- Учень самостійно застосовує знання в стандартних ситуаціях.

- Вміє виконувати математичні операції та застосовувати вивчені методи, але умови та зміст можуть бути змінені.

4. Високий рівень:

- Учень може самостійно орієнтуватися в нових ситуаціях та складати план дій для їх розв’язання.

- Має дослідницький підхід до вивчення матеріалу та може пропонувати нові, раніше невідомі рішення.

Оцінювання якості математичної підготовки учнів враховує два аспекти: рівень оволодіння теоретичними знаннями та якість практичних умінь і навичок. Оцінки виставляються під час поточного, тематичного контролю.

Після цього було проведено контрольний етап дослідження.

Контрольний експеримент.

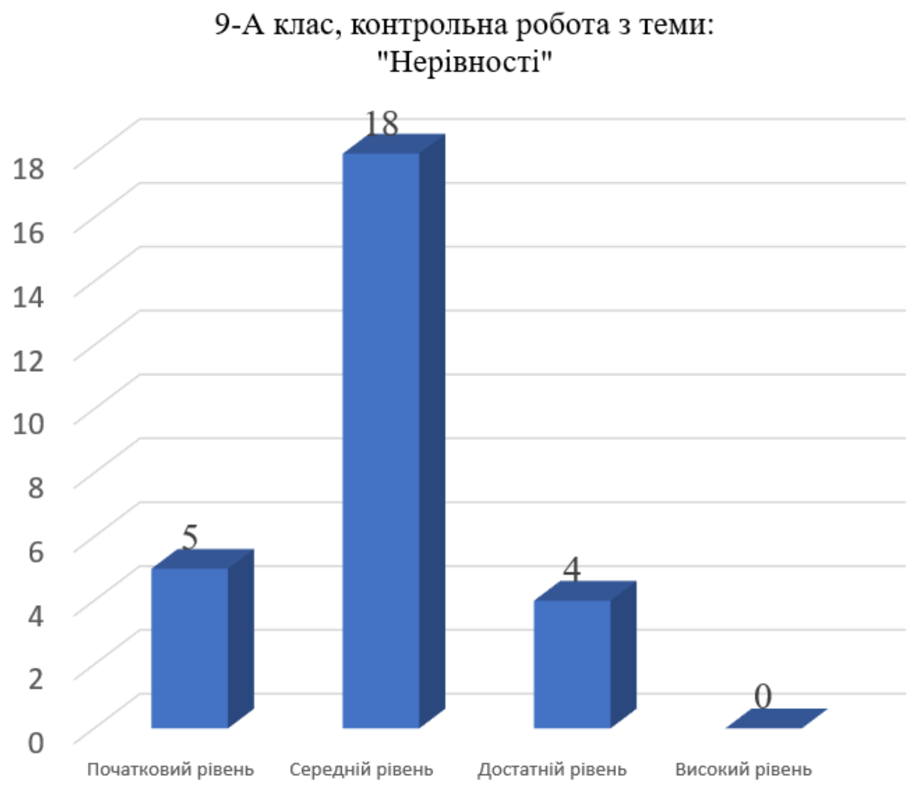
Метою цього етапу є визначення ефективностірозробленої методики.

Для реалізації цієї мети було сформульовано завдання:

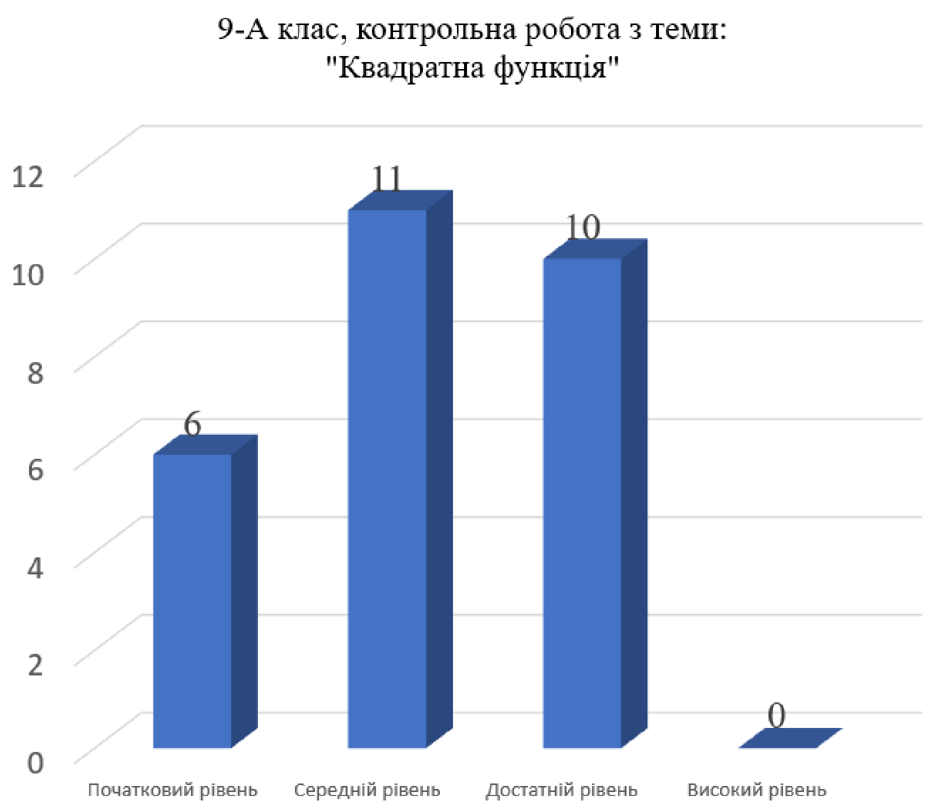
1. Провести самостійні та контрольні роботи з тем: «Нерівності» та «Квадратні функції», що дозволяє визначити рівень сформованості у учнів умінь розв'язувати нерівності.

2.Зробити відповідні висновки щодо використання даної методики, її коригування.

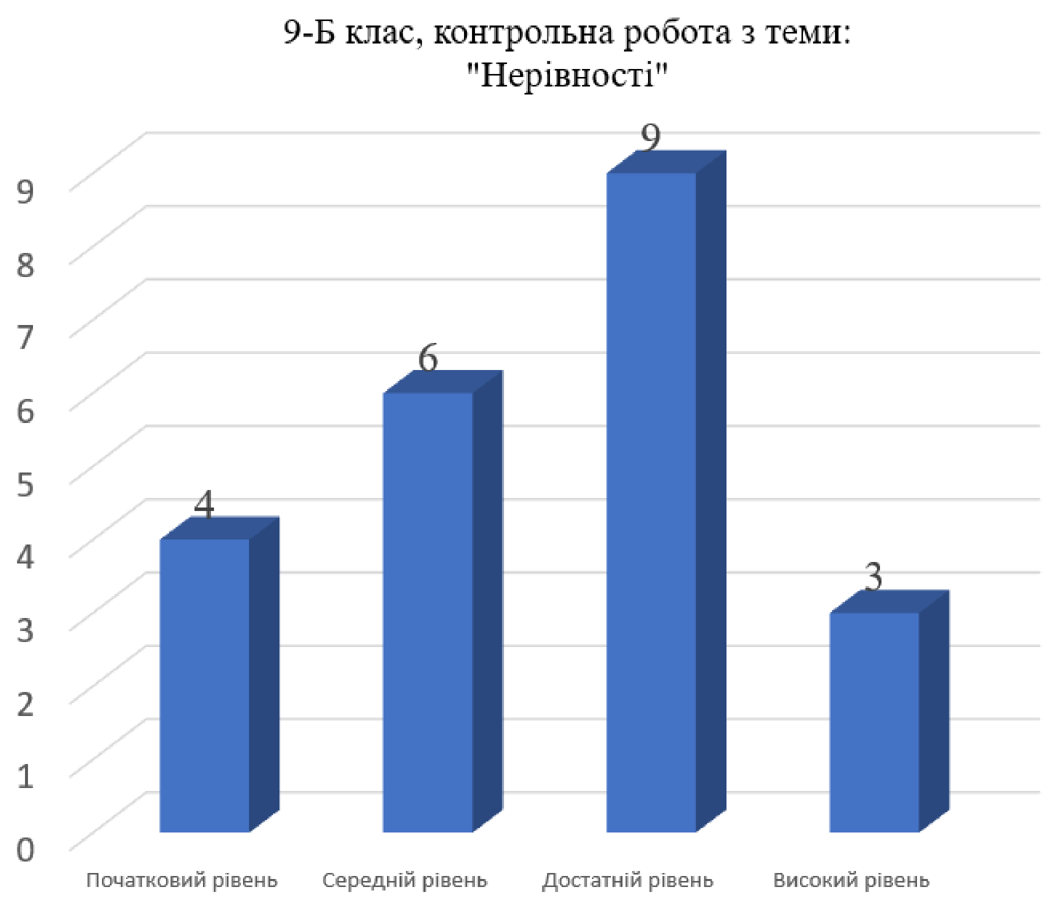
Для вирішення цих завдань було проведено контрольну роботу, аналіз контрольної роботи.



Діаграма 1



Діаграма 2



Діаграма 3

Діаграма 4

Результати педагогічного експерименту показують, що здобувачі освіти 9-б класу краще засвоїли матеріал з даних тем, ніж здобувачі освіти 9-А класу. Учні обох класів були зацікавлені до вивчення поданих тем, активно працювали на уроках.

ВИСНОВКИ

Таким чином, у роботі розглянуто теоретичні засади навчання з теми «Методика вивчення нерівностей в основній школі» в курсі алгебри, вивчено особливості їх розв’язання. Були порівняні освітні програми: рівня стандарту та профільного рівня. Також є порівняння підручників за чиною програмою рівня стандарту.

Мета роботи полягала у виявленні методичних особливостей навчання з теми «Нерівності». Для досягнення цієї мети, була підібрана та вивчена література з даної теми, досліджено різні підходи до поняття «Нерівності» в курсі алгебри.

Опрацювавши відповідну педагогічну і методичну літературу з цього питання, можна дійти висновку, що вміння і навички розв’язувати нерівності у шкільному курсі алгебри є дуже важливими, розвиток яких потребує значних зусиль як з боку вчителя математики так і від самих учнів. Учитель зобов’язаний достатньою мірою володіти методикою розв’язування нерівності, оскільки від викладу матеріалу залежить якість засвоєння матеріалу. З урахуванням того, що нерівності поділяються на декілька типів, то й методика вивчення кожного типу різна.

Досягти поставленої мети за допомогою лише засобів і методів, запропонованих авторами сучасних підручників, практично дуже складно. Це пов’язано з індивідуальними особливостями учнів: в залежно від рівня їх базових знань з математики вибудовується стратегія вивчення різних видів нерівностей на різних рівнях.

Процес розв’язання нерівностей передбачає в собі практично всі знання і вміння, які учні набувають при вивченні елементарної математики. Тому вчитель стикається з проблемою виділення тих ідей вивчення матеріалу, які лежать в основі способів розв’язування завдань, з метою їх подальшого узагальнення та систематизації. Це важливо для засвоєння учнями теорії, й опанування деякими загальними методами розв'язання математичних завдань. Розв'язання нерівностей створює передумови для систематизації знань учнів, дає можливість встановити зв'язки з вивченим матеріалом алгебри (рівняння, рівносильність рівнянь, види алгебраїчних рівнянь, способи їх розв'язання, методи перетворення алгебраїчних виразів).

Іншою особливістю є те, що виникають певні труднощі в класифікації нерівностей. Наслідком цього також можуть бути труднощі у розв'язанні нерівностей, зокрема, у виборі того прийому, який доцільно застосувати для отримання відповіді.

Зазначені особливості мають бути враховані при розробці методики організації уроків алгебри загальноосвітньої школи. Для розв'язання вправ потрібне логічне мислення, при розв'язуванні необхідно розуміти, що вже зроблено і що ще треба зробити, щоб отримати розв'язок, вміти аналізувати отримані результати. Вивчення нерівностей в загальноосвітніх закладах дає учням великі змогу аналізу різних ситуацій, тобто показує значимість цих понять під час розв'язування багатьох практичних завдань. З найпростіших практичних завдань поступово формується у школярів розуміння значущості математики у житті, виробляються необхідні математичні компетентності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. Для 9 кл. загальноосвітн. Навч. Закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.
2. Балан В. Г., Лавренюк В. І., Шарова Л. І. Числові нерівності на вступних іспитах: Навч. Посібн. – К.: Альфа, 2005. – 104 с.
3. Бевз Г. П. Нерівності / Г. П. Бевз // Математика в школі. – 2009. – 165с.
4. Бухлова Н.В. Формування здатності особистості до самонавчання / Н.В. Бухлова // Педагогічна скарбниця. – 2002. – № 1. – С. 47– 49.
5. Гутор О. М. Інтерактивна дошка на уроках математики. URL: https://mathbloggutor.blogspot.com/p/blog-page_66.html
6. Зимова І. В. Формування елементарної математичної компетентності / Л.І. Зайцева. – К.: МП «Око», 2005. – 215 с.
7. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ : Генеза, 2017. – с.264
8. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики / А.М. Капіносов. – Х.: Вид. група «Основа», 2006. – 140 с.
9. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв’язування математичних задач з параметрами / А.Ю. Карлащук. – К.: Вища школа, 2001. – 19 с.
10. Кравчук В.К Алгебра : підруч. Для 9 кл. загальноосвіт. Навч. Закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. — 264 с.
11. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп’ютером: посібник для вчителів і студентів [за ред. М. І. Жалдака] / Т.Г. Крамаренко. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.
12. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики / Наук.-метод. посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.
13. Маркова І.С. Інтерактивні технології на уроках математики: навч.-метод. посібник / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Основа», 2007.–126 с.

14. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017. – 416 с. : іл

15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Збірник задач і контрольних робіт з алгебри для 9 класу. – Х.: – Гімназія, 2009. – 128 с.: іл.

16. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. Для 9 кл. загальноосвітн. Навч. Закладів / А.Г. Мерзляк, В.П. Полонський, М.С. Якір. – Х: Гімназія, 2017. – 272 с

17. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів URL https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf

18. Навчальна програма з математики для учнів 6–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів URL:https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-programa-z-matematiki.docx

19. Петренко С. В., Мартиненко О. В. Особливості навчання математики в профільній школі / Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Чернігів: РВВЧДПУ, 2004. – С. 63-66.

20. Прядко Н.О. Формування математичної грамотності учнів старшої школи / Н.О. Прядко // Вісник Чернігівського національного педуніверситету. Педагогічні науки. – 2013. – Вип. 109. – С. 98–100.

21. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ / С.А. Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

22. Роганін О.М. Математика: навч. Посіб./ О.М.Роганін.- К.-Х.:2020 – 402с. – (Серія «Грунтовна підготовка до ЗНО за 100 днів»).

23. Розанова Н.Д. Культура математичного мовлення учнів / Н.Д. Розанова. – Львів: Світ, 2003. – 176 с.

24. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К.: «Зодіак-ЕКО», 2000. – 182 с.

25. Соколенко К. Вивчення деяких способів доведення нерівностей в ШКМ. Електронний журнал «Наукові записки молодих учених». URL: file:///C:/Users/User/Downloads/1754-3089-1-PB.pdf

26. Соколенко Л.О. Теоретико-множинні аспекти шкільного курсу математики / Л.О. Соколенко // Матеріали міжнародної науково- методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2015), м. Черкаси, 4-5 червня. – Ч.: ЧНУ ім. Б. Хмельницького. – 2015. – С.211– 212.

27. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. – К. : УОВЦ «Оріон», 2017. – 272 с.

28. Ткаченко О. Д. Методика вивчення числових нерівностей та їх властивостей в ШКМ. URL: https://naurok.com.ua/metodika-vivchennyachislovih-nerivnostey-i-h-vlastivostey-u-shkilnomu-kursi-matematiki-42157.html

29. Шаран О. Ідея профілізації в системі профільної математичної освіти / Олександра Шаран // Математика в школі. – 2011. – №5. – С.37-40.

30. Шахно Н. С. Методичні прийоми попередження помилок при вивченні теми «Нерівності, системи нерівностей» в основній школі. Електронний журнал «Наукові записки молодих учених». 2021. №7. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1795/pdf.

31. І. П. Вакулко, О. В. Крайчук Методика вивчення нерівностей в основній школі // Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матер. VI Всеукр. наук.-практ. конф., 28-29 вересня 2023 р. – Вінниця, 2023 – С.171 – 174.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця 6

Порівняння підручників з алгебри для 9-го класу

«Алгебра» підручник для 9 класу (рівень стандарт)					
Автори	Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ : Генеза, 2017. - С.264[3]	Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с.	Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 272 с. : іл.	Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. — 264 с.	Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 272 с.
Розділи, параграфи	§ 1. Числові нерівності.	Розділ 1. НЕРІВНОСТІ	§ 1. Нерівності 1. Числові нерівності	§ 1. НЕРІВНОСТІ 1. Числові нерівності.	РОЗДІЛ 1. НЕРІВНОСТІ

	§ 2. Основні властивості числових нерівностей. § 3. Почленне додавання і множення нерівностей. § 4. Нерівності зі змінними. Розв'язок нерівності. § 5. Числові проміжки. Переріз та об'єднання множин.	§ 1. Загальні відомості про нерівності § 2. Властивості числових нерівностей § 3. Подвійні нерівності § 4. Розв’язування нерівностей з однією змінною § 5. Об’єднання і переріз множин. Числові проміжки § 6. Системи нерівностей з однією змінною	2. Основні властивості числових нерівностей 3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу 4. Нерівності з однією змінною 5. Розв’язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки	Доведення нерівностей 2. Властивості числових нерівностей 3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значень виразів 4. Числові проміжки. Об’єднання та переріз множин 5. Нерівності з однією змінною. Розв’язування нерівностей	§ 1. Числові нерівності та їх властивості § 2. Нерівності зі змінною. Рівносильні нерівності § 3. Числові проміжки § 4. Лінійні нерівності з однією змінною § 5. Системи лінійних нерівностей з однією змінною.

	§ 6. Лінійні нерівності з однією змінною. Рівносильні нерівності. § 7. Системи лінійних нерівностей з однією змінною, їх розв'язування.	§ 7. Доведення нерівностей **Розділ 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ** § 8. Функції § 9. Властивості функцій § 10. Перетворення графіків функцій § 11. Квадратична функція § 12. Квадратні нерівності § 13. Системи рівнянь другого степеня	6. Системи лінійних нерівностей з однією змінною **§ 2. Квадратична функція** 7. Повторення та розширення відомостей про функцію • З історії розвитку поняття функції 8. Властивості функції 9. Як побудувати графік функції y = kf (x), якщо відомо графік функції y = f (x)	6. Лінійні нерівності з однією змінною 7. Системи нерівностей з однією змінною **§ 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ** 8. Функція. Область визначення та область значень функції 9. Властивості функцій 10. Перетворення графіків функцій 11. Функція y=ax2	РОЗДІЛ 2. **КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ** § 6. Функція та її властивості § 7. Перетворення графіків функцій § 8. Квадратична функція § 9. Квадратна нерівність § 10. Система двох рівнянь із двома змінними.

		§ 14. Розв’язування задач складанням систем рівнянь	10. Як побудувати графіки функцій $y = f(x) + b$ і $y = f(x + a)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$ 11. Квадратична функція, її графік і властивості 12. Розв’язування квадратних нерівностей 13. Системи рівнянь із двома змінними 14. Система двох рівнянь із двома змінними	12. Квадратична функція 13. Квадратні нерівності 14. Системи рівнянь із двома змінними 15. Розв’язування задач за допомогою систем рівнянь	

			як математична модель прикладної задачі		
Виділення математичних об’єктів	+	+	+	+	+
Наявність прикладів, та їх відповідність завданням для розв’язування	+	+	+	+	+
Розподіл завдань за рівнями складності	Завдання розподілено за 4 рівнями складності: 1.Початковий рівень	У кожному пункті систему вправ поділено на два рівні складності. Рівень А, Рівень Б.	Завдання розподілено за 4 рівнями складності: n° завдання, що відповідають	У кожному пункті систему вправ поділено на три рівні складності. Рівень А, Рівень Б, Рівень В	У кожному пункті систему вправ поділено на три рівні складності.

	2. Достатній рівень; 3.Середній рівень; 4.Високий рівень		початковому та середньому рівням навчальних досягнень; n• завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень; n•• завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;		
Наявність прикладу	+	+	+	+	+

контрольної або самостійної роботи з теми					
Нестандартні задачі в параграфі	Виділені окремою рубрикою «Цікаві задачі для учнів неледачих».	Містяться в розділі «Вправи на повторення»	Виділені окремою рубрикою «Учимося робити нестандартні кроки»	Виділені окремою рубрикою «Поміркуйте»	Виділені окремою рубрикою «Проявіть компетентність»

Додаток Б

Самостійна робота з теми: «Нерівності»

ВАРІАНТ I

1.Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} x < 3, \\ x > -2; \end{cases}$$

2.Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

$$1)\begin{cases} x + 4 \leq 5, \\ x - 2 > 3; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 0{,}5x + 2 > 5, \\ 3 - 4x \leq 1. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть подвійну нерівність: $7 < 3x + 4 \leq 13$.

4. Знайдіть найменше ціле число, що є розв'язком системи:

$$\begin{cases} 2(x - 7) - (x + 4) < 3(7 - 4x), \\ 3(x + 4) + 5(x - 2) \geq 2(x - 4). \end{cases}$$

ВАРІАНТ II

1. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} x > -9, \\ x < 7; \end{cases}$$

2. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

$$1)\begin{cases} x - 9 < 12, \\ x + 5 \geq 9; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 1{,}4x - 7 \geq 7, \\ 6 - 2x > 5. \end{cases}$$

3. Розв'яжіть подвійну нерівність: $4 \leq 2x - 5 < 7$.

4. Знайдіть найбільше ціле число, що є розв'язком системи:

$$\begin{cases} 4(x + 2) + 3(2x - 4) > 5(3x + 1) \\ 6(5 + 4x) - 2(3 - 4x) \leq 9(x - 5). \end{cases}$$

Додаток В

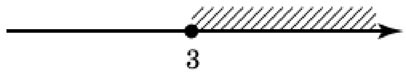
Контрольна роботи з теми: «Нерівності»

І варіант

1. Укажіть число, що є розв'язком нерівності $2x > 5$.

   а) 2; б) -3; в) 3; г) 0.

2. Який запис відповідає проміжку, зображеному на малюнку?



   А) (3;∞) Б) $(3;\infty]$

   В) $[3;\infty]$ Г) $[3;\infty)$

3. Який проміжок є множиною розв'язків нерівності $7 - 4x > 3$.

   а) $(-1;\infty)$; б) $(1;\infty)$; в) $(-\infty;-1)$; г) $(-\infty;1)$.

4. Яка з систем нерівностей не має розв'язків

   а) $\begin{cases} x > 5, \\ x < 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < 5, \\ x < 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < 5, \\ x > 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x > 5, \\ x > 7. \end{cases}$

5. Яка множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} -2x \le 10, \\ 4x \le -8. \end{cases}$

   а) $[5;2]$; б) $(-\infty;-5]$; в) $[-2;\infty)$; г) $[-5;-2]$.

6. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$-2 \le 2 - 4x < 6.$$

7. Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x+3}{4} > 3, \\ (8-x)^2 - x(x+4) > 4; \end{cases}$$

8. Знайдіть найменше ціле число, що є розв'язком системи:

$$\begin{cases} 4(2x-3) \ge 3(2x+4) - 2x, \\ 3(4x-5) + 2 \ge 5(2x-4) - x. \end{cases}$$

9. Знайдіть область визначення функції

$$\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{x^2-4}.$$

Продовження додатка В

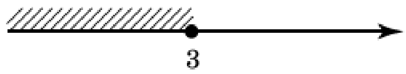
Контрольна роботи з теми: «Нерівності»

II варіант

1. Укажіть число, що є розв'язком нерівності $4x < 3$.

   а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.

2. Який запис відповідає проміжку, зображеному на малюнку?



   А) $(-\infty; 3)$ Б) $[-\infty; 3]$

   В) $(-\infty; 3]$ Г) $[-\infty; 3)$

3. Який проміжок є множиною розв'язків нерівності $5 - 2x < 3$.

   а) $(-1; \infty)$; б) $(1; \infty)$; в) $(-\infty; -1)$; г) $(-\infty; 1)$.

4. Яка з систем нерівностей не має розв'язків

   а) $\begin{cases} x > 6, \\ x < 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < 6, \\ x < 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < 6, \\ x > 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x > 6, \\ x > 4. \end{cases}$

5. Яка множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} -3x \geq 9, \\ 2x \leq -8. \end{cases}$

   а) $[-4; -3]$; б) $(-\infty; -4]$; в) $[-3; \infty)$; г) $[3; 4]$.

6. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$-3 \leq 1 - 2x < 5.$$

7. Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x+1}{6} > 1, \\ (x-6)^2 - x(x+2) < 4. \end{cases}$$

8. Знайдіть найбільше ціле число, що є розв'язком системи:

$$\begin{cases} 6(2x-4) \leq 4(x+6) + 2x, \\ 2(3x+5) - 6 \geq 4(2x+3) - 5x. \end{cases}$$

9. Знайдіть область визначення функції

$$\sqrt{x+5} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{x^2-9}$$