Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота магістерського рівня
на тему:

Методика розв’язування нерівностей у класах з поглибленим вивченням математики сучасної школи

Виконала:
студентка ІІ курсу групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Білецька Мар'яна Анатоліївна

Керівник: канд. пед. наук, проф. кафедри математики з МВ Павелків О. М.

Рецензент: канд. фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики
Демчик Світлана Петрівна

Рівне – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. За останні роки у соціальному житті суспільства відбулися значні зміни, що вимагають перегляду системи освіти. Її переорієнтовують у бік демократизації та гуманізації освіти, яка спрямована на виховання, перш за все, особистості, функціонально грамотної і методологічно компетентної, яка володіє інформаційними технологіями, здатна адаптуватися до навколишнього середовища, до аналізу і самоаналізу, до свідомого вибору і до відповідальності за нього. У зв'язку з цим з'явилися різні типи навчальних закладів, внесені зміни до навчальних програм та навчальних планів. Метою зміни системи освіти є, перш за все, її орієнтація на учнів, на задоволення їх індивідуальних освітніх потреб. Немає сумнівів у необхідності впровадження профільності навчання у старшій школі, але це ставить перед освітніми діячами цілу низку проблем, вирішення яких потребує нових теоретичних і практичних досліджень. Поглиблене навчання породжує проблеми викладання всіх предметів, зокрема, математики відповідно до профілю.

Знати математику – це насамперед уміти користуватися нею. Для цього слід розв'язувати багато задач. Це задачі з реальними даними, що стосуються використання, збереження та примноженняприродних ресурсів, безпеки і охорони здоров'я громадян, кількісних показників розвитку суспільства і планування господарської діяльності, складання сімейного бюджету та реальної оцінки власних можливостей тощо.

У розгляді даного питання наявний певний фонд наукових джерел. Вітчизняні освітяни цій проблемі приділяють велику увагу, але повного розв'язання її ще немає. У ході інформаційного дослідження не вдалося виявити відповідні розробки методичних систем забезпечення профільного навчання математики в Україні.

Об'єкт дослідження – процес викладання математики у класах з поглибленим вивченням математики та у профільних класах старшої школи.

Предметом дослідження є методика вивчення нерівностей у класах з поглибленим вивченням математики.

Мета магістерської роботи полягає в тому, щоб розглянути особливості методики та прийоми розв’язування нерівностей в класах з поглибленим вивченням математики сучасної школи.

Завдання дослідження:

– здійснити теоретичну характеристику профільного вивчення математики;
– розглянути методичні особливості вивчення нерівностей та їх систем в курсі математики;
- здійснити аналіз програми вивчення математики у профільних класах;
– проаналізувати методичну літературу з теми дослідження, шкільні підручники;
– ознайомитись з теоретичними відомостями, розглянути основні теореми та методичні факти, що стосуються даної теми;
– навести приклади розв'язування нерівностей різними методами, що застосовуються у класах з поглибленим вивченням математики.

Методи дослідження. Теоретичні – системний аналіз психолого-педагогічної і навчально-методичної літератури з проблеми дослідження, моделювання педагогічних процесів. Емпіричні – спостереження, бесіди з вчителями і викладачами, вивчення і узагальнення досвіду загальноосвітніх закладів щодо реалізації профільного навчання.

Наукова новизна і теоретичне значення роботи полягає в обґрунтуванні необхідності впровадження профільного навчання у старшій школі та виявленні особливостей вивчення математики у профільних класах.

Практична значущість. Матеріал може бути використаний вчителями математики та студентами для проведення занять з математики у профільних класах та в класах з поглильленим вивченням математики.

Апробація результатів. Тези дослідження на тему «Методичні особливості вивчення нерівностей у класах з поглибленим вивченням математики сучасної школи» були внесенні у програму ІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції «Підготовка педагогів до професійної діяльності в умовах змішеного навчання», яка відбувалася в травні 2023 року.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Основні положення профільної диференціації навчання математики

Математика є універсальною мовою, яка широко застосовується в усіх сферах людської діяльності. На сучасному етапі стрімко зростає її значення у розвитку суспільства. Велике значення має математика і в розвитку особистості, в становленні її світогляду, розвитку мислення й інших якостей.

Ці дві обставини і визначають роль математики в системі шкільної освіти, в підготовці кожного члена сучасного суспільства до повсякденного життя і трудової діяльності.

Поряд з розв’язанням цієї основної задачі навчання математики в середніх навчальних закладах виникає необхідність забезпечити суспільство спеціалістами різного рівня і профілю, а також створити умови для розвитку особистості у відповідності до її можливостей і потреб. А для цього необхідна профільна диференціація навчання взагалі і математики зокрема.

Поглиблене вивчення математики в 8 -9 класах передбачає розширення і поглиблення змісту відповідного курсу математики загальноосвітньої школи, посилення його прикладної спрямованості, формування в учнів стійкого інтересу до предмета, виявлення і розвиток математичних здібностей, підготовку до поглибленого навчання математики в старшій школі. Поглиблене вивчення математики в основній школі є певною мірою орієнтаційним. Важливо тут допомогти учневі усвідомити ступінь свого інтересу до предмета і оцінити можливості оволодіння ним із тим, щоб після закінчення дев’ятого класу зробити свідомий вибір на користь подальшого поглибленого вивчення математики або вивчення її в межах загальноосвітнього курсу.

Головною задачею вивчення математики є забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і вмінь, необхідних у повсякденному житті, а також достатніх для вивчення суміжних дисциплін і продовження освіти. Поряд з розв'язанням головної задачі, оволодінням конкретними обов'язковими математичними знаннями, профільне навчання математики передбачає формування стійкого інтересу учнів до предмету, виявлення і розвиток їх математичних здібностей, підготовку до навчання у вищому навчальному закладі.

Поглиблене навчання породжує проблему викладання математики відповідно до профілю, але навчання математики повинно здійснюватися відповідно до основних положень і принципів концепції математичної освіти в Україні:

– система математичної освіти є цілісною системою формування особистості на основі досягнень математики, психолого-педагогічної науки,

– педагогічного досвіду у вітчизняних і закордонних закладах освіти різних типів;

– система математичної освіти повинна бути безупинною і забезпечувати наступність в освіті між різними ланками системи освіти;

– ця система базується на основах гуманізації навчально-виховного процесу і гуманітаризації змісту освіти;

– система математичної освіти повинна реалізувати рівневу і профільну диференціацію на основі базового змісту;

– навчання математики повинно мати розвиваючий характер і прикладну спрямованість;

– у змісті навчання математики має бути виділена інваріантна базисна частина і варіативна;

– пріоритетними в організації навчання математики повинні бути активні методи навчання і сучасні технології;

– необхідним є застосування інформаційних технологій навчання.

Реалізація поглибленого навчання математики повинна здійснювати з урахуванням його мети, особливостей змісту й форми у порівнянні з навчанням математики в загальноосвітніх класах.

Профільна диференціація навчання математики повинна:

– забезпечити необхідний загальнокультурний рівень математичної підготовки молоді, який визначається замовленням суспільства й можливостями учнів даного віку;

– задовольнити потреби профільної підготовки в розвитку пізнавальних і математичних видів діяльності учнів, що характерні для даного профілю;

– формувати засобами математики професійні нахили учнів.

Профільна диференціація навчання математики передбачає:

– створення умов для свідомого вибору учнями профілю;

– наступність з допрофільним навчанням математики і навчанням математики у звичайних класах загальноосвітньої школи;

– досягнення всіма учнями базового рівня навчання математики;

– розробку державних стандартів з математики для різних профілів навчання;

– реалізацію прикладної спрямованості навчання математики, орієнтованої на профіль навчання як одного з головних засобів формування профільних інтересів засобами математики;

– відмінність змісту навчання математики в профільних класах і звичайних класах;

– реалізацію рівневої диференціації, що підсилює диференціацію навчання математики для кожного профілю;

– розмаїтість форм і видів класної та позакласної роботи;

– поглиблене вивчення математики як одного з видів профільного навчання.

Провідним принципом, який визначає структуру профільного навчання математики, є принцип поступового моделювання у навчальному процесі математичної діяльності спеціалістів відповідного профілю. Цей принцип у певній мірі може бути реалізований такою структурою змісту профільного навчання:

– адекватним профілю змістом основного курсу математики у відповідності до базового навчального плану (базова профільна математична підготовка);

– системою курсів за вибором (за рахунок варіативного компоненту), які складаються з невеликих за змістом навчальних модулів, враховують різноманіття інтересів і можливостей учнів даного профілю, які поглиблюють та розширюють основний курс математики у відповідності до профілю навчання (варіативна математична підготовка);

– організацією самостійної творчої роботи учнів, системою індивідуальних завдань, спрямованих на розвинення професійних схильностей учнів, їхнього інтересу до застосувань математики (особистісно-орієнтована математична підготовка).

Такі особливості профільного навчання математики найбільш повно враховують індивідуальні потреби, здібності та нахили учнів, така освіта передбачає наукове вивчення дитячої природи, раціональну організацію навчання дитини.

Формування базового змісту навчання математики здійснюється на засадах:

– гуманізації та гуманітаризації;

– профільної спрямованості;

– забезпечення узагальнених видів діяльності.

Поглиблене навчання математики повинно бути складною системою, що будується на принципах гуманності та відкритості.

Виділяють три етапи профільної диференціації в навчанні математики.

Перший етап (5 – 7 класи) – це етап формування профільних інтересів. На даному етапі свідомий вибір рівня навчальної діяльності (базовий, основний, поглиблений, творчий), в процесі змагань, ігрової та освітньої діяльності формуються пізнавальні інтереси та мотиви пізнання учнів.

Важливу роль відіграють різноманітні форми позакласної роботи з предмету: гуртки, турніри, конкурси, олімпіади, вечори цікавої математики тощо

Другий етап (8 – 9 класи) – це етап становлення профільних намірів. На цьому етапі реалізується різнорівневе вивчення курсу математики за стандартними навчальними планами; приділяється посилена увага позакласній роботі учнів, організовується самостійна робота учнів, що відповідає їх індивідуальним здібностям, проводиться цілеспрямована робота щодо професіональної орієнтації учнів.

Третій етап (10 – 11 класи) – це етап безпосередньої реалізації профільного навчання математики. Він забезпечується адекватним профілю змістом основного курсу математики, системою курсів за вибором, організацією самостійної творчої роботи учнів.

Подібна структура профільного навчання математики дозволяє якнайповніше врахувати індивідуальні особливості учнів за допомогою колективних форм навчання, забезпечити єдність рівневої та профільної диференціації. Профільне навчання передбачає, перш за все, наповнення курсу математики різноманітними, цікавими та складними задачами. На першому та другому етапах до процесу навчання включаються цікаві задачі, відомості з історії математики. На третьому етапі більше уваги приділяється розв’язанню задач, що відповідають вимогам для вступників до вищих навчальних закладів. У зв’язку з тим, що до класів приходять школярі з різним рівнем підготовки, у процес навчання на кожному етапі обов’язково включається повторення та систематизація знань.

Різноманітні профілі навчання математики у межах базової профільної математичної підготовки можна об’єднати у такі напрямки: загальнокультурний, прикладний, теоретичний.

Профільна диференціація навчання математики у межах базового компоненту в старшій школі реалізується створенням трьох курсів математики:

– для загальнокультурного напрямку (професійний, мовно-літературний, суспільно-історичний, спортивний та інші профілі) – курс А;

– для прикладного напрямку (технічний, технологічний, природничий, економічний, екологічний та інші профілі) – курс В;

– для теоретичного напрямку (математичний, фізичний, фізико-математичний, «інформативний», комп'ютерний та інші профілі) – курс С.

При цьому всі специфічні особливості даного профілю і конкретного контингенту учнів реалізуються в курсах за вибором та шляхом організації самостійної, індивідуальної і позакласної роботи.

Всі зазначені курси математики, як і курс математики для звичайної школи:

– забезпечують інваріантну складову математичної підготовки, що визначається стандартом;

– мають яскраво виражену профільну спрямованість, що враховує профільні наміри та інтереси учнів.

Ці курси відрізняються не стільки об'ємом знань, якими мають опанувати учні, скільки рівнем обгрунтованості, абстрактності, загальності і т. п. Іншими словами, вони повинні бути орієнтованими на різні типи мислення (насамперед образного, прикладного, теоретичного), на розвиток різних видів діяльності.

Кожний із цих курсів, віддаючи перевагу розвитку учнів, зокрема розвитку їхнього мислення й інтуїції, може робити це різними засобами. Такий підхід дозволить у максимальній мірі використовувати профільні інтереси і наміри в навчанні математики. Він сприятиме впровадженню діяльнісних, активних методів навчання.

Інваріантна частина математичної освіти в старшій школі може реалізовуватись як двома курсами «Алгебра та початки аналізу», «Геометрія», так і інтегрованим курсом «Математика»

Інтегрований курс доцільний, насамперед, для загальнокультурного напрямку.

Варіативний компонент навчального плану при організації профільного навчання математики використовується для:

– розширення змісту математичної освіти;

– поглиблення математичної підготовки учнів у відповідності до обраного профілю;

– організації індивідуальної роботи з учнями.

Ефективна організація профільного навчання математики потребує узгодження, об’єднання діяльності вчителів математики навчального закладу, створення єдиної команди. Це дозволить забезпечити різноманітні потреби учнів і найбільш повно використати потенціал навчального закладу.

У своїй діяльності вчителі математики будь-якого навчального закладу мають керуватися такими положеннями:

1) зміст математичної освіти має бути чітко зорієнтований на розвиток особистості в цілому, а також тих видів діяльності, які є специфічними для даного профілю;

2) зміст профільної математичної освіти має забезпечувати потреби профільної підготовки до математики;

3) зміст математичної освіти для кожного профілю має забезпечувати визначену еквівалентність математичної підготовки учнів різних профілів. Це означає, зокрема, необхідність включення всіх основних традиційних змістових ліній шкільного курсу математики;

4) для підвищення ролі математики в процесі осмислення навколишнього світу необхідне доповнення традиційних змістових ліній курсу математики матеріалом, який сприяє формуванню імовірнісно-статистичних уявлень в учнів;

5) формування змісту математичної освіти сприятиме реалізації рівневої диференціації в навчанні математики. Насамперед, необхідно для кожного напряму виділити визначений стандарт математичної підготовки учнів;

6) варіативна частина змісту забезпечується в основному курсами на вибір. Завдання курсу на вибір – повторення, систематизація й поглиблення матеріалу, досліджуваного в основному курсі, створення передумов для самостійної роботи учнів. Перелік курсів залежить від мотивів учнів, підготовки викладачів і наявності необхідного методичного забезпечення.

Зміст курсу математики реалізується в комплексі навчальних засобів. Тому необхідною умовою організації доброякісного профільного навчання є створення адекватного навчально-методичного забезпечення, що відображає колективний досвід роботи викладачів, методистів, учених.

Структура навчально-методичного забезпечення профільного навчання математики така ж, як і для будь-якого предмета. Вона складається з:

– нормативного комплексу (програма і робоча програма);
– навчального комплексу (підручник, дидактичні матеріали, набори навчальних тестів, збірники задач, наочні прилади);
– загально-методичного комплексу (посібники для вчителів);
– методичного комплексу (матеріали розроблені викладачем);
– системи контролю (тексти тематичних, підсумкових контрольних робіт, набори контролюючих тестів).

Профільне навчання математики потребує і робить можливим використання специфічних форм та методів навчання. Невід’ємною складовою профільного навчання математики є виконання кожним учнем індивідуальної роботи творчого характеру. При їх виконанні поряд з аналізом літературних джерел, теоретичним розв’язанням математичної задачі використовуються спостереження, проведення експериментів як фізичних, так і імітаційних за допомогою ПЕОМ.

1.2. Поглиблене вивчення математики

Основним завданням навчання математики в середньому закладі освіти є забезпечення рівня математичної культури, необхідного для повноцінної участі в повсякденному житті, продовження освіти та трудової діяльності. Математика є унікальним засобом формування не лише освітнього, а й розвивального та інтелектуального потенціалу особистості.

У процесі поглибленого навчання математики в профільних класах основні завдання суттєво доповнюються. Це обумовлено необхідністю виявлення та розвитку в учнів математичних здібностей, формування в них стійких інтересів до математики та професійної діяльності, підготовки учнів до навчання у вищому навчальному закладі освіти.

Викладання у фізико-математичних класах доцільно будувати у відповідності з наступними основними принципами. По-перше, вивчення математики у класах відповідного профілю повинно давати учням глибокі математичні знання і широкий математичний розвиток на базі основного курсу математики. При цьому повинні забезпечуватися такі умови, щоб питання діючої програми і корисні традиції викладання математики органічно переплітались між собою і розглядались з сучасної точки зору.

По-друге, учні – випускники математичних класів – повинні володіти такими знаннями і вміннями, які повністю відповідали б вимогам, що пред’являються до математичної підготовки учнів звичайних шкіл, і разом з тим були б більш глибокими і міцними. При цьому математичний розвиток учнів математичного класу повинен давати їм можливість здійснювати творчий підхід до процесу вивчення математики. Учні мають навчитися працювати самостійно з навчальною математичною літературою і мати до кінця навчання стійкий інтерес до предметів фізико-математичного циклу.

По-третє, у процесі викладання математики у цих класах перед вчителем відкриваються великі можливості у здійсненні оптимальної індивідуалізації навчання, у використанні школярами евристичного методу вивчення і проблемної форми навчання, тобто широкі можливості оптимальної активізації навчання. Широко має використовуватися розв’язування нестандартних, проблемних та конкурсних задач, пропонованих на вступних іспитах до вищих навчальних закладів. Розв’язування задач теоретичного і прикладного характеру у відповідності з розділами програми має відбуватися впродовж усього року.

Поглиблене вивчення математики у старшій школі має відповідати віковим можливостям і потребам школярів.

Навчання в старшій школі у профільному класі з поглибленим вивченням математики передбачає наявність стійкого усвідомленого інтересу до математики та схильності до вибору у майбутньому професії, пов'язаної з математикою.

Результати навчання на цьому етапі мають забезпечувати підготовку старшокласників до продовження освіти у вищому навчальному закладі. Більшість класів з поглибленим вивченням математики створена з метою підготовки до продовження навчання за спеціальностями, які широко використовують математику. Тому головний принцип, який визначає математичну підготовку у класах фізико-математичного профілю, – принцип поступового моделювання професійної діяльності математика.

Основу математичної підготовки у 10-11 класах складають курси стереометрії та алгебри і початків аналізу, які відрізняються від загальноосвітніх не стільки обсягом і переліком тем, скільки спрямованістю на реалізацію головного принципу. Повніше реалізувати принцип моделювання професійної діяльності дозволяють курси за вибором та індивідуальні завдання.

Якими характерними професійними рисами відзначається фахівець-математик? Це насамперед особистість, широко освічена як у математиці, так і в суміжних галузях, готова постійно поповнювати свої знання, самостійно їх набувати. Професіонала-математика характеризує вміння отримувати нові результати у своїй галузі, а також використовувати математику як інструмент для розв'язування прикладних задач; аналізувати власну діяльність та своїх колег; навчати молодь. Іншими словами, він повинен виконувати різні ролі у своєму науковому колективі: і учня, і співробітника, і педагога, і керівника. Тому математична підготовка у фізико-математичному класі має органічно зливатись з університетською і навіть стимулювати вдосконалення останньої, а професійна спрямованість навчання – впливати на всі ланки, починаючи з базової математичної підготовки.

Основний курс математики має мало чим відрізнятися за номенклатурою навчальних питань від відповідного курсу в загальноосвітній школі. Відмінності в іншому: у глибині вивчення матеріалу, у формуванні критичного стилю мислення – необхідної риси професіонала-математика. Поглиблене вивчення математики не можна зводити до розширеного вивчення математики. Саме значне розширення матеріалу є головною характеристикою сучасної програми для класів фізико-математичного профілю з дворічним терміном поглибленого вивчення математики. Зміст може свідомо засвоїти лише незначна частина учнів спеціалізованих фізико-математичних шкіл. Ще меншій частині такий зміст потрібний. Багаторічний досвід функціонування в Україні класів із поглибленим вивченням математики переконує в тому, що недоцільно надмірно заповнювати програми додатковими питаннями. Це спричиняє перевантаження і, як наслідок, відсів учнів. Розвитку стійких пізнавальних математичних інтересів сприяють підібрані різноманітні складні задачі з достатнім евристичним навантаженням, історичний матеріал, пов’язаний з темою.

Підвищена увага має приділятися математичному моделюванню. Саме в цьому курсі створюються засади для формування у старшокласників здатності застосовувати математичні знання. Необхідно ставити за мету не поверхнево опрацьовувати розділи математики, а заглибитись у окремі її ланки. Безумовно, що всі змістові лінії традиційного шкільного курсу знаходять у ньому свою реалізацію.

Порівняно із загальноосвітніми класами суттєво підвищується теоретичний рівень вивчення навчального матеріалу, зокрема при вивченні всіх видів рівнянь, нерівностей та їх систем послідовно акцентується увага на основних поняттях: корінь, розв’язок, рівносильність, наслідок, можливість втрати та появи сторонніх коренів, перевірка як важлива складова процесу розв'язування, вводяться елементи теорії множин та математичної логіки. Зазначимо, проте, що ці теорії не є предметом вивчення в загальноосвітній школі. Їх елементи використовуються для збагачення та осучаснення математичної мови учнів, розширення математичної ерудиції та розвитку мислення учнів.

Курс математики, призначений для профілів фізико-математичного напрямку сприяє: формуванню в учнів вмінь застосовувати математичні знання при дослідженні реальних процесів і явищ; забезпеченню високого рівня математичної культури.

Для поступового впровадження нових організаційних форм роботи з учнями доцільно ширше використовувати варіативну складову навчального плану – курси за вибором, факультативи, спецкурси. Факультативне навчання математики має на меті поглиблювати знання учнів, здобуті при вивченні основного курсу, а також розвивати їх логічне мислення, допитливість і кмітливість.

Для учнів 10-11 класів з поглибленим вивченням математики пропонується спеціальний курс «Прикладна математика», автором якого є О. Б. Рудик. Завданнями цього курсу є розвиток логічного мислення учнів та закріплення базових математичних понять на рівні практичного використання.

Справжня диференціація навчання математики можлива тільки за умови забезпечення учням можливості вибору змісту, форм навчання. Першу таку можливість вони мають отримати при розподілі класу на підгрупи для проведення практичних занять з алгебри та початків аналізу з стереометрії. Кожен учень має обирати два спецкурси з чотирьох-п'яти, що йому пропонують. Важливо, щоб такий вибір здійснювався свідомо. Проведенню занять із спецкурсів має передувати підготовча робота, завданнями якої є надати певну інформацію, допомогти учням узгодити вибір із своїми можливостями та нахилами.

Курси за вибором продовжують моделювати професійну діяльність математиків. Вони мають різне цільове навантаження: розширення знань учнів у тій чи іншій галузі математики, поглиблення знань у традиційних розділах курсу, підготовка до виконання індивідуального завдання творчого характеру. Тобто йдеться про підвищення ерудиції учнів, про прищеплення їм навичок самостійно здобувати знання, про перший етап виконання самостійної наукової роботи – ознайомлення з літературними джерелами.

Зміст факультативних занять має бути органічно пов’язаний з основним курсом математики. Так, наприклад, вивчення факультативної теми «Елементи теорії множин і математичної логіки» на початку 10 класу дає можливість більш міцного, а також швидшого (завдяки застосуванню символіки і високій логічній культурі) засвоєння учнями багатьох наступних розділів курсу, можливість більш сучасного і наукового тлумачення найважливіших математичних понять (числа, функції, рівняння, фігури тощо).

У класах фізико-математичного профілю навчання може відбуватися за програмою для 10-11 класів з поглибленим вивченням математики, укладачами якої є Бурда М.І., Жалдак М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М., Шкіль М.І., Ядренко М.Й., із розрахунку 8 годин на тиждень.

1.3. Аналіз програми та підручників з поглибленим вивченням математики

Математичні знання і вміння розглядаються не стільки як самоціль, а як засіб розвитку особистості школяра, забезпечення його математичної грамотності, як здатності розуміти роль математики в світі, в якому він живе, висловлювати обґрунтовані математичні судження і використовувати математичні знання для задоволення пізнавальних і практичних потреб.

В основу побудови змісту й організації поглибленого навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії. Поглиблене навчання математики в основній школі передбачає передусім формування предметної математичної компетентності, сутнісний опис якої подано в розділі ―Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів‖ цієї програми. Крім того, воно має зробити вагомий внесок у формування окремих ключових (більш загальних, що виходять за межі одного предмета) компетентностей, зокрема загальнонавчальної (уміння вчитися), комунікативної (здатності грамотно формулювати і висловлювати судження), загальнокультурної та інших. Формування зазначених компетентностей підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти, що здійснюється на всіх ступенях школи.

Програмою передбачено вивчення теми «Нерівності» у восьмому класі, тоді як у загальноосвітній школі ця тема розглядається у дев'ятому класі. Такий підхід дозволяє під час вивчення властивостей квадратного кореня, розв'язування рівнянь з модулем, побудови графіків функцій звернути увагу учнів на необхідність враховувати множину допустимих значень змінних, які входять до рівнянь, а також відслідковувати перетворення, які можуть вплинути на множину допустимих значень змінних (розширити чи звузити її) у ході розв'язування рівнянь. Зазначене дозволяє суттєво урізноманітнити зміст завдань. Вивчення теми «Нерівності» багато в чому спирається на апарат теорії множин, зокрема розв'язки записуються з використанням символіки теорії множин. [24]

Тема «Доведення нерівностей» є продовженням і розширенням змісту відповідної теми восьмого класу. Проте у восьмому класі метою вивчення було набуття навичок розв'язування нерівностей, а в дев'ятому класі – їх доведення. Вводяться кілька основних методів доведення нерівностей. Робота над цією темою формує в учнів евристичне мислення, навички аналізу і математичну інтуїцію.

Тема «Системи рівнянь і нерівностей» традиційно спрямована на нарощування арсеналу прийомів, які використовуються учнями для розв'язування задач. Природно, що в класах з поглибленим вивченням математики зростає як кількість методів і прийомів, так і їх складність. Проте важливо не тільки сформувати конкретні навички розв’язування, але й продовжити формування математичної культури учнів щодо таких понять, як рівносильність систем рівнянь і нерівностей, система, що є наслідком даної. Невід’ємною частиною засвоєного учнями математичного апарату має стати обґрунтування правомірності перетворень під час розв’язування систем, відстеження рівносильності або навпаки, звуження чи розширення множини розв’язків. [24]

Для лінії рівнянь і нерівностей характерна спрямованість на встановлення зв’язків з іншим змістом курсу математики. Ця лінія тісно пов’язана з числовою лінією. Основна ідея, реалізована у процесі встановлення взаємозв’язку цих ліній, – це ідея послідовного розширення числової системи. Всі числові області, що розглядаються в шкільній алгебрі та початків аналізу, за винятком області всіх дійсних чисел, виникають у зв’язку з розв’язуванням будь-яких рівнянь, нерівностей, систем. Наприклад, числові проміжки виділяються нерівностями або системами нерівностей. Області ірраціональних і логарифмічних виразів пов’язані відповідно з рівняннями (K-натуральне число, більше 1) [15, с.67]

Зв’язок лінії рівнянь і нерівностей з числовою лінією двосторонній. Зворотній вплив проявляється в тому, що кожна знову введена числова область розширює можливості складання і розв’язування різних рівнянь і нерівностей [13, с.51].

Лінія рівнянь і нерівностей тісно пов’язана також і з функціональною лінією. З іншого боку, функціональна лінія робить істотний вплив як на зміст лінії рівнянь і нерівностей, так і на стиль її вивчення. Зокрема, функціональні подання служать основою залучення графічної наочності до розв’язування і дослідження рівнянь, нерівностей та їх систем [7, с.103].

У 8 класі урок алгебри проводиться по 5 годин на тиждень. У вивченні 5 розділу «Нерівності» учні ознайомлюються із такими темами: числові нерівності та їх властивості. Числові проміжки. Об'єднання та переріз числових проміжків. Нерівності з однією змінною. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Рівносильні нерівності. Нерівність — наслідок даної. Системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною. Розв'язування лінійних нерівностей з параметром. Розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем.

Розглянемо державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів у 8 класі з розділу «Нерівності». Учень/учениця: пояснює поняття: числова нерівність, нерівність зі змінною; формулює означення понять: розв'язок нерівності з однією змінною, рівносильні нерівності, нерівність — наслідок даної, розв'язок системи і сукупності кількох нерівностей з однією змінною; доводить властивості числових нерівностей; зображує на координатній прямій множини, задані за допомогою нерівностей; розв'язує: лінійні нерівності, системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною, лінійні рівняння і нерівності з модулем.

У 9 класі алгебру також вивчають по 5 годин на тиждень у кожному семестрі.

При вивченні теми 4 «Нерівності з двома змінними та їх системи. Доведення нерівностей» учні знайомляться із такими підтемами: нерівність з двома змінними. Графік нерівності з двома змінними. Системи нерівностей з двома змінними. Геометрична інтерпретація розв'язків системи нерівностей з двома змінними. Основні методи доведення нерівностей. Нерівності між середніми величинами двох додатних чисел (середнє гармонічне, середнє геометричне, середнє арифметичне, середнє квадратичне).

При цьому державні вимоги до рівня знань учнів із даної теми виступають наступні: учень/учениця: пояснює: суть основних методів доведення нерівностей, використання означення нерівності, доведення від супротивного, використання відомої нерівності; формулює: означення: розв'язку нерівності з двома змінними, графіка нерівності з двома змінними, рівносильних систем нерівностей з двома змінними; доводить: нерівність Коші для двох невід'ємних чисел, нерівність для суми двох додатних взаємно обернених чисел; розв'язує вправи, що передбачають: використання основних методів доведення нерівностей, побудову геометричних образів нерівностей та їх систем.

У результаті вивчення матеріалу лінії рівнянь і нерівностей учні повинні не тільки оволодіти застосуванням алгоритмів до розв’язання конкретних завдань, а й навчитися використовувати логічні засоби для обґрунтування розв’язків у випадках, коли це необхідно [5, с.17].

Проаналізуємо підручники, які використовують здобувачі освіти у поглибленому вивченні математики.

Текст підручника з алгебри для учнів 8 класу автора А. Г. Мерзляка та ін. 2021 року видання поділено на сім параграфів, кожний з яких складається із пунктів. Зміст підручника відповідає навчальній програмі з математики. Підручник створено з використанням ефективних технологій викладання та навчання математики в умовах диференціації навчання, що сприяє розвиткові математичної культури учнів, комплексному оволодінню ними навчальним матеріалом, формуванню ключових і предметних компетентностей. Підручник містить величезний і різноманітний дидактичний матеріал: завдання та вправи, які диференційовано за рівнями складності. У рубриці «Коли зроблено уроки» подано цікаві оповідання з історії математики, що мають на меті підтримувати в учнів пізнавальний інтерес до предмета. Це дозволяє вчителеві організувати навчальний процес на сучасному рівні. У розділі «Відповіді та вказівки до вправ» розміщено відповіді практично до всіх завдань, значна кількість з них супроводжується розгорнутими вказівками та рисунками.[29]

Тема «Нерівності» вивчається у п’ятому параграфі, що в свою чергу складається із таких шести пунктів:

Текст підручника з алгебри автора А. Г. Мерзляка та ін. 2017 року поділений на сім розділів, кожен з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. При читанні особливу увагу учні повинні звертати увагу на текст, який виділено жирним шрифтом, жирним курсивом і курсивом. Саме в цих частинах підкреслено визначення, правила та найважливіші математичні твердження.

У параграфі 2 пункт 9 учні навчаються розв'язувати квадратні нерівності. Вчаться використовувати при розв'язуванні таких нерівностей метод інтервалів. Параграф 4 спрямований на ознайомлення учнів з методами та прийомами розв'язувати нерівності з двома змінними та їх системи, а також формування вмінь доводити нерінвості.

Отже, підручники з математики забезпечують реалізацію мети і завдань, визначених в навчальних програмах. Результатом засвоєння математичних компетенцій є математична компетентність учнів. Автори підручників дотримуються концентричного принципу побудови програми. Зміст підручників відповідає віковим особливостям учнів та містить доцільну систему завдань з поступовим наростанням складності. Матеріал підручників забезпечує наочність викладу програмових тем, дозволяє диференціювати навчання.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У КЛАСАХ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

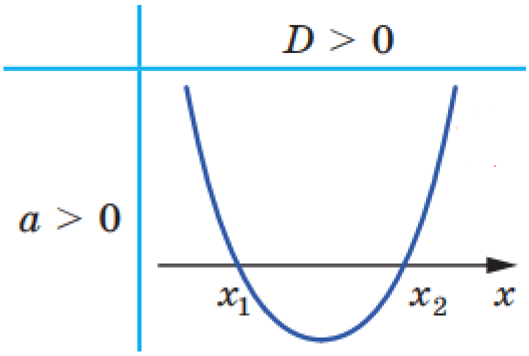
2.1. Методика формування умінь і навичок розв'язування раціональних нерівностей. Метод інтервалів

Одним з важливих методів розв'язування нерівностей є метод інтервалів. Це не універсальний метод, але він дуже зручний при розв'язуванні раціональних, дробово-раціональних та перш за все квадратичних нерівностей. У підручнику 9 класу Алгебра автора Мерзляк А. Г. та ін. із методом інтервалів учні починають знайомляться у 2 параграфі пункт 9. Запропоновані завдання школярі розв'язують графічним методом. Наведемо приклад розв'язування квадратичної нерівності, що запропонована авторами підручника.

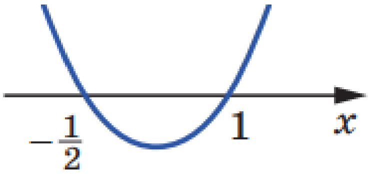
Приклад. Розв'яжіть нерівність $2x^2 - x - 1 > 0$.

Розв'язання

Для квадратного тричлена $2x^2 - x - 1$маємо: $a = 2 > 0$, $D = 9 >0$. Цим умовам відповідає такий графік:



Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$. Отримуємо: $x_1 = -\frac{1}{2}$ та $x_2 = 1$. Ці числа є нулями функції $y = 2x^2 - x - 1$. Тоді схематично графік функції $y = 2x^2 - x - 1$ можна зобразити так:



Із рисунка видно, що відповідна квадратична функція набуває додатних значень на кожному з проміжків (- ∞; $-\frac{1}{2}$) і (1; + ∞).

Відповідь: x ∈ (- ∞; $-\frac{1}{2}$) і (1; + ∞).

Таким чином у підручнику запропоновано такі вправи:

9.16.° **Знайдіть область визначення функції:**

1) $y=\sqrt{-x^2+3x+4}$;

2) $y=\sqrt{2x^2+5x-3}$;

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;

4) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{6x-2x^2}}$.

9.18.° **Чи рівносильні нерівності:**

1) $x^2-2x-15>0$ і $x^2-2x-15\geqslant 0$;

2) $\dfrac{1}{x^2-x-20}<0$ і $\dfrac{1}{x^2-x-20}\leqslant 0$;

3) $x^2-6x+10>0$ і $-x^2+x-1\leqslant 0$;

4) $x^2+2x+3<0$ і $-2x^2-4>0$?

Вже у наступному 10 пункті учні вчаться розв'язувати нерівності методом інтервалів, на основі запропонованих теорем.

Теорема. Якщо функція f неперервна на деякому проміжку і не має на ньому нулів, то вона на цьому проміжку зберігає сталий знак.

Теорема. Функція y = $\frac{f\,(x)}{g\,(x)}$, де f(x) і g (x) — многочлени, неперервна на D (y). Цю теорему буде доведено у старших класах.

Покажемо в чому полягає перевага методу інтервалів перед іншими методами розв'язування раціональних нерівностей на конкретному прикладі.

Приклад. Розв'язати нерівність: (x – 5) (x + 3) > 0.

Багато учнів зводять цю нерівність до сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-5)>0\\(x+3)>0,\end{cases}\\\begin{cases}(x-5)<0\\(x+3)<0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>5\\x>-3,\end{cases}\\\begin{cases}x<5\\x<-3\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x>5,\\x<-3\end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (5;\ +\infty).$$

Або ж учні розкривають дужки у нерівності (x – 5) (x + 3) > 0, отримуючи квадратну нерівність:

$x^2 - 2x - 15 > 0$

Далі вони бачать, що в лівій частині нерівності квадратична функція, графіком якої є парабола, яка перетинає вісь Ox в точках x = 5 і x = −3 (рис.2.1). Вітки параболи направлені вгору, оскільки старший коефіцієнт дорівнює 1(> 0).

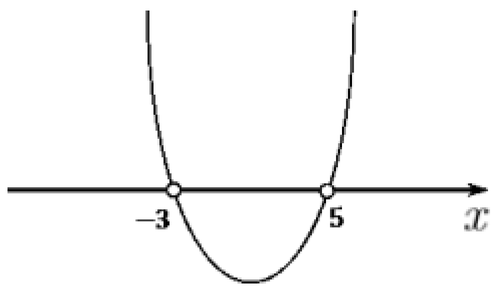


Рис. 2.1

Функція більше нуля там, де її графік проходить вище осі Ox. Отже, це інтервали (-∞; -3) та (5; +∞). Їх об'єднання і буде розв'язком нерівності.

Ми розглянули два шляхи розв'язування однієї і тієї ж нерівності. Обидва вони досить громіздкі, оскільки в першому випадку виникає сукупність систем нерівностей, а для розв'язування нерівності другим шляхом учням потрібно пам'ятати, який графік квадратичної функції, залежність його розташування від старшого коефіцієнта і дискримінанта квадратного тричлена й т.д. Ця нерівність проста, в її лівій частині присутні всього 2 множника. Складності починають виникати, коли множників значно більше, наприклад:

(x – 7) (x – 1) (x + 4) (x + 9) < 0

В першому випадку зведення нерівності до сукупності систем призведе до довгого і громіздкого розв’язання. Розкриття дужок – теж нераціональний шлях розв’язування. Тому саме в таких випадках застосовується метод інтервалів. Метод інтервалів ґрунтується на понятті неперервності функції.

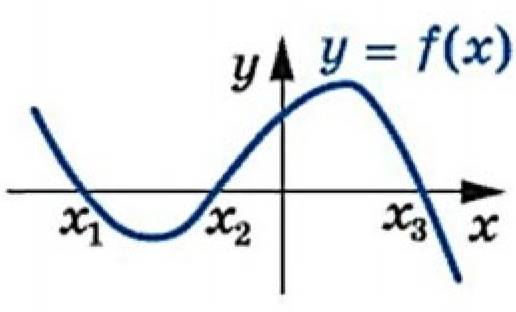


Рис. 2.2.

На рис.2.2 зображено графік деякої неперервної функції f, у якої D(*f*)=R і нулями є числа x_1, x_2, x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

Теорема. Якщо функція *f* неперервна і не має нулів на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає постійний знак.

Ця теорема дозволяє, не будуючи графіка функції *f*, розв’язувати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Наприклад, поглянемо на графік функції $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$.

Основна думка полягає в тому, що раціональна функція може змінювати знак лише у точках, в яких вона рівна нулеві.

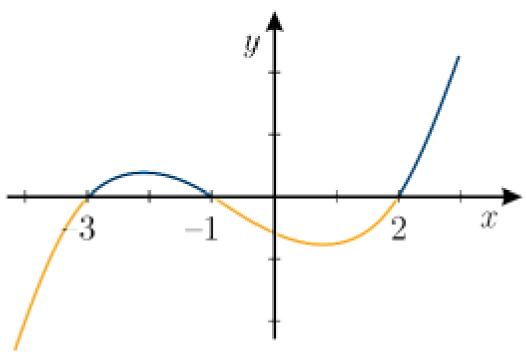


Рис. 2.3.

Наприклад, точки −3; −1; 2 з рис. 2.3 – це граничні точки, між якими графік знаходиться або вище осі Ох, або нижче від осі Ох. Таким чином, знаходження нулів функції, що стоїть в лівій частині нерівності, – це дуже важливий крок при розв'язуванні раціональних нерівностей. Ці точки можна знайти, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.

Отже, на основі вищерозглянутих теоретичних положень можна сформулювати такий алгоритм розв'язування раціональної нерівності методом інтервалів:

1. Перетворити нерівність, звівши її до такого вигляду:

$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) < 0$ $[>0, \le 0, \ge 0]$, тобто щоб виконувалося таке:

а) права чатина нерівності дорівнює нулю;

б) ліва частина нерівності представляє собою добуток лінійних множників виду $ax + b$, де $a > 0$.

2. Визначити нулі функції, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$

3. Знайдені нулі функції відмітити на координатній прямій, враховуючи строгість знака нерівності. Розбити координатну пряму (область визначення) на інтервали.

4. В правому крайньому інтервалі поставити знак «+», після чого чергувати знаки в наступних інтервалах, рухаючись справа наліво.

5. Об'єднати проміжки, на яких функція f(x) задовольняє нерівності, у множину розв'язків.

Перевага методу інтервалів полягає в тому, що на останньому інтервалі завжди буде знак «+», а в усіх інших інтервалах знаки будуть чергуватися, а отже, учню вже не потрібно визначати знаки на кожному з утворених проміжків. Розглянемо конкретні приклади.

Приклад. Розв'язати нерівність: $(2 - x)(x - 7) < 0$

Розв'язання

Крок 1. Як бачимо, друга дужка відповідає стандартному вигляду, до якого можна застосувати метод інтервалів. Перетворимо першу дужку до стандартного вигляду для застосування методу інтервалів. Помножимо обидві частини нерівності на (–1), при цьому змінивши знак нерівності:

$(x – 2) (x + 7) > 0$.

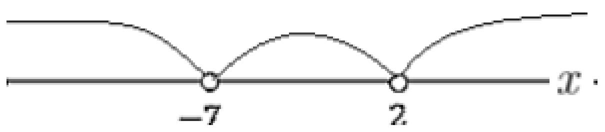
Крок 2. Знайдемо граничні точки, розв’язавши рівняння:

$(x – 2) (x + 7) =0$. Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один з множників дорівнює нулю:

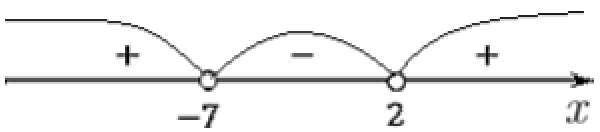
$x – 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$x + 7 = 0 \rightarrow x = -7$

Крок 3. Відмітимо на координатній прямій отримані корені, що є граничними точками для проміжків.



Крок 4. В правому крайньому інтервалі ставимо знак «+», в наступних інтервалах чергуємо знаки. Маємо:



Крок 5. Нас цікавлять ті проміжки, на яких ця функція від’ємна.

Це проміжок (-7; 2). Отже, розв’язком нерівності буде x Є (-7; 2).

Відповідь: (-7; 2).

Під час розв’язування нерівностей за допомогою чіткого алгоритму вчитель має пояснити учням, що виконати наступний крок можна лише виконавши попередній. Також він має слідкувати за тим, щоб пояснення учнів при записі розв’язання були короткими і логічними. Це сприяє розвитку раціональності мислення і лаконічності мовлення. Розв’язання нерівності за чітким алгоритмом повинне завершуватися одержанням кінцевих результатів та підведенням підсумків. Засвоєння на інтуїтивно-практичному рівні понятійного апарату та відповідних способів поетапної діяльності сприяє формуванню алгоритмічної культури учнів [6, с. 47].

При розв'язуванні нерівностей методом інтервалів створюються сприятливі умови для формування алгоритмічних умінь учнів, адже цей метод заснований на чіткому виконанні кроків алгоритму, вимагає від учня певної самостійності і здатності до самоконтролю. Учень повинен вміти виконувати кожен крок, розуміти кожну з команд, що входять до алгоритму. Крім того, неприпустимі такі ситуації, коли після виконання чергового кроку учню не зрозуміло, що потрібно робити наступним кроком. Тому на перших етапах засвоєння алгоритму вчитель має контролювати роботу учня біля дошки, стежити за послідовністю та правильністю виконання кроків алгоритму. В процесі виконання певної кількості вправ учні поступово починають формувати навички покрокового виконання алгоритму та структурування власної діяльності.

Приклад. Розв'язати нерівність: $x\,(2x+8)\,(x-3) > 0$.

Розв'язання

Крок 1. Перетворюємо нерівність до стандартного вигляду:

$(x-0)\,(2x+8)\,(x-3) > 0$.

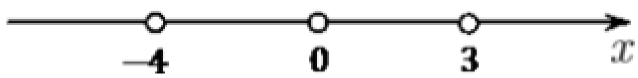
Крок 2. Замінюємо нерівність рівнянням $(x-0)\,(2x+8)\,(x-3) = 0$ і розв'язуємо його:

$X = 0$

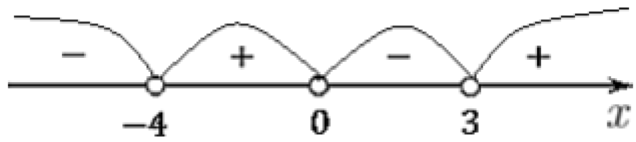
$2x + 8 = 0 \rightarrow x = -4$

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

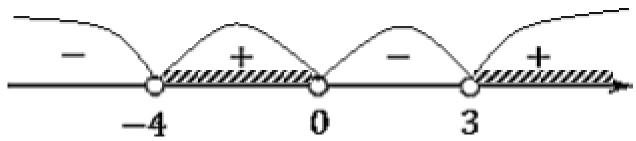
Крок 3. Відмічаємо ці три корені на координатній прямій, враховуючи строгість знаку нерівності.



Крок 4. Проставляємо знаки, чергуючи, рухаючись справа наліво:



Крок 5. Функція задовольняє знак нерівності на проміжках (-4; 0) і (3; +∞).



Отже, x Є (-4; 0) ∪ (3; +∞).

Відповідь: (-4; 0) ∪ (3; +∞).

У класах з поглибленим вивченням математики учін вчаться розв'язувати раціональні нерівності. Раціональною нерівністю з однією змінною x називають нерівність виду f(x)<g(x), де f(x) і g(x) — раціональні вирази, тобто алгебраїчні вирази, складені з чисел, змінної x і за допомогою математичних дій, тобто операцій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня.

При розв'язанні раціональних нерівностей застосовують правила, які використовуються при розв'язанні лінійних і квадратних нерівностей.

За допомогою рівносильних перетворень раціональну нерівність зводять до вигляду h(x)<0, де h(x) — алгебраїчний дріб або многочлен і застосовують метод інтервалів.

Приклад. Розв'язати нерівність $\frac{x^2+3}{2x^2-7x-4} > 0$

Розв'язання

1. Знайдемо корені квадратного тричлена $2x^2 - 7x - 4$ і розкладемо його на множники за формулою a(x−x_1)(x−x_2).

$2x^2 - 7x - 4 = 0$

D = 81

$x_1 = -0,5; \quad x_2 = 4.$

$2x^2 - 7x - 4 = 2(x+0,5)(x-4)$

$2(x+0,5)(x-4)=0|:2$

$(x+0,5)(x-4)=0$

$x_1=-0,5; \quad x_2=4.$

2. Поділимо обидві частини нерівності на додатний при всіх значеннях x вираз x^2+3, при цьому знак нерівності > не зміниться.

$$\frac{x^2+3}{2(x+0,5)(x-4)} : (x^2+3) > 0 : (x^2+3)$$

$$\frac{x^2+3}{2(x+0,5)(x-4)} \cdot \frac{1}{x^2+3} > 0$$

$$\frac{1}{2(x+0,5)(x-4)} > 0$$

3.Позначимо на числовій прямій корені і знайдемо знаки квадратного тричлена на кожному інтервалі.

Для цього з кожного інтервалу достатньо взяти по одному значенню і підставити замість x у тричлен.

Квадратний тричлен приймає додатні значення на інтервалах $(-\infty;-0,5)\cup(4;+\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;-0,5)\cup(4;+\infty)$.

Отже, алгоритмічний підхід допомагає систематизувати роботу над розв'язанням задач і довести навички їх розв'язування до автоматизму. Важливо пам'ятати про те, щоб надмірна алгоритмізація діяльності на основі готових вказівок не стала гальмом для розвитку творчих якостей, пов'язаних із пошуком скорочених, раціональних шляхів розв'язування задачі.

2.2. Алгоритмічний підхід до розв'язування нерівностей

Розв'язування задач є одним із способів розвитку логічного мислення учнів. Але дуже важливо обгрунтовано і дидактично правильно підходити до підбору системи задач і методів їх розв'язування. Одним із важливих шляхів підвищення ефективності вивчення математики є навчання учнів застосуванню алгоритму в процесі розв'язування задач. Але ще важливіше навчити учнів самостійно складати ці алгоритми .

Алгоритмічний підхід, порівняно з традиційною методикою розв'язування задач, дає можливість озброювати учінв із слабкою математичною підготовкою чіткою системою умінь та навичок з математики.

Досвід показує, що при складанні алгоритмів розв'язування задач, потрібно мати чітку схему діяльності учнів:

1) вивчення та аналіз умови задачі;
2) зміна кожного поняття умови задачі їхніми означеннями, розпізнавання їх ознак;
3) вибір суттєвих властивостей для розв'язування даної задачі;
4) складання алгоритму;
5) відбір несуттєвих властивостей та їх узагальнення;
6) встановлення меж застосування алгоритму.

До основних вимог розв'язування математичних задач можна віднести такі:

1) алгоритм може бути застосовуваним до будь-якої задачі даного типу;

2) кожна операція алгоритму повинна бути однозначно визначена;
3) алгоритм завжди повинен привести до кінцевого результату;
4) кожен алгорритм повинен являти собою послідовність правильно виконаних одна за одною закінчених дій;
5) кожен учень, який розуміє схему алгоритму, правльно виокнає весь алгоритм;
6) алгоритм має бути лаконічним.

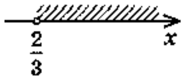
Повертаючись до розгляду способів розв'язування деяких класів нерівностей, зауважимо, що, як правило, кожен з них можна пов'язати з певним алгоритмом.

Для прикладу наведемо алгоритми розв'язування деяких нерівностей.

Розв'язування нерівностей з однією змінною.

1) Перенесемо усі члени, що містять змінну, у ліву частину, а всі вільні члени в праву, змінивши в кожного знак на протилежний;
2) Зведемо подібні члени;
3) Поділимо обидві частини нерівності на коефіцієнт при змінні (якщо він не дорівнює нулю);
4) Позначимо на числовій прямій всі ті значення змінної, що задовільняють дану нерівність;
5) Запишемо відповідь.

Приклад розв'язування нерівності, що зводиться до лінійної:	
Розв'язати нерівність $9(x – 1) + 5x < 17x – 11$	Коментар
$9x – 9 + 5x < 17x – 11$ $14x – 9 < 17x – 11$	1. Виконаємо тотожні перетворення лівої (і правої) частин нерівності.
$14x – 17x < -11 + 9$ $-3x < -2$	2. Перенесемо відомі доданки в одну частину нерівності, а невідомі — в іншу. Тотожно перетворимо обидві частини.

$x > \frac{2}{3}$  $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ Відповідь: $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$	3. Оскільки коефіцієнт при x у лівій частині утвореної нерівності не дорівнює нулю, поділимо на нього обидві частини нерівності, змінивши її знак на протилежний (бо -3<0). Запишемо відповідний числовий проміжок — це і є відповідь — розв'язок даної нерівності.

Ров'язування нерівностей графічним методом

1) Поділимо ліву і праву частини на нерівності як функції;
2) Побудуємо графік кожної з них;
3) Знайдемо абсциси точок перетину графіків (якщо вони є);
4) Визначимо проміжок на осі Ох, на якому виконується дана нерівність (знакові «більше» відповідає поняття «графік вище», «менше» - «графік нижче»).

Приклад. Розв'язати нерівність $3+\sqrt{8-2x-x^2} \ge x$.

Розв'язання

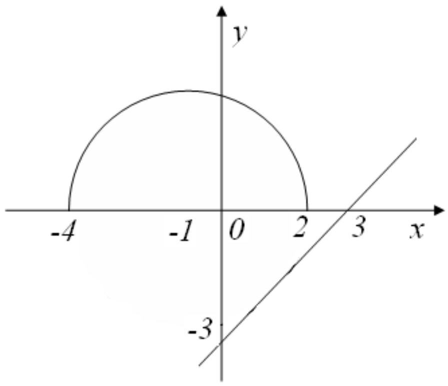
$$3+\sqrt{8-2x-x^2} \ge x$$

$$\sqrt{8-2x-x^2} \ge x-3$$

Будуємо графіки функцій $f(x)=\sqrt{8-2x-x^2}$ $g(x)=x-3$

$$\sqrt{8-2x-x^2} = \sqrt{9-(x+1)^2}$$

Оскільки $y=f(x)$ $(y \ge 0)$ є півколо з центром у точці (1;0). Як видно з малюнка множина розв'язків нерівності $[-4;2]$.



Відповідь: $x \in [-4; 2]$

Розв'язування систем лінійних нерівностей з однією змінною

1) Розв'яжемо кожну нерівність системи;
2) Складемо систему найпростіших нерівностей (якщо одна із даних нерівностей розпадається на дві або більше простіших, то залишимо їх в одному рядку)
3) Перевіремо, щоб в системі найпростіших нерівностей було стільки рядків скільки нерівностей в заданій системі;
4) На числовій прямій позначимо лініями різної висоти проміжки, що задовольняють найпростішим нерівностям;
5) Перевіримо, щоб кількість «ліній відповідної висоти» відповідала кількості нерівностей в даній системі;
6) Перевіримо, чи позначені кінці інтервалів, що задовольняють нерівностям, «незафарбованими кружечками», а решту – «зафарбованими»;
7) Відшукаємо спільний розв'язок найпростіших нерівностей як переріз множин їх розв'язків;
8) Запишемо відповідь.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \mathbf{2}x - \mathbf{1} > \mathbf{3} \\ \mathbf{3}x - \mathbf{2} < \mathbf{11} \end{cases}$

Розв'язання

1. Розв'язавши першу нерівність, отримуємо

$2x > 4$ |:2

$x > 2$

2. Розв'язавши другу нерівність, отримуємо

$3x < 13$ |:3

$x < \frac{13}{3}$

3. Отримані проміжки відзначимо на осі координат. Для кожного візьмемо своє штрихування (верхнє чи нижнє).

4. Розв'язок системи рівнянь, це перетин штрихів, тобто проміжок, на якому штрихи збігаються.

Відповідь: $x \in (2; 4\frac{1}{3})$.

Розв’язування нерівностей виду $|x - a| < b, |x - a| > b$.

1) Відкладемо на числовій прямій число a;
2) Відкладемо на числовій прямій точки, які віддалені від a на відстань b;
3) Знайдемо на числовій прямій точки;

   а) віддаленя від a на відстань, яка менша b;

   ($|x - a| < b$);

   б) віддалені від a на відстань, яка більша b;

   ($|x - a| > b$);
4) Запишемо у вигляді числового проміжку знайдену множину точок.

Приклад. Розв’язати нерівність $|x+3|>4$.

Розв’язання

|x+3|>4

$$\left[\begin{array}{l} x+3>4 \\ x+3<-4 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x>4-3 \\ x<-4-3 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-7 \end{array}\right.$$

Інтервали, що є розв'язком нерівності з модулем відобразимо на числовій осі

Відповідь: x∈ (-∞;-7)∪(1;+ ∞). [38]

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У КЛАСАХ ПРОФІЛЬНОГО РІВНЯ СТАРШОЇ ШКОЛИ

3.1. Способи розв'язування ірраціональних нерівностей

У старшій школі (10-11 класи) математика вивчається на профільному рівні. Її вивчення сприятиме свідомому й міцному оволодінню системою математичних знань, навичок і умінь, потрібних у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, у вивченні інших шкільних дисциплін та продовженні навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями зі значною математичною складовою.

Метою навчання математики на поглибленому рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою. [25]

Значне місце в програмі приділено розв'язуванню задач з параметрами. У процесі розв'язування таких задач до арсеналу прийомів та методів мислення школярів природно включаються аналіз, індукція та дедукція, узагальнення та конкретизація, класифікація та систематизація, аналогія. Ці задачі дозволяють перевірити рівень знання основних розділів шкільного курсу математики, рівень логічного мислення учнів, початкові навички дослідницької діяльності. Тому у вивченні будь-яких видів нерівностей чи систем у кожній темі наявні завдання із використанням параметрів.

Продовжувати вивчати тему «Нерівності» учні можуть у 10 класі при вивченні степеневої функції. Тут розглядаються ірраціональні нерівності та їх системи. Учень (учениця): **розв'язує** ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами; **застосовує** властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.

Нерівності, що містять невідомі величини або деякі функції невідомих величин під знаком кореня називаються **ірраціональними нерівностями**. При **розв'язуванні ірраціональних нерівностей** використовується наступне твердження: якщо обидві частини нерівності приймають на деякій множині тільки додатні значення, то, звівши обидві її частини в квадрат (або в будь-яку іншу парну степінь) і зберігши знак вихідної нерівності, отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Зведення обох частин нерівності в одну і ту ж непарну степінь (зі збереженням знака нерівності) завжди є рівносильним перетворенням нерівності.

Отже, розглянемо **ірраціональну нерівність** наступного вигляду:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \quad (1)$$

Очевидно, що рішення цієї нерівності є в той же час **розв'язком нерівності** $f(x) \geq 0$ і **розв'язком нерівності** $g(x) > 0$ (з нерівності (*1*) випливає, що $g(x) > \sqrt{f(x)} \geq 0$). Значить, **ірраціональна нерівність** (*1*) рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \end{cases} \quad (2)$$

Так як при виконанні умов, що задаються першими двома нерівностями системи (*2*), обидві частини третьої нерівності даної системи визначені і приймають тільки додатні значення, їх зведення в квадрат є рівносильним перетворення нерівності. Виконавши це перетворення, приходимо до системи:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < \left(g(x)\right)^2 \end{cases} \quad (3)$$

Отже, нерівність $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі нерівностей (*3*).

Розглянемо тепер нерівність виду:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \quad (4)$$

Як і вище, робимо висновок, що $f(x) \geq 0$, але на відміну від попереднього випадку тут $g(x)$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Тому задану нерівність (*4*) розглянемо в кожному з наступних випадків: $g(x) < 0, g(x) \geq 0$. В результаті, отримаємо сукупність систем нерівностей:

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}; \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases} \quad (5)$$

Зазначимо, що у першій з цих систем можна опустити останню нерівність – вона випливає з перших двох нерівностей системи. У другій системі можна виконати зведення в квадрат обох частин останньої нерівності. У підсумку, приходимо до наступного результату: **ірраціональна нерівність** $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) > \left(g(x)\right)^2 \end{cases} \quad (6)$$

Ірраціональні нерівності – приклади розв'язування:

Приклад *1*: розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 25} < -5$.

Виходячи з того, що, за визначенням, корінь квадратний – число додатне, робимо висновок, що задана нерівність розв'язків не має.

Приклад *2*: розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

Переглянувши теоретичний матеріал вище, приходимо до висновку, що дана нерівність рівносильна наступній системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases};$$

Розв'язавши першу нерівність системи отримаємо $x^2 - x - 12 \geq 0, x_1 = -3, x_2 = 4$. Тобто, рішенням нерівності $x^2 - x - 12 \geq 0$ є об'єднання інтервалів $(-\infty,; -3] \cup [4; \infty)$.

Розв'язками другої і третьої нерівностей є інтервали $(0; \infty)$ та $(-12; \infty)$ відповідно.

Таким чином, множиною рішень заданої **ірраціональної нерівності** є проміжок $[4; \infty)$.

Приклад *3*: розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 3 \cdot x + 2} > x + 3$.

Отже, дане нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3 \cdot x + 2 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 3 \cdot x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 3 \cdot x + 2 > (x + 3)^2 \end{cases};$$

Зауваження: *другу нерівність другої системи можна опустити як наслідок третьої нерівності тієї ж системи.*

Розв'язавши першу систему, матимемо:

$\begin{cases} x+3<0 \\ x^2-3\cdot x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \\ \begin{cases} x\leq 1 \\ x\geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-3;-\infty);$

З другої системи отримаємо:

$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ x^2-3\cdot x+2>(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x<-7/9 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-3;-7/9);$

Об'єднавши, далі, знайдені рішення, отримаємо **розв'язок ірраціональної нерівності** $x\in(-7/9;-\infty)$

3.2. Найпростіші тригонометричні нерівності

Перед вивченням теми 3 «Тригонометричні рівняння та нерівності » учень (учениця): **виконує** перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки; **встановлює** відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі; **обчислює** значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень; **формулює** означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута числового аргументу; властивості тригонометричних функцій; властивості періодичних функцій; б**удує** графіки періодичних функцій; **ілюструє** властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків; **перетворює** тригонометричні вирази. Тому наявність такої підготовки дає можливість з розумінням розв'язувати тригонометричні нерівності. Десятикласники вивчають такі теми: тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції. Побудова графічних образів.

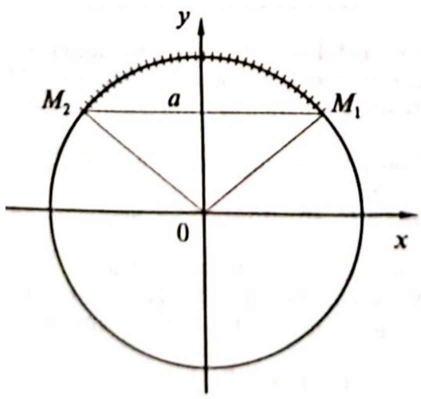
У темі «Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей» автори підручника зазначають, що нерівності виду f(x)>a, f(x)<a, де f – одна з чотирьох тригонометричних функцій, називають найпростішими тригонометричними нерівностями. Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей проводять за такою схемою: знайдемо

розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції; усі інші розв'язки відрізняються від знайдених на Tn, де T – період даної функції, n ∈ Z, n ≠ 0.

Розглянемо алгоритм розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

sin kx $>$ a (-1$\leq a < 1$).

1) Побудуємо одиничне коло. Знайдемо кути, синуси яких дорівнюють a;
2) Знайдемо і відмітимо на одиничному колі інтервал, що задовольняє нерівність;
3) Вкажемо початок і кінець інтервалу (рухатись необхідно проти годинникової стрілки);
4) Знайдемо значення кінців інтервалу і перевіремо, щоб значення початку інтервалу було менше значення його кінця (arcsin a; $\pi -$ arksin a);



5) Запишемо розв'язки нерівності на проміжку (-π; π) відносноскладного аргумента kx і перевіремо, щоб зліва було менше число;
6) Врахувавши період функції, розв'яжемо одержану нерівність arcsin a + $2\pi n < kx < \pi - \arcsin a + 2\pi n$

$\frac{1}{k}$ arcsin a + $\frac{2\pi k}{k} < x < \frac{\pi}{k} - \frac{1}{k}\arcsin a + \frac{2\pi n}{k}, n \in Z.$

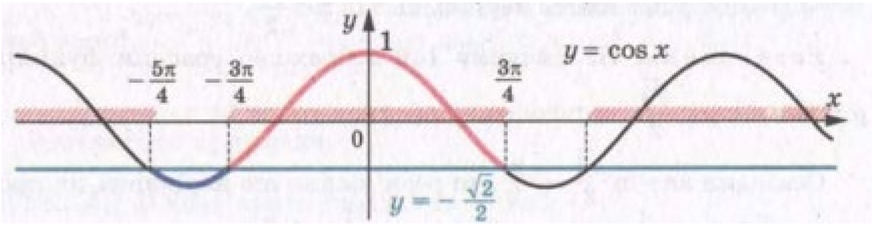
Наведемо приклад розв'язування тригонометричної нерівності

Приклад. Розв'яжіть нерівність cos x> - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання

Маємо: arccos (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$) = $\frac{3\pi}{4}$. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left[-2\pi + \frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$, тобто на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

На цьому проміжку графік функції y = cos x розміщений вище за графік функції y = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ при x∊ $(-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4})$.



Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi;\frac{3\pi}{4} + 2\pi)$ n ∊ Z.

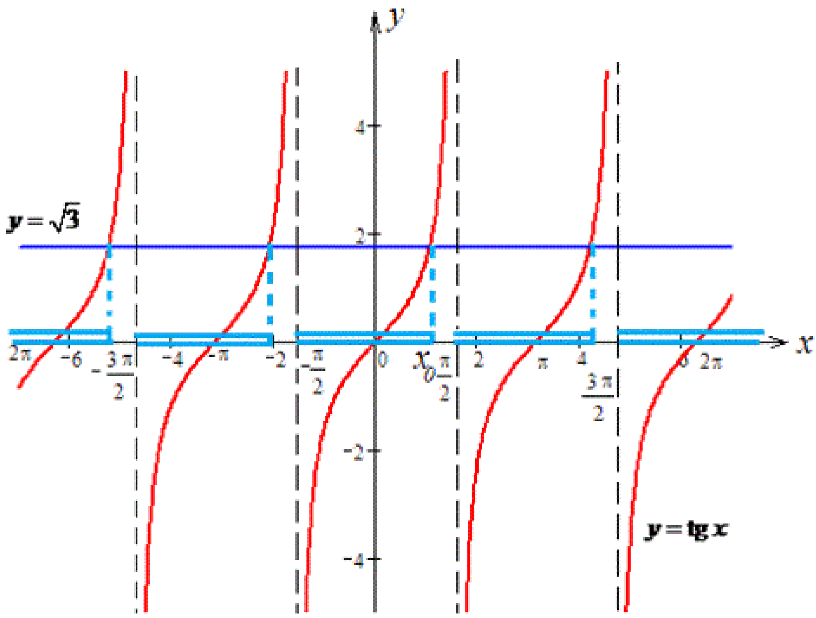
Приклад. Розв'язати нерівність tg(x)<√3.

Розв'язання

І метод:

Побудуємо в декатовій СК функції y=tg(x) та y=√3.

Наступним кроком виділяємо проміжки, на яких графік функції y=tg(x) розташований нижче від графіка прямої y=√3.



Пам’ятаємо, що тангенс має розриви і в точках розриву (в асимптотах) множина розв'язків обривається.

Знайдемо через арктангенс абсцису точки x_0 - перетину графіків зазначених функцій, яка є кінцем одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність $x_0=\text{arctg}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$.

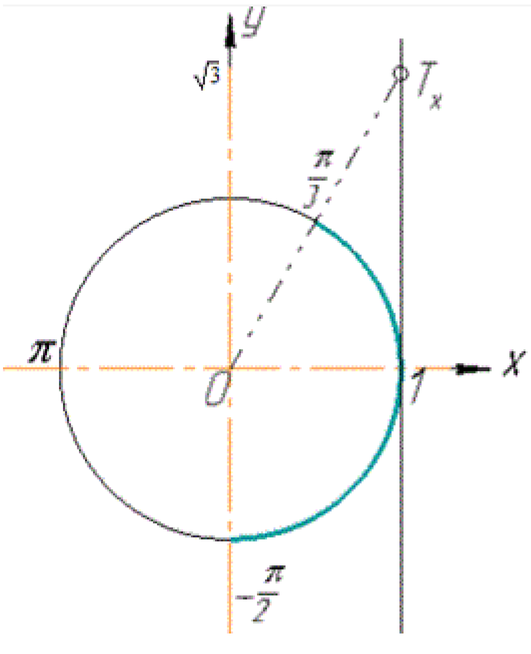
Іншим кінцем цього проміжку є точка - $\frac{\pi}{2}$, у якій функція y=tg(x) невизначена (розрив ІІ роду).

Отже, одним із проміжків розв'язку заданої нерівності є $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{3}$.

Враховуючи, що період тангенса рівний π записуємо загальний розв'язок нерівності $(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\ \pi k), k \in Z.$

ІІ метод:

Побудуємо одиничне коло, лінію тангенсів, на якій позначимо точку $T_x(1;\sqrt{3})$ і виділимо ту частину лінії тангенсів, яка розміщена нижче точки T_x та дугу кола, яка відповідає виділеній частині лінії тангенсів.



Запишемо значення кутів, які відповідають виділеній дузі:

$-\frac{\pi}{2}<x<\text{arctg}(\sqrt{3})$, або $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{3}$.

Запишемо відповідь, врахувавши періодичність y=tg(x).

Отримали наступну множину розв'язків нерівності:

$(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\ \pi k), k \in Z.$

Відповідь: x $\in (-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\ \pi k), k \in Z.$

3.3. Показникові та логарифмічні нерівності

В 11 класі школярі вивчають показникові та логарифмічні нерівності та їх системи, зокрема й з параметрами. Звісно, дані теми вивчаються після загального ознайомлення з даними функціями.

У підручнику автора Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) для учнів 11 класу 2019 року тема «Нерівності» виділена окремим параграфом.

Підтеми виділено наступнім чином:

1) Показникові нерівності (параграф 1 пункт 3);

2) Логарифмічні нерівності (параграф 1 пункт 7);

3) Основні методи розв'язування нерівностей (параграф 4 пункт 23);

Приклади розв'язування задач наведені після викладення теоретичного матеріалу. До кожного параграфу підібрані завдання для самостійного розв'язування. Наявні приклади завдань, вправи для повторення, рубрика «Головне в параграфі», «Дружимо з комп'ютером» і завдання для підготовки до вивчення нової теми. Наведені вправи чотирьох рівнів складності: (º) – початковий та середній; (•) – достатній, (••) – високий, (*) – задачі для математичних гуртків і факультативів. Завдання різних рівнів складності, вправи для повторення, велика кількість прикладних задач, номери вправ виділені різними кольорами: червоним – рекомендовані для домашнього завдання, синім – завданя які на розсуд вчителя можно розв'язувати усно. Добір завдань є достатнім для засвоєння основних понять даної теми, для учнів з різними рівнями знань. Синім ключиком запропоновані завдання відповіді яких можа використати для розв 'язування інших завдань.

У підручнику можна прочитати оповідання про видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

У першому параграфі пункті 3 учні вивчають тему «Показникові нерівності». Спочатку наведено приклади показникових нерівностей та виділена одна теорема з наслідком, зокрема:

Теорема. При a > 1 нерівність $a^{x_1}>a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < x < 1$ нерівність $a^{x_1}>a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.

Розглянемо приклад розв'язування показникової нерівності, що пропонується у даному підручнику.

Приклад. Розв'яжіть нерівність $8 \cdot 2^{3x-1} < (0,5)^{-1}$.

Розв'язання

Маємо: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$.

Оскільки основа степенів 2^{3x+2} і 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$3x + 2 < 1$.

Звідси $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $x \in (-\infty;-\frac{1}{3})$.

Наведемо приклад завдань достатнього рівня, що наявні у підручнику з вивчення теми «Показникові нерівності».

3.9.˙ Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}$;

2) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

3) $0,3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1$;

4) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$.

3.10.˙ Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$;

2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;

3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;

5) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

Окрім показникових нерівностей учні 11 класу вивчають логарифмічні нерівності (параграф 1 пункт 7). Вивчення теми розпочинається із теореми.

Теорема. При a > 1 нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $0 < x_1 < x_2$.

Приклад застосування даної теореми на практиці наведено таки чином:

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\log_x 3 - \frac{5}{2} - \log_{\frac{1}{3}} x > 0$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} + \log_3 x > 0$.

Нехай $\log_3 x = t$. Тоді $\frac{1}{t} - \frac{5}{2} + t > 0$. Звідси

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0; \quad \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} > 0.$$

Скориставшись методом інтервалів (рис. 7.1), отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

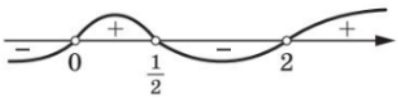


Рис. 7.1

Далі, $\left[\begin{array}{l} 0 < \log_3 x < \frac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{array}\right.$$

Відповідь: $(1; \sqrt{3}) \cup (9; +\infty)$. ◄

У темі «Логарифмічні нерівності» автори підручника запропонували досить велику та різноманітну кількість завдань, розглянемо їх:

7.18.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,5}^2 x \geqslant 9$;
2) $\lg^2 x - 2\lg x - 3 \geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x - \log_4 x - 1 < 0$;
4) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 2 \leqslant 0$.

7.28.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5}\,\log_3 (x-2) \leqslant 0$;
2) $\frac{\log_{\sqrt{2}}^2 (x-3)}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0$.

7.29.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(2^x - a)\sqrt{x-3} \geqslant 0$.

Приклад:Розв'язати нерівність*:* $\log_{0,5}(x-2) \geq \log_{0,5}(2x-12)$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} \mathbf{x} - 2 > 0 \\ \mathbf{2x} - 12 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathbf{x} > 2 \\ x > 6 \end{cases}$

x∈(6;+∞)

$\log_{0,5}(x-2) \geq \log_{0,5}(2x-12)$

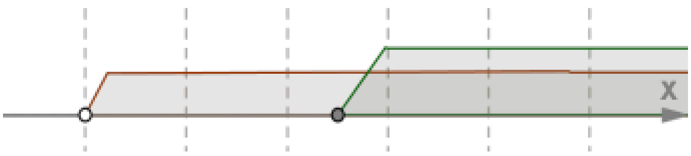
x−2x≤x−12

x−2x≤−12+2

−x≤−10

x≥10

$\begin{cases} \mathbf{x} \in [10; +\infty) \\ x \in (6; +\infty) \end{cases}$



6 10

Відповідь: x∈[10;+∞)

Отже, даний підрічник дозволить систематизувати та вдосконалити знання учнів з математики, в тому числі й з теми «Нерівності».

3.4. Застосування програмних засобів при вивченні нерівностей та практична перевірка ефективності даної методики

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, AGrapher, GeoGebra, бібліотек електронних наочностей та інших. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії: побудова графіків функцій, розв’язування систем рівнянь і нерівностей, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об'ємів тіл обертання тощо.

Доцільною вбачається організація проблемно-пошукової (дослідницької) діяльності учнів на уроках та позакласних і факультативних заняттях з математики.

Мета застосування комп'ютера на уроках математики

– розширити межі творчої діяльності вчителя та учнів;

– усвідомити можливості ефективного застосування комп'ютерних технологій;

– привчити учнів до самостійної дослідницької діяльності під час розв'язування практично спрямованих завдань.

Переваги використання ІКТ

- Індивідуалізація навчання;
- Інтенсифікація самостійної роботи учнів;
- Зростання обсягу виконаних на уроці завдань;
- Розширення інформаційних потоків при використанні Internet;
- Підвищення мотивації та пізнавальної активності за рахунок різноманітності форм роботи, можливості включення ігрового моменту: розв'яжеш вірно приклади – відкриєш картинку, знайдеш помилку – просунешся ближче до мети казкового героя. Комп'ютер дає вчителю нові можливості, дозволяючи разом з учнем отримувати задоволення від захоплюючого процесу пізнання, не тільки силою уяви, розсовуючи стіни шкільного кабінету, але й за допомогою новітніх технологій дозволяє зануритися в яскравий барвистий світ. Таке заняття викликає у дітей емоційний підйом, навіть відсталі учні охоче працюють з комп'ютером.

Інтегрування звичайного уроку з комп'ютером дозволяє вчителю перекласти частину своєї роботи на ПК, роблячи при цьому процес навчання більш цікавим, різноманітним, інтенсивним. Зокрема, стає більш швидким процес запису визначень, теорем та інших важливих частин матеріалу, тому що вчителю не доводиться повторювати текст кілька разів (він вивів його на екран), учневі не доводиться чекати, поки вчитель повторить саме потрібний йому фрагмент.

Покажемо, як можна застосовувати дані ППЗ на уроці алгебри при вивченні нерівностей та їх систем за допомогою платформи GeoGebra. Саме вона найзручніша у використанні та багатофункціональна.

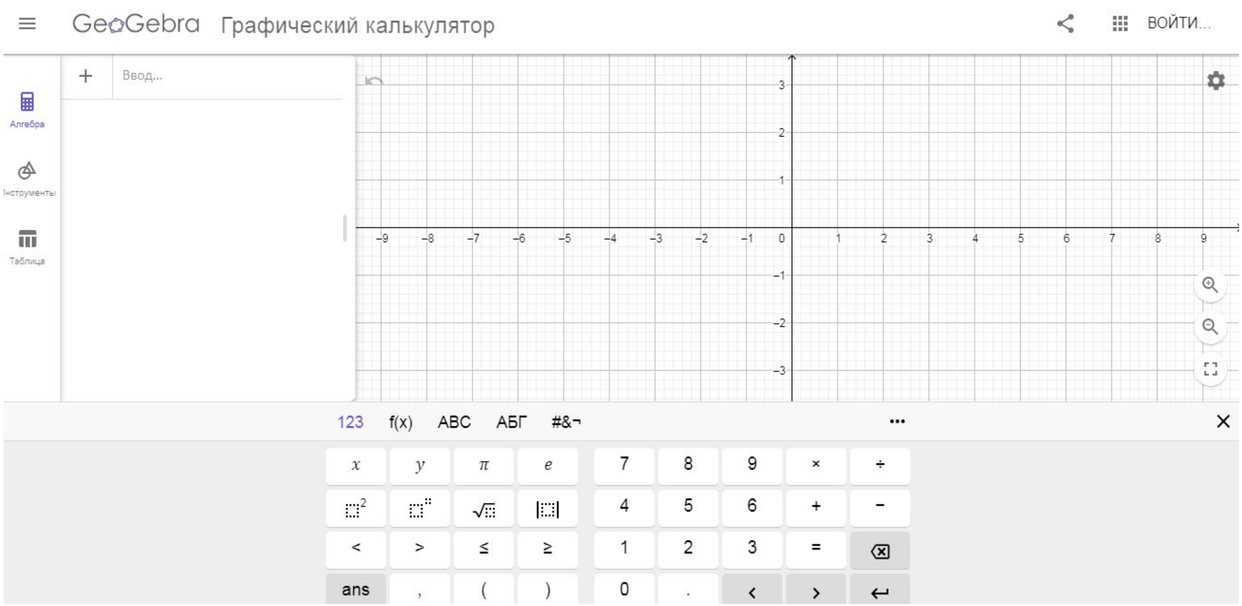
GeoGebra - вільно-поширюване (GPL) динамічне геометричне середовище, яке дає можливість створювати «живі креслення» для використання в геометрії, алгебрі, планіметрії, зокрема, для побудов за допомогою циркуля і лінійки.

Крім того, програма володіє багатими можливостями для роботи з функціями (побудова графіків, обчислення коренів, екстремумів, інтегралів тощо) за рахунок команд вбудованої мови (яка, до речі, дає змогу керувати і геометричними побудовами).

Програма написана Маркусом Хохенвартером мовою Java. Перекладена на 39 мов. На сьогодні активно розробляється.

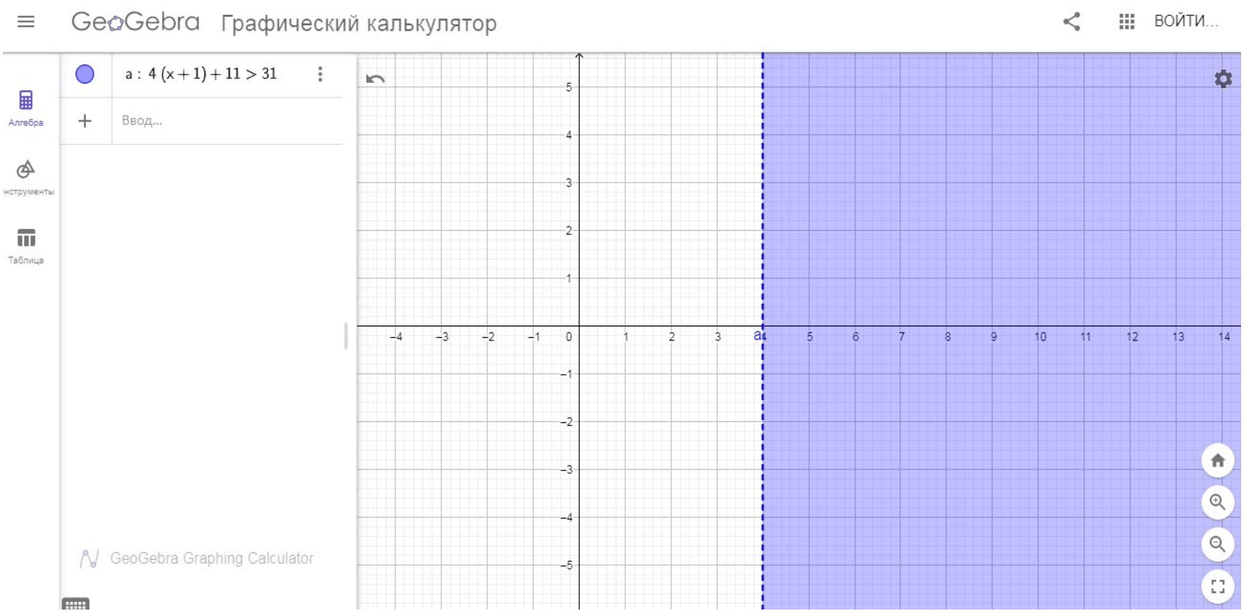
Платформу можна використовувати в онлайн-режимі, перейшовши за посиланням https://www.geogebra.org/graphing?lang=ru. [30]

Інтерфейс середовища GeoGebra



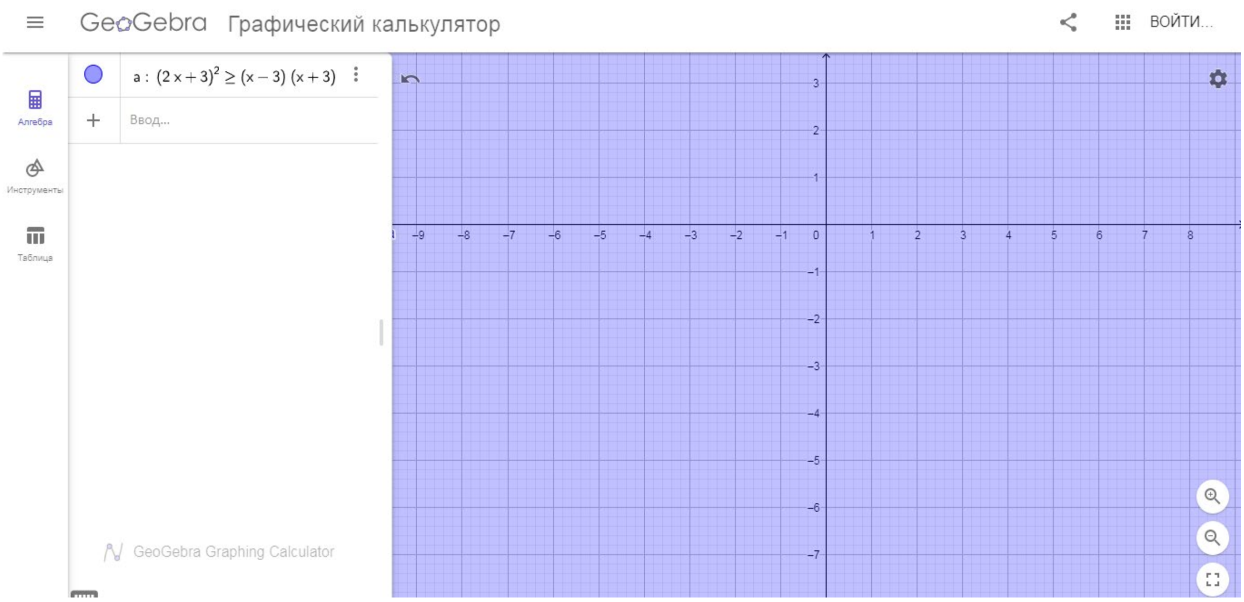
Для того, щоб розв’язати нерівність чи систему нерівностей слід у полі введення внести завдання та натиснути клавішу Enter. Після цього програма автоматично виділить кольором проміжок, який є розв'язком нерівності. Наведемо приклади розв'язування нерівностей, які вивчаються в основній школі.

Розв'яжемо лінійну нерівність $4\,(x+1)+11>31$.



Учні наочно мають змогу перевірити правильність їх обчислень. У даному випадку розв'язком нерівності буде проміжок $x \in (4; +\infty)$.

Розглянемо розв'язок квадратної нерівності $(2x+3)^2 \geq (x-3)(x+3)$.



При введені нерівності у середовище учні розуміють, що $x \in R$, оскільки кольором заповнені всі дійсні числа.

Розглянемо розв'язок систем нерівностей.

Приклад алгебраїчного завдання 9 класу з високого рівня.

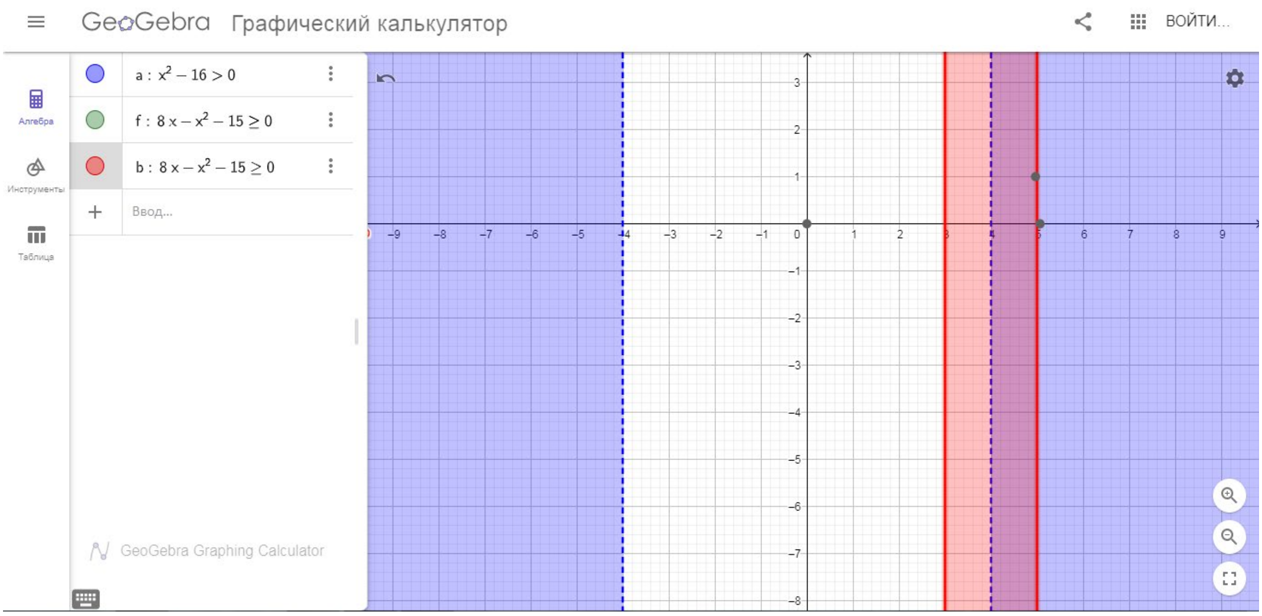
Знайдіть область визначення функції:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}} + \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

Учні знають, що підкореневий вираз $\sqrt{x}$ має бути лише $x \geq 0$, але в першому доданку у знаменнику підкориневий вираз набуває лише додатніх значень, тобто $x^2 - 16 > 0$. Можемо скласти систему нерівностей:

$x^2 - 16 > 0$

$8x - x^2 - 15 \geq 0$



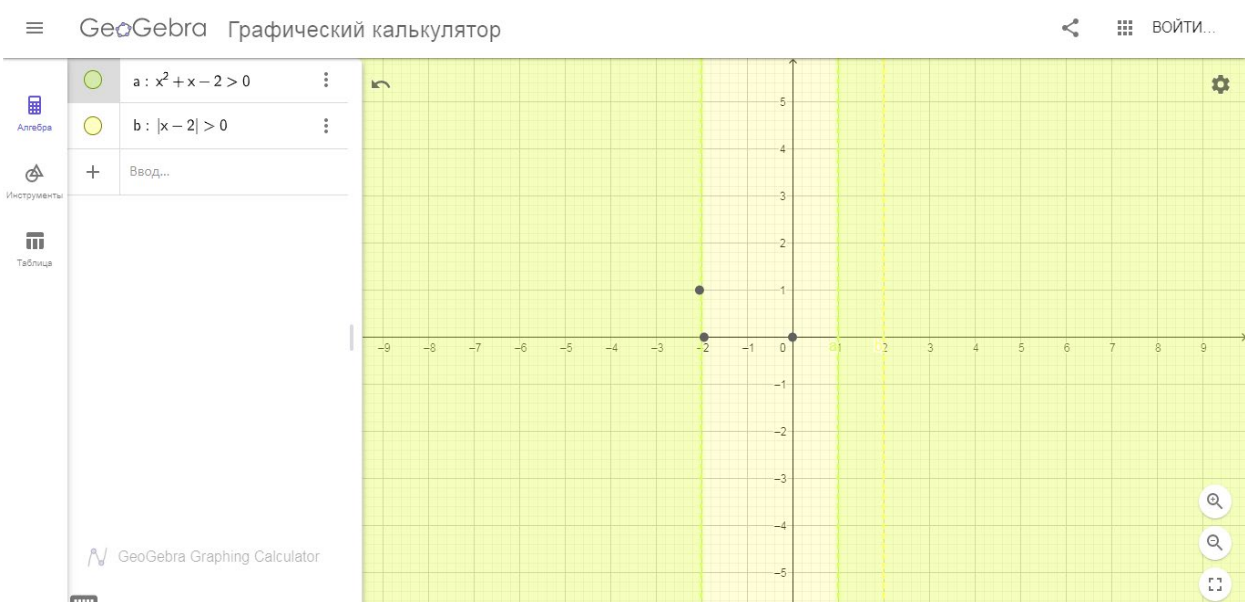
Вчитель вводить дані у середовище і учні розуміють, що розв’язком системи є проміжок $x \in (4; 5]$.

Також у **GeoGebra** вчитель має можливість показати розв’язок дробово-раціональної нерівності.

Приклад.

Розв’яжіть нерівність:

$$\frac{x^2 + x - 2}{|x - 2|} > 0$$



Розв’язком нерівності є проміжок $x \in (-\infty; -2) \cup (1;2) \cup (2; +\infty)$.

Таким чином, процес розв’язування нерівності за допомогою ППЗ є послідовністю кроків, на кожному з яких користувач виконує деякі перетворення математичної моделі задачі. До найважливіших аспектів підтримки роботи учня можна віднести перевірку правильності ходу розв’язування нерівності, автоматизацію рутинних дій учня, пов'язаних з обчисленнями [13, с. 75]. У ході діяльності учитель може оперативно здійснювати перевірку правильності ходу розв’язування нерівності, автоматизоване тестування знань учнів. ПМК може використовуватися на уроці у процесі пояснення методів розв’язування нерівностей, для проведення самостійних і контрольних робіт.

Застосування на уроці комп’ютерних тестів і діагностичних комплексів дозволить вчителю за короткий час отримувати об’єктивну картину рівня засвоєння матеріалу, що вивчається у всіх учнів і своєчасно його скоректувати. При цьому є можливість вибору рівня складності завдання для конкретного учня.

Для учня важливо те, що відразу після виконання тесту (коли ця інформація ще не втратила свою актуальність) він отримує об’єктивний результат із зазначенням помилок, що неможливо, наприклад, при усному опитуванні.

Комп'ютер доцільно використовувати у навчальному процесі для підвищення його ефективності та розвитку в учнів загальнонавчальних і спеціальних навичок, що ефективніше, ніж під час використання традиційних засобів.

Програмне забезпечення з математики можна класифікувати таким чином:

– навчальні комп'ютерні програми (електронні підручники);

– системи пошуку інформації (електронні каталоги бібліотек, пошукові системи INTERNET);

– моделюючі програми (які дозволяють моделювати експерименти, уявні або реальні життєві ситуації);

– контролюючі програми;

– інструментальні (програми, що забезпечують можливість створення нових електронних ресурсів: засобів пізнавального характеру, універсального характеру, засобів для забезпечення комунікацій).

Тоді відповідно доцільно використовувати ПК в таких випадках:

– діагностичне тестування якості засвоєння навчального матеріалу;

– у тренувальному режимі для відпрацювання елементарних умінь та навичок після вивчення теми;

– у навчальному режимі;

– під час роботи з слабо встигаючими учнями, у яких використання комп'ютера зазвичай значно підвищує інтерес до навчання;

– у режимі самоосвіти;

– у режимі графічної ілюстрації нового матеріалу.

Програму створення тестів Test та проведення тестування на уроках доцільно використовувати:

– на початку вивчення теми, для самоконтролю: учні шукають у конспектах або підручнику правильні відповіді на тестові запитання;

– для проведення самостійної роботи: у тестах запропоновано приклади та задачі, які учні розв'язують у зошитах і вибирають правильну відповідь;

– у кінці вивчення теми для контролю теоретичних знань учнів (при цьому учень не має права підглядати у зошит, книжку чи інший посібник);

– для самостійного створення сильними учнями тестів до уроків з конкретних тем у позаурочний час.

Тестування як засіб педагогічної діагностики дозволяє оперативно й точно визначити рівень знань окремого учня, характеристики навчального процесу в класі, групі, паралелі класів, школі, місті, країні та ін.

Тестові методики добре зарекомендували себе в багатьох країнах світу. А з урахуванням переходу у 2007 році на незалежне зовнішнє оцінювання навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів потребують ширшого впровадження у практику роботи. Систематична робота з комп'ютерним тестом повинна стати для учня звичною справою. Тоді зростають його шанси на складання успішного незалежного зовнішнього тестування.

Широке використання тестової перевірки знань під час вивчення математики підвищує ефективність навчально-виховного процесу через створення атмосфери довіри, відкритості, об'єктивності, забезпечує оперативний зворотний зв'язок, дозволяє проводити миттєвий аналіз та корекцію процесу навчання.

Контрольно-діагностична система TEST-W призначена для перевірки знань тестуванням на комп'ютері і є хорошим програмним середовищем для створення тестів з математики. Вихідний тест може мати будь-яку кількість запитань (рекомендується від 30 до 50 і більше).

З вихідного тесту методом випадкового вибору послідовно виводиться задана кількість запитань (наприклад, 25). Таким чином, кожен учень одержує свій, відмінний від сусідів, набір запитань, що забезпечує індивідуалізацію і об'єктивність оцінки. На кожне запитання тесту пропонується 5 варіантів відповідей, серед яких від одного до трьох правильних. Учню треба вказати правильні, на його думку, відповіді й перейти до наступного запитання. Час відповіді на тест обмежений. Рекомендується проводити тестування протягом 10-15 хвилин для кількості запитань 20-25.

Комп'ютерні програми – це знаряддя для проведення досліджень, наочного цікавого представлення інформації, перевірки знань, умінь і навичок учнів у цікавій для них формі. Під час роботи з ними формуються інформаційні, комунікативні, кооперативні, проблемні компетенції учнів.

Практична перевірка ефективності даної методики

Під час написання магістерської роботи було проведено опитування вчителів математики Великогорянської загальноосвітньої школи І-ІІ ступенів Лопушненької сільської ради Тернопільської області з метою аналізу використання дидактичних програмних засобів навчання на уроках математики для формування вмінь і навичок розв'язування завдань з нерівностями.[Дод. А]

Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок, що використання інформаційних технологій у сучасній педагогічній діяльності вчителів є актуальним у теперішіній час. Вже третій рік навчальній заклади України працюють в онлайн-режимі та змішеному навчанні.

В інтернет-середовищі вчителі мають можливість доступу до різноманітних навчальних ресурсів: Всеукраїнська школа онлайн, різноманітні онлайн-курси, освітні сайти, рекомендовані Міністерством освіти і науки України тощо.

Використання різноманітних інформаційних технологій у роботі вчителів дає позитивні результати. Учні більш змотивовані, певною мірою краще розуміють матеріал, вчителю легше підтримувати їх активність та увагу на уроці.

ВИСНОВКИ

В результаті аналізу психолого-педагогічної, навчальної та науково-методичної літератури з теми дослідження вдалося систематизувати теоретичні відомості, пов'язані з особливостями вивчення нерівностей та їх систем у класах з поглибленим вивченням математики в контексті компетентнісно-орієнтованого підходу. Було проведено логіко-дидактичний аналіз теми «Нерівності» з точки зору реалізації компетентнісного підходу. Виконано порівняння різних методичних прийомів вивчення теми, досліджено теоретико-множинні аспекти розв'язування нерівностей та їх систем, проаналізовано складові алгебраїчної культури учнів при вивченні нерівностей.

У магістерській роботі розкрито методику розв'язування нерівностей у класах з поглибленим вивченням математики сучасної школи, розглянуто приклади, які допоможуть засвоїти основи математичного апарату розв'язування нерівностей, використовуючи різні способи. Зокрема, під час вивчення даної теми було виявлено, що розв'язування нерівностей спрямоване на формування в учнів системи математичних знань, вироблення вмінь і навичок математичного моделювання, обчислення, розвитку прийомів розумової діяльності.

Впровадження інформаційно-комп'ютерних технологій на уроках математики надає вчителям великі педагогічні можливості по формуванню предметних компетенцій. В учнів з'являється стійкий інтерес до навчання і пізнавальні мотиви, формуються потреби в самонавчанні, саморозвитку, а також уміння самовизначитися в навчальній діяльності з усвідомленням особистої відповідальності в ній, потреби в колективній праці, спрямованій на одержання спільного результату. У педагога змінюється позиція – він стає носієм компетентнісного підходу в освіті.

Зміст лінії нерівностей розгортається протягом усього шкільного курсу математики. Враховуючи важливість і широту матеріалу цієї лінії, ще раз відзначимо доцільність на заключних етапах навчання пропонувати досить різноманітні і складні завдання, розраховані на активізацію найбільш істотних компонентів цієї лінії, основних понять і основних прийомів розв’язування, дослідження і обґрунтування завдань.

Сучасна педагогічна наука стверджує, що для продуктивного засвоєння учнями знань і для їхнього інтелектуального розвитку важливо встановлювати зв’язки, як між різними розділами курсу, так і між різними дисциплінами в цілому.

Дослідивши можливості використання програмних засобів при вивченні нерівностей та їх систем, ми вияснили, що застосування ППЗ забезпечує диференціацію навчання і підвищення його результативності, сприяє розвитку пізнавальної активності та графічної культури учнів. Застосовувати елементи ІКТ можна на різних етапах заняття.

Проаналізувавши підручники можна зробити висновок, що у підручниках дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв’язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Для реалізації програми учитель може обирати підручники як з числа тих, що використовуються в загальноосвітній школі, так і призначені для поглибленого вивчення математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень. Харків, 2011. 431 с.
2. Бантова М. А., Бельтюкова Т.В. Методика викладання математики. Київ: Генеза, 2008. 335 с.
3. Бантова М. А., Бельтюкова Т.В., Степанова С.В. Методичний посібник до підручника математики. Київ: Генеза, 2009. 264 с.
4. Бевз В. Г., Мерзляк А., Слєпкань З. Програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 5-11 класи. Математика в школі. 2003. № 6. С. 1-14.
5. Бевз В. Г., Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
6. Біляк Б., Дуда О. Профільне навчання в загальноосвітніх навчальних закладах. Директор школи, ліцею, гімназії. 2003. № 4. С. 44-47.
7. Бродський Я.С., Сліпенко А.К. Похідна та інтеграл в нерівностях, рівняннях, тотожностях. Київ: Вища школа, 1988. 120с.
8. Бугайов О. І., Дейкун Д. І. Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі. Київ: Освіта, 1992.
9. Бурда М. І., Жалдак М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М., Шкіль М. І., Ядренко М. Й. Програма поглибленого вивчення математики в 10-11 профільних класах. Математика в школі. 2003. № 6. С. 19-25.
10. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики: навч.-метод. посібник. Харків: Видавнича група «Основа», 2008. 225 с.
11. Вороний О.М. Застосування похідної та інтеграла при доведенні нерівностей. Газета для освітян «Математика», ВП Перше вересня. 1999. №10 (22). С. 3,8.

12. Геометрія: Підруч. для учнів 10-11 кл. з поглиб. вивч. математики в серед. загальноосвіт. закладах / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова. Київ: Освіта, 2000. 239 с.
13. Громов М. Можливі напрямки розвитку математики в наступних десятиліттях. У світі математики. 2001. №1 с. 3-5.
14. Дороговцев А.Я. Інтеграл та його застосування. Київ: Вища школа. 1974. 125с.
15. Дорофєєв Г.М. Застосування похідних при вирішенні задач у шкільному курсі математики. Математика в школі. 1980. № 5. С. 12-21, № 6 С. 24-30.
16. Дунець Л., Дунець О. Формування професійних інтересів у майбутніх фахівців. Рідна школа. 2001. Січень. С. 48-49.
17. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. Київ: Техніка, 1997. 304 с.
18. Кабардін О. Профільна школа. Завуч. 2002. № 16. С. 2-3.
19. Котла С. Похідна. Алгебра і початки аналізу, 11 клас. Математика. 2008. №35. С. 15-16.
20. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики. Навчально-методичний посібник. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 148 с.
21. Литвин Н. Похідна функції. Алгебра і початки аналізу, 11 клас. Математика. 2011. №42. С. 9-11.
22. Математика. Навчальна програма для поглибленого вивчення матемтаики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. Електронний ресурс. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf
23. Математика. Навчальна програма для учнів 10-11 класів загальносвітніх навчальних закладів. Електронний ресурс. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

24.Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рік / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. Львів: Каменяр, 2008. 348 с.

25.Мерзликін О.В. Формування дослідницьких компетентностей старшокласників з фізики засобами хмарних технологій. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. 2014. Том XII. Випуск 3 (34): спецвипуск «Методичний посібник у журналі». 93 с.

26.Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл.: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін. Харків: Гімназія, 2019. 304 с.

27.Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М. С. Якір. Харків: Гімназія, 2021. 383 с.

28.Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М. С. Якір. Харків: Гімназія, 2017. 272 с.

29.Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.

30.Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків: Гімназія, 2011. 431 с.

31.Мерзляк А.Г. Алгебра: академ. рівень, проф. рівень: підруч. для 11 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків: Гімназія, 2011. 431 с.

32.Мерзляк А.Г. Алгебраїчний тренажер. Харків: Гімназія, 1998. 404 с.

33.Назаренко Л.Д. Тисяча і один приклад. Рівності та нерівності. Суми: Слобожанщина, 1994. 488 с.

34.Перехейда О. М. Розв’язування нерівностей. Харків: Вид. група «Основа», 2003. 112 с.

35.Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. Харків: Факт, 2005. 360 с

36.Раков С.А., Горох В.П., Осенков К.О. Відкриття геометрії через комп'ютерні експерименти в пакеті. Харків: ХДПУ, 2002. 108 с.

37.Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. Посібн. Київ: Видавництво А. С. К., 2004.

38.Сарана О.О. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навч. посібн. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. 400 с.

39.Семенов В. О. Доведення нерівностей. Числові послідовності. Скінченні суми і добутки. Харків: Вид. група «Основа», 2009. 127 с.

40.Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

41.Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

42.Соколенко Л.О. Теоретико-множинні аспекти шкільного курсу математики. Матеріали міжнародної науковометодичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2015), м. Черкаси, 4-5 червня. Ч.: ЧНУ ім. Б. Хмельницького. 2015. С.211– 212.

43.Тадєєв В.О. Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В.І. Михайловського. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. 384 с.

44.Тадєєв В.О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. М. Ядренка. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. 480 с.

45.Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики: Навчальний посібник. Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2005. 368 с.

46.Ушаков Р.П., Хацет Б.І. Опуклі функції та нерівності. Київ: Вища школа, 1986. 112с.

47.Ципкін О.Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів. Київ: Вища шк., 1988. 416 с.

48.Шишов С. Поняття компетентності в контексті якості освіти / С. Шишов, І. Агапов. Дайджест педагогічних ідей і технологій. 2002. №3. С. 20–21.

49.Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення. Навч. посібник. Київ: Вища школа, 1993. 375с.

50.Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. 208 с.

Додаток А

Анкета

1. Які методи та прийоми навчальної діяльності Ви використовуєте при викладанні теми «Нерівності»?

2. Які програмні засоби Ви використовуєте на уроках?

3. Які програми найкраще використовувати при вивченні теми «Нерівності»?

4. Чи вважаєте Ви, що використання програмних засобів є ефективним у вивченні математики?

5. З власного досвіду поділіться інформацією, як учні засвоюють тему «Нерівності»? Чи були труднощі?

6. Як часто варто застосовувати програмні засоби на уроках математики?

7. Який вид нерівностей є найскладнішим для учнів?

8. Чи можете порекомендувати онлайн-сервіси, де можна скористатися дидактичним матеріалом з теми «Нерівності»?

9. Що Ви можете порадити для ефективного навчання учнів розв’язувати нерівності?