Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

Методика розв'язування планіметричних задач у сучасній школі

Виконав студент 2 курсу магістратури,
групи М – М – 21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Кундас Олександр Іванович

Керівник кандидат фізико–математичних наук, професор кафедри математики з методикою викладання Крайчук Олександр Васильович

Рецензенти:

Рівне–2023 року

ЗМІСТ

ВСТУП

У Доктрині освіти в Україні у ХХІ столітті зазначається, що мета державної політики щодо розвитку освіти полягає у створенні умов для розвитку особистості і творчої самореалізації кожного громадянина України.

Рівень математичної культури значною мірою залежить від уміння розв'язувати задачі. Здобути таке уміння допомагає знання прийомів і методів розв'язання задач, засвоєння яких є найважливішою частиною математичної підготовки учнів.

Важливим засобом і метою навчання геометрії є розв'язування планіметричних задач. Математичні задачі виконують ряд функцій навчального, виховного, розвивального характеру. Особливої уваги потребує навчання розв'язуванню геометричних задач в 7–9 класах, оскільки від цього залежить не тільки засвоєння учнями геометрії на даному етапі, але і результативність їх навчальної і трудової діяльності в старших класах, після закінчення школи.

Однак аналіз практики навчання розв'язувати геометричні задачі, не дивлячись на удосконалення форм і методів роботи вчителів, виявляє у вміннях школярів істотні прогалини, які свідчать про те, що традиційна форма навчання розв'язувати геометричні задачі не є досить ефективною.

При вивченні планіметрії відбувається систематизація відомостей про основні фігури на площині та їх властивості, про геометричні величини, які характеризують плоскі фігури.

Методика навчання учнів розв'язуванню планіметричних задач різними способами і методами дає можливість прищепити інтерес до досліджуваного предмета, спонукати учнів до більш вдумливого вивчення геометрії; розвивати критичне і математичне мислення; досліджувати властивості геометричних фігур. Важливо і те, що, прийшовши різними шляхами до одного і того ж результату, в учнів прищеплюється впевненість в правильності рішення.

Розв'язування задач декількома способами - захоплююче заняття, що вимагає знання всіх розділів шкільної математики. Розв'язування однієї задачі декількома способами і методами корисніше, ніж розв'язування декількох задач одним способом. При знаходженні різних способів розв’язання завдань учні відчувають труднощі у виборі відповідних аргументів для обґрунтування рішення. Тому перед учителем стоїть завдання відшукання таких прийомів навчальної роботи, які сприяють формуванню в учнів уміння знаходити названі способи розв’язування завдань самостійно.

Проблему впровадження різних методів розв’язування задач з геометрії, доцільності та актуальності їх використання в шкільному процесі все більше привертає увагу науковців (С. Скворцова, І. Кушнір, О. Бугайов, К. Власенко, Т. Гоков, І. Тесленко та ін.). Свій внесок у дослідження цього питання також внесли С. Шестакович, В. М. Майоров, З. А. Скопец, М. Л. Крайзман, Е. Г. Готман, Е. Г. Глаголева, А. А. Кирилов, І. М. Гельфанд.

Розробка концепції методичної підготовки майбутніх учителів математики до навчання учнів геометрії потребувала звернення до наукових публікацій багатьох учених різних галузей педагогічної науки, в яких обґрунтовано методологію, методику та інструментарій навчання учнів за напрямками формування знань, умінь та навичок, а саме О. М. Леонтьєв, В. І. Лозова, Б. Ф. Ломов, Ю. І. Машбиць, Н. Ф. Тализіна, С. Й. Шапіро та ін.

Аналіз стану навчання математики, зокрема геометрії, в середній школі показує, що результати навчання учнів, рівень активності їхньої навчально-пізнавальної діяльності і самостійності, творчих здібностей в значній мірі не відповідають запитам суспільства.

До кінця цю проблему не розв'язано, що негативно відбивається на розумовому розвитку учнів в процесі навчання. Внаслідок аналізу бесід з учнями, вчителями, спостережень за навчальним процесом на уроках, поведінкою учнів у навчальному процесі ми дійшли висновку, що для активізації навчально-пізнавальної діяльності, надання їй дослідницького, творчого спрямування, розвитку мислення учнів, розкриття творчого потенціалу учнів і вчителів, інтенсифікації навчального процесу недостатньо використовувати у навчальному процесі лише традиційні форми і засоби навчання.

Важливість теоретичного і практичного розв’язання проблеми навчання розв’язанню планіметричних задач в школі, її недостатня вивченість, а також для покращення геометричної підготовки та необхідності розвитку математичної компетентності учнів сучасної школи обумовлюють **актуальність вибраної теми.** Сучасне становище навчального процесу та значущість розглянутої проблеми зумовила вибір теми «Методика розв’язування планіметричних задач у сучасній школі».

Об’єкт дослідження – процес навчання розв’язання задач з планіметрії.

Предмет дослідження – формування вмінь і навичок учнів основної школи розв’язувати задачі з планіметрії.

Мета дослідження – з’ясувати та обґрунтувати способи формування умінь учнів розв’язувати задачі з планіметрії різними методами.

Для досягнення мети дослідження розв’язувалися такі ***завдання:***

1) дослідити психолого-педагогічну та навчально-методичну літературу з питання дослідження;

2) виокремити методи розв’язування планіметричних задач, які доцільно використовувати в процесі навчання геометрії в основній школі та застосування цих методів на конкретних прикладах;

3) розглянути теоретичні і розробити практичні рекомендації для вчителів і методистів з проблеми дослідження.

Теоретичною основою дослідження були методична література з методики розв’язування задач із геометрії різними способами та формування математичних вмінь у школярів, зокрема вміння розв’язувати задачі з планіметрії різними способами.

Для розв’язання поставлених завдань використано комплекс взаємопов’язаних теоретичних та емпіричних ***методів дослідження***:

• теоретичні (аналіз, порівняння, моделювання, узагальнення) для вивчення психолого-педагогічної літератури і визначення концептуальних засад дослідження, уточнення сутності та змісту основних понять дослідження;

• емпіричні (анкетування, інтерв’ю, бесіда, спостереження, тестування).

Експериментальна база дослідження. Дослідно-експериментальна Робота здійснювалась на базі Злазненського ліцею Головинської сільської ради Рівненського району Рівненської області і Рівненського державного гуманітарного університету.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблено методичні рекомендації щодо вивчення методів розв'язування планіметричних задач у 7- 9 класах; сформовано основні шляхи формування вмінь учнів розв'язувати задачі з планіметрії різними способами; розроблено методичні рекомендації для вчителів та учнів щодо формування вмінь учнів розв'язувати планіметричні задачі.

Апробація результатів дослідження. Основні положення та результати дослідження обговорювалися на VI Всеукраїнській дистанційній науково-практичній конференції «Методичний пошук вчителя математики» (м. Вінниця, 28-29 вересня 2023 р.) та на XVI Всеукраїнській студентській науково-практичній конференції «Інформаційні технології в професійній діяльності» (м. Рівне, 1 листопада 2023 р.)

Результати роботи були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету та Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського у 2022 та 2023 роках та анонсовані в роботах [19] та [20].

Структура магістерської роботи. Магістерська робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Основний текст роботи викладено на 132 сторінках. Ілюстративний матеріал: 28 рисунків, 7 таблиць, 5 слайдів, 4 гістаграми. Бібліографія містить 30 найменувань.

РОЗДІЛ 1. Теоретико-методична база вивчення геометрії в школі.

1.1. Предмет геометрії. Завдання й зміст вивчення геометричного матеріалу в сучасній школі.

«Світ, що нас оточує – це світ геометрії.
Тож давайте його пізнавати!»
Піфагор

Геометрія – одна із складових частин математики. Вона зародилася багато тисячоліть тому. В IV ст. до н.е. грецький вчений Евдем Родоський писав: ”Геометрія, за свідченням дуже багатьох, була відкрита єгиптянами і виникла при вимірюванні землі. Це вимірювання було їм необхідне внаслідок розливу ріки Ніл, який щоразу змивав межі. Нема нічого дивного в тому, що ця наука, як і інші, виникла з потреб людини”.

Згодом геометричні знання з Єгипту проникли в Грецію, де їх було зведено в систему і виникла назва науки – геометрія.

Відомості з геометрії в Київській Русі спочатку передавались усно. Починаючи з 16 століття почали писатись рукописні посібники. У 1629 році на території теперішньої України було складено "Книгу про сошне письмо", яка містила правила знаходження площ квадрата, прямокутника, трикутника й трапеції. Вперше на Україні, та й серед слов'янських народів, курс геометрії прочитав у Києво-Могилянській академії відомий діяч науки, культури та освіти Феофан Прокопович у 1707 році. Його курс містив основні положення Евклідової геометрії [27, с. 89].

Сучасна геометрія – наука про абстрактні геометричні фігури. Як чиста математична теорія і система логічних висновків вона далеко відійшла від “вимірювання землі”. Все ж, стоячи на матеріалістичних позиціях, “Евклідову геометрію можна з досить високою точністю розглядати як науку про фігури в фізичному розумінні – як теорію про реальні просторові відношення в межах земного досвіду”.

Мету викладання геометрії в загальноосвітній середній школі можна визначити так. Шкільний курс математики має забезпечити міцне і свідоме оволодіння системою математичних знань, умінь і навичок, які потрібні для загального розвитку учнів, для їх практичної діяльності в умовах сучасного виробництва, для вивчення на достатньо високому рівні споріднених шкільних предметів (фізики, креслення, хімії та ін.) і для продовження освіти [5, с.5].

Основним предметом шкільної геометрії є моделі реальних об’єктів, для яких визначаються геометрична форма, розміри, взаємне розташування з іншими об'єктами на площині і в просторі. Тобто на відміну від алгебри і початків аналізу зміст геометрії менш абстрактний, більш образний, а тому є широкі можливості продемонструвати зв'язок математичної теорії і практичних завдань, з якими учні можуть зустрітися в реальному житті.

В свідомості школярів геометричні уявлення утворюють цілісну систему геометричних знань про форми предметів, їхнє розміщення в просторі, величини, вимірювальні інструменти, що дозволяє практично користуватись отриманими знаннями після закінчення школи.

У становлення шкільного курсу геометрії значний внесок зробили українські методисти-математики О.М.Астряб, І.Ф.Тесленко, З.І.Слєпкань, Г.П.Бевз, М.І.Бурда та інші.

Згідно програм з математики 1992 року геометрію в основній школі в Україні вивчали за підручниками О.В.Погорєлова «Геометрія, 7-11» та Л.С.Атанасяна «Геометрія, 7-9». Навчальною програмою передбачалось 2 години на тиждень для вивчення систематичного курсу планіметрії в 7,8 та 9 класах загальноосвітніх шкіл.

Згідно програм з математики 1996 року систематичний курс планіметрії в основній школі вивчали за рекомендованими альтернативними підручниками: О.В. Погорєлова «Геометрія, 7-9», Г.П. Бевза «Математика 7», «Математика 8», «Математика 9», М.П. Кельбаса «Геометрія 7-9». Навчальною програмою передбачалось 2 години на тиждень для вивчення систематичного курсу планіметрії в 7, 8 та 9 класах загальноосвітніх шкіл. Основний зміст навчального матеріалу, в основному, не відрізнявся від змісту геометричного матеріалу попередніх навчальних програм.

У навчальній програмі з математики для основної школи 2010 року, крім загального завдання шкільної геометричної освіти – формування *здатності* логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, виокремлено специфічні для навчання планіметрії освітні завдання:

- забезпечення оволодіння учнями мовою геометрії, розвиток їх просторових уявлень і уяви, умінь виконувати геометричні побудови за допомогою геометричних інструментів (лінійки з поділками, транспортира, косинця, циркуля і лінійки);
- формування в учнів знань про геометричні фігури на площині, їх властивості, а також умінь застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях;
- формування в учнів уявлення про найпростіші геометричні фігури в просторі та їх властивості, а також первинних умінь застосовувати їх у навчальних і життєвих ситуаціях;
- ознайомлення учнів зі способами і методами математичних доведень, формування умінь їх практичного використання;
- формування в учнів знань про основні геометричні величини (довжину, площу, об'єм, міру кута), про способи їх вимірювання й обчислення для планіметричних і найпростіших стереометричних фігур, а також уміння застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях;
- вивчення геометричних перетворень площини (рухів, подібності) та їх найпростіших властивостей, а також розвиток в учнів функціональних уявлень на геометричному змісті;
- ознайомлення учнів з основами методу координат і векторного методу.

Основний апарат доведення тверджень – ознаки рівності трикутників, ознаки подібності трикутників. Ключовою задачею, що вивчається в курсі геометрії основної школи, наголошується у програмі, є розв'язування трикутників (прямокутних та довільних). Тема «Подібні трикутники» багато років традиційно входила до теми «Перетворення подібності» і вивчалася в 9 класі. Такий підхід значно звужував як теоретичне поле, у якому розглядаються трикутники у 8 класі, так і кількість і тематику задач. У програмах 2005 року та програмах 2012 року виділено окремий клас подібних фігур, а саме, подібні трикутники, яким притаманні певні специфічні властивості, і запропоновано автономне їх вивчення саме в курсі восьмого класу.

Згідно програм 2010 року у 8 класі вводиться одне з фундаментальних математичних понять – поняття площі. До програм 2005 року тема «Площі фігур» вивчалась у другому півріччі 9 класу.

Підсумовуючи порівняльний аналіз програм з математики у частині вивчення систематичного курсу геометрії в основній школі, зазначимо:

- починаючи з програм з математики 2001 року програми не прив'язуються до конкретних підручників, а мають випереджувальний характер;
- в діючих програмах з математики для основної школи 2012 року зазначено, що в основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях.
- навчання математики в основній школі передбачає передусім формування предметної математичної компетентності, зазначено в програмах 2012 року, сутнісний опис якої подано у розділі "Державні вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів ": учень пояснює зміст понять, наводить приклади, формулює означення або властивості, записує і пояснює, класифікує, зображує та знаходить на малюнках, вимірює та обчислює, розв'язує вправи тощо.

1.2. Організація вивчення геометричного матеріалу.

Будувати курс геометрії можна по-різному, додержуючись різних логічних рівнів або напрямів. Рівень D (D – напрям інтуїтивно-експериментальний – геометричні факти встановлюються експериментально, доведення відсутні) достатній тільки для учнів 1-6 класів. В 7-11 класах геометрію викладають на рівні B_1 (В – напрям досвідно-дедуктивний – основні поняття і відношення запозичуються з досвіду, всі обґрунтування дедуктивні. Розрізняють три підрівня: B_1- формулюються всі необхідні аксіоми; B_2 - тільки частина аксіом подається явно; B_3 - формулюються тільки ті аксіоми, зміст яких не здається очевидним).

Навчальний матеріал курсу планіметрії групується навколо п’яти змістових ліній:

1) Геометричні фігури та їх властивості;

2) Геометричні побудови;

3) Геометричні перетворення;

4) Геометричні величини, їх вимірювання і обчислення;

5) Координати і вектори.

Геометрію серед інших математичних наук виділяє насамперед те, що в ній сама строга логіка з'єднується з наочними поданнями: вони взаємно організують і направляють один одного. Це створює особливі труднощі викладання геометрії – сполучити жвавість уяви і строгість думки, але, якщо це вдається, то досягається більша ясність розуміння й радості безпосереднього бачення життя.

Специфічною особливістю геометрії є й те, що в ній з`єднуються абстрактна геометрія й реальна геометрія, реальні просторові відносини й властивості тіл.

Твердження геометрії висловлюються для ідеальних тіл, які уявляються наочно. Таким чином, викладання геометрії повинне включати три тісно зв'язаних, але разом з тім і протилежних елемента: логіку, наочне уявлення, застосування до реальних речей. Цей "трикутник" - душа викладання геометрії. Звідси задача викладання геометрії - дати учням необхідні для практичної діяльності, вивчення інших предметів знання й уміння, розвивати в учнів просторові уявлення, практичне розуміння, логічне мислення.

У молодших класах вивчення геометричного матеріалу відбувається на уроках математики, геометричний матеріал потрібно включати в кожен урок, тісно пов'язуючи з вивченням арифметичного.

У 7 – 9 класах на вивчення геометричного матеріалу виділяється два уроки на тиждень. Але досвід учителів-практиків показує, що коли його вивчення зосередити лише на цих уроках, це призводить до відсутності системності в знаннях учнів. Тому досвідчені педагоги, крім проведення основних занять, систематично включають геометричний матеріал у більшість уроків математики невеликим об’ємом.

Залежно від того, які форми роботи використовуються, виділяють такі типи уроків геометрії:

- урок засвоєння нових знань;
- урок формування умінь і навичок;
- урок застосування знань, умінь і навичок;
- урок узагальнення і систематизації знань;
- урок перевірки знань, умінь і навичок;
- комбінований урок;
- нестандартний урок.

При підготовці уроку з геометрії вчитель визначає тему, чітко формулює мету, продумує освітні, корекційно-розвивальні, виховні і практичні завдання. Він заздалегідь готує наочні посібники, дидактичний матеріал, інструменти для проведення практичних робіт на дошці і в зошитах, відбирає той матеріал, який закріплюється або повторюється, продумує, які нові знання потрібно повідомити учням, над виробленням яких вимірювальних і креслярських умінь вони будуть працювати, які типи завдань і практичних робіт виконуватимуть самостійно.

Далі він виділяє основні етапи уроку, типи вправ, завдання, практичні роботи, визначає, які методи і прийоми будуть використовуватися на кожному етапі, намічає, знання яких учнів вимагають перевірки, які завдання дати тому або іншому школяреві з метою подолання індивідуальних труднощів. Педагог також продумує диференційований підхід на кожному етапі уроку з метою максимального використання індивідуальних можливостей учнів. Він обмірковує методи і прийоми контролю знань на кожному етапі, заздалегідь намічає, хто буде оцінений наприкінці уроку, готує диференційоване домашнє завдання.

Урок має структуру відповідну його типу, яка нагадує структуру уроків математики. Тому описувати структуру кожного типу уроків із геометрії я не буду. Зупинимось лише на характеристиці структурних елементів уроку геометрії.

1. Організаційний момент, він містить зовнішній компонент – це привітання, виявлення відсутніх, перевірка готовності учнів до уроку, озвучення плану роботи; та внутрішній компонент – це психологічна готовність учнів до процесу навчання та активізація їхньої пізнавальної діяльності.

2. Перевірка домашнього завдання. Найпоширенішими є письмова перевірка та усна перевірка знань учнів. Організація цієї форми роботи викликає певні труднощі у педагогів. Причиною цього є те, що урок із геометрії у 7 – 9 класах проводиться два рази на тиждень і тому до наступного заняття школярі часто забувають те, що вони вивчали на попередньому. Повторне звернення до домашнього завдання відбувається в день перед уроком. У такому випадку педагогу потрібно тісніше пов'язати геометричний матеріал з арифметичним, причому він має повторюватись невеликими частинами.

3. Актуалізація опорних знань. Це важливий етап, адже він є сполучною ланкою між раніше засвоєними знаннями і новими, сприяє закріпленню матеріалу, вивченого на попередніх уроках.

4. Повідомлення теми і мети уроку. Тема і мета уроку геометрії дається у вигляді проблеми, яка свідомо вирішується, але яку учні не можуть розв'язати через брак знань. Така організація роботи поступово підводить школярів до розуміння необхідності засвоєння певних геометричних знань для їхньої майбутньої трудової діяльності.

5. Вивчення нового матеріалу. Оволодіння новими знаннями може здійснюватись двома способами: пояснення вчителя та самостійна робота учнів. На цьому етапі уроку учні знайомляться з новими фактами, які розкривають властивості геометричних фігур, з'ясовують залежності між ними, у них формуються і надалі удосконалюються навички роботи з креслярськими інструментами . Оскільки уроки геометрії доцільно використовувати як опорні, то новий матеріал необхідно закріплювати невеликими порціями на уроках математики шляхом організації системи відтворюючих або тренувальних вправ [10, с. 6].

6. Первинне закріплення нового матеріалу. Процес закріплення дає можливість школярам детальніше переосмислити новий матеріал та встановити зв’язки із

раніше вивченим; створюються найбільш сприятливі умови для диференційованого підходу до учнів.

7. Виконання практичних операцій. Серед практичних робіт з вивчення геометричного матеріалу значне місце відводиться кресленню. Основна мета цього етапу – первинне закріплення знань, вміння виконувати графічні роботи, розв'язувати задачі геометричного змісту, користуватися під час обчислення відповідними формулами. На нього відводиться значна частина уроку, адже саме тут школярі повинні тренуватись виконувати різноманітні завдання, пов'язані з вивченим матеріалом [5, с. 189].

8. Повторення, узагальнення й систематизація знань учнів під керівництвом учителя і в процесі самостійної діяльності. Цей етап вимагає організації достатньої кількості тренувальних вправ, виконання практичних операцій з креслення, вимірювання, обчислення периметру та площі геометричних фігур. Ця частина уроку присвячується формуванню вмінь застосовувати отримані знання в різних ситуаціях, при вирішенні навчальних і практичних завдань.

9. Домашнє завдання. В домашньому завданні обов’язково потрібно повторювати ті види вправ, над якими школярі працювали на уроці і його обсяг не повинен перевищувати 1/3 частину вправ, виконаних на занятті. Домашнє завдання потрібно пояснити, вказати на методику його виконання.

10. Підведення підсумків уроку. На початку заняття вчитель знайомив учнів з планом, то в кінці перевіряє, чи вся передбачена робота виконана. Якщо план виконаний не повністю – педагог розкриває причини цього. На цьому етапі відбувається оцінювання школярів, хоч оцінки можуть виставлятись і на будь-якому іншому етапі.

На уроках вивчення геометричного матеріалу організовується контроль та облік знань школярів. Він дозволяє педагогу визначити рівень засвоєння матеріалу для того, щоб перейти до вивчення наступних тем; врахувати недоліки подачі матеріалу методичного характеру, внести відповідні корективи з урахуванням тих труднощів, які відчувають школярі.

Якщо окремі учні мають значні порушення моторики (паралічі, парези, гіперкінези), виражені порушення просторового орієнтування, важку ступінь розумової відсталості, вони працюють за індивідуальними завданнями. Оцінка при цьому виставляється не за якість його виконання, а за вміння дотримуватись правильної послідовності у побудові геометричних фігур.

1.3. Використання педагогічних програмних засобів при формуванні понять планіметрії.

Практична складова курсу планіметрії досягається систематичним використанням геометричних побудов та педагогічних програмних засобів (ППЗ) для розв'язування задач на обчислення, доведення і побудову.

При формуванні геометричних понять, важливим моментом є використання динамічної наочності, яка реалізовується через використання ППЗ. За допомогою комп'ютера, як засобу моделювання, учень працює з графічним образом поняття разом із пов'язаними з ним числовими характеристиками, що спрощує усвідомлення змісту нового поняття, сприяє розвитку образного мислення.

Оволодіння динамічними графічними моделями не лише сприяє поліпшенню загального рівня графічної підготовки школярів, а є засобом формування в учнів широких узагальнень на різному графічному матеріалі.

Всі теми шкільного курсу планіметрії є придатними для використання ППЗ. Доступними для забезпечення вивчення планіметрії є такі програмні продукти: GRAN1; GRAN 2D; GRAN 3D; DERIVE.

На дедуктивній основі у систематичному курсі геометрії (планіметрії) 7-9 класів групується п'ять змістових ліній (стор. 11).

Розроблені ППЗ мають різні набори графічних операцій, тому по різному сприяють формуванню геометричних понять.

Пропедевтика формування знань змістової лінії " Геометричні фігури та їх властивості" розпочинається ще в початковій школі. В 5-6 класах на наочно-інтуїтивному рівні учні ознайомлюються з основними геометричними фігурами - *прямокутником*, *квадратом*, *трикутником*, *довільним многокутником*. На цьому етапі навчання многокутники виступають як дидактичний засіб вивчення арифметичного матеріалу, а у 7-9 класах многокутники є об'єктами вивчення.

На початку курсу в 7 класі вивчається трикутник, як одна з основних фігур курсу планіметрії, властивості якого часто використовуються при вивченні многокутників та інших плоских фігур. Спочатку вивчаються ознаки рівності трикутників, які разом з ознаками паралельності відрізків прямих є основним аргументом під час доведення теорем і розв'язування задач. Далі вивчення трикутників триває протягом усього курсу планіметрії (у 8 класі – теорема Піфагора і розв'язування прямокутних трикутників; в 9 класі – ознаки подібності трикутників, розв'язування косокутних трикутників, формула площі трикутника).

Відношення рівності трикутників є окремим випадком відношення рівності фігур. Означення рівності геометричних фігур у шкільному курсі вводиться у зв'язку з вивченням у 8 класі рухів. Означення рівних трикутників і ознаки їх рівності вивчаються в 7 класі на початку курсу, оскільки вони традиційно є основним аргументом під час доведення теорем і розв'язування задач під час вивчення інших тем.

Основна мета вивчення теми "Рівність трикутників" - ознайомити учнів з ознаками рівності трикутників і навчити застосовувати їх до розв'язування задач. Під час вивчення цієї теми посилюються можливості розвитку логічного мислення, усвідомлення учнями ідеї дедуктивної побудови геометрії.

У зв'язку з вивченням ознак рівності трикутників і пов'язаного з ними навчального матеріалу, використовується багато раніше вивчених понять і їх означень.

У цій темі вводяться шість нових понять: рівнобедрений трикутник, рівносторонній трикутник, теорема, обернена до даної, висота трикутника, проведена з даної вершини, медіана трикутника, проведена з даної вершини. Зазначені поняття можна вводити як абстрактно-дедуктивним, так і конкретно-індуктивним методом. Важливо підкреслити суттєві властивості цих понять і протиставити їм несуттєві. Наприклад, до означення бісектриси трикутника, проведеної з даної вершини, входять дві суттєві властивості:

1) це – відрізок бісектриси кута трикутника;

2) він сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні. Несуттєвим у цьому означенні є вид трикутника, розташування вершин на площині.

Поняття рівнобедреного трикутника доцільніше вводити конкретно-індуктивним методом, тобто на основі емпіричних узагальнень. Зміст цього методу полягає в тому, що пояснення нового матеріалу починається з розгляду прикладів. Використовуючи приклади, учні мають можливість виділити суттєві ознаки поняття, що вводиться. Це допомагає самостійно чи при допомозі вчителя сформулювати означення поняття. Оскільки учні часто припускаються помилок при розпізнаванні трикутників такого виду, то доцільно учням запропонувати моделі, в яких рівнобедрені трикутники виступають як окремими геометричними об'єктами так і складовими частинами многокутників.

Для унаочнення доцільно використати ППЗ GRAN – 2D. Це дозволить учням працювати з динамічними геометричними моделями, що полегшить процес виділення суттєвих і несуттєвих ознак поняття.

В процесі порівнянь і узагальнень учні виділяють суттєві і несуттєві ознаки. В означенні рівнобедреного трикутника є лише одна суттєва ознака – рівність двох сторін. Несуттєвим є розташування цього трикутника на площині.

Вводячи поняття висоти трикутника, не слід обмежуватися лише формулюванням означення. Учні повинні виконувати практичні дії на проведення висот з різних вершин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників. Треба мати на увазі, що попередній життєвий досвід учнів може гальмувати засвоєння поняття висоти трикутника. Як показує педагогічна практика, навіть старшокласники припускаються помилок, проводячи висоту тупокутного трикутника. Саме тому при формуванні поняття висоти трикутника доцільно використовувати динамічні геометричні моделі, реалізацію яких забезпечує ППЗ GRAN – 2D.

Оскільки дана модель динамічна, то, видозмінюючи трикутник (гострокутний, тупокутний, прямокутний), учні можуть спостерігати, як змінюються положення висот і, відповідно, сформулювати правильні висновки щодо розміщення основ висот. В процесі формування поняття висота трикутника учням необхідно також підкреслити суттєві ознаки і протиставити їм не суттєві.

Суттєві: 1) це є перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону трикутника; 2) вид трикутника;

Несуттєві: 1) розташування вершин трикутника; 2) розміщення трикутника на площині.

Робота з динамічними моделями дозволяє попередити формування хибного враження, що основа висоти може лежати лише на стороні трикутника, а не на її продовженні.

Використання педагогічних програмних засобів при формуванні понять планіметрії дає змогу вчителеві інтенсифікувати спілкування з учнями та учнів між собою; шляхом моделювання ефективніше підвести учнів до розуміння змісту понять; більше уваги приділити виявленню закономірностей досліджуваних процесів і явищ; підвищити рівень самостійності учнів у здобуванні нових знань.

РОЗДІЛ 2. Методичні підходи до розв'язування планіметричних задач.

Будь-яка геометрична задача побудована так, що в ній за *даними* елементами треба *знайти* інші (шукані) елементи геометричної фігури, які перебувають між собою та даними елементами в певних співвідношеннях, або визначити розміри окремих елементів.

У геометричних задачах різних типів — на *обчислення, доведення, побудову* чи *дослідження* терміни «знайти», «шукані» мають конкретний зміст, який слід добре розуміти.

Задачі на обчислення

Під задачею на *обчислення* розуміють таку задачу, в якій вимагається дані про геометричну фігуру довести до встановлення числового результату. Задача на обчислення характеризується вимогою встановити дані про невідомий елемент геометричної фігури за допомогою суто геометричних викладок з використанням алгебраїчних залежностей.

Задачі на доведення

Задача *на доведення* в геометрії характеризується вимогою обґрунтувати певне математичне твердження, сформульоване в її умові. Розв'язати геометричну задачу на доведення означає вивести твердження задачі з аксіом та раніше доведених теорем або наслідків з них. Геометричні задачі на доведення бувають двох видів:

а) такі, під час розв'язування яких припускають, що описані в їх умовах геометричні фігури існують;

б) такі, в яких факт існування геометричної фігури, про яку йдеться в задачі, треба довести.

У першому випадку розв'язування задачі зводиться до обґрунтування її висновку, виходячи з посилки задачі («дано»). При цьому переформулювання умови задачі часто виступає засобом пошуку розв'язку задачі, оскільки дає змогу розв'язати іншу, спосіб розв'язування якої відомий або його можна знайти порівняно простіше. На цю обставину вчителеві варто звернути особливу увагу.

Задачі на побудову

Під задачею *на побудову* розуміють задачу, в. якій треба побудувати геометричну фігуру наперед обумовленими інструментами, якщо дано деяку іншу фігуру та зазначено певні співвідношення між елементами даної і шуканої фігур.

Розв'язати задачу на побудову означає звести її до скінченного числа елементарних побудов, які виконуються за допомогою креслярських інструментів на основі прийнятих аксіом конструктивної геометрії.

Розв'язування геометричної задачі на побудову звичайно здійснюють за схемою, що складається з чотирьох етапів:

1) аналіз; 2) побудова; 3) доведення; 4) дослідження.

З логічного погляду алгоритм розв'язування задачі на побудову не завжди можна реалізувати, бо етап «побудова» принципово можливий, а практичне виконання побудови залежить від вибору величини даних в умові відрізків і кутів.

Складаючи план розв’язування задачі, слід прагнути до того, щоб він грунтувався лише на необхідних умовах, тобто на таких властивостях геометричних фігур, які випливають з існування розв’язування. За планами, складеними лише за необхідними умовами, можна знайти *всі* розв’язки задачі та вказати *всі* випадки їх відсутності (для тих значень параметрів, при яких ці умови є необхідними). Інший план розв’язування не може дати розв’язків, відмінних від знайдених за таким планом. Отже, якщо підчас складання плану використано лише необхідні умови існування геометричної фігури, описаної умовою задачі, то дослідження задачі можна проводити за планом її розв’язування.

У процесі дослідження задачі за складеним в аналізі планом окремі випадки розв’язання спочатку встановлюють як можливі результати виконання певних пунктів плану. Далі для кожного з цих випадків можна знайти умови, які їх визначають. Звичайно такі умови виражаються алгебраїчними або трансцендентними нерівностями (іноді рівняннями), що зв’язують параметри, які характеризують задані в задачі величини та взаємне розміщення заданих геометричних фігур.

Щоб розв’язання задачі на побудову було повним, треба домагатися, щоб в області існування шуканої геометричної фігури окремі випадки, які розглядалися при аналізі і дослідженні, охоплювали всю множину фігур, визначену умовою задачі.

Задачі на дослідження

Під задачею на *дослідження* розуміють задачу, в якій пропонують щось перевірити, порівняти, знайти умови існування тощо. Такі задачі, як правило, містять запитання: «Чи можна..?», «Як зміниться..?», «Чи правильно..?» та ін.

Задачі кожного із цих типів розв’язують різними методами, які умовно поділяють на геометричні та аналітичні (табл.1).

Таблиця 1.

1. Методи розв’язування геометричних задач
   - Геометричні
     - Використання “ ключового” трикутника, рівності та подібності трикутників,
     - Метод геометричних перетворень (симетрія відносно осі та точки, паралельне перенесення, поворот, подібність фігур)
   - Аналітичні
     - Введення невідомих відрізків та кутів і використання рівнянь та їх систем чи властивостей функцій
     - Метод площ
     - Координатний метод
     - Векторний метод

2. Введення невідомих для розв’язування геометричних задач на обчислення

Розв’язування задач з планіметрії, як правило передбачає такі етапи:

1. Виконання малюнка за текстом умови.

2. Нанесення позначень на малюнок.

3. Скорочений запис тверджень умови задачі через введені позначення.

4. Формулювання і скорочений запис твердження, яке треба довести, або того, що треба знайти за умовою задачі.

5. Позначення того, що запис умови задачі закінчено: зазвичай проводять горизонтальну риску або пишуть слово « Розв’язання» («Доведення»).

6. Запис логічних кроків розв’язання (доведення):

– треба доводити ті співвідношення, що ми використовуємо і які не збігаються з твердженнями умови і не є аксіомами або теоремами;

– логічний крок має структуру: вихідне твердження; «тоді» (⇒); твердження-висновок;

– вихідними твердженнями логічного кроку можуть бути: твердження умови задачі, аксіоми, теореми та твердження, що були доведені в попередніх логічних кроках;

7. Запис відповіді або « що вимагалося довести» [9, с. 302].

2.1. Геометричні методи розв’язування планіметричних задач.

2.1.1. Розв’язування планіметричних задач методом “ключового” трикутника.

Говорячі про геометричні методи розв’язування планіметричних задач, можна умовно виділити метод “ключового” трикутника. За цим методом у даній фігурі потрібно знайти трикутник (або декілька трикутників), до дослідження якого(яких) зводиться розв’язування задачі. Інколи з цією метою спочатку слід виконати якусь додаткову побудову, наприклад в чотирикутнику провести діагональ.

Деякі з часто використовуваних додаткових побудов корисно пам’ятати. Зокрема, якщо в умові задачі фігурує медіана трикутника, то буває зручним продовжити цю медіану за сторону на таку саму відстань і доповнити рисунок до паралелограма.

Наприклад, у трикутнику ABC зі сторонами $BC = a, AC = b, AB = c$ (рис. 1) продовжимо медіану AM за сторону BC на відстань $MD = AM = m_a$ та з’єднаємо відрізками точку D з точками B і C. Тоді отримаємо паралелограм $ABDC$, оскільки його діагоналі в точці перетину діляться навпіл. Але сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін:

$$AD^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2), \text{або } (2m_a)^2 + a^2 == 2(b^2 + c^2)$$

Звідси, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

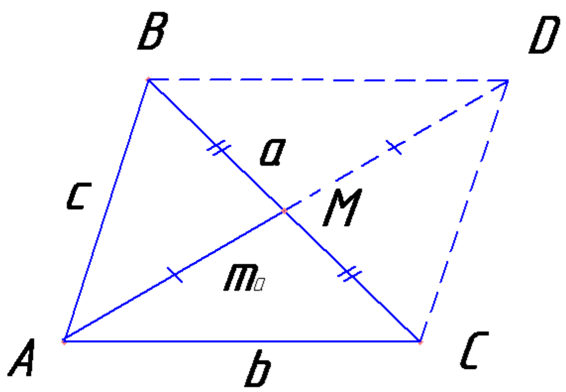


Рис. 1

Приклад. У рівнобічній трапеції висота дорівнює 8 см, основи дорівнюють 21см і 9 см. Знайдіть радіус описаного навколо трапеції кола.

Коментар. Спробуємо виділити "ключовий" трикутник для розв'язування задачі. Для цього проведемо діагональ *BD* трапеції і згадаємо, що коло, яке проходить через вершини трикутника *ABD*, є описаним навколо трикутника. Обчислити його радіус можна за кількома формулами, зокрема:

$R = \frac{a}{2sinA}$ та $R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$. Із цих формул вибираємо ту, для якої легко знайти всі величини, що входять до її запису: $R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$. Одну сторону трикутника *ABD* дано за умовою, а дві інші легко визначити з відповідних прямокутних трикутників.

Розв'язання:

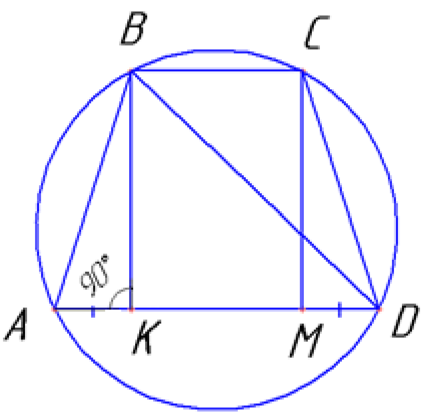


Рис. 2

Нехай у трапеції *ABCD* (рис. 2) *AB*=*CD*, *AD*=21см, *BC*=9 см, *BK*=8 см (BK ⊥ AD). Якщо коло проходить через чотири точки *A, B, C, D*, то воно також проходить через будь-які три із цих точок і тому збігається з колом, описаним навколо трикутника *ABD*. Знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника *ABD*. Якщо *CM* – друга висота рівнобічної трапеції, то, враховуючи рівність прямокутних трикутників *ABK* та *DCM* і те, що *AD* ∥ *BC* і *BCMK* – прямокутник, одержуємо: $AK = MD = \frac{21-9}{2} = 6$ см.

Тоді з трикутника *ABK*: $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10$ см.

З прямокутного трикутника *BKD*: $BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 17$ см. Таким чином, радіус кола, описаного навколо трикутника *ABD* (а отже, і навколо трапеції *ABCD*), дорівнює $R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\Delta ABD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BK} = 10{,}625$ см.

Відповідь: $R = 10{,}625$ см.

2.1.2. Метод геометричних перетворень.

Програма і діючі підручники передбачають вивчення геометричних перетворень і подібність фігур у курсі планіметрії – в 9 класі. Основною метою вивчення геометричних перетворень є ознайомлення учнів з різними видами рухів (осьова та центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення), подібністю та гомотетією, їхніми властивостями, введення загального поняття про рівність і подібність фігур, застосування окремих видів перетворень, ознак подібності трикутників до розв'язування задач.

2.1.2.1. Метод паралельного перенесення.

Особливо часто цим методом паралельного перенесення користуються для побудови многокутників. Іноді також даний метод виявляється корисним при вирішенні задач на "найкоротший шлях". Використання методу паралельного перенесення вимагає оволодіти наступними діями:

1) будувати точки, в які переходять дані точки при паралельному перенесенні;
2) бачити відповідні при перетворенні точки;
3) виділяти елементи, і напрямок паралельного перенесення.

Задача. Побудувати опуклий чотирикутник, якщо відомі три його кути і дві протилежні сторони.

Розв'язання:

Дані в умові задачі відрізки a і b, три кути α, β, δ. Треба побудувати чотирикутник ABCD так, щоб ∠A = α, ∠B = β, ∠D = δ, AD = a, BC = b. Передбачається, що 0° < α < 180°, 0° < β < 180°, 0° < δ < 180°.

Аналіз.

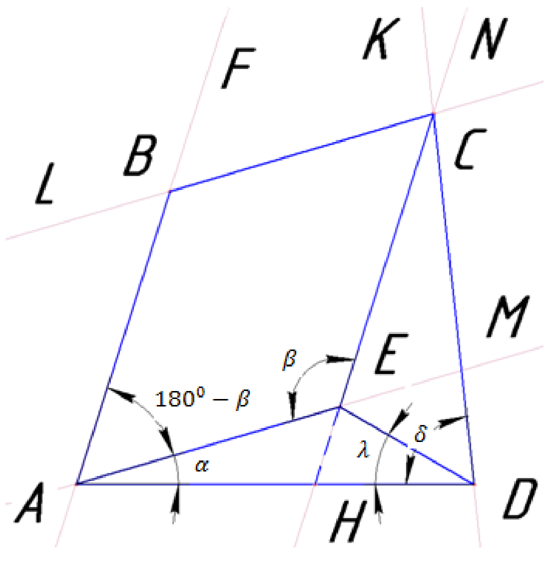


Рис. 3

Припустимо, що *ABCD* - шуканий чотирикутник.

Перенесемо сторону *BC* на вектор *BA*, і нехай відрізок *BC* займе після перенесення положення *AE*. Тоді в *ΔAED* відомі:

AD = a, *AE = b*, *∠DAE = ∠BAD - ∠BAE = = ∠A - (180 ° - ∠B) = α + β - 180 °.*

За цими даними *ΔAED* може бути побудований.

Побудова (рис. 3, рис. 4).

1) На довільній прямій будуємо відрізок $AD = a$;

2) Через точку A проводимо промінь AM під кутом $\alpha + \beta - 180°$ до променя AD;

3) Відкладаємо на промені AM відрізок $AE = b$;

4) Будуємо промінь EN, який утворює з EA кут β і розташований з точкою D по різні боки від прямої AM;

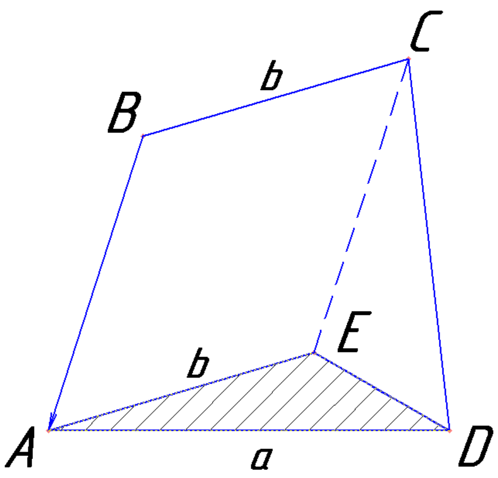


Рис. 4

5) Будуємо промінь DK так, щоб $\angle ADK$ дорівнював δ і щоб промінь DK розташовувався по ту ж сторону прямої DE, що і промінь EN;

6) Відзначаємо точку C перетину променів EN і DK - третю вершину чотирикутника;

7) Четверта вершина B виходить в перетині прямої AF, паралельної CE, з прямою CL, паралельної AE.

Доведення.

$\angle BAD = \angle BAE + \angle DAE = (180°-\beta)+(\beta+\alpha-180°) = \alpha$, $\angle ABC = \angle CEA$, як кути, сторони яких відповідно паралельні і протилежно спрямовані. $\angle CEA = \beta$ з побудови. $\angle ADC = \delta$ з побудови. Відрізок $AD = a$ з побудови. $BC = AE$, як відрізки паралельних між паралельними. Але $AE = b$, а значить, і $BC = b$.

2.1.2.2. Метод осьової симетрії.

Використання осьової симетрії вимагає оволодіння наступними діями:

1) будувати образ фігури при осьовій симетрії;

2) виділяти при осьовій симетрії точки на відповідних при тій же симетрії фігури;

3) бачити вісь симетрії фігури;

4) будувати симетричні відносно прямої точки на заданих фігурах.

Задача. Через точку A, яка дана всередині кута (меншого, ніж розгорнутий), провести пряму, відрізок якої, укладений між сторонами кута, ділиться в цій точці навпіл.

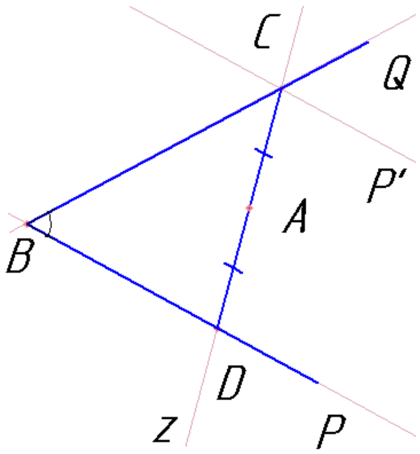


Рис. 5

Розв'язання:

Позначимо через z симетрію щодо точки A, а через P і Q - прямі, на яких лежать сторони кута. В результаті симетрії z пряма P переходить в паралельну їй пряму P', яка перетинає другу сторону кута в точці C. Так як $C \in P'$, то точка D, симетрична C, належить прямій, яка симетрична P', тобто $D \in P$.

Таким чином, точки $D \in P$ і $C \in Q$ симетричні щодо A, і тому відрізок CD ділиться в точці A навпіл, тобто пряма CD – шукана (рис. 5).

2.1.2.3. Метод повороту (обертання) навколо точки.

Ідея методу повороту (обертання) полягає в тому, щоб повернути будь-яку дану або шукану фігуру близько доцільно обраного центру на відповідний кут так, щоб полегшити проведення аналізу задачі або навіть безпосередньо прийти до вирішення.

Завдання на обертання близько точки можна розділити на три групи. *Перша група.* У задачі цієї групи обертання має той же характер, як і паралельне перенесення, тобто воно зближує частини фігури в положення, зручне для побудови, вводить в креслення дані, поєднує рівні або нерівні кути і лінії і взагалі зводить це завдання на іншу. У завданнях цього роду центр обертання безпосередньо відомий.

Друга група. У задачі цієї групи при даних центрі, куті та відношенню обертання потрібно відшукати дві відповідні точки, що лежать на даних прямих або колах. Очевидно, якщо помножити і повернути пряму (або коло) на даний кут, то вона зустріне іншу пряму (або коло) в шуканій точці.

Третя група. У задачах цієї групи дано дві лінії і на кожній з них по відповідній точці; потрібно визначити на тих же лініях за новою відповідною точкою так, щоб вони задовольняли будь-яким умовам; центр обертання невідомий. Припустимо, що є достатньо даних для суміщення даних ліній і шуканих точок. Тоді можна визначити центр обертання. Залишається помітити залежність між даними, шуканими і центром обертання. Ця залежність дасть вказівку на рішення задачі.

Компонентами вміння застосовувати метод повороту є наступні дії:

1) будувати образи фігур при повороті;

2) виділяти відповідні при повороті точки на відповідних при цьому ж повороті фігури;

3) бачити центр повороту;

4) будувати відповідні при повороті точки на будь-яких заданих фігурах;

5) використовувати специфічні властивості повороту.

Приклад 1. Земельна ділянка квадратної форми була обгороджена. Від огорожі збереглися два стовпи на паралельних сторонах квадрата. Крім того, залишився стовп в центрі квадрата. Потрібно відновити кордон ділянки.

Розв'язання:

Аналіз.

Нехай $ABCD$ - шуканий квадрат, O - його центр, M і N - дані точки відповідно на сторонах AB і CD. Якщо повернути квадрат на 180° відносно його центру O, то він перетворюється сам у себе. Точка M займе деяке положення M' на стороні CD, а точка N - деяке положення N' на стороні AB. Після цього неважко вже побудувати прямі AB і CD і відновити шуканий квадрат.

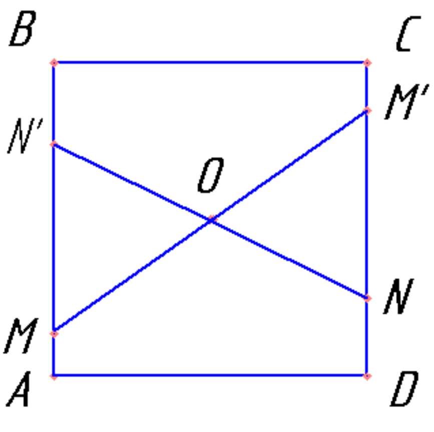


Рис. 6

Побудова.

1) Будуємо точку M', симетричну M щодо O, і точку N', симетричну N щодо O.

2) Будуємо прямі MN' і NM'.

3) Повернемо побудовані прямі відносно точки O на 90°. Чотири побудовані прямі обмежують шуканий квадрат (рис. 6).

Доведення опускаємо.

Дослідження.

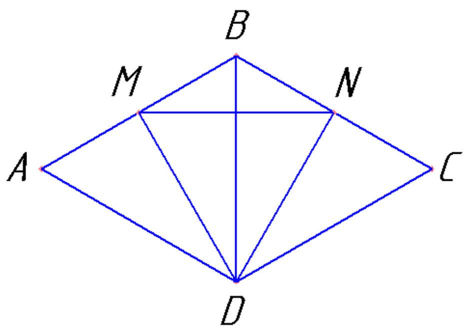
За змістом задачі неможливий випадок, коли точки M і N розташовуються з точкою O на одній прямій, але не симетричні щодо O. Якщо точки M і N симетричні щодо O, то задача стає невизначеною. В інших випадках задача має єдине рішення.

Приклад 2. На сторонах *AB* і *BC* ромба *ABCD* (рис. 7), у якого кут $BAD = 60°$ узяті відповідні точки *M* і *N* так, щоб $AM = BN$. Довести, що трикутник *MDN* правильний.

Доведення: Розглянувши рис.7 легко побачити, що $DA = DB = DC$, і $\angle ADB = \angle BDC = 60°$. А тому

$$\left.\begin{array}{l} R_D^{-60}(A) = B \\ R_D^{-60}(B) = C \end{array}\right| \quad R_D^{-60}(AB) = BC \quad \Longrightarrow \quad R_D^{-60}(M) = N \quad \Longrightarrow$$

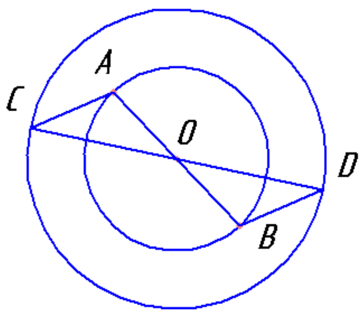
$$M \in AB,\ N \in BC$$



$$\Longrightarrow \begin{cases} DM = DN \\ \angle MDB = 60° \end{cases} \Bigg| \Longrightarrow \quad \Delta MDN$$ – рівносторонній.

Рис. 7

2.1.2.4. Метод центральної симетрії.



Приклад. Нехай *AB* і *CD* – діаметрально протилежні точки двох концентричних кіл. Довести, що $AC = BD$ (рис. 8).

Доведення: $$\left.\begin{array}{l} Z_0(A) = B \\ Z_0(C) = D \end{array}\right| \Rightarrow \quad z_0(AC) = BD,$$

Рис. 8

Звідси $AC = BD$. Розом з тим доведено, що $AC \parallel BD$.

Приклад. Два рівних кола *W* і W_1 дотинкаютьса в точці *К*. Три прямі, що проходять через цю точку *К*, перетинають ці кола ще раз в точках *A, B, C* і *L, M, N* (рис. 9). Довести, що трикутник *ABC* дорівнює трикутнику *LMN.*

Доведення: $Z_k(A) = z_k(KA) \cap z_k(W) = KL \cap W_1 = L$.

Аналогічно: $z_k(B) = M$ $\quad z_k(C) = N$.

А тому $z_k(\Delta ABC) = \Delta LMN$, звідси $\Delta ABC = \Delta LMN$.

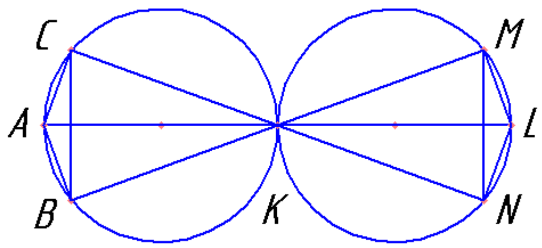


Рис. 9

2.1.2.5. Метод гомотетії.

Перетворення фігури, при якому кожна її точка переходить в точку отриману побудовою, називається *гомотетією* відносно центра О. Гомотетія - перетворення подібності, яка широко застосовується на практиці при виконанні креслень деталей машин, споруд, планів місць та ін.

Компонентами вміння застосовувати метод гомотетії є наступні дії:

1) використовувати специфічні властивості перетворення;

2) будувати образ зображень на площині;

3) знаходити центр гомотетії, обчислити його коефіцієнт.

І так, якщо ми хочемо оволодіти вмінням вирішувати задачі методом перетворень, необхідно виробити в учнів такі вміння і навички методу:

1) будувати образи фігур в кожному перетворенні, яке вимагається;

2) бачити відповідні при зазначеному перетворенні точки на відповідних фігурах;

3) виділяти елементи, що визначають те чи інше перетворення (вісь або центр симетрії, центр і кут обертання, вектор паралельного переносу, центр і коефіцієнт гомотетії і т.п.);

4) будувати відповідні при зазначеному перетворенні точки на невідповідних фігурах;

5) використовувати специфічні властивості перетворень.

Задача. Побудувати квадрат, вписаний в даний сектор (дві вершини квадрата лежать на одному радіусі, третя - на іншому, четверта - на дузі сектора).

Розв'язання:

Нехай $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ - два квадрата, вписані в кут MON (рис. 10). При гомотетії з центром O, що переводить точку B в B_1, (коефіцієнт цієї гомотетії

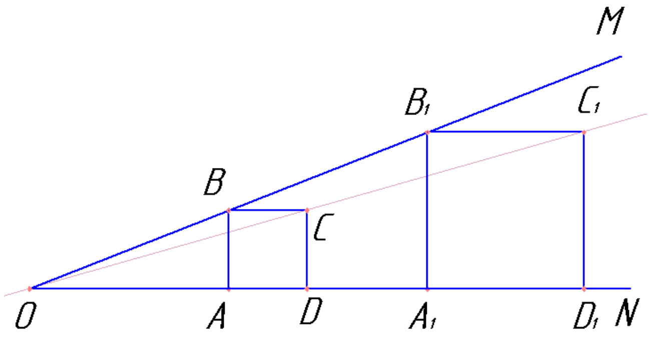


Рис. 10

дорівнює k = OB_1 / OB), відрізок AB переходить у відрізок A_1B_1 , а тому квадрат $ABCD$ переходить в квадрат (оскільки кути, а також відношення відрізків зберігаються). З цього випливає, що вершини C і C_1, лежать на одному промені, що виходить з точки O. Тепер ясно, що, побудувавши який-небудь квадрат $ABCD$, вписаний в кут MON, і провівши промінь OC, ми зможемо знайти вершину C_1 шуканого квадрата (тобто точку перетину променя OC з дугою MN сектора), а потім добудувати шуканий квадрат.

2.1.2.6. Розв’язування задач на побудову із застосуванням ППЗ GRAN – 2D.

Особлива роль у шкільному курсі планіметрії відводиться розв’язуванню задач на побудову. Більшість таких задач розв’язується нестандартними методами, а для пошуку їх розв’язку значно меншою мірою може бути використаний деякий алгоритм. Саме ці задачі мають значну дидактичну цінність: їх розв’язування сприяє розвитку таких рис особистості як кмітливість, винахідливість, оригінальність, гнучкість мислення, уважність, спостережливість, формує навички евристичної діяльності [15].

Однак аналіз практики навчання розв’язувати геометричні задачі, і, особливо, задачі на побудову показує, що не дивлячись на удосконалення форм і методів роботи вчителів, у вміннях учнів розв’язувати такі задачі є істотні прогалини, що свідчить про недостатню ефективність традиційних форм та засобів навчання. Значна частина учнів не має достатніх уявлень про хід та етапи розв’язування задач на побудову. Здебільшого учні розв’язують задачі на побудову за готовим зразком, без узагальнення отриманих результатів, внаслідок чого в них формуються лише часткові уміння, тобто уміння розв’язувати окремі, знайомі геометричні задачі на побудову.

Педагогічні дослідження показують, що більшість учнів мають наочно-образний тип мислення. Для людей з таким типом мислення наочність є необхідною умовою для ефективного розв'язання задач і важливою ланкою при встановленні зв’язку між новими та уже відомими поняттями. Наочність, зокрема комп’ютерна, допомагає учням розвивати свою просторову уяву і формувати правильні і різносторонні уявлення про властивості геометричних об'єктів. Таким чином, вона протиставляється вербалізму – чисто словесному навчанню, проведеному у формі абстрактних міркувань, зміст яких не завжди зрозумілий учням. Тому розробка методики розв’язування задач на побудову за допомогою комп’ютера і керування навчальною діяльністю в процесі їх розв’язування є важливим засобом активізації вивчення математики, підготовки учнів до наукової та трудової діяльності.

Для розв’язування задач на побудову досить ефективним є використання педагогічного програмного засобу (ППЗ) GRAN-2D, який призначений для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, звідки й походить назва (GRaphic Analysis 2- Dimension) [18].

При розв’язуванні задач на побудову цей засіб дає змогу поставити і досягти наступні цілі:

1) формувати в учнів навички роботи з комп’ютером;

2) закріпити вміння та навички побудови планіметричних об’єктів на екрані дисплея;

3) заощадити час;

4) здійснити контроль за виконанням завдань на кожному окремому етапі [17].

Розглянемо використання педагогічного програмного засобу (ППЗ) GRAN-2D, для використання етапів побудови і дослідження конструктивної задачі.

Задача. Побудувати чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 3 см, 4 см та кутом 50^0 між рівними сторонами.

Провівши аналіз даної задачі відмічаємо, що вона зводиться до побудови трикутника за двома сторонами і кутом між ними.

Розпишемо виконання побудови в програмі GRAN-2D.

1. Будуємо відрізок AB. Активуємо команду «Відрізок» на панелі інструментів. За допомогою лівої кнопки “миші” будуємо точку A (початок відрізка), далі

будуємо точку *B* (кінець відрізка). На екрані автоматично утворивсь відрізок *AB*. Активуємо команду “Обчислення довжини відстані між двома точками”. Лівою кнопкою “миші” тиснемо на точку *A*, далі тиснемо на точку *B*, на екрані з’явиться “рука”, якою , тримаючись за точку В, ми “домагаємось” довжини відрізка АВ, яка дорівнює 6 см.

2. Побудова відрізка *AD*, аналогічна побудові відрізка *AB*.

3. Активуємо команду ”Обчислення кута між трьома точками”. Лівою кнопкою “миші” тиснемо на точку *B*, далі тиснемо на точку *A*, далі тиснемо на точку *D*, на екрані з’явиться “рука”, якою , тримаючись за точку *D*, ми “домагаємось”, щоб градусна міра кута BAD дорівнювала 50^0.

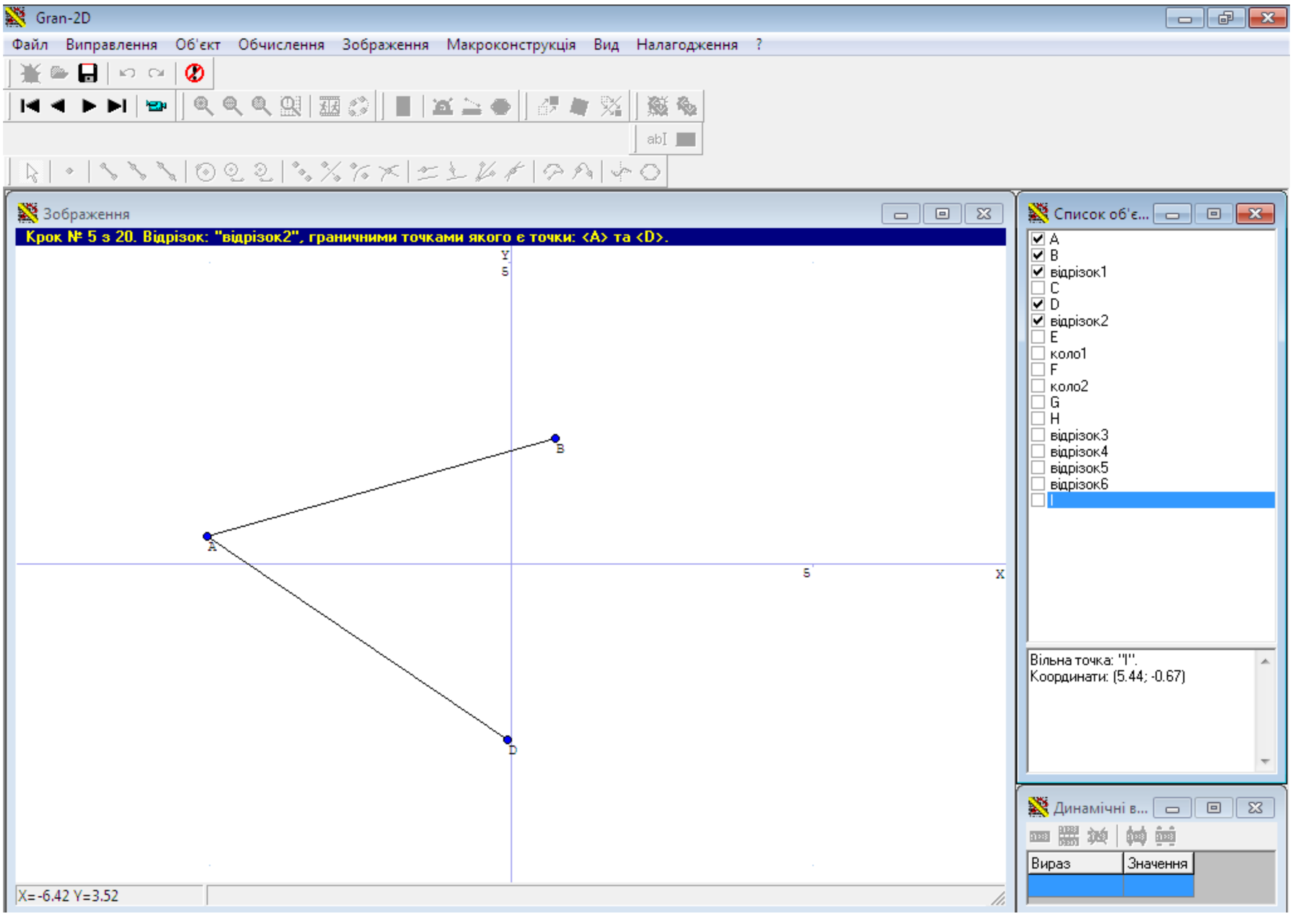
4. Активуємо команду “Створення кола за радіусом”. Лівою кнопкою “миші” тиснемо на точку *B*(центр кола), далі будуємо точку *E*(точка на колі), на відстані 3 см від точки *B*. Автоматично на екрані будується коло з радіусом *BE* = 3 см (для перевірки точності довжини радіуса , можна активувати команду “Обчислення довжини відстані між двома точками” і перевірити відстань між точками *B* і *E*).

5. Активуємо команду “Створення кола за радіусом”. Лівою кнопкою “миші” тиснемо на точку *D* (центр кола), далі будуємо точку *F* (точка на колі), на відстані 4 см від точки *B*. Автоматично на екрані будується коло з радіусом *DF* = 4 см (для перевірки точності довжини радіуса , можна активувати команду “Обчислення довжини відстані між двома точками” і перевірити відстань між точками *D* і *F*).

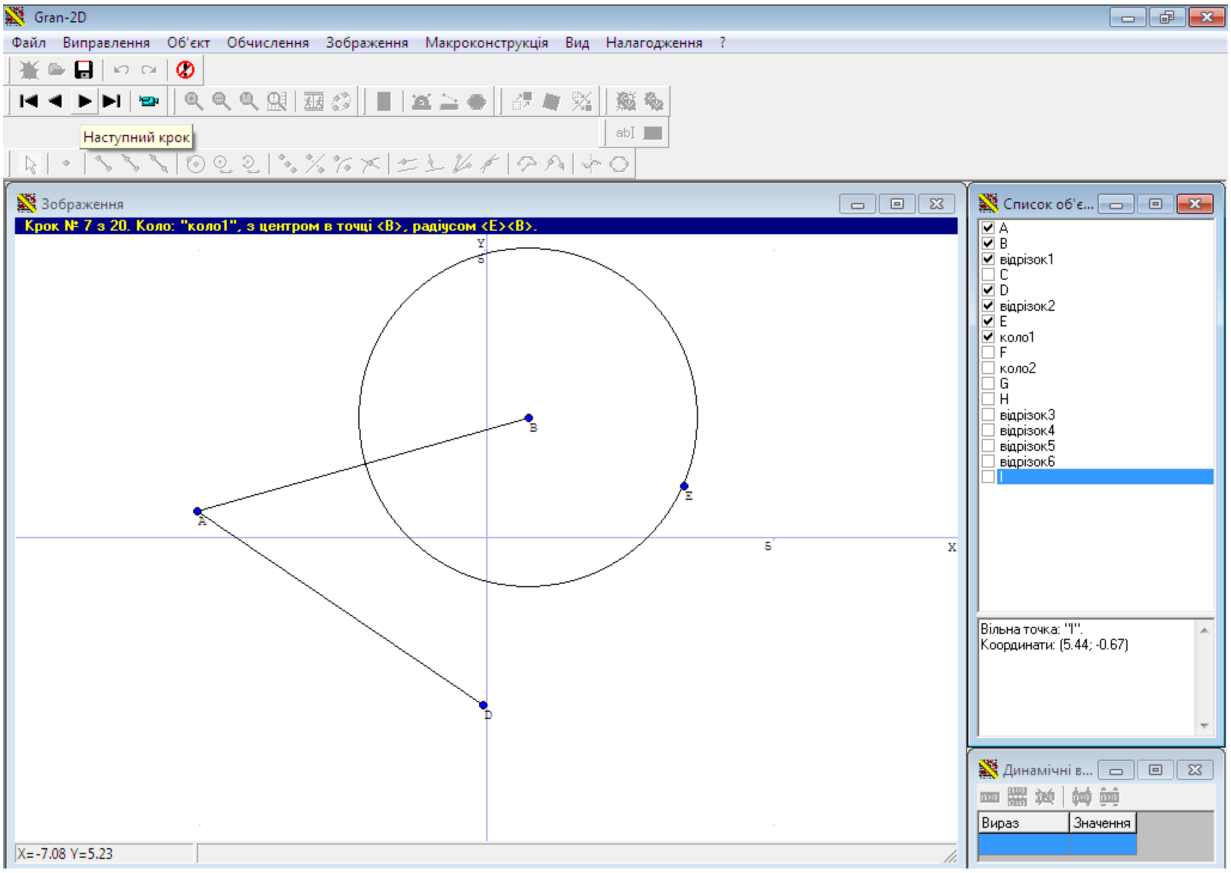
6. На перетині кіл утворяться дві точки *G* та *H*.

7. Активуємо команду «Відрізок» на панелі інструментів. Створюємо відрізок *BG* та *DG*. І ось головне, ми отримали опуклий чотирикутник *ABGD*. Далі будуємо відрізки *BH* та *DH* (при активованій команді «Відрізок»). Ми отримали другий чотирикутник *ABHD*, але цей чотирикутник є неопуклим.

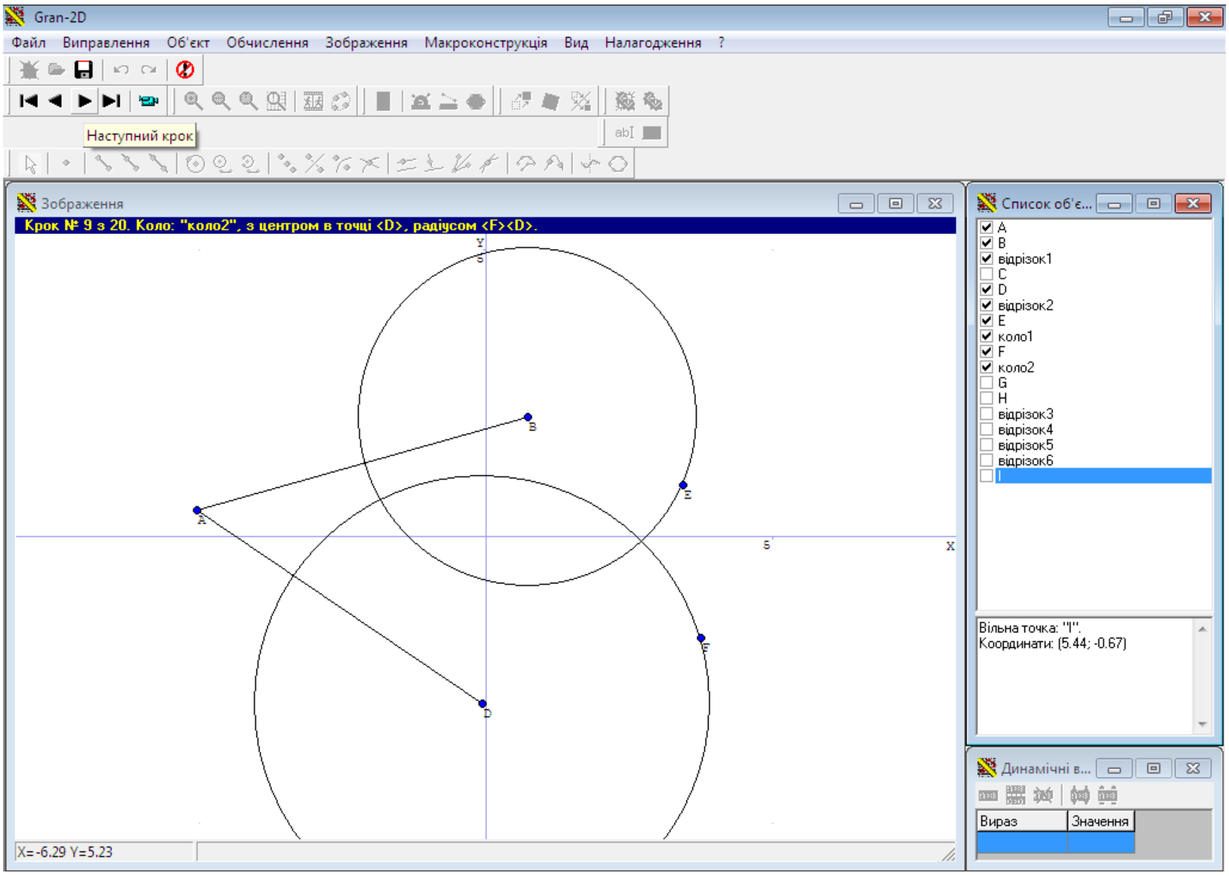
Результати побудови зображено на слайдах.



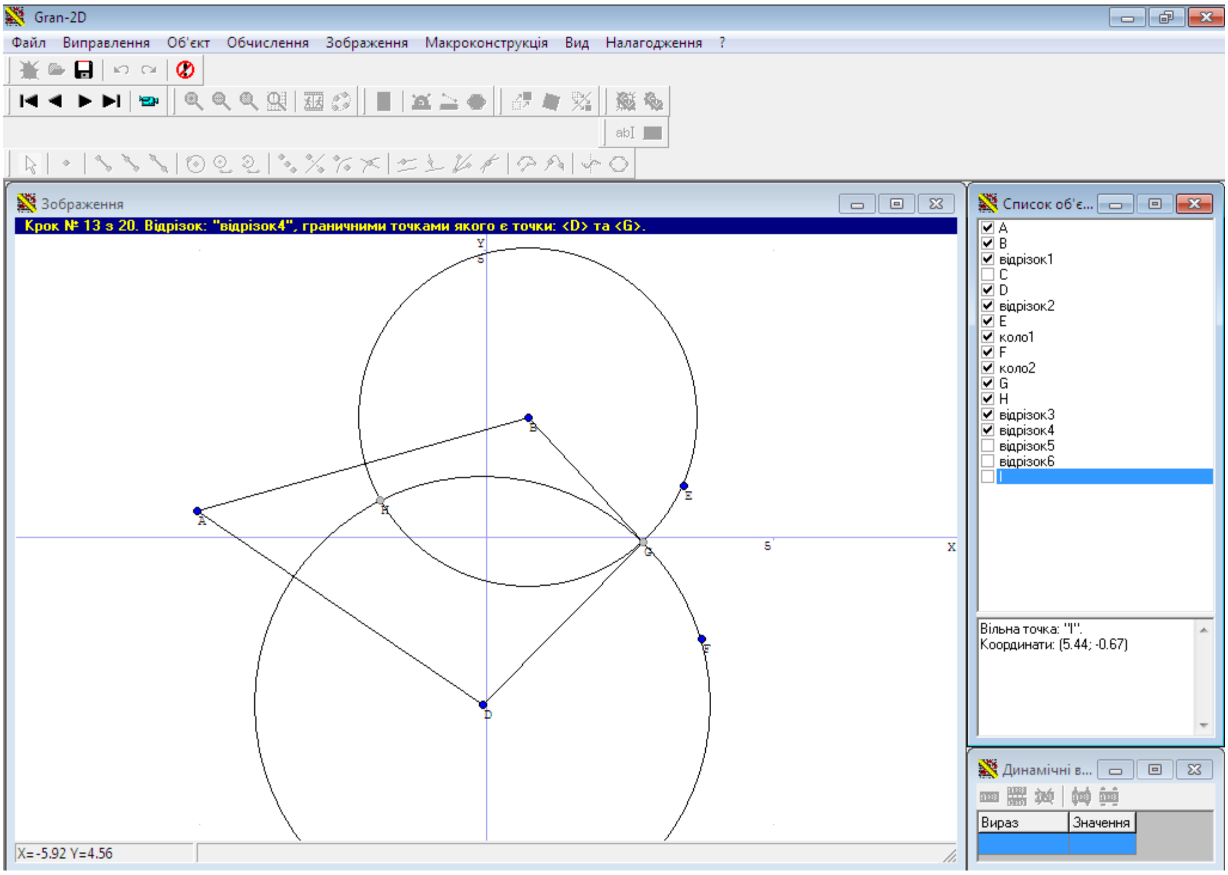
Слайд 1. Побудова кута *BAD.*



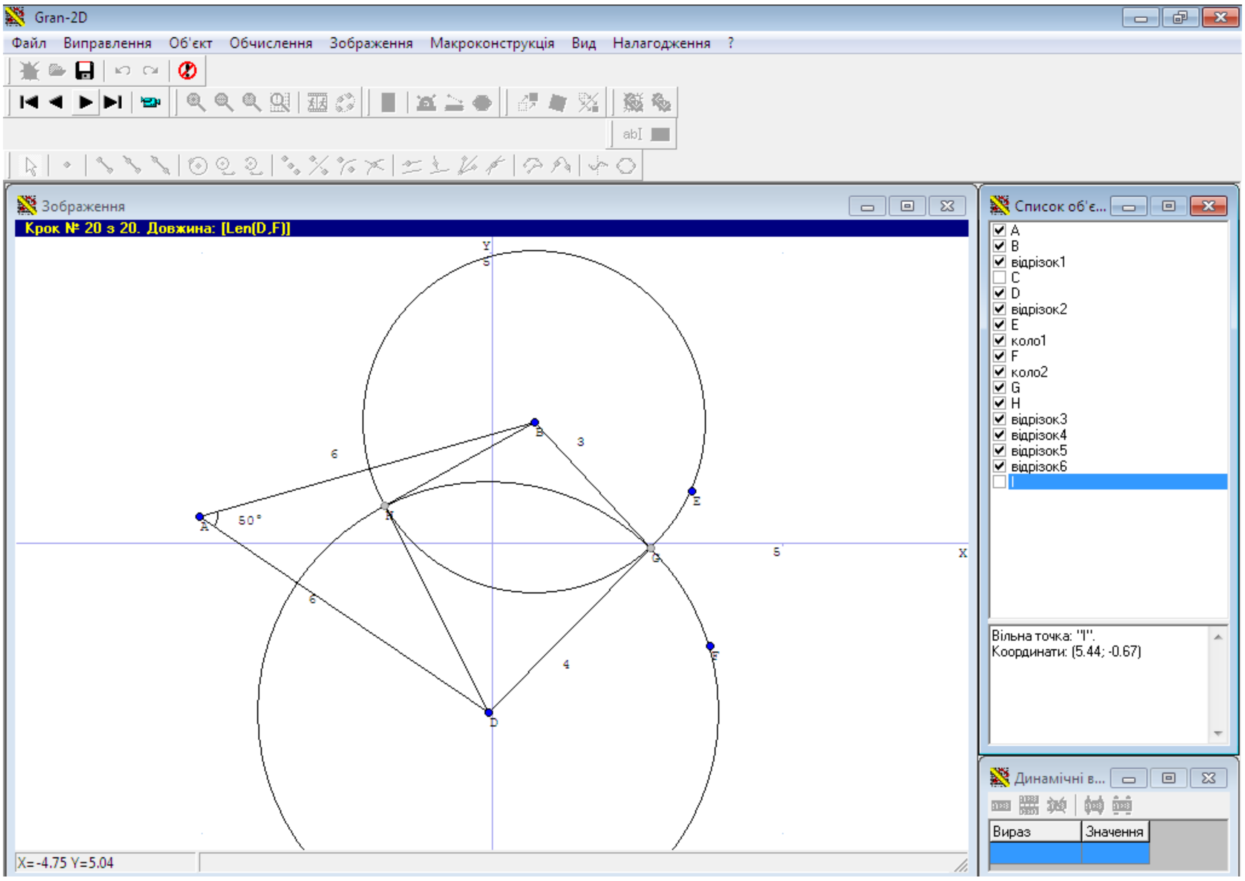
Слайд 2. Побудова кола з радіусом *BE = 3 см.*



Слайд 3. Побудова кола з радіусом *DF = 4 см*.



Слайд 4. Побудова опуклого чотирикутника *ABGD*.



Слайд 5. Побудова неопуклого чотирикутника *ABHD*.

Важливим фактом для розуміння задачі є створення самими учнями макроконструкції, яка дозволяє автоматично виконати побудову, виходячи із заданих графічно вихідних даних.

Таким чином, застосування ППЗ GRAN-2D у процесі розв’язування задач на побудову дає змогу реалізувати дослідницький підхід, навчити учнів самостійного знаходження шляху розв’язування, формувати пізнавальний інтерес і творчі якості, котрі є дуже важливими і потрібними у сучасному інформаційному суспільстві.

2.2. Аналітичні методи розв’язування планіметричних задач.

2.2.1. Алгебраїчний метод розв’язування планіметричних задач.

Якщо умовою геометричної задачі на обчислення взагалі не дано відрізки або дані відрізки і кути не можна об’єднати в зручний для розв’язування задачі трикутник, то зазвичай вводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих).

Використовуючи цей метод для складання рівняння до задачі, часто поряд з вираженням даних елементів через невідомі, зручно величину якогось елемента з розглядуваної конфігурації виразити двічі через введені невідомі. Крім того, не завжди, склавши рівняння чи систему рівнянь до геометричної задачі, доцільно прагнути повністю їх розв'язати. З одержаного рівняння чи системи, у першу чергу, слід знаходити ті невідомі (чи їх комбінацію), які дозволять дати відповідь на запитання задачі.

Приклад. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а його площа – 24 см^2. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Коментар. Оскільки в умові цієї геометричної задачі на обчислення не дано жодного відрізка, то для розв'язування такої задачі доведеться ввести невідомий відрізок (або декілька невідомих відрізків). Щоб записати периметр трикутника, потрібно мати всі його сторони, тому введемо як невідомі всі сторони трикутника: a, b, c. Для складання рівнянь використаємо теорему Піфагора та дані: периметр і площу (записавши їх через невідомі). Оскільки в прямокутному трикутнику радіус описаного кола дорівнює половині гіпотенузи, то, щоб одержати відповідь, достатньо знайти із системи гіпотенузу c , а для цього з першого рівняння системи знайти суму a + b, піднести її до квадрата і використати друге та третє рівняння.

Розв'язання:

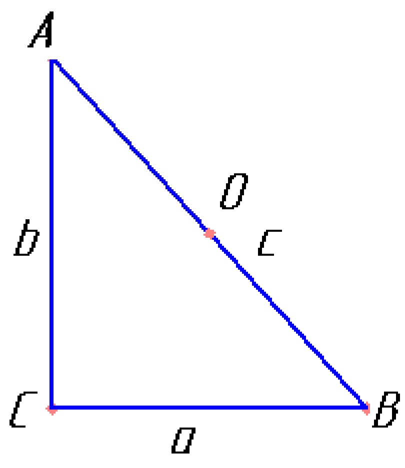


Рис. 11

Нехай у прямокутному трикутнику *ABC* (рис. 11) : $\angle C = 90^0$, $P = 24$ см , $S = 24$ см^2 . Позначимо *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AB* = *c* (a > 0, b > 0, c > 0). Записуючи дані периметр і площу та теорему Піфагора, одержуємо систему:

$$\begin{cases} a+b+c=24 \\ \frac{1}{2}ab=24 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$$

З першого рівняння $a+b=24-c$. Тоді $(a+b)^2=(24-c)^2$ або a^2+b^2+ $+2ab=24^2-48c+c^2$. Підставляючи в цю рівність з другого рівняння $ab=$ 48 і з третього рівняння $a^2+b^2=c^2$, одержимо $c^2+96=576-48c++c^2$, звідки $c = 10$ см. Оскільки радіус описаного кола прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то $R = 5$ см.

Відповідь: $R = 5$ см.

2.2.2. Спосіб доведення від супротивного.

Англійський математик Г. Харді (1877 – 1947) сказав: «Доведення від супротивного, таке любе Евклідові, – це чи не найбільш витончена зброя математики».

Застосування доведення « від супротивного» вимагає таких логічних кроків-міркувань:

1) проаналізувати твердження яке вимагається довести, і сформулювати супротивне (протилежне) твердження;

2) зробити припущення, що сформульоване твердження є правильним;

3) спираючись на це припущення, логічними (дедуктивними) міркуваннями прийти до абсурдного висновку;

4) сказати, що тоді зроблене нами припущення треба відкинути і прийняти те твердження, яке й треба було довести.

Приклад. Довести, що в прямокутному трикутнику медіана і бісектриса, проведені з вершини гострого кута, не співпадають.

Доведення:

Розглянемо 4 варіанта міркуваннь від супротивного.

Спосіб 1. Припустимо від супротивного: медіана і бісектриса гострого кута співпадають. Тоді трикутник буде рівнобедреним, тому гіпотенуза дорівнює одному із катетів. Протиріччя.

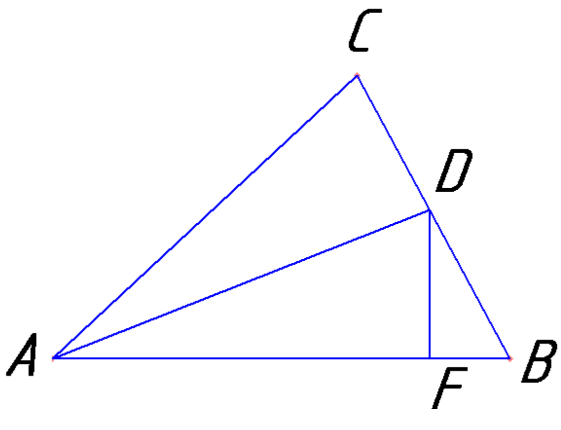


Рис. 12

Спосіб 2.

Нехай AD – одночасно бісектриса і медіана. Проведемо $DF \perp AB$ (рис. 12), тоді $\Delta ACD = \Delta AFD$ і отже $CD = DF$, але $CD = BD$, $DF = DB$ – перпендикуляр і похила опинилися рівними. Протиріччя.

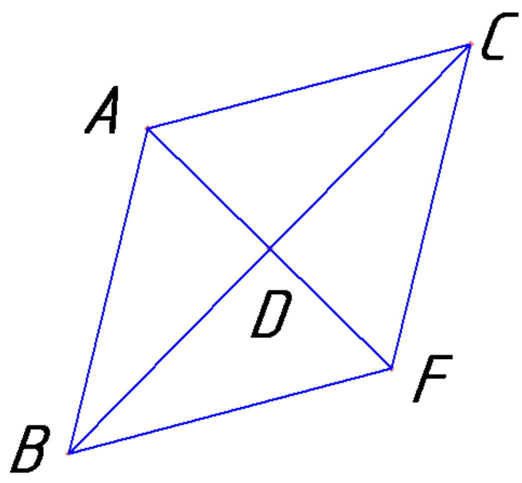


Рис. 13

Спосіб 3.

Нехай AD - бісектриса і медіана. Відкладемо $DF = AD$ і точку F з'єднаємо з B і C (рис. 13), тоді $ABFC$ – ромб (це легко довести). Але тоді $\angle ACF = 2\angle ACB = 180^0$. Чого бути не може.

Спосіб 4.

Припустимо, що AD – одночасно бісектриса і медіана. Проведемо середню лінію DF (рис. 14), тоді ΔADF – рівнобедрений (чому?) і значить $AF = FD$. Але тоді $FD = FB$; Δ FDB – теж рівнобедрений і значить $\angle FBD = \angle FDB$. Отримали, що гострий кут дорівнює прямому. Протиріччя.

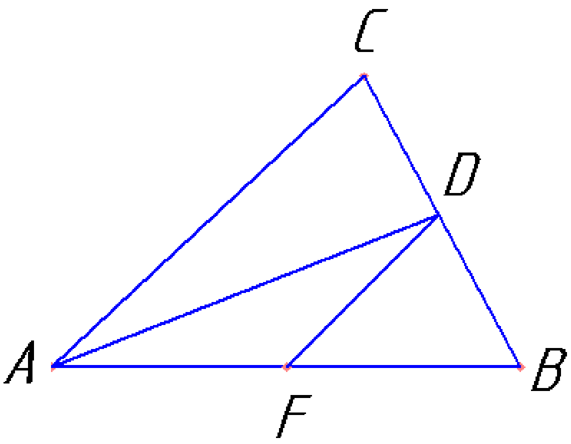


Рис. 14

В заключені слід відповісти на питання. Чи будь-яку теорему можна довести методом від супротивного?

Відповідь: так, будь-яку.

Зокрема, кожне пряме доведення теореми можна перетворити в доведення методом від супротивного. Робиться це дуже просто: припустимо

«супротивне», а потім буквально повторюємо «пряме» доведення. В результаті отримуємо суперечність, яка і доводить теорему.

Інша справа, чи доцільно будь-яку теорему доводити методом від супротивного? Звичайно, ні.

2.2.3. Розв'язування планіметричних задач методом площ.

Головним об'єктом даного методу є площа. Тут і виявляється основна особливість методу площ – геометричну задачу він перетворює на алгебраїчну, приводячи весь розв'язок до розв'язування рівняння, а іноді і системи рівнянь. Саме порівняння виразів для площі фігури може бути різноманітним. Іноді площа фігури представляється у вигляді суми площ її частин. В інших випадках прирівнюються вирази, основані на різноманітних формулах площі для однієї і тієї ж фігури, що дозволяє отримувати залежності між її елементами.

При розв'язуванні задач досить зручними іноді виявляються властивості площ:

1. Якщо вершину трикутника переміщувати по прямій, паралельній основі, то площа трикутника при цьому не зміниться;
2. Якщо два трикутники мають однакові висоти, то відношення їх площ дорівнює відношенню довжин основ (сторін, на які опущені ці висоти);
3. Якщо два трикутники мають спільний (рівний) кут, то їх площі відносяться як добутки сторін, які містять цей кут;
4. Частинний випадок пункту 3. Якщо два трикутники подібні і сторони одного із них в m раз більше від відповідних сторін другого, то його площа в m^2 більша площі другого трикутника.
5. Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності (або відношенню квадратів відповідних лінійних елементів);
6. Медіана трикутника ділить його на дві рівновеликі частини;
7. Медіани трикутника ділять його на шість рівновеликих трикутників;
8. Середня лінія трикутника відтинає від нього трикутник, площа якого дорівнює одній четвертій площі всього трикутника;
9. Якщо фігура розділена на декілька частин, то її площа дорівнює сумі площ цих частин (властивість адитивності площі).

Суть застосування методу площ в цьому випадку полягає в тому, що ми розглядаємо площу фігури як суму площ її частин, кожну з площ частин обчислюємо зручним способом, в результаті чого отримуємо рівняння, яке і дає шукану невідому величину або істотно полегшує її пошук [1].

Приклад. Дано прямокутний трикутник з катетами a і b. Обчислити довжину бісектриси проведеної на гіпотенузу із вершини прямого кута (рис. 15).

Розв'язання:

Для визначення довжини бісектриси скористаємось способом площ.

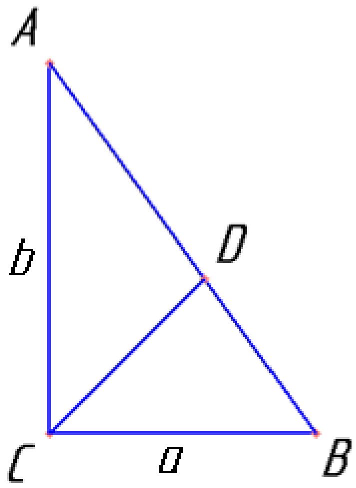


Рис. 15

$$S_{ABC} = S_{CAD} + S_{CDB} \quad (1)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \quad (2)$$

$$S_{CAD} = \frac{1}{2}b \cdot CD\sin 45° \quad (3)$$

$$S_{CDB} = \frac{1}{2}a \cdot CD\sin 45° \quad (4)$$

Підставимо рівняння (2) - (4) в рівняння (1), отримаємо: $ab = b \cdot CD\frac{\sqrt{2}}{2} + a \cdot CD\frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідки $CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Відповідь: $CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Приклад. Доведіть, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін трикутника.

Коментар. Щоб знайти відношення відрізків AD і DB, спробуємо знайти відношення площ трикутників CAD і CBD зі спільною вершиною C, основами яких є дані відрізки (тоді, і висота цих трикутників, проведена з вершини C , буде спільною).

Розв'язання:

Нехай $CD = l_a -$ бісектриса трикутника ACB (рис. 16) зі сторонами $AC = c$, $BC = b$ і $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$, $AD = m$, $DB = n$. Тоді, з одного боку:

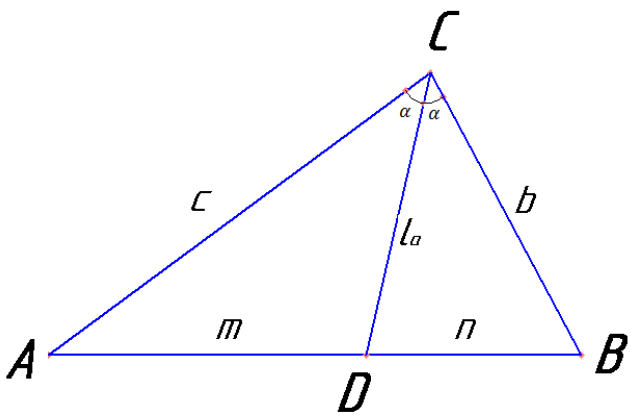


Рис. 16

$S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2}cl_a sin\alpha$, $S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2}bl_a sin\alpha$

і $$\frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{\frac{1}{2}cl_a sin\alpha}{\frac{1}{2}bl_a sin\alpha} = \frac{c}{b} \quad (1)$$

З іншого боку: $S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2}mh_a$, $S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2}nh_a$

і $$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}mh_a}{\frac{1}{2}nh_a} = \frac{m}{n} \quad (2)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (1) і (2), одержуємо: $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, тобто *AD* : *DB* = *AC*: *BC*.

2.2.4. Координатний метод розв’язування планіметричних задач.

Мета: Ознайомити із використанням метолу координат для формування вмінь розв’язувати задачі курсу планіметрії. Розвивати логічне мислення та математичну інтуїцію. Виховувати алгоритмічну культуру.

Метод координат - це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла на площині (на прямій, у просторі) за допомогою чисел або інших символів.

Цілі і навчальні задачі вивчення координатного методу:

- показати, що координатний метод має свою мову, свої прийоми, дає можливість виражати властивості геометричних фігур аналітичною мовою в вигляді рівнянь і нерівностей і відповідно рівняння функції, нерівності перекладати на геометричну мову (графіків):
- сформувати понятійний апарат координатного методу;
-сформувати конкретні прийоми використання координатного методу при вивченні курсів алгебри і геометрії.

Координатний метод дозволяє розв’язувати геометричні задачі засобами алгебри, зводити побудови до обчислень. Координатне розв’язання дозволяє охопити всі можливі частинні випадки.

Використання координатного методу сприяє розвитку обчислювальних та графічних навичок, просторових уявлень, геометричної інтуїції учнів, оскільки його застосування пов’язане з вибором системи координат, обчисленням координат точок, із перекладом мови рівнянь на мову геометрії та навпаки. У свою чергу, координатний метод збагатив геометричною наочністю алгебру.

Понятійний апарат координатного методу для прямокутної системи координат:

- абсциса;
- ордината;
-координати (точки) - числа, які взяті в певному порядку і характеризують положення точки на прямій, на площині, в просторі;

- координатна пряма (в школі координатна пряма вводиться поступовим "присвоєнням" точкам прямої визначених чисел у зв'язку з розширенням числових множин і осмислення операції відкладання відрізків);
- координатна площина.

В формуванні координатного методу в школі, можна виділити такі етапи:

1. Засвоєння понятійного апарату. Здійснюється в основному в 5-6 класах і систематизується в курсі геометрії.
2. Введення на основі цього понятійного апарату рівнянь ліній і графіків функцій. Ці дві навчальні задачі розв'язуються в різних предметах (геометрії і алгебри), з різною змістовною ціллю, а тому учні часто не бачать між ними зв'язку, і не засвоюють головної суті методу.
3. Розкриття основних етапів застосування методу в курсі алгебри і геометрії.
4. Використання координатного методу для розв'язання різних математичних задач.

Використання координатного методу розв'язування задач передбачає виконання таких кроків:

1) переклад задачі на мову координат.
2) перетворення аналітичного виразу.
3) зворотній перехід, тобто переклад координатної мови на мову, в термінах якої сформульована задача.

Для формування вміння здійснювати перший крок у використанні координатного методу (перекладати умову задачі на мову математики та навпаки) в якості довідника можна використати дані таблиці 2. Представлений у таблиці матеріал можна взяти за основу для виготовлення таблиць, кодопозитивів, слайдів, комп'ютерних навчальних програм і використовувати на різних етапах уроку.

Основні відношення між фігурами на площині

Таблиця 2

№	Мова геометрії	Мова координат
1.	Точки A та B лежать на площині	$A\ (x_1;\ y_1),\qquad B\ (x_2;\ y_2)$
2.	Дано пряму AB	$AB\colon y = kx + b;\ ax + by + c = 0;$

		$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
3.	Прямі *AB і CD* паралельні	$\left.\begin{matrix} AB: y=k_1x+b_1 \\ CD: y=k_2x+b_2 \end{matrix}\right\| \longrightarrow AB \parallel CD \Rightarrow k_1=k_2, b_1 \neq b_2$
4.	Прямі *AB і CD* перпендикулярні	$\left.\begin{matrix} AB: y=k_1x+b_1 \\ CD: y=k_2x+b_2 \end{matrix}\right\| \longrightarrow AB \perp CD \Rightarrow k_1 \cdot k_2=-1$
5.	Точка *O* ділить відрізок *AB* навпіл	$A\ (x_1;\ y_1), B\ (x_2;\ y_2), O(x_0;\ y_0);$ $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ y_0=\frac{y_1+y}{2}$
6.	Точка *C* ділить відрізок *AB* у відношенні: $\lambda=\frac{AC}{CB}$	$A\ (x_1;\ y_1), B\ (x_2;\ y_2), C(x_0;\ y_0);$ $x_0=\frac{x_1+\lambda \cdot x_2}{1+\lambda}\ ; y_0=\frac{y_1+\lambda \cdot y_2}{1+\lambda}$
7.	Довжина відрізка *AB* дорівнює *m*	$A\ (x_1;\ y_1), B\ (x_2;\ y_2);$ $m=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
8.	Відстань від точки *M* до прямої *AB* дорівнює *d*	$M(x_0;\ y_0), AB: ax+by+c=0;$ $d=\frac{\|ax_0+by_0+c\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Серед планіметричних задач, які доцільно розв'язувати координатним методом, виділимо задачі двох видів.

1- й вид: на обґрунтування залежностей між елементами фігур, особливо між довжинами цих елементів. Приклад такої задачі: "В трикутнику *ABC BD* - медіана, *AB = c, AC = b, BC = a.* Довести, що $BD^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$"

2- й вид: на знаходження множини точок, які задовольняють певним властивостям. Приклад такої задачі: "Зайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина стала".

У шкільному курсі геометрії обмежуються лише розглядом прямокутної системи координат, тому координатний метод у планіметрії особливо ефективний під час встановлення співвідношень між довжинами елементів трикутників і чотирикутників, діагоналі або сторони яких перпендикулярні.

Проаналізуємо розв'язання задач, які приведено вище. У процесі аналізу виокремимо вміння, які є компонентами вміння використовувати координатний метод для розв'язування задач.

Задача 1. В трикутнику *ABC BD* - медіана, *AB = c, AC = b, BC = a.* Довести, що $BD^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$.

Розв 'язання:

1. Виберемо систему координат так, щоб точка A була початком координат, AC - віссю Ox. У вибраній системі координат точки A, C, D мають такі координати: A(0;0), D($\frac{b}{2}$; 0), C(b;0). Отже, для розв'язування задачі необхідно оволодіння вмінням оптимального вибору системи координат, в якій найбільш просто знаходяться координати даних точок. Останнє, у свою чергу, визначає вміння обчислювати координати заданих точок.

2. Позначимо координати точки B через x, y: B(x;y). Використаємо формулу для знаходження відстані між точками, які задані своїми координатами, отримаємо: $x^2 + y^2 = c^2$, $(x-b)^2 + y^2 = a^2$. За цією ж формулою, $BD^2 = (x - \frac{b}{2})^2 + y^2 = x^2 - xb + \frac{b^2}{4} + y^2$. Використовуючи попередні рівності, отримаємо: $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

Отже, необхідно вміти знаходити відстань між двома точками, які задані своїми координатами, та вміти обчислювати координати точок, якщо відома відстань між ними.

Задача 2. Знайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина стала.

Розв 'язання:

1. Позначимо дані точки через A,B. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox співпала з прямою AB*,* а початком координат була точка A (вміння оптимально обирати систему координат).

2. Покладемо AB = a, тоді у вибраній системі координат A(0;0), B(a;0) (вміння знаходити координати заданих точок).

3. Точка M(x;y) належить шуканій множині тоді і тільки тоді, коли $AM^2 - MB^2 = b,$ де b - стала величина (вміння складати рівняння даної фігури).

4. Використаємо формулу відстані між двома точками, отримаємо:

$AM^2 = x^2 + y^2$, $MB^2 = (x-a)^2 + y^2$,

$AM^2 - MB^2 = x^2 + y^2 - (x-a)^2 - y^2 = b$ (вміння обчислювати відстань між точками, які задані своїми координатами), звідки $x = \frac{b+a^2}{2a}$.

5. Рівняння $x = \frac{b+a^2}{2a}$ – це рівняння прямої, що паралельна до осі Оу, і знаходиться від точки А на відстані $d = \frac{|b+a^2|}{2a}$ (вміння “бачити” за рівнянням конкретний геометричний образ).

Таким чином, **для розв’язування задач координатним методом важливо оволодіти вміннями:**

1) будувати точку за її координатами;
2) знаходити координати заданих точок;
3) обчислювати відстань між точками, які задані координатами;
4) обчислювати координати середини відрізка;
5) обирати оптимально систему координат;
6) складати рівняння фігури за її характеристичною властивістю;
7) бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;
8) перетворювати алгебраїчні рівності.

Проілюструємо розв’язання задачі координатним методом.

Задача. Знайти множину точок, для кожної з яких відстані від двох даних точок рівні.

Розв 'язання:

Перший етап. Позначимо дані точки через *A,B*. Виберемо систему координат так, щоб вісь *Ох* співпадала з прямою *АВ*, а початком координат була точка *А*. Нехай *АВ* = a. Тоді у вибраній системі координат: *A(0;0), В(а;0).* Точка *М* належить шуканій множині тоді і тільки тоді, коли *AM* - *МВ*, або, що те ж саме, $AM^2 = MB^2$.

Використаємо формулу відстані між двома точками координатної площини $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, де x_1, y_1 і x_2, y_2 – координати даних точок. Отримаємо: $AM^2 = x^2 + y^2$, $MB^2 = (x-a)^2 + y^2$. Тоді $x^2 + y^2 =$ $= (x-a)^2 + y^2$. Ця остання рівність є алгебраїчною моделлю ситуації, що дана в задачі. На цьому закінчується перший етап її розв’язування (переклад на координатну мову).

Другий етап. Виконаємо перетворення отриманого виразу

$x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2$, в результаті якого отримаємо співвідношення $x = \frac{a}{2}$.

Третій етап. Здійснимо переклад мови рівняння на геометричну мову. Отримане рівняння є рівнянням прямої, що паралельна осі *Oy* та знаходиться від точки *A* на відстані $d = \frac{a}{2}$, тобто серединного перпендикуляра до відрізка *AB*.

2.2.5. Векторний метод розв'язування планіметричних задач.

Мета: Ознайомити із використанням векторного методу для формування вмінь розв'язувати задачі курсу планіметрії. Розвивати логічне мислення. Виховувати алгоритмічну культуру.

Суть методу векторів полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок, прямих і площин у просторі записати мовою векторів, точніше - у вигляді векторної рівності. І навпаки, мову векторних формул і рівностей наповнити геометричним змістом, тобто перевести ту чи іншу векторну рівність на мову геометрії, надати їй геометричного звучання.

Цілі вивчення векторного методу:

- дати ефективний метод розв'язання різних геометричних задач і доведення теорем;
- показати широке застосування векторного апарату в інших областях знань: техніці, фізиці, хімії і ін.;
- показати використання векторного методу при розв'язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення і конкретизацію;
- формувати в учнів такі якості мислення, як гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність та ін.

Понятійний апарат векторного методу.

Основні поняття: вектор, початок вектора, кінець вектора, співнаправлені вектори, протилежно напрямлені вектори, абсолютна величина вектора (модуль вектора), рівні вектори, нульовий вектор, координати вектора, проекція вектора на вісь, колінеарні вектори, одиничний вектор, координатні вектори (орти), скалярний добуток векторів, кут між двома ненульовими векторами.

Основні дії: додавання векторів (правило трикутника або паралелограма), віднімання векторів, множення вектора на число; зображення вектора в вигляді суми, різниці двох векторів; в вигляді добутку вектора на число; заміна вектора йому рівним за допомогою паралельного перенесення; розкладання вектора по осях; перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між довжинами і виконання оберненої дії; вираження довжини вектора через скалярний квадрат; вираження величини кута між векторами через скалярний добуток векторів і довжин цих векторів.

Основні етапи формування векторного методу в учнів.

1. Підготовчий етап. Його мета - оволодіння вказаними поняттями і основними діями.

2. Мотиваційний етап. Його завдання - показати необхідність оволодіння цим методом.

3. Орієнтувальний етап. Його мета — роз'яснення суті методу і виділити основні компоненти на прикладі розв'язаної цим методом задачі.

4. Етап оволодіння компонентами метода. Мета — використовуючи спеціально підібрані задачі, формувати окремі компоненти методу (спочатку задачі на формування одного компоненту, потім двох, трьох і т. п.).

5. Етап формування методу в "цілому". Мета - визначення змісту вправ і їх розв'язання.

Основні компоненти векторного методу розв'язання задач:

1) переклад умови задачі на мову векторів, в тому числі:
- введення в розгляд векторів;
- вибір системи координат (якщо це необхідно);
- вибір базисних векторів;
- розклад введених векторів по базисним;

2) складення системи векторних рівностей (або однієї рівності);

3) спрощення векторних рівностей;

4) заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв'язання;

5) пояснення геометричного смислу одержаного розв'язку цієї системи (або одного рівняння).

Для визначення змісту вправ, які формують вміння застосовувати вектори необхідно виділити дії, адекватні цій діяльності.

Специфічні розумові дії, які входять до складу діяльності, спрямованій на використання векторного методу:

1. Перекладати геометричні терміни на мову векторів та навпаки (здійснювати перехід від співвідношення між фігурами до співвідношення між векторами та навпаки).
2. Виконувати операції над векторами (знаходити суму, різницю векторів, добуток вектора на число).
3. Представляти вектор у вигляді суми, різниці векторів.
4. Представляти вектор у вигляді добутку вектора на число.
5. Перетворювати векторні співвідношення.
6. Переходити від співвідношення між векторами до співвідношення між їх довжинами та навпаки.
7. Виражати довжину вектора через його скалярний квадрат.
8. Виражати величину кута між векторами через їх скалярний добуток.

З метою успішного засвоєння учнями такої розумової дії як переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови та навпаки, доцільно запропонувати учням таблицю основних відношень обома мовами (таблиця 3).

Основні відношення між фігурами на площині

Таблиця 3

№	Мова геометрії	Мова векторів
1.	$AB \parallel CD$	$\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$
2.	$AB \perp CD$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$
3.	Три точки A, B, C належать одній прямій a	$\overline{AB} = k \cdot \overline{BC}$, або $\overline{AC} = k \cdot \overline{BC}$, або $\overline{AC} = k \cdot \overline{AB}$; $\overline{OC} = p \cdot \overline{OA} + q \cdot \overline{OB}$, де O – довільна точка, $p + q = 1$.
4.	$A = B$	$\overline{AB} = \overline{0}$, або $\overline{OA} = \overline{OB}$
5.	Точка *C* належить відрізку *AB*, $AB{:}CB = m{:}n$	$\overline{AC} = \frac{m}{n}\overline{CB}$, або $\overline{OC} = \frac{n}{m+n} \cdot \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overline{OB}$

		для деякої точки O
6.	m – довжина відрізка AB	$m^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$
7.	Обчислити величину кута	1. Вибрати два неколінеарні базисні вектори, для яких відомі відношення довжин і кути між ними. 2. Вибрати вектори, які задають шуканий кут і розкласти його за базисними векторами. 3. Обчислити: $\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert}$
8.	M_1 – середина відрізка A_1B_1, M_2 – середина відрізка A_2B_2	$\overline{M_1M_2 = \frac{1}{2}} \cdot (\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2})$
9.	$OABC$ - паралелограм	$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OC}$; $\overline{OA} = \overline{CB}$; або $\overline{OC} = \overline{AB}$

Векторний метод, як і будь-який інший, не є універсальним, хоча і дозволяє розв'язувати широкий круг геометричних задач.

Геометричні задачі, які доцільно розв'язувати методом векторів:

1) задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;

2) задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок в деякому відношенні;

3) задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;

4) задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;

5) задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;

6) задачі на знаходження величини кута.

Проілюструємо використання методу векторів для розв'язування планіметричної задачі. Для порівняння розв'яжемо задачу також без використання векторів (аналітико-синтетичним методом).

Задача. Довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам.

Розв 'язання:

Векторний метод.

Нехай $AD: DB = m: n$ (Рис. 17). Відкладемо на CA і CB вектори одиничної довжини: $\overline{CA_1} = \overline{l_1}$ і $\overline{CA_2} = \overline{l_2}$. Виразимо вектор $\overline{CD}$ двічі через вектори $\overline{CA}$ *і* $\overline{CB}$:

а) $\overline{CD} = \frac{m}{m+n} \cdot \overline{CB} + \frac{n}{m+n} \cdot \overline{CA} = \frac{m}{m+n} \cdot a \cdot \overline{l_2} + \frac{n}{m+n} \cdot b \cdot \overline{l_1}$, де a, b – довжини векторів $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$;

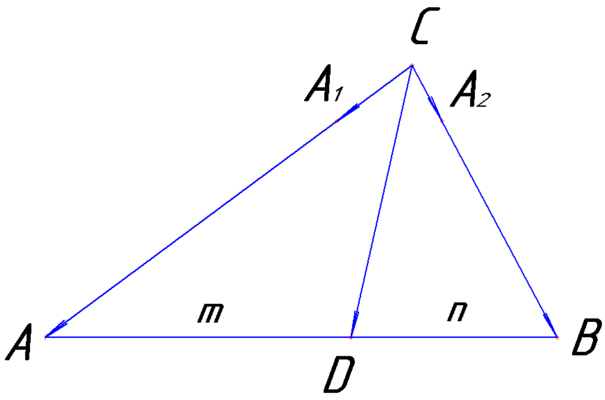


Рис. 17

б) $\overline{CD} = x \cdot (\overline{l_1} + \overline{l_2}) = x \cdot \overline{l_1} + x \cdot \overline{l_2}$

Отже, запишемо систему рівнянь:

$\begin{cases} \frac{n \cdot b}{m+n} = x \\ \frac{m \cdot a}{m+n} = x \end{cases}$. Поділимо почленно ці два рівняння системи, отримаємо: $\frac{n \cdot b}{m \cdot a} = 1$,

тобто $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$. Або, остаточно,

$AD : DB = AC : BC$.

Аналітико-синтетичний метод.

Нехай CD – бісектриса внутрішнього кута трикутника ACB (Рис. 18).

Доведемо, що AD: DB = AC: BC

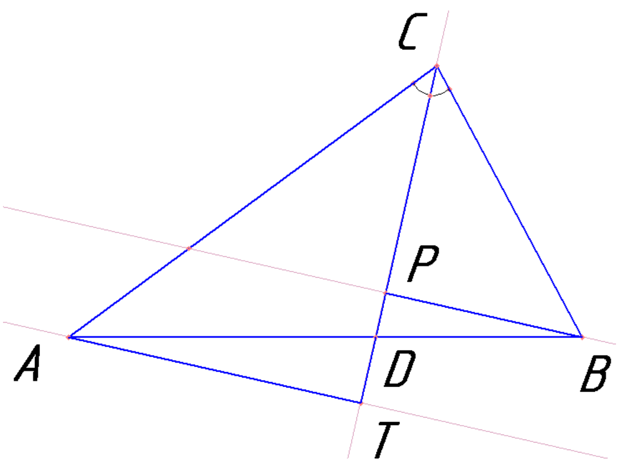


Рис. 18

1. Проведемо $BP \perp CD$, $AT \perp CD$.
2. $\Delta ADT \sim \Delta BPD$ (за двома кутами) $\Longrightarrow$ $\frac{AD}{BD} = \frac{TD}{PD} = \frac{AT}{BP}$.
3. $\Delta ACT \sim \Delta BCP$ (за двома кутами) $\Longrightarrow$ $\frac{AT}{BP} = \frac{AC}{BC} = \frac{CT}{CP}$.
4. Порівнюючи рівності, отримаємо:
   AD : DB = AC: B

РОЗДІЛ 3. Спрямованість навчальної діяльності під час розв’язування планіметричних задач.

3. 1. Пропедевтика геометрії в 1-6 класах.

На сучасному етапі пропедевтика здійснюється в межах початкової школи і на протязі вивчення математики в 5-6 класах.

У першому класі на наочно-інтуїтивному і оперативному рівнях (учні виконують побудови, практичні дії з фігурами) вводяться: круг, трикутник, квадрат, чотирикутник, п`ятикутник. Учні ознайомлюються з точкою і відрізком, їх зображенням, довжиною відрізка. Вводиться одиниця довжини – сантиметр, пізніше – дециметр, розглядається поняття "відстань". Формуються уміння вимірювати довжини відрізків, будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки; розпізнавати многокутники.

У другому класі учні далі виконують вимірювання і побудову відрізків, розпізнають знайомі фігури. Вводяться нові фігури – ламана, многокутник. Вимірюється довжина ламаної і знаходиться периметр многокутника. Визначаються кути многокутника, прямий кут, вводяться прямокутник, квадрат, коло, центр кола. Учні вчаться будувати прямокутники і квадрати на папері у клітинку, коло – за допомогою циркуля.

У третьому класі розглядається буквене позначення геометричних фігур. Вперше вводиться поняття площі фігури як розміру частини площини, обмеженої фігурою. Учні вивчають одиниці площі: квадратний сантиметр, квадратний дециметр. Обчислюють площі фігур методом підрахунку. Формується уміння будувати прямокутник і квадрат за даними довжинами сторін (по клітинках зошита). Продовжується розв`язування вправ на знаходження периметра многокутника.

У четвертому класі учні далі вивчають міри площі (вводиться крім відомих вже квадратних сантиметрів і квадратного дециметра нова одиниця – квадратний метр), визначають площі прямокутників та інших фігур за допомогою палетки.

Найважливішим завданням курсу математики початкової школи, що стосуються пропедевтики систематичного курсу геометрії, є: ознайомлення учнів з основними величинами та їх вимірюванням (довжини відрізків, площі фігур); формування уявлень про деякі геометричні фігури та їх властивості; відпрацювання потрібних графічних умінь.

Вивчення у молодших класах геометричного матеріалу тісно пов’язане з арифметичним. Наприклад, ознайомлення з многокутником і його елементами пов’язується з лічбою: "Скільки сторін має цей многокутник? Скільки кутів? Який з даних двох многокутників має більше сторін? На скільки більше?".

Деякі геометричні фігури доцільно використовувати для наочного ілюстрування властивостей арифметичних дій. Наприклад, за допомогою поділеного на рівні квадрати прямокутника можна проілюструвати переставну властивість множення натуральних чисел, обчислення площі прямокутника можна пов’язати з розподільним законом множення відносно додавання.

Особливістю методики вивчення геометричного матеріалу в початковій школі є широке застосування конкретно-індуктивного методу, наочності і практичних дій учнів. На основі наочного ознайомлення з моделями та рисунками учні повинні навчитися вільно розпізнавати простіші геометричні фігури на оточуючих предметах, моделях, рисунках, оволодіти навичками побудови та вимірювання. На цьому етапі навчання не передбачено введення означень геометричних фігур, проведення дедуктивних міркувань, крім, можливо, найпростіших дедуктивних висновків.

На відміну від початкової школи в 5-6 класах теоретичний рівень викладу геометричного матеріалу вищий. Окремі поняття вводяться на основі означень (розгорнутий кут, паралельні прямі тощо), проводяться нескладні дедуктивні міркування. Разом з тим, як і в початковій школі, при вивченні елементів геометрії мають переважати конкретно-індуктивний метод навчання, широке застосування наочності, практичних дій учнів з моделями і виконання ними зображень фігур, побудов лінійкою, косинцем, циркулем.

У 5-ому класі учні ознайомлюються з новими геометричними фігурами: промінь (як фігура, утворена продовженням в один бік відрізка), пряма (як фігура, утворена продовженням відрізка в обидва боки), дістають уявлення про площину як образ реальних об`єктів (поверхня скла, спокійного водоймища тощо). Безпосередньою побудовою вводяться: поняття кута, його видів

(прямий, гострий, тупий), одиниця вимірювання кутів. Формується уміння вимірювати кути транспортиром і будувати кути даної величини. Учням уже відоме поняття площі, вони вміють обчислювати площі квадрата і прямокутника, однак на цьому етапі навчання вводяться формули площі прямокутника і квадрата, нові одиниці площі (гектар, квадратний кілометр). Учні вперше ознайомлюються з просторовою фігурою – прямокутним паралелепіпедом, з новою геометричною величиною – об`ємом, його одиницями, розв`язують вправи на обчислення об`єму прямокутного паралелепіпеда.

У 6-ому класі вводяться формули довжини кола і площі круга – відомих з початкової школи геометричних фігур. Вводяться: нова фігура – круговий сектор; нові геометричні тіла – призма, піраміда, конус.

Важливими для підготовки до вивчення систематичного курсу геометрії є відомості про перпендикулярні і паралельні прямі, про побудову їх лінійкою і косинцем. На рівні практичних дій учні ознайомлюються з фактами, які стверджуються в курсі геометрії аксіомою паралельних і теоремою про можливість проведення через дану точку єдиної прямої, паралельної даній.

На цьому етапі навчання поглиблюються і розширюються відомості про знайомі учням з початкової школи фігури, а також вводяться нові фігури і геометричні поняття. Зокрема, учні далі вивчають відрізки і їх вимірювання, але при цьому звертається увага на те, що відрізок коротше будь-якої іншої лінії, що з’єднує їх кінці, що довжина відрізка, який складається з кількох відрізків, дорівнює сумі довжин його частин.

Отже, всі теоретичні факти, що стосуються геометричних величин і формулюються в курсі геометрії у вигляді аксіом вимірювання, на цьому етапі засвоюються на рівні наочно-дійового мислення.

3. 2. Методика проведення перших уроків геометрії.

3.2.1. Вступні зауваження.

Матеріал, що вивчається на перших уроках геометрії, відповідає 1 параграфу підручника авторського колективу: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір "Геометрія - 7" (2020 р.) [23], авторського колективу: А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський "Геометрія - 7" (2018 р.) [14] і включає первісні поняття геометрії, найпростіші геометричні фігури: відрізок, промінь, кут, трикутник, перпендикулярні прямі, паралельні прямі, вводяться поняття аксіоми, теореми, формулюються (в явному та неявному вигляді) всі аксіоми, що покладено в основу курсу.

Основна мета перших уроків геометрії :

1) дати поняття про геометрію як науку;

2) систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури;

3) ввести первісні поняття;

4) вмотивувати необхідність означення деяких відомих їм фігур (відрізок, промінь, кут, перпендикулярні та паралельні прямі);

5) розглянути первісні та означувані відношення;

6) сформулювати основні властивості найпростіших фігур, які названі аксіомами.

На перших уроках також вводяться поняття аксіоми, теореми та їх доведення. В учнів формується потреба в доведенні нових тверджень за допомогою аксіом і вже відомих тверджень. Важливим завданням перших уроків є формування геометричного мовлення на основі вже відомої і нової для учнів термінології.

Необхідно також на перш уроках ознайомити учнів з навчальними посібниками, повідомити, які потрібні зошити і креслярські приладдя.

На перших уроках не ставиться за мету пояснювати роль і походження первісних понять, говорити про аксіоматичну побудову геометрії. Це можна свідомо обговорювати лише наприкінці вивчення планіметрії або на початку вивчення стереометрії. Однак дещо в загальних рисах учням можна пояснити, що і роблять автори підручників, при цьому наголошуючи, що не слід домагатися повного розуміння ідеї дедуктивної побудови геометрії від усіх учнів. Цю ідею вчитель повинен систематично проводити з перших уроків шляхом формування потреби доводити нові геометричні твердження на основі означень вже відомих понять, аксіом і доведених тверджень.

Загалом, автори підручників вважають, що в межах загальноосвітньої школи з тією кількістю годин, які відводяться на вивчення цієї дисципліни реалізувати формально-логічний принцип побудови курсу геометрії неможливо. В основу даних підручників покладено наочно-дедуктивний принцип у поєднанні з частковою аксіоматизацією.

Отже, зміст перших уроків геометрії здебільшого описовий: учитель не стільки креслить, обчислює, записує на дошці, скільки пояснює усно, формулює і аналізує різні означення, властивості тощо. А така інформація, як відомо, гірше сприймається і запам’ятовується учнями, оскільки має більш високий рівень абстракції. Тому треба переходити від рівня D до рівня 2B (а саме цей рівень і прийнято в діючих підручниках) поступово, спочатку систематизуючи матеріал попередніх класів, чому автори підручників приділяють значну увагу у вступі.

Треба урахувати, що існують значні об`єктивні труднощі, з якими зустрічаються учні при вивченні цієї теми:

1) психічні особливості учнів даного віку;
2) виділення геометрії в особливу дисципліну;
3) значне підвищення рівня логічної строгості вивчення матеріалу;
4) багато нових понять, термінів (більш 30);
5) підвищення рівня абстрактності матеріалу;
6) недостатня сформованість геометричних уявлень;
7) недостатня логічна підготовка учнів.

Для успішного виконання задач, які поставлені у цій темі, необхідно дотримуватись певних методичних принципів, таких як:

1. Розгляд усіх основних властивостей геометричних фігур необхідно проводити на наочній основі, в опорі на очевидні для учнів факти та ті, які знайомі їм з попереднього навчання.

Пояснюючи учням матеріал навчального посібника, вчитель не повинен намагатися точно повторити сказане в ньому. Треба розповідати матеріал своїми словами. Наприклад, бажано освіжити в пам`яті учнів те, що вони знають з попередніх класів про геометричні фігури, намалювати їх, назвати. Вчителю треба привести це у систему, узагальнити, уточнити назви, доповнити іншими геометричними фігурами.

Необхідно згадати, де учні вже зустрічались з словом "фігура", підкреслити, що в геометрії будемо розглядати тільки геометричні фігури, і кожну геометричну фігуру можна уявити складеною із точок. І одна точка, і вся площина – теж геометричні фігури. Об`єднання геометричних фігур, і будь-яка частина геометричної фігури – також геометрична фігура.

2. Велику роль у вивченні основних властивостей геометричних фігур відіграють вправи. Притому, більша їх частина повинна розв`язуватись усно для того, щоб учні придбали звички усної мови, оволоділи відповідними термінами. Значна частина вправ повинна носити конструктивний характер.

3. При розв`язуванні більшості завдань треба добиватися того, щоб учні спочатку знайшли наочно-індуктивне обґрунтування, а лише після цього намагалися дати обґрунтування, посилаючись на аксіоми, означення і раніше доведені теореми.

Задача. Точки A, B, C належать прямій a, причому B, C, D лежать на одній прямій. Чи належать усі чотири точки одній прямій?

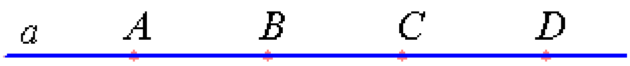


Рис. 19

Виконуємо рисунок 19. Рисунок наочно показує, що належать. А тепер спробуй довести строго.

4. При розв`язуванні задач поступово формувати в учнів потребу доведення. При цьому треба пам`ятати, що учні тільки починають вчитися доводити, в силу цього доведення не повинні бути багато етапні, вони повинні складатися з одного-двох логічних кроків. Навчання доведенням на цьому етапі проводиться за допомогою багаторазового обіг рання однієї ж самої геометричної ситуації.

5. Значну роль в навчанні учнів геометрії на першому етапі повинні відіграти всілякі різноманітні опори (схеми, таблиці, моделі, завдання з пропусками).

Наведемо приклади задач, які повинні розв`язувати учні після вивчення даної теми (відповідно до навчальної програми).

Задача. Точки A, B, C належать прямій a, BC = 15 см, AC менше за AB на 3 см. Знайти AC і AB.

Розв`язання:

При розв`язуванні цієї задачі треба обов`язково розглядати випадки розташування точок на прямій а. Можуть бути три випадки: 1) В лежить між точками А і С (рис. 20); 2) А лежить між точками В і С (рис. 21); 3) С лежить між точками А і В (рис. 22). Учні можуть здогадатися як розташовані точки на прямій а. Таку відповідь не приймайте, бо все треба довести, спираючись на аксіоми.

Треба мати на увазі, якщо в задачі між елементами вказані співвідношення "на більше". "на менше", "у більше", "у менше", то задача розв`язується алгебраїчним методом за допомогою рівняння

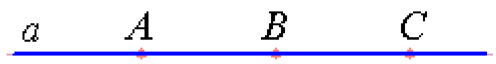


Рис. 20

1) З аксіоми про вимірювання відрізка АС = АВ + ВС. Позначимо АС через х см, Тоді АВ = х+3 см. Маємо рівняння х = (х + 3) +15. Це рівняння розв`язків не має.

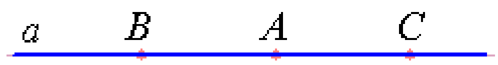


Рис. 21

2) З аксіоми про вимірювання відрізка ВС = ВА + АС. Позначимо АС через х см, Тоді АВ = х+3 см. Маємо рівняння 15 = (х + 3) + х. Звідки х=6. АС = 6 см, АВ = 9 см.

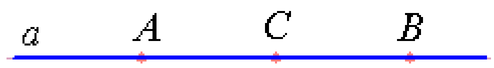


Рис. 22

3) З аксіоми про вимірювання відрізка АВ = АС + СВ. Позначимо АС через х см, Тоді АВ = х+3 см. Маємо рівняння (х + 3) = х + 15. Це рівняння розв`язків не має.

При розв`язуванні цієї задачі позитивна оцінка ставиться, якщо є три випадки розташування точок на прямій, малюнки і рівняння.

Задача. Промінь *С* проходить між сторонами кута *АОВ* (рис. 23). Знайти кут *ВОС*, якщо кут *АОС* = 34^0 , кут *АОВ* = 75^0 .

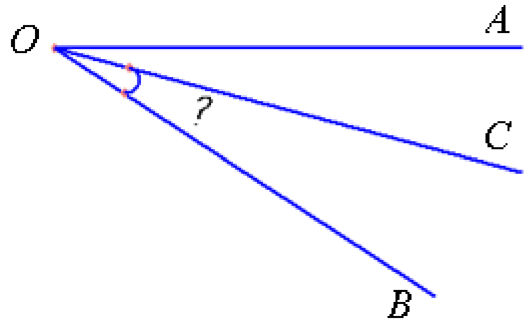


Рис. 23

Розв`язання:

З аксіоми про вимірювання кута $\angle AOB = \angle BOC + \angle AOC$, маємо рівняння:

$75^0 = \angle BOC + 34^0$.

Звідки $\angle BOC = 75^0 - 34^0 = 41^0$.

Оцінка буде позитивною, якщо буде посилання на відповідну аксіому.

Загалом, автори діючих підручників вважають, що мета вивчення геометрії в школі – навчити учнів застосовувати властивості геометричних фігур у процесі розв'язання практичних і теоретичних задач.

3.2.2. Методика вивчення понять даної теми.

При формуванні понять треба пам'ятати, що багато із знайомих учням понять вивчаються на новому рівні, у системі понять. Задача вчителя – систематизувати та поглибити знання учнів. У діючих підручниках є три класи понять: 1) первісні (неозначувані), які не означуються (точка, пряма, належить, лежить між, градусна міра кута, довжина відрізка); 2) ті, що вводяться описово, без строгого означення, на прикладах (геометрична фігура, аксіома, дати означення чому-небудь та ін.); 3) поняття, які означуються за допомогою первісних понять або означених раніше. Означення понять найчастіше сформульовані конструктивно, тобто в означенні вказується спосіб утворення фігури або через найближчий рід та видову відмінність. Як правило, означення подаються в пояснювальному тексті з виділення курсивом.

Методика вивчення понять кожного класу суттєво різна. Загальним буде тільки те, що оволодіння цими поняттями проходить у процесі розв`язування вправ.

Щодо неозначуваних понять планіметрії "точка", "пряма", то уявлення про них учні отримують ще в попередніх класах. Однак хоч уявлення про точку походить від об’єктів, що існують реально (місце дотику олівця до паперу, місце перетину двох ліній тощо), варто підкреслити, що в геометрії точка не має розмірів. Аналогічно, уявлення про пряму учні отримують з туго натягнутої нитки, однак, відзначаємо, пряма не має товщини, кінців і вважається необмежено продовженою.

При формуванні поняття "належить" для точок і прямих на площині треба звернути увагу на можливість вживання тотожної термінології: "точки А і С належать прямій *а*", "точки А і С лежать на прямій *а*", "пряма *а* проходить через точки А і С".

При формуванні поняття "лежить між" треба відзначити, ще цей термін вживається тільки стосовно трьох точок, які лежать на одній прямій. Корисно розв'язувати усні вправи на підведення під первісні відношення, використовуючи різні відомі учням фігури.

Приклад введення поняття 1 класу:

Вводимо поняття "точка лежить між двома іншими". Викликаємо декілька учнів до дошки і шикуємо їх у шеренгу. Просимо дітей описати положення одного учня стосовно інших. Потім розглядаємо рисунки (Рис. 24).

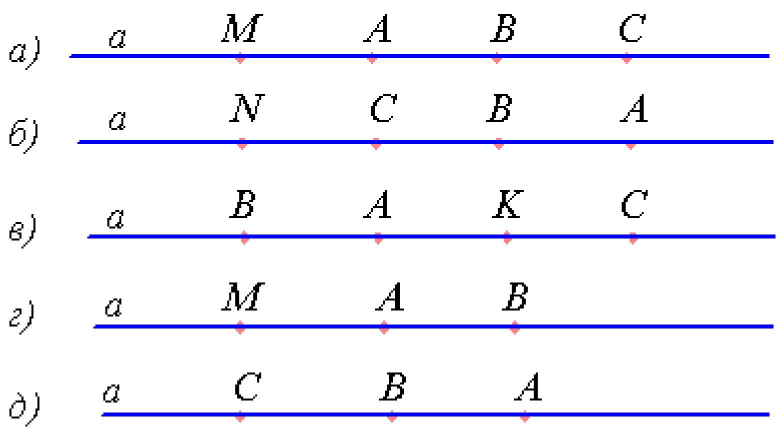


Рис. 24

Вчитель: Діти, опишіть положення точки *B* на кожному рисунку.

Учень: У випадках а), б), д) точка *B* лежить між точками *A* і *C* (із життєвого досвіту).

Вчитель: Зверніть увагу, що точки *A*, *B*, *C* належать прямій *a*. Кажуть, що точка *B* розділяє точки *A* і *C*. Ще кажуть, що точки *B* і *C* лежать по один бік від точки *A*, чи що точки *A* і *B* лежать по один бік від точки *C*.

Потім учні розв`язують вправи.

Вправа №1. Намалюйте пряму *b* вертикально. Намалюйте точки К, Н, М на прямій *b* так, щоб точка Н лежала між точками К і М.

Вправа №2. Намалюйте горизонтальну пряму *с* на ній точки Е, Д, Н так, щоб точки Д і Н лежали по один бік від точки Е.

Корисно розв`язати усні вправи на підведення під поняття "лежить між", використовуючи різні відомі учням фігури

Система запитань може бути такою.

1) Чи лежить точка Р між точками M i N (рис. 25, б) ?

2) Які точки на рис. 25, а і 25, б лежать між двома іншими?

3) Чи лежить точка F між точками L, E (рис. 25, в)? Укажіть на цьому рисунку точки, які лежать між двома іншими.

4) Яка точка лежить між двома іншими на рис. 25, г; які точки не мають цієї властивості?

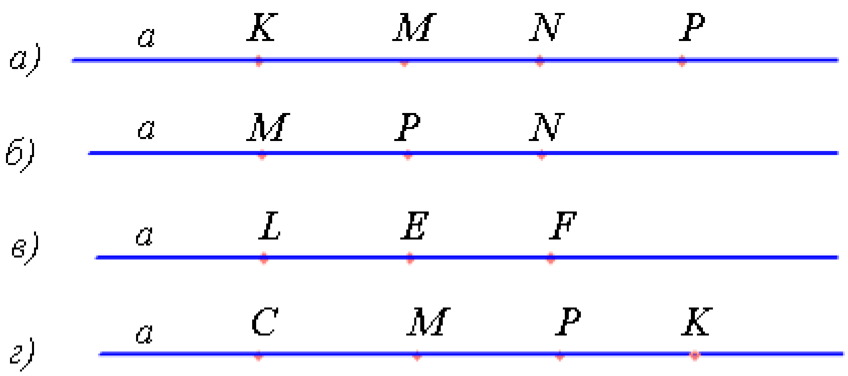


Рис. 25

Приклад введення поняття 2 класу:

Вводимо поняття "відрізок". Проводимо з учнями невеличку бесіду: "Зобразимо пряму *а* , яка проходить через дві точки M i N (рис. 26). Ці точки обмежують частину прямої *а*, яку виділимо червоним кольором. Таку частину прямої з точками M i N називають відрізком, а точки M i N – кінцями цього відрізка".

Рис. 26

Означення. Відрізком називається частина прямої, що складається з двох даних точок цієї прямої (кінців відрізка) й усіх точок, що лежать між ними.

Для будь – яких двох точок К і Р існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями, тобто відрізок своїми кінцями задається однозначно. Тому відрізок на рисунку позначають КР (рис. 27) або РК .

Рис. 27

На перших уроках геометрії вводиться багато означуваних понять. Переважна більшість цих понять відома учням з попередніх класів, але тепер ставиться завдання сформулювати їх означення. Щодо терміна "означення", то на відміну від термінів "аксіома". "теорема", його в підручниках не пояснюють. З курсу логіки відомо, що означення – це твердження, в якому перелічуються суттєві властивості поняття. На початку вивчення курсу геометрії з дидактичних міркувань давати таке тлумачення терміна "означення" учням недоцільно. Тому досить обмежитись роз`ясненням на прикладах поняття "означити що-небудь".

Означувані поняття на перших уроках геометрії можна вводити і конкретно-індуктивним (наприклад суміжних кутів, перпендикулярних прямих) і абстрактно-дедуктивним ("рівні відрізки", "перпендикулярні відрізки") методами.

Приклад введення поняття 3 класу:

Вводимо поняття "середина відрізка".

Вчитель: Діти, намалюйте пряму *a* і дві точки А і В на ній так, щоб відстань між точками А і В була, наприклад 10 см. Потім відміримо відстань 5 см від точки А і поставимо точку С. Яка буде відстань від точки С до точки В?

Учень: 5 см.

Вчитель: Якщо відстань АС = СВ, то точка С називається серединою відрізка. Де повинна розташовуватися точка С щоб бути серединою відрізка?

Учень: на відрізку АВ.

Вчитель: Яка ще умова повинна виконуватись, щоб точка С була серединою відрізка?

Учень: Відстані між точками А і С, точками С і В повинні бути рівними.

Вчитель: Отже, зверніть увагу на те, щоб точка була серединою відрізка треба щоб вона належала відрізку і ділила відстань між його кінцями навпіл.

Означення. Серединою відрізка АВ називають таку його точку С, що АС = СВ.

Вчитель: На даних рисунках (рис. 28) знайдіть середину відрізків.

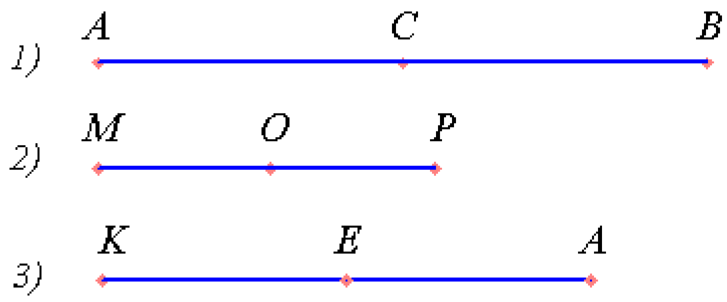


Рис. 28

Учень бере лінійку і перевіряє по двом ознакам на якому рисунку буде середина відрізку. Свою роботу учень супроводжує поясненням в гучній мові.

Вчитель: Тепер намалюйте два відрізка СК і РВ. На кожному відрізку знайдіть його середину.

Вправа №1. Намалюйте відрізок РК = 6 см. Позначимо дві точки А і В, які належать цьому відрізку, такі, що РА = 2 см, АВ = 2 см. Чи є на цьому малюнку середини відрізків?

Щодо поняття "геометрична фігура", то в діючих підручниках цей термін не обговорюється; автори вважають його інтуїтивно зрозумілим учням. Застосовуючи моделі фігур, варто підкреслити, що трикутники, многокутники, коло, круг можуть розміщуватися в одній площині всіма своїми точками, на відміну від паралелепіпеда, кулі, циліндра, що називаються тілами. Після цього природно ввести поняття планіметрії як розділу геометрії, що вивчає фігури на площині.

Отже, на перших уроках геометрії згадується і така фігура, як площина (в поясненні терміна "планіметрія"), хоча вони не є об’єктом вивчення в планіметрії.

3.2.3. Методика вивчення аксіом.

Слід мати на увазі, що з аксіомами планіметрії на оперативному, практичному рівні учні фактично знайомляться при вивчення математики в 1-6 класах. Однак на тому етапі навчання ці властивості найпростіших фігур аксіомами не називалися.

В деяких діючих підручниках термін "аксіома" з`являється на початку першого параграфа (наприклад, у підручнику [3]), а в деяких в кінці параграфа (наприклад, у підручнику [2]. На початку опису матеріалу аксіоми називають "основними властивостями найпростіших геометричних фігур".

Наприклад, термін "аксіома" не вводиться одразу за підручником [2], а з'являється лише в пункті 6, який має назву "Аксіоми". Даний підручник передбачає введення 11 аксіом, 6 в явному вигляді та 5 в неявному:

В неявному вигляді (не сказано, що це основні властивості фігур):

1. Якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
2. Для будь-яких точок А і В існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями.
3. Кожний відрізок має певну довжину.
4. Кожний кут має певну величину.
5. Будь-яка пряма ділить площину на дві півплощини, для яких ця пряма є *межею.*

В явному вигляді (зазначено, що це основні властивості фігур).

6. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і д того ж тільки одну.
7. Якщо точка С є внутрішньою точкою відрізка АВ, то відрізок АВ дорівнює сумі відрізків АС і СВ, тобто АВ=АС+СВ. Якщо точка С не належить відрізку АВ, то АВ<АС+СВ ("сума відрізків" = "сума довжин відрізків").
8. Якщо промінь ОС ділить кут АОВ на два кути АОС і СОВ, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.
9. Для даного кута АВС і даного променя B_1C_1 існує єдиний кут $A_1B_1C_1$, який дорівнює куту АВС, такий, що точка C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої B_1C_1.

В § 2 даного підручника міститься також основна властивість рівності трикутників (в підручнику О.В.Погорєлова аналогічна властивість мала назву "аксіома існування трикутника, рівного даного"), проте автори її аксіомою не називають, хоча на той час термін "аксіома" вже введено.

Тільки в п. 13 з'являється основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Спочатку розглядається задача на побудову прямої, паралельної даній, через точку, що не належить даній прямій – у такий спосіб доводиться факт існування прямої, паралельної даній.

В тексті підручника [2] також зустрічаються формулювання, які в підручнику О.В.Погорєлова було прийнято за аксіоми, наприклад: будь-яка пряма ділить площину на дві півплощини, для яких ця пряма є *межею*. Правда, О.В.Погорєлов не вводив поняття "межі півплощини".

В основу курсу підручника [3] покладено 7 аксіом. У порівнянні з підручником [2], в якому прийнято 5 аксіом, тут додано аксіому про взаємне розташування трьох точок на одній прямій, аксіоми відкладання відрізків і кутів, аксіому паралельних. В цьому смислі аксіоматика даного підручника нагадує систему аксіом в підручнику О.В. Погорєлова.

В основу курсу покладено 7 аксіом.

Аксіома проведення прямої. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Аксіома розміщення точок на прямій. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Аксіома вимірювання відрізків. Кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом у заданих одиницях вимірювання. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які відрізок ділиться будь-якою його точкою.

Аксіома відкладання відрізків. На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

Аксіома вимірювання кутів. Кожний кут має градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Якщо промінь ділить даний кут на два кути, то градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір двох отриманих кутів.

Аксіома відкладання кутів. Від будь-якого променя даної прямої можна відкласти в заданий бік від прямої кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

Аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда). Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній.

Головне, за яким би підручником не велося навчання, основні властивості найпростіших геометричних фігур (аксіоми) повинні бути сформульовані і виділені. Учню не треба вникати які з них явні або неявні. Він повинен знати їх, так як на цих основних властивостях будується планіметрія.

Вивчення основних властивостей найпростіших фігур і формулювання кожної властивості доцільно починати з розгляду відповідних фігур і практичних дій учнів: вибір точок на прямій і поза нею, проведення прямої через дві даної точки, вимірювання довжини відрізка і величини кута.

Помічені властивості учні можуть сформулювати самостійно у вигляді тверджень, які пізніше будуть називатися аксіомами.

При вивченні аксіом треба дотримуватись такої схеми:

1) підводять учнів до відповідної аксіоми за допомогою приклада з навколишнього життя; за допомогою моделі або побудування. Наприклад, аксіома 1: через дві точки можна провести пряму, і тільки одну. Розглядаємо приклад доріжки від дома до школи – пряма тільки одна.

2) формулюємо аксіому;

3) ілюструємо її рисунком;

4) коротко записуємо (якщо можна);

5) розглядаємо вправи, де ця аксіома використовується.

Наприклад, для аксіоми 1 вправа така: скільки можна побудувати прямих, щоб на кожній з них лежало не менш двох з даних трьох точок? Друга вправа: точки А, В, С лежать на одній прямій. Точки В, С, Д лежать на одній прямій. Чи лежать усі точки на одній прямій?

Щодо введення поняття аксіоми, як твердження про властивості найпростіших фігур, яке домовились прийняти без доведення, то на перших уроках планіметрії цими відомостями про аксіоми можна обмежитись.

У 10 класі на першому уроці стереометрії можна дещо розширити інформацію про аксіоми. Варто підкреслити, що ці твердження домовились прийняти без доведення. Залежно від особливостей вибору первісних понять і побудови курсу геометрії за аксіому можна вибрати інше твердження, яке в іншому курсі доводиться.

3.2.4. Методика вивчення перших доведень.

В умовах роботи за підручником [2] поняття про теорему вводиться в першому ж пункті, крім того, вводиться і перша теорема з доведенням. Автори обґрунтовують доцільність такого рішення тим, що:

1) дітям відразу стає зрозумілим, що від них будуть вимагати доказових міркувань;

2) це дозволяє відразу продемонструвати застосування першої аксіоми (основної властивості);

3) це дозволяє скоріше вводити задачі на доведення.

Терміни "теорема" і "доведення" вводимо під час бесіди з учнями. При розгляданні раніше основних властивостей ми не ставили запитання "Чому?" і сприймали їх на віру. Давайте спробуємо показати правдивість якогось твердження. Справедливість того чи іншого твердження встановлюється за допомогою міркування. Це міркування називається доведенням. А саме твердження, яке доводиться, називається теоремою.

Перша теорема: Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Така теорема має категоричну форму, проте можна пояснити структуру теореми (умова і висновок) також треба пояснити на прикладі формулювання цієї теореми, бо іншого зразка учні ще не мають. Можна також показати учням зразок скороченого запису умови і висновку теореми, проілюструвати рисунком. Треба привчати учнів до культури записів на дошці і в зошиті: рекомендувати рисунок розміщувати зліва, а скорочений запис змісту теореми (задачі) – справа. Хоча у підручнику [2] не використовується символіка теорії множин, учитель може ввести символи і для точок.

Перша теорема доводиться методом від супротивного, що показує його над важливість в курсі геометрії, тому необхідно учням пояснити ідею метода. Пізніше треба дати навчальний алгоритм і орієнтир доцільності використання метода від супротивного: порівнюючи обидва доведення, учні помічають їх суттєві однакові кроки і за допомогою вчителя можуть сформулювати алгоритм застосування цього методу; орієнтир можливості застосування методу від супротивного: неможливість чого-небудь і єдність чого-небудь в математиці завжди доводиться методом від супротивного, також цим методом іноді користуються при доведенні паралельності, перпендикулярності, обернених тверджень.

Щоб довести твердження методом від супротивного треба: 1) припустити супротивне тому, що треба довести; 2) користуючись припущенням, відомими аксіомами і доведеними раніше твердженнями, шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить або умові твердження. Яке доводиться, або відомій аксіомі, або доведеному раніше твердженню, або припущенню; 3) зробити висновок, що припущення неправильне, а правильне те, що треба довести.

Також в першому параграфі будуть доведені ще три теореми: про суміжні, вертикальні кути та існування та єдність прямої, перпендикулярної даної в кожній її точці.

На перших уроках геометрії доцільним є такий варіант опрацювання доведення: воно пояснюється, закріплюється повторним поясненням чи відтворенням одним з учнів, тільки після цього, якщо вчитель вважає за потрібне, діти записують скорочений запис доведення у відведений для цього час.

Не слід ставити негативні оцінки учням за нездатність цілком відтворити доведення відразу після його вивчення або на наступному уроці. На рівні обов’язкових результатів навчання можна вимагати вміння сформулювати теорему, виконати рисунок, висловити ідею доведення, назвати загальний хід і твердження, що використовувалися при доведенні.

Цікаво, що п. 12 підручника йде під назвою "теореми", і до цього пункту надано систему задач (розглянемо деякі з них на практ. заняттях).

Наприклад:

271.° Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного: 1) якщо трикутник рівносторонній, то його кути рівні; 2) якщо два кути вертикальні, то їхні бісектриси є доповняльними променями; 3) якщо кут між бісектрисами двох кутів прямий, то ці кути суміжні; 4) якщо сторона та протилежний їй кут одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та протилежному їй куту другого трикутника, то ці трикутники рівні. Для яких із даних тверджень: 1) пряме й обернене твердження є правильними; 2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним; 3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

У підручнику [3] немає параграфа, присвяченого поясненню поняття "теорема". При розгляді паралельних прямих (пункт 4.2) коротко пояснюється, що таке теорема і доводиться ознака паралельності прямих.

У підручнику [12] в § 4 відразу пояснюється значення понять "аксіома", "теорема", "означення".

При введенні поняття оберненої теореми доцільно запропонувати учням сформулювати твердження, обернені до відомих з курсу математики 5-6 класів, і з’ясувати, чи вірні вони (наприклад, твердження, обернене до ознаки подільності числа на 9: Якщо число ділиться на 9, то сума його цифр ділиться на 9 – істинне висловлення).

Як бачимо від авторів підручників залежить місце розташування, пояснення понять "аксіома", "теорема". Але методика роботи з цими поняттями не змінюється. При роботі з теоремою вчителю необхідно згадати методику роботи з нею (загальна методика), працювати за вказаним там планом.

Треба відмітити підручник [3] щодо розміщення в ньому пунктів, присвячених методам розумових дій. Перша розумова дія, що розглядається в цьому підручнику - аналогія (пункт 3.4). У доступній формі, на прикладі двох конкретних задач в підручнику пояснюється суть аналогії. Решта видів розумових дій описуються протягом усього підручника. Методи розумової діяльності допомагають учням вирішувати завдання, вести доведення тверджень, тобто осягати математику і її методи.

3.2.5. Особливості системи вправ.

Перші уроки геометрії (за підручником [2]) включають у себе всі типи задач: на доведення (№№ 126, 127), обчислення (№№ 125, 128), побудову (№№ 129, 130) і дослідження (№16 – 18, із *).

Система задач, які розв'язуються на перших уроках геометрії, спрямована насамперед на:

- засвоєння основних властивостей найпростіших фігур;
- формування вмінь посилатися на аксіоми, теореми й означення при доведенні нових тверджень;
- засвоєння геометричної мови.

У цій системі задач значне місце треба відвести задачам на *практичні дії учнів* щодо проведення прямих, вибір точок, які задовольняють певні вимоги, поясненню мовою геометрії помічених на рисунку властивостей точок, прямих, відрізків, кутів. Задачі, що пов'язані з визначенням довжини відрізків, градусної міри кутів, розвивають в учнів окомір, практичні навички вимірювання і побудови відрізків і кутів заданої величини.

Задачі на побудову бажано виконувати і за допомогою креслярських інструментів, і на "око" (№25).

Треба варіювати способи розміщення прямих: треба, щоб учні зображували їх не тільки горизонтально, а й вертикально і похило.

При розв'язуванні задач на обчислення і доведення слід вимагати, щоб учні наводили і коротко записували необхідні пояснення.

Задачі на дослідження на перших уроках геометрії доцільно розв'язувати усно (з ілюстрацією на рис.).

Інтерес представляють задачі, де необхідно встановити, чи правильні твердження (№ 99).

№99. Чи є правильним твердження: 1) для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут; 2) для кожного кута, відмінного від розгорнутого, можна побудувати тільки один суміжний кут; 3) якщо кути рівні, то вони вертикальні; 4) якщо кути не рівні, то вони не вертикальні; 5) якщо кути не вертикальні, то вони не рівні; 6) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий; 7) якщо два кути суміжні, то один із них більший за другий; 8) якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони суміжні; 9) якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то вони не суміжні; 10) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні; 11) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі; 12) якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні; 13) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?

Після кожного пункту автори пропонують рубрику: "Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте".

Система задач має диференційований характер і допомагає здійснювати індивідуальний підхід.

Щодо задачного матеріалу, то в підручнику [3] окремо до кожного параграфу виділено усні вправи, графічні вправи і письмові вправи, які поділено на три рівні складності, що забезпечує індивідуальний і диференційований підхід.

Після глави 1 надано підсумки, що забезпечують систематизацію і узагальнення матеріалу [3, с. 53].

Надано можливість онлайн підготовки до контрольної роботи, також даються тренувальні вправи до підготовки [3, с. 52].

3. 3. Аналіз шкільних підручників з геометрії.

Всі ми знаємо, що шкільні підручники з геометрії належать до одних із засобів навчання математики.

Обов'язковими вимогами до наукової системи підручника є математична коректність викладу теоретичного матеріалу, доцільність вибору наукової схеми викладу, відповідність трактовки понять, термінології та символіки традиціям, прийнятим у математичній науці і школі.

Дидактичні вимоги потребують забезпечення доступності, наочності, систематичності, стислості викладу матеріалу, наявності засобів мотивації учіння, розвитку мислення, пізнавальної активності й цікавості до предмета, диференціації навчання, спрямованості на формування загальнонавчальних умінь.

Вимоги до методичного апарату підручника пов'язані із забезпеченням належного розвитку змістових ліній, методичної доцільності викладу теоретичного матеріалу, системи вправ і задач, рівня реалізації внутрішньопредметних і міжпредметних зв'язків, наявності можливостей для контролю та самоконтролю, застосування технічних засобів навчання і комп'ютерної підтримки, прикладної, практичної спрямованості, наявності умов для організації самостійної роботи учнів на уроці та в позаурочний час [6, с.126].

Рекомендуються такі методи і форми роботи з підручником на уроці:

1. Читання тексту підручника після пояснення вчителя;
2. Розгляд прикладів підручника після пояснення їх учителем з метою закріплення, наведення власних прикладів;
3. Читання вголос учителем тексту підручника з метою навчання учнів виокремленню головного в тексті, розбиття його на змістовні частини, складання плану;
4. Читання тексту учнями, виокремлення в ньому головного і змістовних частин;
5. Самостійне читання тексту учнями, складання плану і відповідь на запитання вчителя або підручника [27, с.119].

У шкільному курсі до 60-х років XX ст. в основу логічної побудови підручників геометрії було покладено аксіоматику Евкліда. У період світового руху за модернізацію шкільного курсу висловлювалися думки відмовитися від системи Евкліда і будувати шкільний курс тільки на основі сучасної і досконалої аксіоматики. Наприклад, пропонувалося побудувати шкільний курс геометрії (ШКГ) на основі аксіоматики векторного простору (аксіоми Вейля), в основу покласти геометричні перетворення, аксіоми метричного простору. Створювалися пробні підручники, наприклад, підручник планіметрії А. М. Колмогорова, в основу якого було покладено аксіоматику, запропоновану А. М. Колмогоровим. Однак, посібник зазнав гострої критики через його занадто високий теоретичний рівень, заформалізованість термінологією і символікою множин, недосконаліст системи задач.

З 1982 – 1983 навчальних років всі школи України почали працювати за навчальним посібником О. В. Погорєлова, яким користувалися в загальноосвітніх класах фактично до 2000 – х років.

Наразі розроблено нові підручники з геометрії для 7-9 кл., рекомендованими МОН України, серед яких на 2022-23 н.р. запропоновано підручники таких авторів і авторських колективів:

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г.;
2. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.;
3. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О.Ф.;
4. Істер О. С.;
5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С..

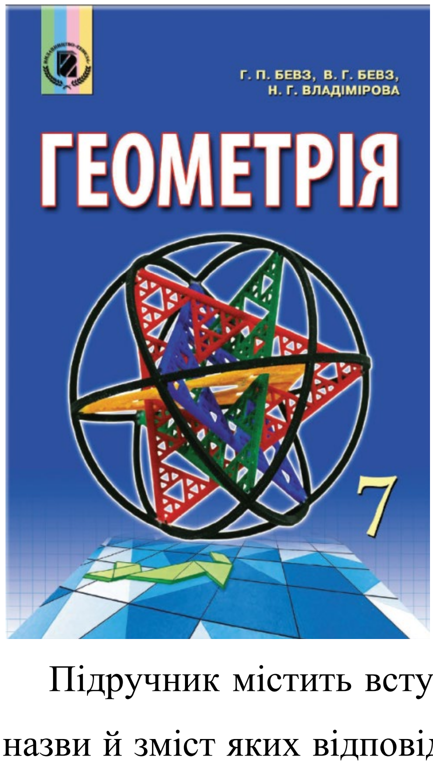
Далі в тексті підручники згадуються за даною нумерацією.

Посилання на рекомендовані підручники:

https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/

https://docs.google.com/spreadsheets/d/16NyRYEKgeQ4T5BE68La-s2gn0q2MPyIWSWx-Vdw-zmA/edit?ts=5a364195#gid=883367929

Проаналізуємо підручники з геометрії для 7 класу за вище викладеною нумерацією.



Бевз Г. П.

Геометрія: Підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Київ : Генеза, 2015. – 192 с.

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник містить вступне слово до учнів; складається з чотирьох розділів, назви й зміст яких відповідають програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. Чотири розділи містять 23 параграфи.

У кожному параграфі підручника є теорія й задачі. Читаючи теорію, потрібно основну увагу звертати на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. Курсивом виділено геометричні терміни , назви понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити відповідні приклади. Жирним шрифтом надруковано важливі геометричні твердження. Їх треба розуміти, уміти доводити і застосовувати для розв'язання задач. Закінчення доведення теореми позначено значком .

У кожному параграфі підручника виокремлено рубрику "Для допитливих". Вона містить додатковий навчальний і пізнавальний матеріал та допомагає учням зацікавитися геометрією. В основному тексті підручника такий матеріал виділено ⋆ .

Щоб перевірити, як учні зрозуміли і запам'ятали новий теоретичний матеріал, вони повинні спробувати відповісти на запитання і виконати завдання рубрики "Запитання і завдання для самоконтролю", яка є в кожному параграфі й повторюється після розділів.

Щоб опанувати курс геометрії , треба навчитися розв'язувати задачі. У деяких задачах жирним шрифтом виділено важливі твердження, їх потрібно запам'ятати. З різними способами розв'язування задач ознайомить рубрика "Виконаємо разом". Автори радять розглянути задачі цієї рубрики, перш ніж виконувати домашнє завдання. Номери завдань, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором.

Добре підготуватися до тематичного оцінювання учні зможуть розв'язуючи завдання рубрик "Самостійна робота", "Тестові завдання" і "Типові задачі для контрольної роботи".

Наприкінці підручника вміщено рубрики "Задачі підвищеної складності" та "Завдання для позакласної роботи". Автори підручника пропонують їх тим учням, які люблять математику.

Підручник містить 878 задач, 277 малюнків, 192 сторінки.

М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова

Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Київ : Видавничий дім "Освіта", 2015. – 208 с.

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник містить вступне слово до учнів; складається з чотирьох розділів, назви й зміст яких відповідають чинній програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. Чотири розділи містять 21 параграф.

У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Автори радять вивчаючи теорію, особливу увагу звертати на текст, обведений рамкою.
Це найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано жирним шрифтом. Курсивом виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики "Пригадайте головне", які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити , як засвоєно тему. Є поради до розв'язування задач із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ($^{/}$). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (^{0}) позначають задачі середнього рівня складності. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня. Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом (опорні задачі), потрібно запам'ятати їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше", учні можуть поглибити свої знання.

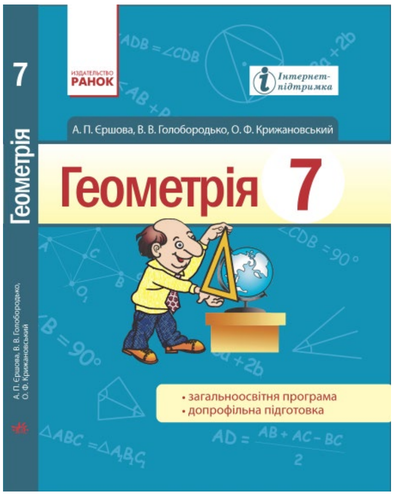
У підручнику використовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допомагають учням краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

 Прочитайте;  Як записати;

 Поміркуйте;  Як діяти;

 Запам'ятайте;  Типова задача.

Підручник містить 778 задач, 412 малюнків, 208 сторінок.



Єршова А. П.

Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Х. : Вид-во “Ранок” ,2015. – 224 с. : іл.

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Підручник відповідає чинній програмі з математики та містить достатню кількість диференційованих задач і вправ.

Підручник має три розділи, кожний із яких складається з параграфів (всього 23 параграфи), а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв’язування задач. Найважливіші поняття й факти в підручнику виділено.

Вправи та задачі, подані в підручнику, поділяються на декілька груп.

Усні вправи допомагають учням зрозуміти, наскільки успішно вони засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов’язково розв’язувати подумки — учні можуть виконати необхідні рисунки, обчислення, записати хід міркувань у чернетці. Після усних вправ можна переходити до ***графічних вправ***, що виконуються в зошиті або на комп’ютері. Далі йдуть ***письмові вправи***. Є можливість перевірити свої знання, виконуючи задачі ***рівня А***. Більш складними є задачі ***рівня Б***. І нарешті, якщо учні добре опанували матеріал і бажають виявити свої творчі здібності, на них чекають задачі ***рівня В***.

Після кожного параграфа в рубриці ***«Повторення»*** зазначено, які саме поняття й факти слід згадати для успішного вивчення подальшого матеріалу, і наведено задачі для повторення, що підготують дітей до сприйняття наступної теми. Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких позначено значком . Розв’язувати всі задачі кожного рівня не обов’язково.

Наприкінці кожного розділу подано ***контрольні запитання*** й ***типові задачі для контрольних робіт***, завдяки яким учні зможуть краще підготуватися до тематичного оцінювання. Пройшовши онлайн-тестування на сайті **interactive. ranok.com.ua**, кожен учень зможе самостійно перевірити рівень своїх знань. ***Додаткові задачі*** до розділів відкриють нові грані геометрії, допоможуть узагальнити вивчений матеріал і відчути красу нестандартного мислення. Розширити знання за кожним розділом можливо, переглянувши відеоматеріали на тому самому сайті. Про можливість скористатися матеріалами сайта нагадує значок  .

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу слугують своєрідним геометричним компасом і допомагають орієнтуватись у вивченому матеріалі. ***Додатки***, наведені в кінці підручника, поглиблюють знання з окремих вивчених тем, а ***історичні довідки*** ознайомлюють із деякими цікавими фактами щодо розвитку геометрії та діяльності видатних учених-геометрів.

Підручник містить 682 задачі, 199 рисунків, 224 сторінки.

Істер О.С.

Геометрія : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2015. — 184 с.

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної оновленої навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник виконано в кольорі, він має чітку структуру, назви та зміст його розділів відповідають назві та змісту відповідних тем навчальної програми. Кожний розділ ділиться на параграфи, теоретичний і практичний матеріал яких повністю відповідає кількості годин, визначених навчальною програмою. Теоретичний матеріал підкріплено зразками розв’язування вправ.

Підручник містить вступне слово до всіх сторін навчального процесу: учнів, вчителів і батьків; складається з чотирьох розділів, назви й зміст яких відповідають програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. Чотири розділи, в свою чергу, містять 27 параграфів.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:

- означення, важливі геометричні твердження (аксіоми, теореми, властивості);

- запитання до вивченого теоретичного матеріалу;

▲ - закінчення доведення теореми або задачі;

- “ключова” задача, висновки якої використовуються під час розв’язування інших задач;

- вправи для повторення;

- вправи підвищеної складності;

- рубрика “Цікаві задачі для учнів неледачих” та додатковий матеріал.

Чорним кольором позначено номери вправ для розв’язування у класі, а синім — для розв’язування вдома.

Вправи кожного параграфа, які пропонує автор для формування учнівських компетенцій, диференційовано за чотирма рівнями складності та позначено відповідними піктограмами.

З позначки починаються вправи початкового рівня;

З позначки починаються вправи середнього рівня;

З позначки починаються вправи достатнього рівня;

З позначки починаються вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання учні зможуть, якщо виконають завдання “Домашньої самостійної роботи”, які подано в тестовій формі, та “Завдання для перевірки знань”. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника — “Завдання для перевірки знань за курс геометрії 7 класу” та “Задачі підвищеної складності”. Учням, які цікавляться геометрією, варто розглянути вправи рубрики “Цікаві задачі для учнів неледачих”.

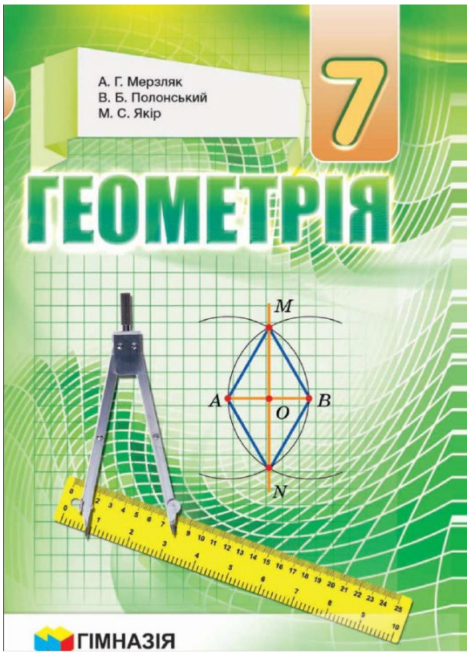
Автор подав теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюстрував його значною кількістю прикладів.

Підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано "із запасом". Тож можна обирати їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо.

Додаткові вправи у "Завданнях для перевірки знань" призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Підручник містить 850 задач, 459 малюнків, 184 сторінки.



Мерзляк А.Г.

Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге вид., переробл. – Х. : Гімназія, 2020. – 240 с. : іл.

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної оновленої навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник розділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів, всього 23 пункти. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом,** ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв’язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Кожний пункт завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв’язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни: вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати цікаві оповідання з історії геометрії, зокрема про внесок української ученої спільноти в розвиток цієї науки.

З огляду на зазначене в основу цього підручника покладено **наочно-дедуктивний принцип у поєднанні із частковою аксіоматизацією**.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв’язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв’язування усно.

У деяких пунктах частину тексту розміщено на кольоровому фоні. Так виокремлено матеріал, який можна віднести до необов’язкового для вивчення.

В підручнику є такі умовні позначення:

n^0 - завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\cdot}$ - завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\cdot\cdot}$- завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^*- задачі для математичних гуртків і факультативів;

- ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв’язування інших задач;

- доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

- доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

- доведення теореми, не обов’язкове для вивчення;

- закінчення доведення теореми;

- закінчення розв’язання задачі;


- рубрика «Коли зроблено уроки».

Рівні відрізки на кресленнях позначено однаковою кількістю рисочок, рівні кути — однаковою кількістю дужок, за винятком відрізків і кутів, які треба знайти.

Підручник містить 746 задач, 352 рисунки, 240 сторінок.

Проаналізуємо підручники з геометрії для 8 класу за вище викладеною нумерацією.

Бевз Г. П.

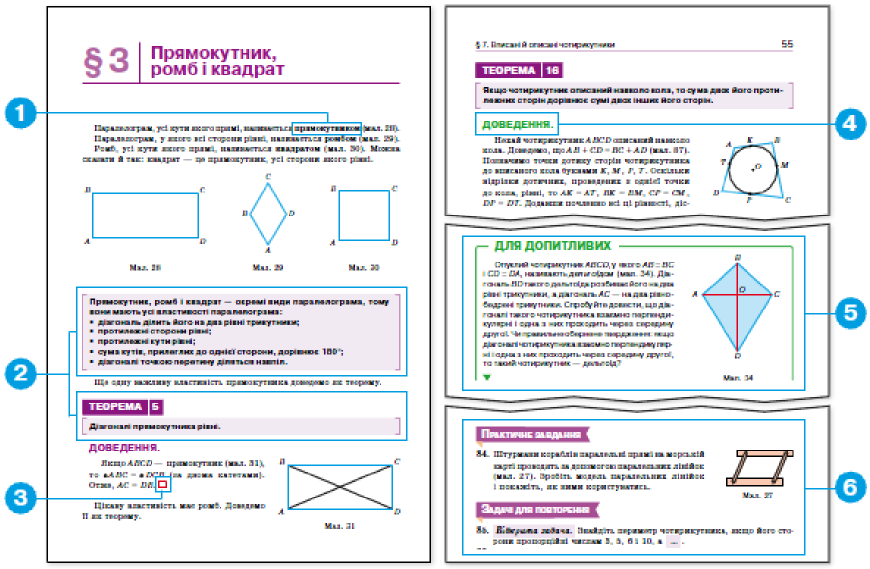
Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Х. : Фоліо, 2016. – 272 с.

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник містить вступне слово до учнів та колег; складається з чотирьох розділів, назви й зміст яких відповідають програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. Чотири розділи містять 23 параграфи.

На початку кожного розділу подано короткий огляд його змісту українською та англійською мовами, а також приклади матеріальних об’єктів, моделями яких є геометричні фігури.

Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані **жирним шрифтом** 1, — це нові геометричні терміни. Учні повинні усвідомити, що вони означають, і запам’ятати їх.



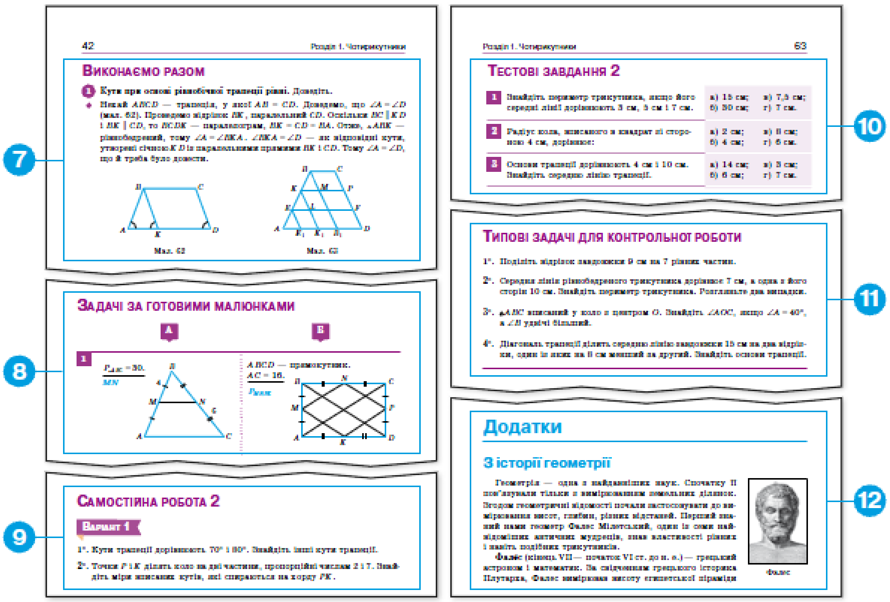
Жирний текст у квадратних дужках 2 — це властивості й теореми, доведення яких подано нижче. Кінець доведення теореми позначено **червоним квадратиком** 3. **Зеленим кольором** 4 позначено доведення, які не є обов’язковими для вивчення.

У кожному параграфі підручника є рубрика **“Для допитливих”** 5**.** Вона містить додатковий матеріал, адресований зацікавленим учням.

Підручник містить вправи різних рівнів складності. Є задачі для усного розв’язування та повторення, задачі рівнів А і Б та підвищеної складності. Зацікавлять учнів і вчителів **відкриті задачі та практичні завдання** 6.

У рубриці **“Виконаємо разом”** 7 наведено зразки розв’язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань, номери яких виділено блакитним кольором. Наприкінці кожного розділу є рубрики **“Задачі за готовими малюнками”** 8, **самостійні роботи**

9 з різнорівневими завданнями, **тестові завдання** 10 і **типові задачі для контрольної роботи** 11 трьох рівнів складності.



У додатках подано “Навчальні проекти” до кожного розділу, “Задачі підвищеної складності”, “Задачі для повторення”, “Тренувальні тести”, “Задачі на побудову”, **“Історичні відомості”** 12 , “Відомості за курс 7 класу”.

Підручник містить 1285 задач, 327 малюнків, 272 сторінки.

М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова.

Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Київ : Оріон, 2021. – 195 с.

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту нової навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник містить вступне слово до учнів; складається з чотирьох розділів, назви й зміст яких відповідають чинній програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. Чотири розділи містять 24 параграфи.

У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, автори радять, особливу увагу звертати на текст, виділений жирним шрифтом. Це найважливіші означення і властивості геометричних фігур, поради, як діяти під час розв'язування задач. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати та вміти застосовувати. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики "Пригадайте головне", які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Рекомендують учням ознайомитись з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня.

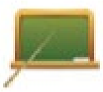
Автори радять : " Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач".

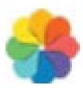
Скориставшись рубрикою "Дізнайтеся більше", учні зможуть поглибити свої знання.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допомагають краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

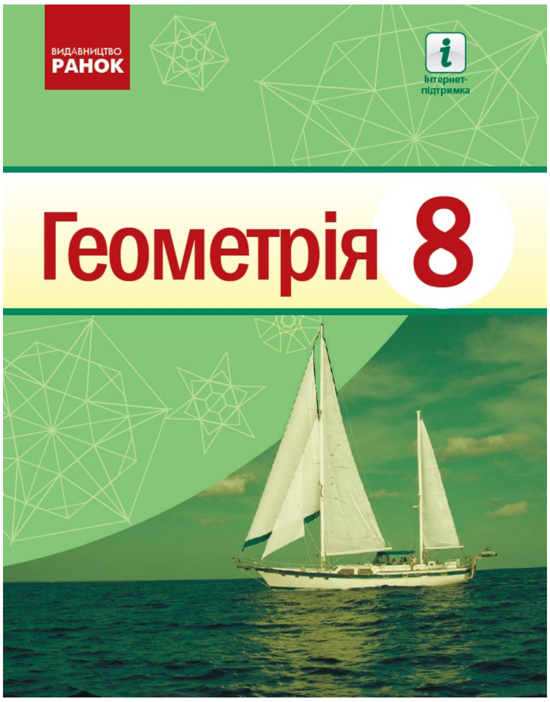
 Поміркуйте

 Як записати

 Як діяти

 Типова задача

Підручник містить 1191 задачу, 535 малюнків, 195 сторінок.



Єршова А. П.

Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. – 2-ге вид., переробл. – Х. : Вид-во “Ранок” ,2021. – 254 с. : іл.

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник містить вступне слово до учнів; складається з чотирьох розділів, назви й зміст яких відповідають навчальній програмі. Всі розділи починаються короткою мотивацією їх вивчення. Чотири розділи містять 21 параграф.

Параграфи складаються з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв’язування задач. Найважливіші поняття й факти виділено **напівжирним** шрифтом.

Вправи і задачі, подані в підручнику, поділяються на декілька груп. Усні вправи допомагають учням зрозуміти , наскільки успішно вони засвоїли теоретичний матеріал. Після усних можна переходити до *графічних вправ,* які виконуються в зошиті або на комп’ютері. Далі йдуть *письмові* вправи. Спочатку, рекомендують, перевірити учнями свої знання, виконуючи задачі *рівня А*. Складнішими є задачі *рівня Б.* І нарешті, якщо учні добре опанували матеріал і бажають виявити свої творчі здібності, на них чекають задачі *рівня В.* Значки і біля номерів вправ означають, що ці вправи на розсуд вчителя можуть бути використані відповідно для роботи в парах і групах.

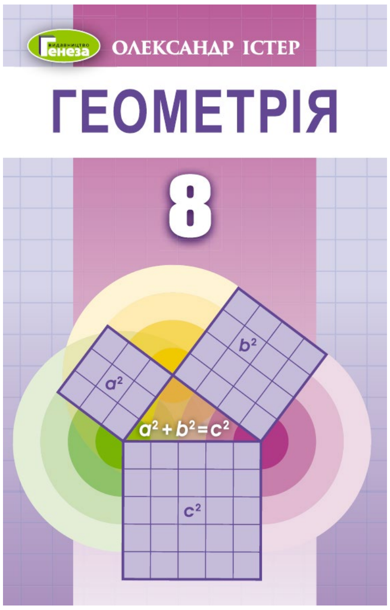
Після кожного параграфа в рубриці “Повторення” зазначено, які саме поняття й факти слід пригадати для успішного вивчення наступного матеріалу (поряд, зокрема, зазначено відповідні параграфи в підручнику: А. П. Єршова.

Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Х. : Вид-во “Ранок” , 2015. – 224 с. : іл.), і наведено відповідні задачі, що підготують юнацтво до сприйняття наступної теми. Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких позначено значком . Наприкінці кожного розділу подано *контрольні запитання* й *типові задачі для контрольних робіт,* завдяки яким учні зможуть краще підготуватися до тематичного оцінювання. Звернувшись до інтернет – підтримки підручника, учні зможуть пройти онлайн – тестування і самостійно перевірити рівень своїх знань. Додаткові задачі до розділів допоможуть узагальнити вивчене, а задачі підвищеної складності відкриють красу нестандартного мислення. Про можливість скористатися матеріалами сайта нагадує значок .

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу допомагають орієнтуватись у вивченому матеріалі.

Додатки, наведені в кінці підручника, поглиблюють знання з окремих вивчених тем, а *історичні довідки* до розділів та матеріали рубрики *“Видатні математики України”* познайомлять із деякими цікавими фактами щодо розвитку геометрії та з діяльністю відомих учених.

Підручник містить 755 задач, 196 рисунків, 254 сторінки.



Істер О. С.

Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. — 2-ге вид., переробл. – Київ : Генеза, 2021. — 240 с.

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник виконано в кольорі, він має чітку структуру, назви та зміст його розділів відповідають назві та змісту відповідних тем навчальної програми.

Кожний розділ ділиться на параграфи, теоретичний і практичний матеріал яких повністю відповідає кількості годин, визначених навчальною програмою. Теоретичний матеріал підкріплено зразками розв’язування вправ.

Підручник містить вступне слово до всіх сторін навчального процесу: учнів, вчителів і батьків; складається з чотирьох розділів, назви й зміст яких відповідають програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. Чотири розділи містять 26 параграфів.

Автори рекомендують щоб учні, текст, який надрукований **жирним** шрифтом, запам'ятовували.

У підручнику використано такі умовні позначення:

– треба запам'ятати;

– запитання і завдання до вивченого матеріалу;

– теорема;

– наслідок з теореми;

– вправи для повторення;

116 – завдання для класної роботи;

226 – завдання для домашньої роботи;

– вправи підвищеної складності;

–"ключова" задача, висновки якої використовуються під час розв'язування інших задач;

– кінець доведення теореми або властивості;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– рубрика "Життєва математика";

– рубрика "Головне в розділі";

– рубрика "Цікаві задачі для учнів не ледачих".

Текст, надрукований жирним шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так: з позначок 1, 2, 3, 4 починаються вправи відповідно початкового, середнього, достатнього та високого рівнів.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання, учні можуть, виконуючи завдання **"Домашньої самостійної роботи"**, які подано в тестовій формі, та **"Завдання для перевірки знань"**. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, стисло теоретичний матеріал (рубрика **"Головне в розділі"**), а в кінці підручника – **"Завдання для перевірки знань**

за курс геометрії 8 класу” та **“Задачі підвищеної складності”**. Заняття геометрією стануть ще цікавішими, якщо учні розв’язуватимуть вправи рубрики **“Цікаві задачі для учнів неледачих”**.

У рубриці «**Життєва математика**» зібрано задачі, пов’язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, – усім тим, що знадобиться кожному в повсякденному житті. У рубриці **“Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу”** пропонується виконати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми.

Пригадати учням раніше вивчене допоможуть **“Відомості з курсу геометрії 7 класу”** та **“Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу”**, які розміщено в кінці підручника.

Автор подав теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюстрував його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов’язково потрібно доопрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них учні розглянуть на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв’язати самостійно.

У кінці підручника в додатку під назвою “Готуємося до ЗНО” подано добірку задач, що в різні роки пропонувалися абітурієнтам на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, для розв’язання яких достатньо знань з геометрії за 8-й клас. Розв’язавши ці задачі, учні зроблять ще один крок уперед для успішної підготовки до майбутніх випробувань, які чекатимуть на них під час вступу до омріяного закладу вищої освіти.

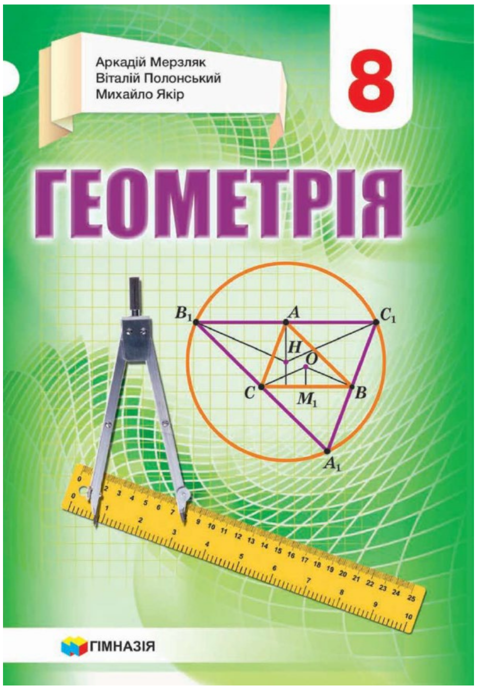
Цікаві факти з історії розвитку геометрії як науки викладено в рубриці
“А ще раніше...”.

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирати їх можна для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на додаткових, факультативних та індивідуальних заняттях.

Додаткові вправи в "Завданнях для перевірки знань" призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Чи правильно їх розв'язано, учитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів та задачі з додатка "Готуємося до ЗНО" можна запропонувати учням, наприклад, під час узагальнювальних уроків з теми або повторення та систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Організувати повторення курсу геометрії 7 класу на початку навчального року та пригадати відповідний теоретичний матеріал можна, запропонувавши учням розв'язати "Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу" та прочитати відповідні теоретичні відомості, які розміщено в кінці підручника.



Підручник містить 1085 задач, 302 малюнки, 240 сторінок.

Мерзляк А. Г.

Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти /А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — 2-ге видання, переробл. — Х. : Гімназія, 2021. — 208 с. : іл.

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної оновленої навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник розділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів, всього 23 пункти. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом,** ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Кожний пункт завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни: вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і учні хочуть дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики "Коли зроблено уроки".

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

В підручнику наявні задачі на побудову. Вони не є обов'язковими для розгляду. Цей матеріал доцільно використовувати лише в тому разі, коли учні та учениці вже ознайомлені з відповідним розділом з курсу геометрії 7 класу.

Блакитним кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **пурпуровим** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

Матеріал рубрики "Коли зроблено уроки" може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

В підручнику є такі умовні позначення:

n^0 - завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\cdot}$ - завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\cdot\cdot}$- завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*}- задачі для математичних гуртків і факультативів;

- ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв’язування інших задач;

- доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

- доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

- доведення теореми, не обов’язкове для вивчення;

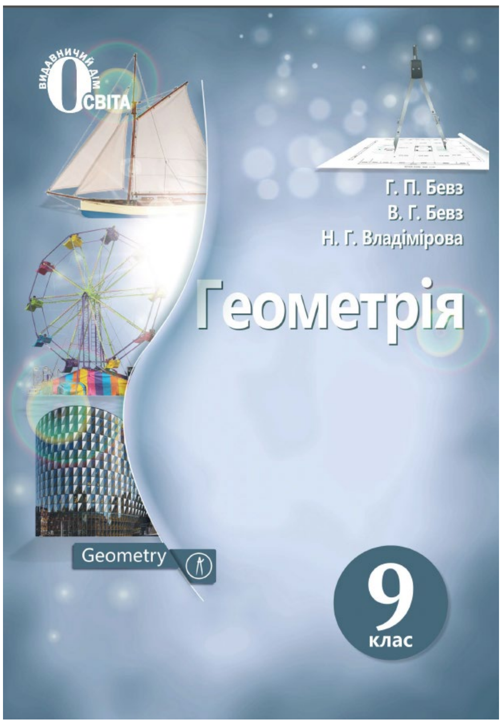
- закінчення доведення теореми;

- закінчення розв’язання задачі;

- рубрика «Коли зроблено уроки».

Підручник містить 860 задач, 247 рисунків, 208 сторінок.

Проаналізуємо підручники з геометрії для 9 класу за вище викладеною нумерацією.



Бевз Г. П.

Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с. : іл.

Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

За допомогою цього підручника учні будуть завершувати вивчення геометрії в основній школі. Щоб уявити весь курс геометрії основної школи і зрозуміти, яке місце в ній займає матеріал 9 класу, розгляньте зазначений нижче перелік тем. Кольором виділено матеріал, який учні вивчатимуть в 9 класі.

ГЕОМЕТРІЯ (7–9 класи)

Елементарні геометричні фігури та їх властивості. Взаємне розміщення прямих на площині. Трикутники. Ознаки рівності трикутників. Подібність трикутників. Розв’язування прямокутних трикутників. Коло і круг. Чотирикутники. Многокутники. Площі многокутників
Метод координат і вектори на площині. Розв’язування трикутників. Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга. Геометричні перетворення.

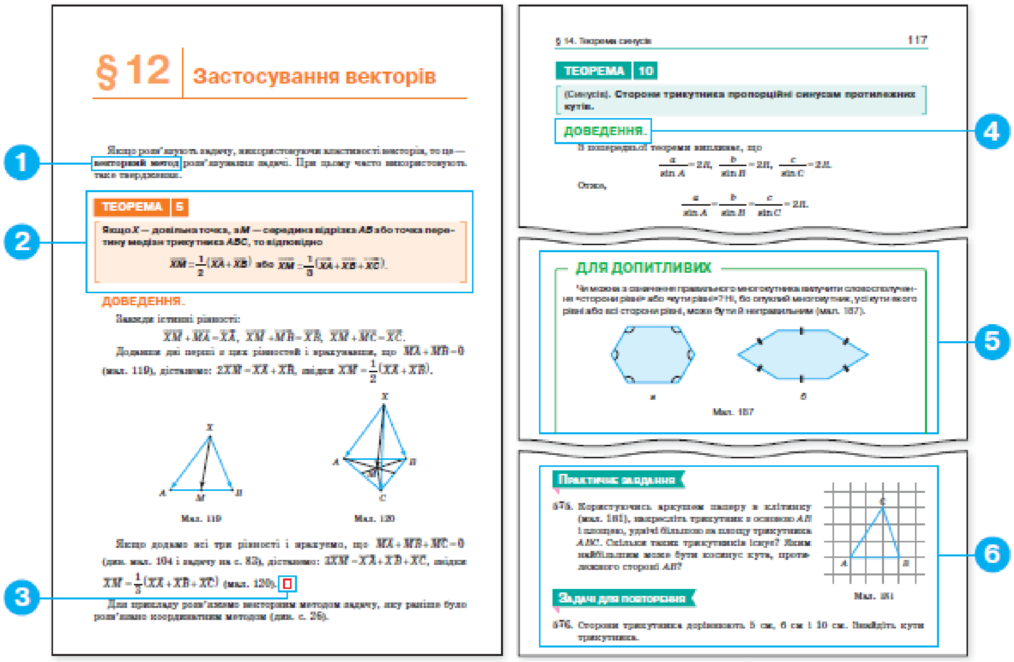
Підручник містить вступне слово до учнів; складається з п’яти розділів, назви й зміст яких відповідають програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. П’ять розділів містять 26 параграфів.

На початку кожного розділу подано короткий огляд його змісту українською та англійською мовами, а також приклади матеріальних об’єктів, моделями яких є геометричні фігури.

Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані **жирним шрифтом**, — це нові геометричні терміни. Учні повинні усвідомити, що вони означають, і запам’ятати їх.

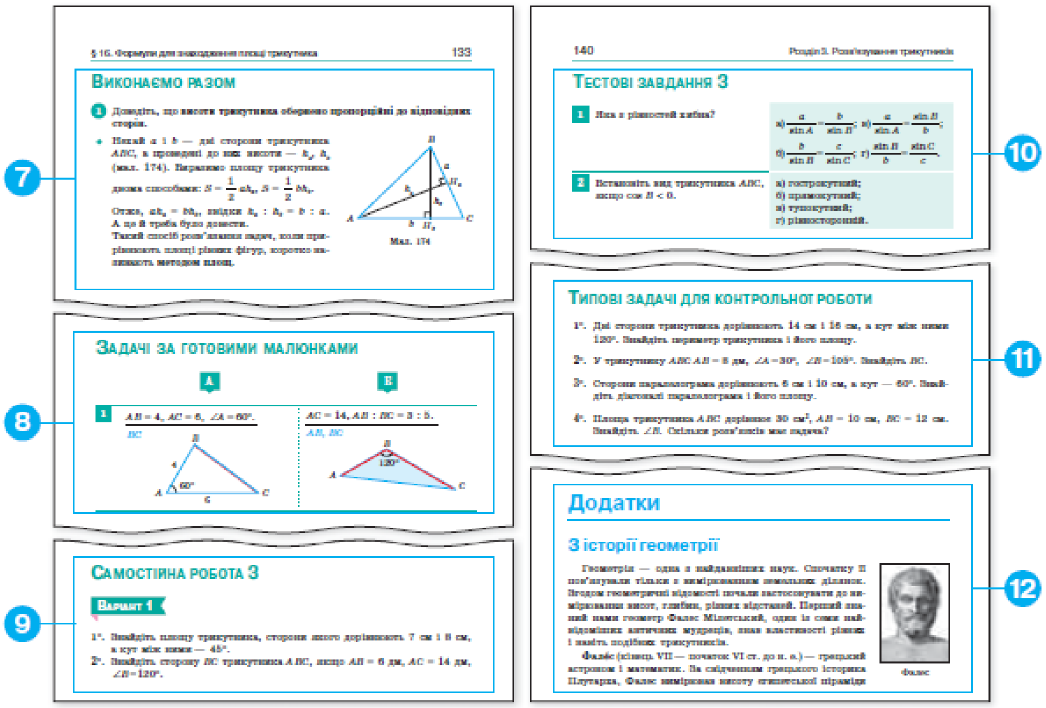
Жирний текст у квадратних дужках — це теореми, доведення яких подано нижче.

Кінець доведення теореми позначено **червоним квадратиком**. **Зеленим кольором** позначено доведення, які не є обов’язковими для вивчення.



У кожному параграфі підручника є рубрика **“Для допитливих”** 5 . Вона містить додатковий матеріал, адресований зацікавленим учням.

Підручник містить вправи різних рівнів складності. Є задачі для усного розв’язування та повторення, задачі рівнів А і Б та підвищеної складності. Зацікавлять учнів і вчителів **відкриті задачі та практичні завдання** 6 .



У рубриці **“Виконаємо разом”** 7 наведено зразки розв’язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань, номери яких виділено блакитним кольором.

Наприкінці кожного розділу є рубрики **“Задачі за готовими малюнками”** 8 , **самостійні роботи** 9 з різнорівневими завданнями, **тестові завдання** 10 і **типові задачі для контрольної роботи** 11 трьох рівнів складності.

У додатках подано “Навчальні проекти” до кожного розділу, “Задачі підвищеної складності”, “Задачі для повторення”, “Тренувальні тести”, **“Історичні відомості”** 12 .

Підручник містить 1106 задач, 333 малюнки, 272 сторінки.

Бурда М. І.

Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 224 с. : іл.

Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник містить вступне слово до учнів; складається з п’яти розділів, назви й зміст яких відповідають програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. П’ять розділів містять 23 параграфи.

У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, автори радять, особливу увагу звертати на текст, виділений жирним шрифтом. Це — найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам’ятати й уміти застосовувати під час розв’язування задач. Курсивом виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики “Пригадайте головне”, які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Рекомендують учням ознайомитись з порадами до розв’язування задач, із розв’язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня.

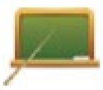
Автори радять : “ Розв’язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам’ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв’язування інших задач”.

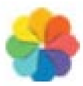
Скориставшись рубрикою “Дізнайтеся більше”, учні зможуть поглибити свої знання.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допомагають краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

 Поміркуйте

 Як записати

 Як діяти

 Типова задача

 Домашнє завдання

Підручник містить 1161 задачу, 386 малюнків, 224 сторінки.

Єршова А. П.

Геометрія : підруч. для 9 кл. закладів заг. серед. освіти / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. – 2-ге вид., переробл. – Х. : Вид-во “Ранок” , 2022. – 255 с. : іл. Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Навчальний матеріал підручника відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник містить вступне слово до учнів; складається з п’яти розділів, назви й зміст яких відповідають програмі. Кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення та складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. П’ять розділів містять 18 параграфів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв’язування задач. Найважливіші поняття й факти виділено кольоровим шрифтом.

Вправи і задачі, які подано в підручнику, поділяються на декілька груп. *Усні вправи* допоможуть учням зрозуміти, наскільки успішно вони засвоїли теоретичний матеріал. Після них можна переходити до *графічних вправ*, далі йдуть *письмові задачі*. Автори рекомендують учням перевірити свої знання, виконати завдання *рівня А*. Більш складними є задачі *рівня Б*. Для учнів, які добре опанували матеріал і бажають виявити свої творчі здібності, чекають задачі *рівня В*. Значки і біля номерів вправ означають, що ці вправи на розсуд учителя можуть бути використані відповідно для роботи в парах і групах. Після кожного параграфа в рубриці “*Повторення*” зазначено, які саме поняття й факти слід пригадати для успішного вивчення нового матеріалу, а також указано відповідні параграфи в підручниках для 7 і 8 класів (Автор Єршова А. П.) та наведено задачі, які підготують учнів до сприйняття наступної теми. Більшість задач підручника супроводжуються відповідями, які наведені наприкінці підручника.

Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких позначено значком . Наприкінці кожного розділу подано контрольні запитання й типові задачі для контрольних робіт, завдяки яким учні зможуть систематизувати свої знання та вдосконалити вміння й навички. Звернувшись до інтернет-підтримки, кожен учень може самостійно перевірити рівень своєї підготовки, пройшовши онлайн-тестування. Про можливість скористатися матеріалами сайту нагадуватиме значок . Додаткові задачі до розділів допоможуть учням узагальнити вивчене, а задачі підвищеної складності відкриють красу нестандартного мислення. Рекомендують звернути увагу на матеріали рубрики *“Готуємося до ДПА”*, зокрема *задачі для повторення курсу геометрії 7–9 класів*, подані після останнього розділу, — вони допоможуть учням краще підготуватися до підсумкової атестації.

Підсумки наприкінці кожного розділу — своєрідний геометричний компас, за допомогою якого кожен учень зможе орієнтуватися у вивченому матеріалі. Рубрики *“Історична довідка”* і *“Математичні олімпіади”* знайомлять із цікавими фактами про розвиток геометрії та математичного олімпіадного руху, з діяльністю відомих українських та зарубіжних учених.

Підручник містить 707 задач, 163 рисунки, 255 сторінок.

Істер О. С.

Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – Київ : Генеза, 2017. — 240 с. : іл.

Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів рекомендовано Міністерством освіти і науки України; навчальний матеріал відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник виконано в кольорі, він має чітку структуру, назви та зміст його розділів відповідають назві та змісту відповідних тем навчальної програми. Кожний розділ ділиться на параграфи, теоретичний і практичний матеріал яких повністю відповідає кількості годин, визначених навчальною програмою. Теоретичний матеріал підкріплено зразками розв'язування вправ.

Підручник містить вступне слово до всіх сторін навчального процесу: учнів, вчителів і батьків; складається з п'яти розділів, кожен розділ починається короткою мотивацією його вивчення. П'ять розділів містять 24 параграфи.

Автори рекомендують щоб учні, текст, який надрукований **жирним** шрифтом, запам'ятовували.

У підручнику присутні умовні позначення. Ось що вони означають:

- означення, важливі геометричні твердження (аксіоми, теореми, властивості);

- запитання до вивченого теоретичного матеріалу;

▲ - закінчення доведення теореми або задачі;

- "ключова" задача, висновки якої використовуються під час розв'язування інших задач;

- вправи для повторення;

- рубрика "Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу";

- вправи підвищеної складності;

- рубрика "Цікаві задачі для учнів неледачих" та додатковий матеріал.

Вправи кожного параграфа, які пропонує автор для формування учнівських компетенцій, диференційовано за чотирма рівнями складності та позначено відповідними піктограмами:

- вправи початкового рівня;

- вправи середнього рівня;

- вправи достатнього рівня;

- вправи високого рівня.

Чорним кольором позначено номери вправ для розв'язування у класі, а синім — для розв'язування вдома.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання учні зможуть, якщо виконають завдання “Домашньої самостійної роботи”, які подано в тестовій формі, та “Завдання для перевірки знань”. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника — “Завдання для перевірки знань за курс геометрії 9 класу” та “Задачі підвищеної складності”. Учням, які цікавляться геометрією, варто розглянути вправи рубрики “Цікаві задачі для учнів неледачих”.

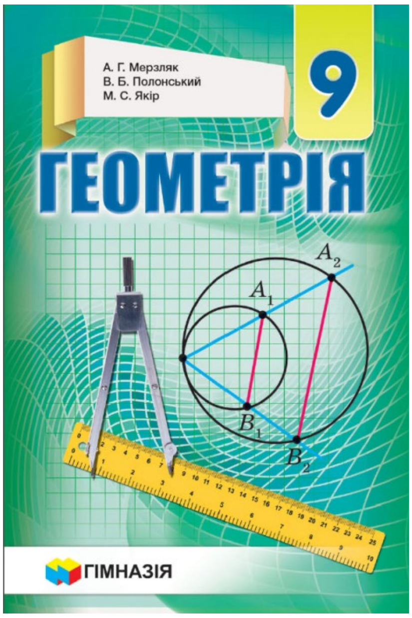
Автор подав теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюстрував його значною кількістю прикладів.

Підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано “із запасом”. Тож можна обирати їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо.

Додаткові вправи у “Завданнях для перевірки знань” призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв’язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Підручник містить 1210 задач, 220 малюнків, 240 сторінок.



Мерзляк А. Г.

Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 240 с. : іл.

Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів рекомендовано Міністерством освіти і науки України; навчальний матеріал відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник поділено на п’ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах (всього 21 пункт) викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, потрібно особливу увагу звертати на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв’язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв’язування, приступати до яких радять лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі, особливо ті, що позначено зірочкою (*). Свої знання учні можуть перевірити, розв’язуючи задачі в тестовій формі, розміщені в кінці кожного параграфа.
Кожний пункт з непарним номером завершується рубрикою “Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте”. До неї дібрано задачі, для розв’язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони допоможуть учням навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не тільки в математиці, а й у житті.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час, а учні хочуть дізнатися більше, то рекомендують звернутися до рубрики “Коли зроблено уроки”.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв’язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики "Коли зроблено уроки" може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

В підручнику є такі умовні позначення:

n^0 - завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\cdot}$ - завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\cdot\cdot}$- завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^*- задачі для математичних гуртків і факультативів;

- ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;

- доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

- доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

- доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;

- закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;

- рубрика "Коли зроблено уроки".

Підручник містить 892 задачі, 258 рисунків, 240 сторінок.

Аналізуючи дані підручники я прийшов до такого висновку.

Всі проаналізовані підручники з геометрії для 7-9 класів містять гриф **"Рекомендовано Міністерством освіти і науки України"** для викладання в загальноосвітніх навчальних закладах. Навчальний матеріал підручників відповідає змісту чинної навчальної програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

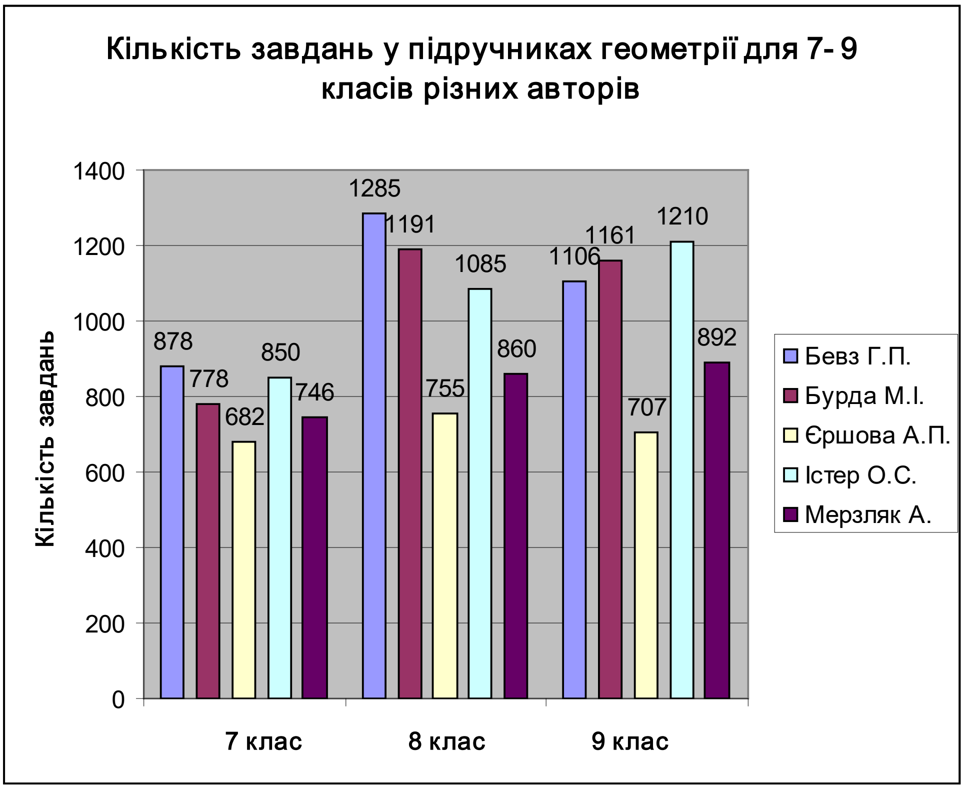
Підручники виконано в кольорі, вони мають чітку структуру, назви та зміст їх розділів відповідають назві та змісту відповідних тем навчальної програми.

Кожний розділ (параграф) ділиться на параграфи (пункти), теоретичний і практичний матеріал яких повністю відповідає кількості годин, визначених навчальною програмою. Теоретичний матеріал підкріплено зразками розв'язування вправ.

В кожному підручнику існує градація завдань: вправи початкового рівня; вправи середнього рівня; вправи достатнього рівня; вправи високого рівня. Цей розподіл знаходить висвітлення у використанні спеціальних значків для позначення. Автори даних підручників приділяють велику увагу зразкам рішення опорних завдань, що ілюструють корисний факт, метод чи прийом.

У книгах дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал, є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

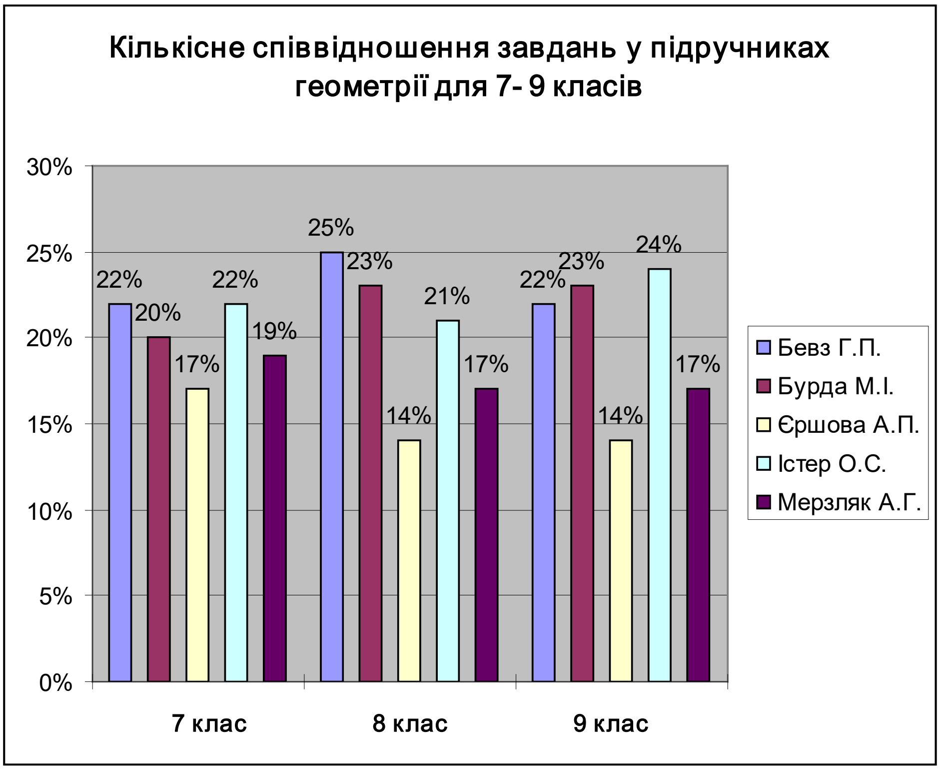
Представляю інформацію про кількість завдань у підручниках геометрії для 7 – 9 класів різних авторів у вигляді гістограми.



Кількість завдань у підручниках геометрії для 7 – 9 класів різних авторів.

Найбільшу кількість завдань у своїх підручниках продемонстрували Г.П. Бевз, М.І. Бурда, О.С. Істер, меншу – А.Г. Мерзляк та А.П. Єршова.

Інформацію про кількісне співвідношення завдань у підручниках геометрії для 7-9 класів представляю у вигляді гістограми.

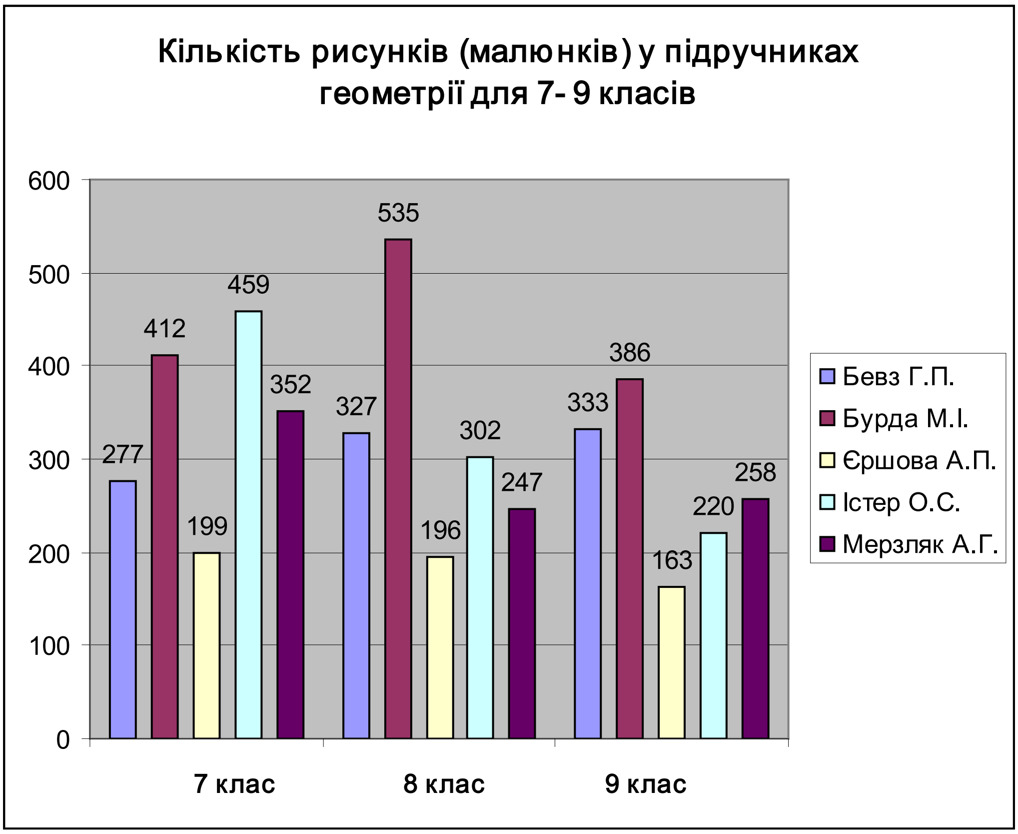


Кількісне співвідношення завдань у підручниках геометрії для 7-9 класів.

Серед основних позитивних характеристик будь-якого підручника виділяється розгорнення тексту підручника. Вважається, що це помітно полегшує засвоєння матеріалу. В розглянутих підручниках до параграфів ідуть доповнення, що дозволяють повніше розкрити тему. Таке розмежування матеріалу дозволяє учням, прочитавши параграф, не тільки усвідомити його основні поняття, але й при бажанні, ознайомитися з додатковою інформацією з даної теми.

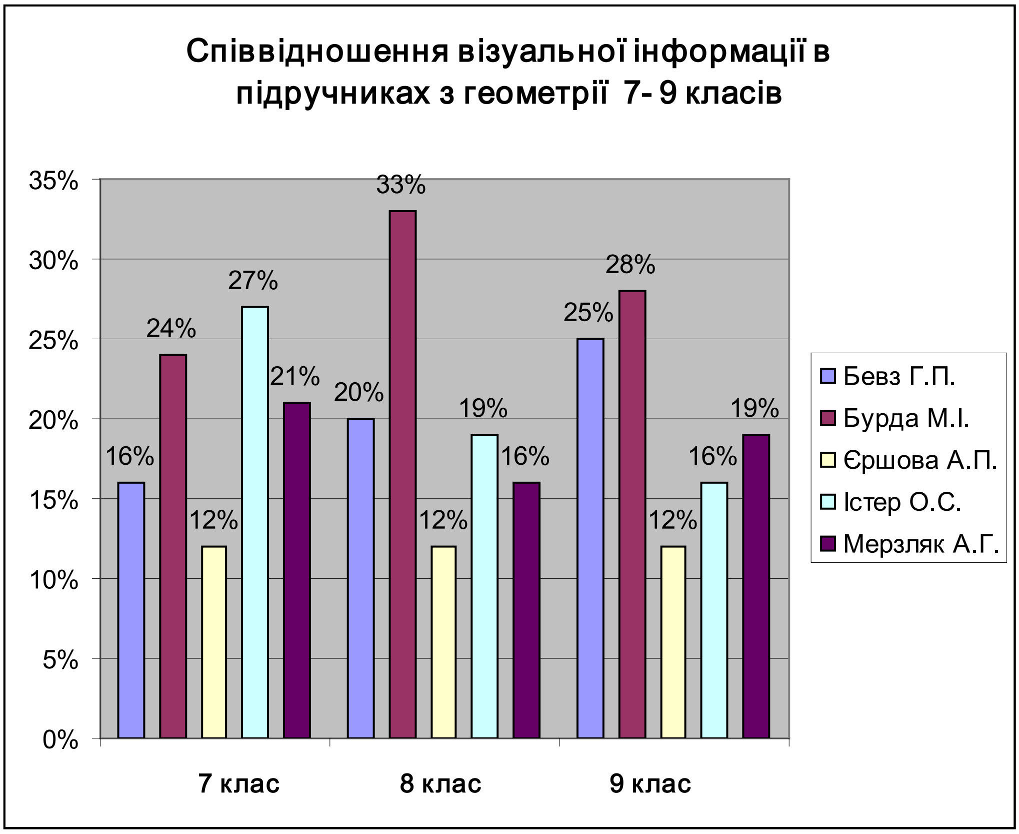
Ефективність навчання геометрії багато в чому визначається тим, яким чином кодується інформація, чи використовуються при цьому рисунки, креслення, схеми [5, с. 280].

Представляю інформацію про кількість рисунків (малюнків) у підручниках геометрії для 7 – 9 класів у вигляді гістограми.



Кількість рисунків (малюнків) у підручниках геометрії для 7 – 9 класів.

Ілюструю на гістограмі співвідношення візуальної інформації у розглянутих підручниках.



Співвідношення візуальної інформації в підручниках з геометрії 7 – 9 класів.

Найбільшу кількість рисунків (малюнків) у своїх підручниках продемонстрували М.І. Бурда, О.С. Істер, Г.П. Бевз, меншу – А.Г. Мерзляк та А.П. Єршова.

Авторські колективи акцентують свою увагу на розвитку вмінь і навичок учнів, на доступності викладу, вважаючи, що кожний елемент курсу геометрії повинен опиратися на більш просте і зрозуміле наочне подання. Тому у підручниках міститься багато рисунків (малюнків), креслень, ілюстрацій.

Я працюю вчителем математики в Злазненському ліцеї Головинської сільської ради Рівненського району Рівненської області. Викладаю математику в 6 – 8 класах. В освітньому процесі користуємося підручниками О.С. Істера.

3. 4. Педагогічний експеримент.

Педагогічний експеримент полягає у вивченні планіметричного матеріалу учнями 8 класу з використанням спеціально розробленої методики викладання окремих тем курсу «Планіметрії» із застосуванням ППЗ GRAN-2D. Експеримент відбувався на базі Злазненського ліцею Головинської сільської ради Рівненського району Рівненської області. Він тривав з 1вересня 2023 року по 20 жовтня 2023 року. До експерименту було залучено 8 клас зазначеного навчального закладу. Освітній процес даного навчального закладу відбувається в режимі офлайн.

Експеримент відбувався за такими етапами:

1. Аналіз методичної літератури з теми дослідження, методичних рекомендацій щодо вивчення планіметрії, підручників з геометрії для 7 - 9 класів.
2. Аналіз успішності з геометрії здобувачів освіти – учасників експерименту за результатами І чверті 2023/2024 навчального року. Знайомство з результатами написання контрольних робіт з тем геометрії, що вивчалися протягом І чверті.
3. Розробка методики вивчення теми «Чотирикутники», розгляд якої відбувався протягом проведення досліду.
4. Проведення уроків, групових та індивідуальних консультацій офлайн з даної теми із застосуванням ППЗ GRAN-2D для учнів 8 класу.
5. Проведення контрольного зрізу знань учнів-учасників експерименту з теми «Чотирикутники», вивчення якої відбувалося за зазначеною вище методикою.

6. Порівняння результатів проведеного контрольного зрізу з результатами успішності здобувачів освіти з геометрії за підсумками І чверті 2023/2024 навчального року. Аналіз отриманих результатів дослідження, статистична обробка даних. Висновки щодо ефективності та доцільності використання методики вивчення планіметричного матеріалу із застосуванням ППЗ GRAN-2D, а саме для розв’язування планіметричних задач на побудову.

До участі у педагогічному експерименті було залучено учнів 8 класу Злазненського ліцею Головинської сільської ради Рівненського району Рівненської області. Рівень успішності з геометрії за результатами І чверті 2023/2024 н.р., відображено в таблиці 4 та таблиці 5.

Таблиця 4

Клас	Всього	Високий рівень			%	Достатній рівень			%	Середній рівень			%	Початковий рівень			%
		12	11	10		9	8	7		6	5	4		3	2	1	
8	26		2	2	15	3	6	3	46	3	4	2	35	1			4

Таблиця 5

Клас	Успішність, %	Якість знань, %	Середній бал
8	96	61	7,2

Спочатку, у межах експерименту, для 8 класу використовувалася традиційна методика вивчення теми «Чотирикутники», а потім – розроблена та описана у розділі 2 даної кваліфікаційної роботи, що передбачає застосування до освітнього процесу ППЗ GRAN – 2D.

У ході вивчення теми «Чотирикутники» педагогічний програмний засіб GRAN – 2D полегшував роботу учням, давав змогу виконувати креслення виразніше, точніше та акуратніше, дозволяв заощадити час для розгляду і ознайомлення з більшою кількістю задач різних типів та різних рівнів складності, підвищував інтерес учнів до матеріалу, що вивчався.

У таблицях 6 та 7 відтворено результати виконання контрольного зрізу знань учнями 8 класу із зазначеної теми, яка вивчалася з використанням розробленої методики.

Таблиця 6

Клас	Всього	Високий рівень			%	Достатній рівень			%	Середній рівень			%	Початковий рівень			%
		12	11	10		9	8	7		6	5	4		3	2	1	
8	26		2	3	19	3	7	5	58	2	3	1	23	-	-	-	0

Таблиця 7

Клас	Успішність, %	Якість знань, %	Середній бал
8	100	77	7,7

Отже, проведення педагогічного експерименту сприяло підвищенню рівня успішності учнів задіяного в експерименті 8 класу. Про це свідчать такі висновки, зроблені в ході порівняльного аналізу результатів контрольного зрізу та І чверті:

- успішність учнів 8 класу збільшилася на 4% і стала стовідсотковою;

- кількість учнів, які продемонстрували знання високого рівня, збільшилася на 4% (з 15% до 19%);

- кількість учнів, які за результатами контрольного зрізу продемонстрували знання достатнього рівня збільшилася на 12% (з 46% до 58%);

- таким чином, якість знань учнів 8 класу покращилася на 16% (з 61% до 77%);

- середній бал збільшився на 0,5 (з 7,2 до 7,7).

ВИСНОВКИ

У ході виконання магістерської роботи досліджено наукову та методичну літературу з обраної теми; проаналізовано стан досліджуваної проблеми у психолого-педагогічній теорії та практиці шкільного навчання планіметрії, розглянуто теоретичні і практичні рекомендації для вчителів і методистів з даної проблеми.

У першому розділі роботи розглянуто теоретико-методичну базу вивчення геометрії в основній школі. Ми звернули увагу на історію розвитку геометрії як науки, сучасні тенденції у методиці її викладання та рівень навчальних досягнень учнів з даного предмета.

Через спостереження починається ознайомлення школярів з геометричними формами, істотними ознаками, положенням у просторі і на площині. Важливо, щоб учні не лише сприймали готові образи, які дає вчитель, а й самі відтворювали геометричні форми в процесі моделювання, креслення, вимірювання, малювання. Тому центральне місце у формуванні геометричних понять в учнів посідає практика

Будь-яка тема шкільного курсу планіметрії є придатною для використання педагогічних програмних засобів. Загальновідомими і доступними для забезпечення вивчення планіметрії є, наприклад, такі програмні продукти: 1) GRAN1; 2) GRAN 2D; 3)GRAN 3D; 4)DERIVE.

Другий розділ присвячений методам розв’язування планіметричних задач. В ньому розглянуті методи розв'язування планіметричних задач, основні положення, які можуть бути використані при розв’язанні завдань, як підвищеного рівня, так і того, що розв’язуються в школі, наведені приклади та задачі для самостійного опрацювання, були розглянуті найпоширеніші планіметричні задачі, поглиблювались знання про методику розв'язування планіметричних задач.

При розв’язуванні задач в учнів закріплюються теоретичні знання, виробляються навички застосування цих знань у практичній діяльності, розвивається творча діяльність.

Таким чином, планіметричні задачі сприяють творчому оволодінню всією сукупністю математичних знань. Чітка структура всього вивченого матеріалу допоможе їм справлятися із завданнями різного рівня.

У третьому розділі представлена методика проведення перших уроків геометрії, проаналізовано шкільні підручники з геометрії та подані результати педагогічного експерименту.

Основною метою перших уроків геометрії є дати поняття про геометрію, систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури, ввести первісні (неозначувані) поняття і поставити учнів перед потребою означення деяких відомих їм фігур (відрізок, півпряма, півплощина, кут, трикутник, паралельні прямі), розглянути первісні та означувані відношення, сформулювати основні властивості найпростіших фігур і властивості вимірювання відрізків і кутів.

Важливим завданням навчання математики є формування в учнів уміння працювати з підручником. Потрібно спеціально навчати учнів читанню підручника і науково-популярної літератури з математики. Зміст, форми і місце роботи з підручником визначаються віком учнів, рівнем їхньої математичної підготовки і наявними вміннями працювати з книжкою.

Результати магістерської роботи можуть бути використані як дидактичний матеріал для вчителів математики при проведенні уроків геометрії в основній школі.

У кваліфікаційній роботі «Методика розв’язування планіметричних задач у сучасній школі» було проаналізовано методику розв’язування планіметричних задач в основній школі.

З метою осучаснення та підвищення ефективності процесу вивчення планіметричного матеріалу в 7 – 9 класах було розроблено методику використання педагогічного програмного засобу (ППЗ) GRAN – 2D для вивчення окремих тем розділу «Планіметрія». Цю методику було апробовано в ході педагогічного експерименту, який полягав у порівнянні результатів вивчення планіметричного матеріалу учнями 8 класу, один за традиційною методикою, а інший – за методикою, запропонованою у даній роботі.

Результати експерименту продемонстрували переваги запропонованої у роботі методики з використанням педагогічного програмного засобу (ППЗ) GRAN – 2D, що було підтверджено результатами контрольного зрізу знань з теми розділу планіметрії: відсоток учнів, які засвоїли відповідну тему на високому та достатньому рівнях, значно збільшився.

Аналізуючи висновки педагогічного експерименту можна стверджувати, що розроблена у даній роботі методика має певні переваги перед традиційною для здобувачів освіти. Її використання значною мірою сприяє формуванню мотиваційної сфери здобувачів освіти, підвищенню їхньої пізнавальної активності, підвищенню зацікавленості учнів геометрією, особливо планіметричним матеріалом. Але головним здобутком використання зазначеної методики є активний розвиток просторової уяви та гнучкості мислення учнів, які є запорукою успішного засвоєння планіметрії.

Таким чином, можна зробити такі висновки:

- основну мету роботи щодо розробки спеціальної методики вивчення планіметрії з використанням педагогічного програмного засобу GRAN – 2D було досягнуто;
- завдання щодо глибокого аналізу проблеми вивчення планіметрії в 7 – 9 класах на базовому рівні та її вирішення шляхом використання сучасних педагогічних програмних засобів для вивчення геометрії було виконано;
- практичне застосування теоретичних аспектів даної роботи підтвердило її актуальність та доцільність дослідження предмету вивчення цієї роботи.

Запропонована у даній роботі методика вивчення розділу «Планіметрія» в основній школі має особливе значення на сучасному етапі освітнього процесу, коли стала актуальною змішана форма навчання, яка потребує постійного залучення інформаційно-комунікаційних технологій до освітньої діяльності, особливо під час дистанційного формату проведення уроків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г.В. Геометрія : 9 [Текст] : дворівн. підруч. Для загальноосвіт. навч. закл. / Г.В. Апостолова. – К.: Генеза, 2009. – 304 с. : іл.
2. Бевз Г.П. "Уроки геометрії в 7 класі". Посібник для вчителів /Г.Бевз, В.Бевз, Н.Владімірова. К., "Вежа", 2008. 128 с.
3. Бевз Г.П. "Методи навчання математики". Х.: Вид. Група "Основа ", 2003. 96 с.
4. Бевз Г. П. Міжпредметні зв’язки, як необхідний елемент предметної системи навчання / Г. П. Бевз // Математика в школі, 2003. №6. С. 11-15.
5. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ : Вища школа, 1989. 367 с.
6. Бевз Г. П. Методика викладання математики: загальні питання: навч.посіб. Київ : Радянська школа, 1968. 344 с.
7. Белешко Д., Дейнека О. Базові теореми планіметрії: елективний курс; відп. за вип. О. Лісовий. Київ : ТОВ “ Прайм Друк ”, 2012. 48 с.
8. Белешко Д.Т. Методика розв’язування нестандартних математичних задач. Частина 2 / Д.Т. Белешко, М.А. Віннічук, О.В. Крайчук. – Х.: Вид. група "Основа", 2017. – 78с.
9. Брадіс В. М. Методика викладання математики в середній школі / В. М. Брадіс. – К. : Радянська. школа, 1954. – 484 с.
10. Бродський Я. С. Шляхи реформування шкільної математичної освіти / Я. С. Бродський, О. Л. Павлов // Математика в школах України, 2014. №26 (38). С. 2 - 6.
11. Бурда М. І. Геометрія: навч. посібник для 8-9 кл. шкіл з поглибленим вивченням математики / М. І. Бурда, Л. М. Савченко. Київ : Освіта, 1996. 240 с.
12. Бурда М.І. Вивчення геометрії у 7 класі. Методичний посібник. К.: Радянська школа. –1984. 112 с.
13. Дороговцев А. Я. Метод координат / А. Я. Дороговцев , М. И. Ядренко. Київ : Вища школа, 1972. 96 с.
14. Єршова А. П.Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Х. : Вид-во “Ранок” ,2018. – 224 с. : іл.

15.Жалдак М. І. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навч. посібник/ В.В. Корольський, Т.Г. Крамаренко, С.О.Семеріков, С.В. Шокалюк; наук. ред. академік АПН України, д.пед. н., проф. М.І. Жалдак. Кривий Ріг: Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. 324с.

16.Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. Київ : Генеза, 2015. 184 с.

17.Кононова О.О. Організація дослідницької діяльності учнів в розв'язанні задач на побудову із застосуванням інформаційних технологій // Вісник ЛНУ імені Тараса Шевченка № 15(178), 2009.

18.Кононова О. Використання евристичних прийомів під час розв'язування позиційних задач на побудову із застосуванням інформаційних технологій // Математика в школі. – 2008. – №3. – с. 29-37.

19.Кундас Олександр, Крайчук О. В. Методика розв'язування планіметричних задач у сучасній школі з використанням засобу GRAN – 2D // Інформаційні технології в професійній діяльності : матеріали XVI Всеукраїнської науково-практичної конференції / Рівне : РВВ РДГУ. 2023. С. 146 – 148.

20.О.І. Кундас, О.В. Крайчук Методика розв'язування планіметричних задач у сучасній школі // Методичний пошук вчителя математики : зб. наук. праць за матер. VI Всеукр. наук.-практ. конф., 28-29 вересня 2023 р. – Вінниця, 2023. С. 216 – 218 .

21.Лутай В. С. Філософія сучасної освіти : Навч. посібник / В. С. Лутай. Київ : Центр "Магістр - S" Творчої спілки вчителів України, 1996. 256 с.

22.Машбиц Е. И. Психологические основы управления учебной деятельностью / Е. И. Машбиц. Київ : Вища школа, 1987. 224 с.

23.Мерзляк А.Г. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге вид., переробл. – Х. : Гімназія, 2020. – 240 с. : іл.

24.Погорєлов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 7 - 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / О. В. Погорєлов. Київ : Школяр, 2004. 240 с.

25. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
26. Сяська Н. Особливості формування системи планіметричних задач / Н. Сяська // Математика в школі : Науково-методичний журнал. 2003. №4. С. 38 - 40.
27. Черкасов Р. С. Методика викладання математики в середній школі / Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. Харків : Основа, 1992. 304 с.
28. Ярмаченко М. Д. Педагогічний словник / М. Д. Ярмаченко. Київ : Педагогічна думка, 2001. 516 с.
29. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. А. Ясінський. Тернопіль : Навчальна книга - Богдан, 2008. 208 с.
30. Тести ЗНО онлайн з математики. Освіта. UA. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/

Д О Д А Т К И

Додаток А

План-конспект уроку з геометрії на тему:
«Прямокутник. Його властивості та ознаки»
(8 клас)

Тема: «Прямокутник. Його властивості та ознаки».

Мета: формувати вміння учнів розв'язувати задачі різного рівня складності, застосовуючи означення, властивості та ознаки прямокутника.

Тип уроку: засвоєння вмінь і навичок учнів.

Обладнання: конспект уроку «Прямокутник. Його властивості та ознаки».

Хід уроку

І. Організаційний етап

ІІ. Перевірка домашнього завдання

Перевірку засвоєння учнями теоретичного матеріалу попереднього уроку можна провести або у формі математичного диктанту, або у формі бесіди за тими самими питаннями, що включені в математичний диктант.

Математичний диктант

Варіант 1

1. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Назвіть:
а) сторону, паралельну стороні BC;
б) сторону, яка дорівнює стороні CD;
в) кут, який дорівнює куту A.

2. Чи правильно, що будь-який паралелограм має два кути, сума яких дорівнює 180°?

3. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B > \angle C$. Порівняйте кути A і D.

4. У паралелограмі $ABCD$ $AB + CD > AD + BC$. Порівняйте сторони BC і CD.

5. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 1). Назвіть відрізок, який є медіаною трикутника ACD.

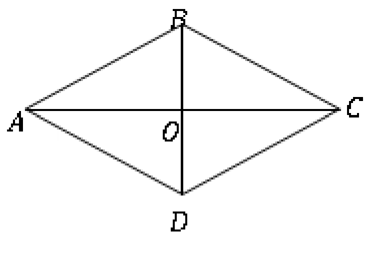


Рис. 1

Варіант 2

1. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Назвіть:
а) сторону, паралельну стороні AD;
б) сторону, яка дорівнює стороні AB;
в) кут, який дорівнює куту C.

2. Чи правильно, що будь-який паралелограм має два гострі і два тупі кути?

3. У паралелограмі *ABCD* $\angle A < \angle D$. Порівняйте кути *B* і *C*.

4. У паралелограмі *ABCD* $AB + CD < AD + BC$. Порівняйте сторони *BC* і *CD*.

5. Діагоналі паралелограма *ABCD* перетинаються в точці *O* (рис. 1). Назвіть трикутник, медіаною якого є відрізок *AO*.

Перед виконанням математичного диктанту слід нагадати учням правила виконання його завдань, а саме: умова завдань не записується (учні мають записати тільки номер запитання), відповідь має бути короткою, але змістовною (тобто у відповіді має бути аргументація — посилання на відповідне геометричне твердження).

Письмова частина домашнього завдання докладно перевіряється тільки в учнів, які потребують додаткової педагогічної уваги; у ході фронтальної перевірки правильності виконання письмових завдань достатньо озвучити твердження, яке було використане під час розв'язування задачі, а також здобуту відповідь.

III. Формулювання мети і завдань уроку

Щоб створити умови для усвідомленого сприйняття учнями логіки вивчення матеріалу, пропонуємо їм проаналізувати, яким чином із довільного паралелограма утворилась нова фігура — прямокутник (якщо всі кути паралелограма «зробити» рівними, то «виходить» прямокутник). Вивчення означення, властивостей та ознак цієї фігури, опанування способами їх застосування є основною дидактичною метою уроку.

IV. Актуалізація опорних знань та вмінь

З метою свідомого розуміння та подальшого засвоєння змісту означення, властивостей, ознак прямокутника слід активізувати знання і вміння учнів щодо означення, властивостей та ознак паралелограма; означення, властивостей та ознак рівнобедреного трикутника.

Досягненню цієї мети сприятиме розв'язування усних задач.

Виконання усних вправ

1. У паралелограмі *ABCD* *AM* — бісектриса кута *A*, *BH* — бісектриса кута *B* (рис.2). Доведіть, що $BH \perp AM$.

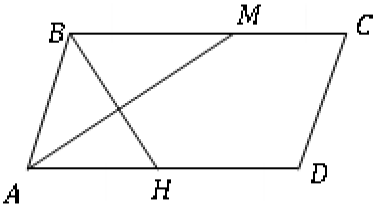


Рис. 2

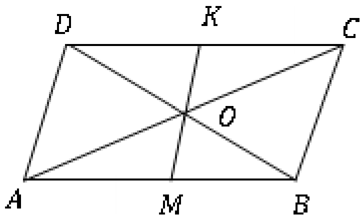


Рис. 3

2. У паралелограмі *ABCD* через точку перетину діагоналей проведено відрізок,

кінці якого лежать на його сторонах (рис.3). Доведіть, що *OM* = *OK*.

V. Засвоєння знань

План вивчення нового матеріалу

1. Означення прямокутника.
2. Ознаки прямокутника.
3. Властивості прямокутника.

Розглядаючи питання про означення прямокутника, слід звернути увагу учнів на той факт, що оскільки названа фігура є різновидом паралелограма, то й означення цієї фігури дається через поняття паралелограма (тобто мова йде про формулювання означення через споріднене поняття); таким чином ми попереджаємо традиційні помилки учнів, яких вони припускаються, формулюючи означення прямокутника як чотирикутника, у якого... (далі йде перелік певних ознак). Вивчаючи властивості прямокутника, так само як і під час розгляду питання про властивості паралелограма, слід зробити акцент на тому, що із самого означення цієї фігури випливає більшість її властивостей. Тому все, що слід зробити на цьому етапі вивчення матеріалу, – це сформулювати вивчені властивості, адаптувавши їх для названої фігури (зрозуміло, що доводити ці властивості не треба).

Інша річ, «додаткові» властивості та ознаки прямокутника.

Якщо всі кути паралелограма прямі, то цей паралелограм — прямокутник.

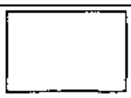
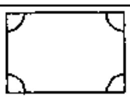
1. Якщо в паралелограмі всі кути рівні, то цей паралелограм – прямокутник.
2. Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то цей паралелограм – прямокутник.

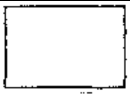
Оскільки вони є специфічними (тобто виконуються тільки для прямокутника), то необхідно їх довести (доведення можна провести за підручником або запропонувати учням виконати його самостійно, або запропонувати в якості індивідуального завдання для сильних учнів).

Повний перелік тверджень, які слід вивчити з восьмикласниками стосовно прямокутника, вміщено в конспекті «Прямокутник. Його ознаки та властивості» (таблиця 1).

Прямокутник. Його ознаки та властивості.

Таблиця 1

	Означення прямокутника	
		Прямокутник — це паралелограм, у якого всі кути прямі
	Ознаки прямокутника	
1.		Якщо в паралелограмі всі кути рівні, то цей паралелограм — прямокутник

2.		Якщо в паралелограмі один кут прямий, то цей паралелограм — прямокутник
3.		Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то цей паралелограм — прямокутник
4.		Якщо в чотирикутнику три кути прямі, то цей чотирикутник — прямокутник
	Властивості прямокутника	
1.		Усі властивості паралелограма
2.		Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то цей паралелограм — прямокутник

VI. Формування первинних умінь

Виконання усних вправ

Задача 1. Дано: *ABCD* — прямокутник, $\angle 1 = 120°$ (рис. 4). Знайти: $\angle 2$.

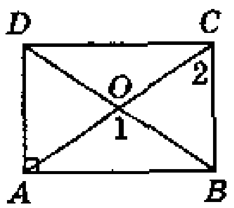


Рис. 4

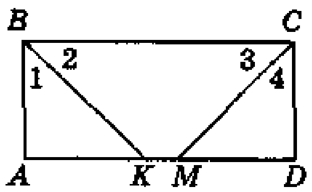


Рис. 5

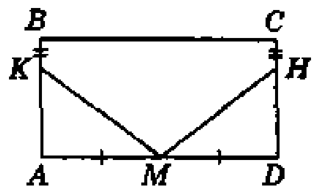


Рис. 6

(Відповідь: 60°.)

Задача 2. Дано: *ABCD* — прямокутник, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 5).
Довести: *BK* = *MC*.

Задача 3. Дано: *ABCD* — прямокутник, *BK* = *CH*, *AM* = *MD* (рис. 6).
Довести: *KM* = *HM*.

Виконання письмових вправ

Задача 1. У прямокутнику бісектриса кута ділить протилежну сторону на відрізки 17 см і 8 см починаючи від найближчої до цього кута вершини. Знайдіть периметр прямокутника.

Розв'язання:

Нехай $ABCD$ (рис. 7) — даний прямокутник, BM — бісектриса кута B, AM = 17 см, DM = 8 см. Тоді $\angle ABM = \angle CBM = 45°$ (BM — бісектриса). Отже, у прямокутному трикутнику ABM ($\angle A$ = 90°) $\angle BMA$ = 90° - 45° = 45°. Тобто трикутник ABM — рівнобедрений, $AB = AM$ = 17 см. За властивістю протилежних сторін прямокутника $CD = AB$ = 17 см. DM = 8 см (за умовою), отже, $AD = AM + MD = 17 + 8 = 25$ (см). $BC = AD$ = 25 см.

Таким чином, $P_{ABCD} = (AB + BC) \cdot 2 = (17 + 25) \cdot 2 = 42 \cdot 2 = 84$ (см).

Відповідь: 84 см.

Задача 2. У прямокутнику діагональ ділить кут у відношенні 1:2, менша сторона прямокутника дорівнює 2,7 см. Знайдіть довжини діагоналей прямокутника.

Розв'язання:

Нехай $ABCD$ (рис. 8) — даний прямокутник, BD — його діагональ, $AB < BC$, AB = 2,7 см. Нехай $\angle CBD = x$ ($x > 0$), тоді $\angle ABD = 2x$. Оскільки $\angle ABC = 90°$, маємо: $x + 2x = 90°$, $3x = 90°$, $x = 30°$. Отже, $\angle ABD = 60°$, $\angle CBD = 30°$. $\angle BDA = \angle BDC = 30°$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD і січній BD. Таким чином, у трикутнику ABD ($\angle A = 90°$) катет AB, що лежить проти кутав 30°, дорівнює половині гіпотенузи: $AB = \frac{1}{2} BD$. Отже, $BD = 2AB = 2 \cdot 2{,}7 = 5{,}4$ (см). Діагоналі прямокутника рівні, тобто $AC = BD$ = 5,4 см.

Відповідь: 5,4 см; 5,4 см.

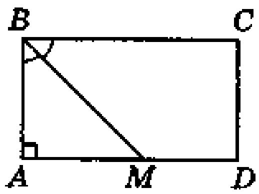


Рис. 7

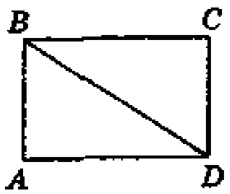


Рис. 8

Задача 3. У прямокутний трикутник, кожний катет якого дорівнює 6 см, вписаний прямокутник, який має із трикутником спільний кут. Знайдіть периметр прямокутника.

Розв'язання:

Нехай ABC (рис. 9) — даний прямокутний трикутник, у якому $\angle C = 90°$, $AC = CB$ = 6 см, $CKLM$ — прямокутник. У трикутнику ABC $\angle A = \angle B = 45°$, оскільки цей трикутник рівнобедрений. Отже, у трикутнику AKL, де $\angle AKL = 90°$ (оскільки $CKLM$ — прямокутник), теж $\angle ALK = \angle KAL = 45°$.

Таким чином, трикутник AKL — рівнобедрений, $AK = KL$. Аналогічно в трикутнику LMB, де $\angle LMB = 90°$, $\angle MLB = \angle B = 45°$ і $LM = MB$. Отже, $CA = CK + KA = CK + KL = 6$ (см). Звідси $P_{CKLM} = 2 \cdot (CK + KL) = 12$ см.

Відповідь: 12 см.

Задача 4. У прямокутнику точка перетину діагоналей знаходиться від меншої сторони на 4 см далі, ніж від більшої. Периметр прямокутника дорівнює 56 см. Знайдіть сторони прямокутника.

Розв'язання:

Нехай $ABCD$ (рис. 10) — даний прямокутник, точка O — точка перетину його діагоналей. Проведемо відрізки OM,

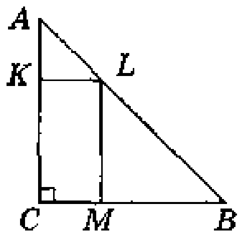


Рис. 9

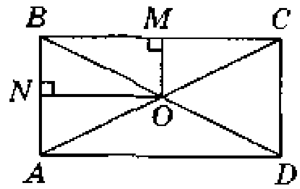


Рис. 10

перпендикулярний до сторони BC, і ON, перпендикулярний до сторони AB. Оскільки $BC > AB$, то ON на 4 см більше від OM за умовою. У трикутнику BOC $BO = OC$ як половини рівних діагоналей AC і BD. Отже, у трикутнику BOC висота OM є й медіаною (властивість висоти рівнобедреного трикутника, проведеної до основи). Тобто $BM = \frac{1}{2}BC$. Аналогічно в трикутнику BOA ($BO = OA$) точка N — середина AB, $BN = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$. Оскільки за умовою $P_{ABCD} = 56$ см, то $AB + BC = 28$ (см), а $BN + BM = 28 : 2 = =14$ (см). Розглянемо чотирикутник $BMON$: у ньому три прямі кути, отже, $BMON$ — прямокутник за ознакою. $OM = BN = x$ см, тоді $MB = ON = (x + 4)$ см. ($x > 0$) Отже, $x + x + 4 = 14$, $2x = 10$, $x = 5$. Таким чином, $BN = 5$ см, тоді $AB = CD = 10$ см, а $BM = 5 + 4 = 9$ (см), $BC = AD = 18$ см.

Відповідь: 10 см, 10 см, 18 см, 18 см.

VII. Підсумки уроку

1. Які спільні властивості мають прямокутник і паралелограм ?
2. Які властивості прямокутника не характерні для паралелограма ?
3. Чи є прямокутником паралелограм, в якого всі кути прямі ?

VIII. Домашнє завдання

Завдання середнього рівня

1. У прямокутнику $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей, $\angle AOD = 70°$. Знайдіть кут OCD.

Завдання достатнього рівня

2. Знайдіть кут між меншою стороною та діагоналлю прямокутника, якщо він на 30° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

Завдання високого рівня

3. Перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника до діагоналі, ділить її у відношенні 3:1. Знайдіть довжину діагоналей прямокутника, якщо точка перетину діагоналей віддалена від більшої сторони на 6 см.

Додаток Б

План-конспект уроку з геометрії на тему:

« Ромб. Квадрат».

(8 клас)

Тема: « Ромб. Квадрат».

Мета: працювати над засвоєнням учнями змісту означень, властивостей та ознак ромба і квадрата.

Формувати вміння:

- відтворювати вивчені твердження;
- застосовувати властивості, ознаки ромба і квадрата до розв'язування типових задач;
- застосовувати властивості, ознаки ромба і квадрата разом із раніше вивченими твердженнями в темі «Чотирикутники» до розв'язування задач підвищеного рівня складності.

Тип уроку: засвоєння вмінь та навичок.

Наочність та обладнання: конспект «Ромб, квадрат».

Хід уроку

I. Організаційний етап

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку засвоєння учнями теоретичного матеріалу попереднього уроку можна провести або у формі математичного диктанту, або у формі бесіди за тими самими питаннями, що включені в математичний диктант.

Математичний диктант

Варіант 1

1. Чи є прямокутником паралелограм, один із кутів якого прямий?
2. Чи правильно, що кожен прямокутник є паралелограмом?
3. Діагоналі прямокутника *AEKM* перетинаються в точці *O*. Відрізок *AO* дорівнює 3 дм. Знайдіть довжину діагоналі *EM*.
4. Діагоналі чотирикутника рівні. Чи обов'язково цей чотирикутник є прямокутником?

Варіант 2

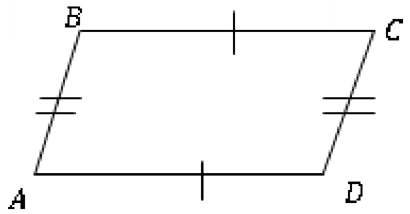
1. Чи обов'язково чотирикутник з прямим кутом є прямокутником?
2. Чи правильно, що кожен паралелограм є прямокутником?
3. Діагоналі паралелограма мають довжину 3 дм і 5 дм. Чи цей паралелограм є прямокутником?
4. Сума довжин діагоналей прямокутника дорівнює 13 м. Знайдіть довжину кожної діагоналі.

Перед виконанням математичного диктанту слід нагадати учням правила виконання його завдань, а саме: умова завдань не записується (учні мають записати тільки номер запитання), відповідь має бути короткою, але змістовною (тобто у відповіді має бути аргументація — посилання на відповідне геометричне твердження).

Письмова частина домашнього завдання докладно перевіряється тільки в учнів, які потребують додаткової педагогічної уваги; у ході фронтальної перевірки правильності виконання письмових завдань достатньо озвучити твердження, яке було використане під час розв'язування задачі, а також здобуту відповідь.

III. Формулювання мети і завдань уроку

Щоб створити умови для усвідомленого сприйняття учнями логіки вивчення матеріалу, пропонуємо їм проаналізувати, яким чином із довільного паралелограма утворилась нова фігура — прямокутник (якщо всі кути паралелограма «зробити» рівними, то «виходить» прямокутник). Далі вчитель ставить запитання: «Які ще елементи паралелограма можна зробити рівними?» Звісно, більшість учнів дає правильну відповідь (сторони). Після чого формулюється наступне запитання: «Чи існує паралелограм, у якого і сторони, і кути рівні?» Здобувши ствердну відповідь, учитель виділяє таким чином два нові (тобто такі, що раніше не вивчались на уроках геометрії) геометричні



об'єкти. Вивчення означення, властивостей та, можливо, ознак цих фігур, опанування способами їх застосування є основною дидактичною метою уроку.

IV. Актуалізація опорних знань та вмінь

З метою свідомого розуміння та подальшого засвоєння змісту означень, властивостей, ознак ромба і квадрата слід активізувати знання і вміння учнів щодо означення, властивостей та ознак паралелограма, прямокутника; означення, властивостей та ознак рівнобедреного трикутника.

Досягненню цієї мети сприятиме розв'язування усних задач.

Виконання усних вправ

1. Яких помилок припустилися під час зображення паралелограма на рис. 1 а); на рис. 1 б); на рис. 1 в) ?

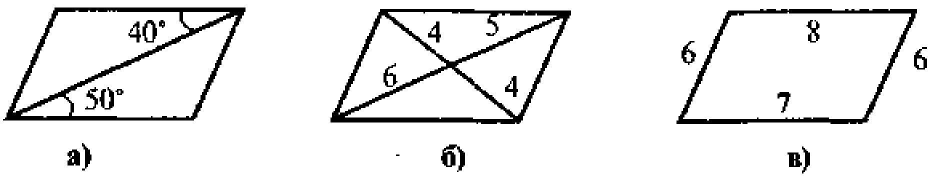


Рис. 1

2. У чотирикутнику *ABCD AB = DC, AD = BC* (рис. 2).
Доведіть, що *ABCD* — паралелограм.

Рис. 2

V. Засвоєння знань

План вивчення нового матеріалу.

1. Означення ромба.
2. Властивості ромба.
3. Ознаки ромба.
4. Квадрат: означення, властивості.

Розглядаючи питання про означення прямокутника й ромба, слід звернути увагу учнів на той факт, що оскільки названі фігури є різновидами паралелограма, то й означення цих фігур дається через поняття паралелограма (тобто мова йде про формулювання означень через споріднене поняття); таким чином ми попереджаємо традиційні помилки учнів, яких вони припускаються, формулюючи означення прямокутника (ромба) як чотирикутника, у якого... (далі йде перелік певних ознак). Означення квадрата також формулюється за цим принципом, але на відміну від прямокутника та ромба, для яких безпосередньо спорідненим є поняття паралелограма, означення квадрата формулюється через поняття або ромба (в якого всі кути прямі), або через поняття прямокутника (в якого всі сторони рівні). При цьому звертаємо увагу учнів на еквівалентність цих обох означень.

Вивчаючи властивості ромба і квадрата, так само як і під час розгляду питання про властивості прямокутника, слід зробити акцент на тому, що із самих означень цих фігур випливає більшість їх властивостей (для ромба — це всі властивості паралелограма, а для квадрата — це всі властивості і прямокутника, а отже й паралелограма та ромба). Тому все, що слід зробити на цьому етапі вивчення матеріалу, — це сформулювати вивчені властивості, адаптувавши їх для названих фігур (зрозуміло, що доводити ці властивості не треба).

«Додаткові» властивості та ознаки ромба.

1. Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — ромб.

2. Якщо сусідні сторони паралелограма рівні, то цей паралелограм — ромб.

3. Паралелограм із перпендикулярними діагоналями є ромбом.

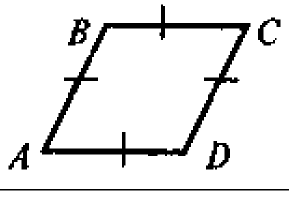
4. Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його протилежних кутів, то цей паралелограм — ромб.

Оскільки вони є специфічними (тобто виконуються тільки для ромба), то необхідно їх довести (доведення можна провести за підручником або запропонувати учням виконати його самостійно, або запропонувати в якості індивідуального завдання для сильних учнів).

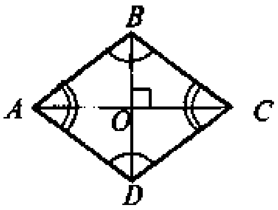
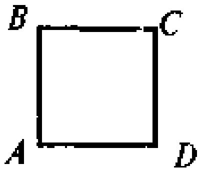
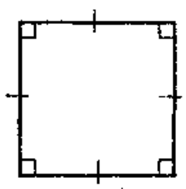
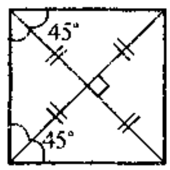
Повний перелік тверджень, які слід вивчити з восьмикласниками стосовно ромба і квадрата, вміщено в конспекті «Ромб. Квадрат» (таблиця 1).

Ромб. Квадрат.

Таблиця 1

<table>
<tr><td colspan="3">

Ромб
Означення. Паралелограм, усі сторони якого рівні, називається ромбом</td></tr>
<tr><td></td><td>Властивості</td><td>Ознаки</td></tr>
</table>

	1. Має всі властивості паралелограма, тобто: 1) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; 2) $AO = OC$, $BO = OD$	1. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = BC = CD = AD$, то $ABCD$ — ромб
	2. Якщо $A\ BCD$ — ромб, AC і BD — діагоналі, то: 1) $AC \perp BD$, 2) $\angle OAD = \angle OAB$. $\angle ODA = \angle ODC$	2. Якщо $ABCD$ — паралелограм і $AB = BC$, то $ABCD$ — ромб
		3. Якщо $ABCD$ — паралелограм і *AC1BD,* то $ABCD$ - ромб
		4. Якщо $ABCD$ — паралелограм і AC — бісектриса кутів A і С, то $ABCD$ - ромб
Квадрат		
	*Означення.* Прямокутник, усі сторони якого рівні, називається квадратом. *Означення.* Ромб, усі кути якого прямі, називається квадратом	
Властивості		
		Має всі властивості прямокутника і ромба

VI. Формування первинних умінь

Виконання усних вправ

1. Назвіть види паралелограмів, у яких: а) усі кути рівні; б) усі сторони рівні; в) діагоналі рівні; г) діагоналі перпендикулярні.

2. Діагоналі ромба *ABCD* перетинаються в точці *O* (рис. 3). Назвіть:

а) бісектрису трикутника *ABD;*

б) висоту трикутника *ABC;*

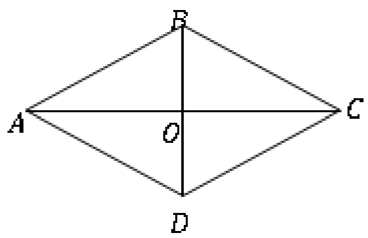
в) медіану трикутника *BCD.* Рис. 3

3. Діагоналі квадрата *ABCD* перетинаються в точці *O.* Назвіть усі рівні трикутники, які утворюються при перетині діагоналей. Визначте її вид.

Виконання графічних вправ

1. Накресліть дві перпендикулярні прямі, які перетинаються в точці *O.* На одній з прямих відкладіть по різні боки від точки *O* рівні відрізки *OA* і *OC,* а на другій прямій — рівні відрізки *OB* і *OD.* Сполучіть точки *A, B, C* і *D.*

а) Виміряйте сторони чотирикутника *ABCD* і визначте його вид.



б) Виміряйте кут *A* чотирикутника *ABCD.* Користуючись властивостями цього чотирикутника, знайдіть градусні міри інших його кутів. Перевірте результати вимірюванням.

в) Виміряйте кути *ADB* і *CDB.* Виділіть кольором усі пари рівних кутів між діагоналями і сторонами чотирикутника.

2. Накресліть прямокутний трикутник *ABD* з гіпотенузою *BD.* Про ведіть через вершини *B* і *D* прямі, паралельні сторонам *AD* і *AB* відповідно. Позначте точку *C* — точку перетину цих прямих.

а) Виміряйте сторони чотирикутника *ABCD* і визначте його вид;

б) Проведіть діагональ *AC.* Виміряйте і порівняйте довжини діагоналей чотирикутника;

в) Позначте на прямих *BC* і *AD* точки C_1 і D_1 так, щоб чотирикутник ABC_1D_1 був квадратом.

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть кути ромба, якщо:

а) один із них на 100° більший за інший;

б) одна з його діагоналей дорівнює стороні.

2. Знайдіть кути ромба, якщо:

а) кути, утворені його стороною з діагоналями, відносяться як 1 : 4;
б) висота ромба удвічі менша від сторони.

3. Периметр квадрата дорівнює 40 м. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторони.

4. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, дві вершини якого лежать на гіпотенузі трикутника, в дві інші — на катетах. Знайдіть периметр квадрата, якщо гіпотенуза дорівнює 18 см.

VII. Підсумки уроку

1.Які спільні властивості мають ромб і квадрат?
3. Які властивості квадрата не характерні для прямокутника?
4. Чи є квадратом:
а) прямокутник *ABCD,* діагональ *AC* якого є бісектрисою кута *BAD;*
б) ромб, діагоналі якого рівні;
в) паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні;

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст означення, властивостей та ознак ромба і квадрата.
Розв'язати задачі.
1. Знайдіть кути ромба, якщо:
а) сума двох із них дорівнює 200°;
б) діагональ утворює з однією зі сторін кут 35°.

2. Відстань між протилежними сторонами квадрата дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата.

3. Знайдіть кути ромба, якщо висота, проведена з вершини тупого кута, відтинає від ромба рівнобедрений трикутник.

Додаток В

План-конспект уроку з геометрії на тему:
«Середня лінія трапеції, її властивості».
(8 клас)

Тема: «Середня лінія трапеції, її властивості».
Мета: увести поняття «середня лінія трапеції»,довести теорему про властивість середньої лінії трапеції; формувати вміння розв'язувати задачі, застосовуючи теорему про середню лінію трапеції.
Тип уроку: засвоєння нових знань.
Обладнання: конспект уроку «Середня лінія трапеції, її властивості».

Хід уроку

I. Організаційний етап

Учні розподіляються на групи по 5 – 6 осіб.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку здійснюють у кожній групі консультанти і їхні помічники.

Учитель перевіряє виконання домашнього завдання у консультантів і дає їм необхідні інструкції.

III. Формулювання мети і завдань уроку

Сьогодні ми продовжимо вивчати трапецію, її елементи, детальніше проаналізуємо її основну властивість, а також розглянемо типові завдання.

IV. Актуалізація опорних знань та вмінь

Питання до класу

1. Сформулюйте означення трапеції.
2. Які сторони трапеції називаються основами?
3. Що називається середньою лінією трикутника?
4. Сформулюйте властивість середньої лінії трикутника.

V. Засвоєння знань

План вивчення нового матеріалу

1. Означення середньої лінії трапеції.
2. Формулювання та доведення теореми про середню лінію трапеції.

Учитель формулює означення середньої лінії трапеції і дає учням завдання: зобразити трапецію *ABCD* і її середню лінію — відрізок *MN***.**

Питання до класу

- Як розташована середня лінія трапеції відносно її основ?

Для визначення довжини середньої лінії можна запропонувати виміряти довжини основ і порівняти їх півсуму з довжиною середньої лінії. Для підтвердження припущень щодо властивостей середньої лінії трапеції вчитель пропонує довести відповідну теорему двома способами.

Теорема. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

Одним із способів учитель доводить теорему сам, другим способом учні доводять її самостійно.

VI. Формування первинних умінь

Виконання усних вправ

1. Основи трапеції дорівнюють 5 см і 9 см. Чому дорівнює середня лінія трапеції? (*Відповідь:* 7 см.)
2. Відрізок *MN* – середня лінія трапеції *ABCD* (рис. 1). Через точку *N* проведено пряму, яка паралельна стороні *AB* і перетинає сторону *AD* у точці *L*. Доведіть, що *AMNL* – паралелограм.
3. У трапеції *ABCD* *AB* = 4 см, *BC* = 6 см, *CD* = 5 см, *AD* = 10 см, *MN* – середня лінія. Чому дорівнюють сторони трапеції *AMND1* (*Відповідь:* 2

см; 8 см; 2,5 см; 10 см.)

4. Кожну з бічних сторін трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) розділено на чотири рівні частини (рис. 2). Чому дорівнюють відрізки EF, MN і QP, якщо $AD = 11$ см, $BC = 3$ см ? (*Відповідь*: $EF = 9$ см; $MN = 7$ см; $QP = 5$ см.)

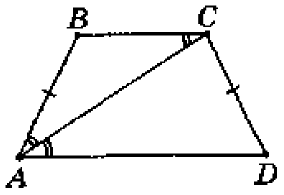


Рис. 3

5. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а одна з основ – 6 см. Знайдіть другу основу трапеції. (*Відповідь:* 10 см.)

Виконання письмових вправ

1. Середня лінія трапеції дорівнює 24 см. Основи трапеції відносяться як 3 : 5. Знайдіть основи трапеції. (*Відповідь:* 18 см; 30 см.)
2. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 14 см. Знайдіть відрізки, на які діагональ ділить середню лінію трапеції. (*Відповідь:* 4 см і 7 см.)
3. Більша основа трапеції дорівнює 8 см, а менша основа на 3 см є меншою від

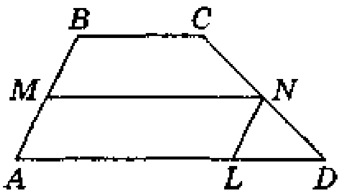


Рис. 1

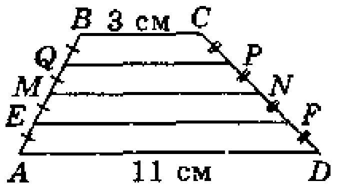


Рис. 2

середньої лінії. Знайдіть меншу основу та середню лінію трапеції. (*Відповідь:* 2 см, 5 см.)

4. У трапеції $ABCD$ бічна сторона AB перпендикулярна до основ, а бічна сторона CD дорівнює діагоналі AC. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо $BC = 1$ м. (*Відповідь:* 1,5 м.)
5. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, одна з основ на 6 см більша від іншої. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 74 см.

Розв'язання:

Нехай $ABCD$ (рис. 3) — рівнобічна трапеція ($AB = CD$), AC — бісектриса кута A. Нехай $BC = x$ см ($x > 0$), тоді ($x + 6$) см — нижня основа трапеції. Оскільки $\angle BAC = \angle CAD$ і $BC \parallel AD$, а AC — січна, то $\angle BCA = \angle CAD$, і отже, трикутник ABC рівнобедрений з основою AC. Таким чином, $AB = BC = CD = x$ см. Тоді за умовою $P_{ABCD} = x + x + x + x + 6 = 74$, $4x = 68$, $x = 17$. Отже, $BC = 17$ см, $AD = 17 + 6 = 23$ (см).

Таким чином, середня лінія трапеції дорівнює $\frac{23+17}{2} = 20$ (см).

Відповідь: 20 см.

6. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 18 см, а більша основа – 32 см. Кут між ними дорівнює 60°. Знайдіть середню лінію трапеції.

Розв'язання:

Нехай $ABCD$ (рис. 4) — рівнобічна трапеція, $AB = CD = 18$ см, $AD = 32$ см, $\angle BAD = 60°$. Із вершин B і С трапеції проведемо висоти BK і CM ($BK \perp AD$, $CM \perp AD$). Тоді у трикутнику ABK $AK = \frac{1}{2}AB = 9$ см (як катет, який лежить проти кута в 30°). Отже, $MD = 9$ см. Тоді $KM = AD - 2AK = 32 - 18 = 14$ (см). Звідси $BC = KM = 14$ см. Отже, середня лінія трапеції $ABCD$ дорівнює:

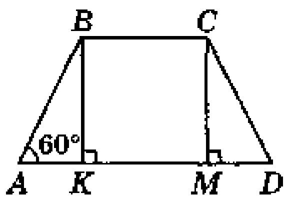


Рис. 4

$$\frac{AD+BC}{2} = \frac{32+14}{2} = 23 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 23 см.

VII. Підбиття підсумків уроку

Питання до класу

1. Який відрізок у трапеції називається її середньою лінією?
2. Сформулюйте властивість середньої лінії трапеції.
3. Чи може середня лінія трапеції дорівнювати одній з основ?

VIII. Домашнє завдання

Завдання середнього рівня

1. Чи може середня лінія трапеції бути: а) у 2 рази більшою, ніж менша основа? б) у 2 рази меншою, ніж більша основа?

2. Середня лінія трапеції дорівнює 11 см, а менша основа – 6 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

Завдання достатнього рівня

3. Більша основа трапеції відноситься до середньої лінії як 5:4. Середня лінія більша за меншу основу на 5 см. Знайдіть основи трапеції.

4. Діагональ AC ділить прямокутну трапецію $ABCD$ на два трикутники – прямокутний і рівносторонній. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її більша основа дорівнює 12 см.

Завдання високого рівня

5. У прямокутній трапеції $ABCD$ ($BC||AD$) діагональ AC є перпендикулярною до бічної сторони CD і ділить кут A у відношенні 2:1 починаючи від вершини більшої основи. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо $AC = 14$ см.

6. У рівнобічній трапеції з гострим кутом 60° бісектриса цього кута ділить меншу основу навпіл. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо менша основа дорівнює 16 см.

Додаток Г

План-конспект уроку з геометрії на тему:
«Тематична контрольна робота з теми «Розв’язування прямокутних трикутників»
(8 клас)

Тема: «Тематична контрольна робота з теми «Розв’язування прямокутних трикутників».

Мета: перевірити рівень засвоєння учнями знань щодо змісту основних понять теми: «Розв’язування прямокутних трикутників»; розвиток вмінь аналізувати, робити висновки, знаходити власні способи розв’язання; прищеплення інтересу до математики.

Тип уроку: контроль та корекція знань і вмінь.

І. Організаційний етап

ІІ. Перевірка домашнього завдання

Зібрати зошити із виконаною домашньою самостійною роботою (роботу перевірити та врахувати під час виставлення тематичного бала).

ІІІ. Повідомлення теми і мети уроку

Сьогодні ми виконаємо тематичну контрольну роботу з теми: «Розв’язування прямокутних трикутників». Метою уроку є перевірка рівня засвоєння учнями знань щодо змісту основних понять теми.

IV. Умова тематичної контрольної роботи

Варіант 1

Початковий рівень

1. У прямокутному трикутнику з катетами *a* і *b* та гіпотенузою *c* знайдіть *c*, якщо $a = 3$, $b = 4$.

2. У прямокутнику знайдіть периметр, якщо діагональ дорівнює 10 см, а одна зі сторін — 6 см.

Середній рівень

3. Знайдіть невідомі сторони прямокутного ΔABC $(\angle C = 90^0)$, якщо:
а) $BC = 2см, \cos B = \frac{2}{3}$; б) $AC = 3см, \sin B = \frac{1}{4}$.

Достатній рівень

4. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 6 см.

5. У прямокутному трикутнику катети відносяться як 5:12, а гіпотенуза 39см. Знайти катети.

Високий рівень

6. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 8 см і 18 см, а висота 12 см. Знайдіть периметр трапеції.

Варіант 2

Початковий рівень

1. У прямокутному трикутнику з катетами *a* і *b* та гіпотенузою *c* знайдіть *c*, якщо $a = 4$, $b = 5$.

2. У прямокутнику знайдіть периметр, якщо діагональ дорівнює 10 см, а одна зі сторін — 8 см.

Середній рівень

3. Знайдіть невідомі сторони прямокутного ΔABC ($\angle C = 90^0$), якщо:
   а) $AC = 8см, tg\,B = 3$; б) $AC = 3см, \cos A = \frac{1}{4}$.

Достатній рівень

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см, *а* бічна сторона — 13 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до основи.

5. У прямокутному трикутнику катети відносяться як 3:4, а гіпотенуза 45см.

   Знайти катети.

Високий рівень

6. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 21 см і 28 см, а більша бічна сторона — 25 см. Знайдіть периметр трапеції.

V. Підсумки уроку

Після виконання тематичної контрольної роботи оголошуємо правильні відповіді до завдань, або роздаємо учням для опрацювання вдома копії правильних розв'язань завдань контрольної роботи (заготовлених учителем заздалегідь).

VI. Домашнє завдання

Виконати аналіз контрольної роботи (за розданими розв'язаннями).

Додаток Д

Лист самоконтролю з теми:

"Прямокутний трикутник"

Варіант 1

1. Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 6 см, то гіпотенуза дорівнює …
   а) 7 см; б) 8 см; в) $\sqrt{61}$ см; г) 9 см. (1 бал)
2. Якщо гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а один з катетів – 8 см, то другий катет дорівнює …
   а) 7 см; б) 10 см; в) $4\sqrt{5}$ см; г) 6 см. (1 бал)
3. Якщо діагональ прямокутника дорівнює 10 см, а одна із сторін – 8 см, то периметр прямокутника дорівнює …

а) 28 см; б) 24 см; в) 38 см; г) 14 см. (1 бал)

4. Якщо основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а висота, що проведена до неї - 12 см, то бічна сторона трикутника дорівнює …

   а) 14 см; б) $6\sqrt{5}$ см; в) $\sqrt{117}$ см; г) $2\sqrt{33}$ см. (1 бал)

5. У рівнобедреному трикутнику висота, що проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки m і n, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Визначити основу трикутника.

   а) $\sqrt{2mn}$; б) $\sqrt{2n(m+n)}$; в)$\sqrt{m+n}$; г) 2mn. (2 бали)

6. Більша основа прямокутної трапеції – 10 см, а менша – 7 см. Знайти більшу бічну сторону трапеції, якщо менша дорівнює 4 см.

   а) 5 см; б) $2\sqrt{17}$ см; в) $\sqrt{17}$ см; г) 6 см. (2 бали)

7. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює 18 см, а висота трикутника – 48 см. Визначити периметр трикутника.

   а) 100 см; б) 124 см; в) 144 см; г) 160 см. (4 бали)

Варіант 2

1. Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 8 см, то гіпотенуза дорівнює …

   а) 10 см; б) $\sqrt{113}$ см; в) $2\sqrt{7}$ см; г) 9 см. (1 бал)

2. Якщо гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює с, а один з катетів – b, то другий катет дорівнює …

   а) $\sqrt{c^2+b^2}$; б) $\sqrt{b^2-c^2}$; в) $\sqrt{c^2-b^2}$; г) $\sqrt{b^2+c^2}$. (1 бал)

3. Якщо діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см, то його сторона дорівнює …

   а) 13 см; б) $\sqrt{117}$ см; в) 10 см; г) 14 см. (1 бал)

4. Якщо бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, а основа – 8 см, то висота, проведена до основи трикутника, дорівнює …

   а) 5 см; б) $2\sqrt{5}$ см; в) 4 см; г) $2\sqrt{7}$ см. (1 бал)

5. У трикутнику висота і медіана, що проведені до сторони 16 см, відповідно дорівнюють 3 см і 5 см. Знайти довжину меншої з двох інших сторін трикутника.

   а) 5 см; б) $\sqrt{26}$ см; в) $2\sqrt{13}$ см; г) 6 см. (2 бали)

6. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 16 см і 26 см, а бічна сторона – 13 см. Знайти висоту трапеції.

   а) 8 см; б) 12 см; в) 10 см; г) $\sqrt{67}$ см (2 бали)

7. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює 8 см, а висота трикутника – 18 см. Визначити периметр трикутника.
   а) 30 см; б) 36 см; в) 46 см; г) 60 см. (4 бали)