Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота
Бакалавр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему : **«МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕМ ТА ЇХ ДОВЕДЕНЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ»**

Виконав : студент IV курсу, групи МІ-42
напряму підготовки
0402 «Фізико-математичні науки»
6.040201 «Математика»
Лабуда Марія Богданівна
Керівник : доц. Коваль В. В.
Рецензент : проф. Турбал Ю. В.

Рівне, 2017 рік

ЗМІСТ

ВСТУП

Із часів античності говорити «математика» означає говорити «доведення». Доведення – єдиний метод відшукання істини. Видатний математик та філософ XIX століття О. Д. Александров писав: «Математика навчає точності думки, підкоренню логіці доведень, поняттю строго обґрунтованої істини, а все ж формує особистість, мабуть, більше, ніж музика» [6]. Одним із стратегічних та найскладніших завдань викладача математики є формування в учнів логічної компетентності – вміння володіти та застосовувати математичні методи доведення та спростування тверджень.

Крокуючи сторінками розвитку математики, можна дізнатись, що вчений-геометр Фалес, який був родоначальником грецької математики, вперше увів у геометрію ідею доведення. Про величезний внесок Фалеса в геометрію свідчать коментарі Прокла. Він повідомляє, що Фалес довів ряд важливих геометричних тверджень: діаметр ділить круг навпіл; вертикальні кути рівні; кути при основі рівнобедреного трикутника рівні; трикутники з рівною стороною і двома кутами рівні; кут, що спирається на діаметр – прямий. Починаючи з часів Евкліда, незмінною залишається ідеальна структура математичного доведення як демонстрації «неочевидної» істини шляхом переходу до неї від «очевидних» істин або встановлених раніше тверджень за допомогою послідовності явних «очевидно законних» умовиводів [2].

Зараз математика необхідна всім. Без математичних обчислень не можна побудувати не тільки космічного корабля чи електростанції, а й звичайного будинку. У наш час збільшується обсяг математичних знань, що використовуються різними науками. Тому важливо, щоб наша молодь мала грунтовну математичну підготовку.

Актуальність теми. Експериментальні дослідження психологів і методистів, досвід роботи передових учителів свідчать, що коли в учнів сформовано загальні й специфічні розумові дії, які є складовими уміння доводити, то за належної організації вивчення вже в основній школі учні можуть засвоїти основні методи доведень та методичні прийоми, які використовуються при доведенні теорем. Психологічними і дидактичними передумовами, що сприяють свідомому засвоєнню кожного методу, є оволодіння учнями алгоритмами або правилами-орієнтирами (евристичними схемами) методів, які становлять орієнтовну основу діяльності, спрямованої на пошук і виконання доведення. Ефективним є таке ознайомлення учнів зі змістом методу доведення і його правилом-орієнтиром, за якого на прикладі доведення одного-двох тверджень (теорем або задач на доведення) учні під керівництвом учителя колективно виявляють істотні загальні кроки в доведенні та формулюють відповідний алгоритм чи правило-орієнтир і відповідний методичний прийом [11].

Мета роботи: дослідити методику вивчення теорем та їх доведень в шкільному курсі математики.

Предмет дослідження: суть методичних прийомів, які використовуються при роботі з теоремами.

Об'єкт дослідження: методичні прийоми, які використовуються при роботі з теоремами в шкільному курсі математики.

В основу дослідження покладена гіпотеза про те, що під час вивчення методів доведень теорем, тверджень і задач з використанням різних методичних прийомів починаючи з найлегших і закінчуючи найважчими для сприйняття, учні будуть розуміти доведення як складову частину розв'язування, а також в них розвиватиметься логіка мислення, уява, уявлення, позитивні якості особистості та відбуватиметься усвідомлення аксіоматичної побудови математики.

Основними завданнями роботи є:

- дослідити значення доведення на уроках математики;
- розглянути та систематизувати відомості про різноманітні методи доведень;
- подати приклади завдань з використанням різних методів доведення і методичних прийомів, які використовуються при роботі з ними;
- зробити висновки.

Практичне значення роботи визначається тим, що розроблений зміст і методика, подані приклади можуть бути використані вчителями шкіл при проведенні уроків математики в школі, на факультативних заняттях, а також студентами ВНЗ під час вивчення різних дисциплін чи написанні авторських робіт.

Робота складається з: вступу, 4 розділів, які включають в себе науково-теоретичні умови дослідження, психолого-педагогічні основи дослідження, методику вивчення доведень в шкільному курсі математики, прийоми, які використовуються при роботі з теоремами та задачами на доведення, педагогічного експерименту та обробки його результатів, висновків та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ УМОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Психолого-педагогічні основи дослідження

Специфіка і структура шкільного курсу математики відкривають широкі можливості для розвитку творчих здібностей учнів, формування прийомів розумової діяльності, інтелекту.

У вирішенні цих питань важливе місце належить геометрії, оскільки геометричні знання і вміння є одним із вагомих факторів, що забезпечують, насамперед, готовність людини до неперервної освіти та трудової діяльності.

На етапі розбудови системи національної освіти та її інтеграції в світову важливим є питання відповідності змісту базової математичної освіти вимогам суспільства, розвитку науки, сучасним потребам особи.

Основна школа в Україні згідно з Законом України «Про освіту» повинна забезпечити базову загальну середню освіту, тобто дати випускникам чітко окреслене коло знань, практичних навичок та умінь, потрібних для роботи в умовах сучасного виробництва, а також для здобуття повної загальної середньої освіти в старшій школі та продовження неперервної освіти.

Для успішної участі в сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв’язування практичних задач. Значні вимоги до володіння математикою у розв’язуванні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах. Тому одним із головних завдань шкільного курсу є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності.

Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об’єктів, процесів і явищ, задач, пов’язаних із ними, за допомогою математичних об’єктів, відповідних математичних задач;
- вміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати

вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язування задачі; переформульовувати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв'язки між ними, складати план розв'язання задачі; вибирати засоби розв'язання задачі, їх порівнювати і застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв'язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв'язання задачі;

- володіє технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені;
- вміє працювати з формулами;
- вміє класифікувати і конструювати геометричні фігури на площині й у просторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та їх елементи, виконувати побудови на зображеннях;
- вміє вимірювати геометричні величини на площині й у просторі, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми).

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.

Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема.

Навчання – цілеспрямована взаємодія вчителя і учнів у процесі якої засвоюються знання, формуються вміння й навички. У педагогічному процесі педагогічні категорії взаємопов'язані та взаємозумовлені. Як у широкому соціальному, так і у широкому педагогічному значенні виховання охоплює навчання та освіту.

Як зазначив С. Рубінштейн, правильне трактування компонентів засвоєння потребує розуміння того, що всі вони формуються у двобічному процесі навчання, де взаємопов'язані та взаємозумовлені вчитель, учень і навчальний матеріал. С. Рубінштейн наголошував також на взаємозалежності та взаємопроникненні цих психічних процесів у засвоєння.

Розрізняють такі стадії (етапи) процесу засвоєння (за С. Рубіштейном):

- початкове ознайомлення з матеріалом або його сприймання в широкому розумінні;
- осмислення;
- спеціальна робота, пов'язана із закріпленням матеріалу;
- опанування матеріалу – можливість оперувати ним у різних умовах [14].

Внутрішній процес засвоєння знань включає три взаємопов'язані етапи (стадії).

На першій стадії відбувається сприймання, осмислення і запам'ятовування матеріалу, що вивчається, або засвоєння теоретичних знань.

На другій стадії засвоюються навички і вміння практичного застосування знань, що вимагає проведення спеціальних тренувальних вправ.

На третій стадії здійснюється повторення, поглиблення і закріплення знань, удосконалення практичних умінь і навичок.

Тобто, для того, щоб оволодіти новим матеріалом учневі необхідно здійснити повний цикл навчально-пізнавальних дій: сприймання нового матеріалу, його первинне і наступне осмислення, запам'ятовування, виправлення при застосуванні теорії на практиці, повторення з метою поглиблення і засвоєння знань, умінь, навичок.

Прикладна спрямованість сприяє формуванню наукового світогляду, мотивації навчання, інтересу до предмету і показує роль математики в сучасному виробництві, економіці, науці.

Спеціальні дослідження психологів показали, що до 90% причин помилок і неспроможності розв’язати задачу в тому числі й нестандартну, є нерозуміння задачі учнями і, перш за все, нерозуміння умов і вимог задачі, зв'язків між ними. Саме тому важливо вчити учнів аналізувати формулювання задачі, виділяти в ньому умови і вимоги, вміти переформулювати їх, встановити можливі зв'язки між ними і в більш складних задачах символічно, користуючись рисунком і введеними позначеннями, коротко записувати умови та вимоги.

Отже, особистість стає метою освіти, і математичної зокрема. Функції освіти полягають у тому, щоб засобами розвитку особистості забезпечити саморозвиток суспільства. Саме у концепції 12-річної загальноосвітньої школи України зазначається, що стратегічною метою школи є життєва та соціальна компетентність учнів, що передбачає розвиток і саморозвиток школярів на основі більш повного використання внутрішнього потенціалу особистості. Належний рівень розвитку учнів позитивно впливатиме і на якість навчання та їх інтелектуальний розвиток. Особистісно-орієнтована освіта в якості змісту особистісного розвитку приймає розвиток тих функцій, які особистість виконує в життєдіяльності. Зрозуміло, створювати умови та забезпечувати розвиток названих вище функцій особистості у процесі навчання математики значно важче, ніж розвивати логічне мислення, просторові уявлення та алгоритмічну уяву, інформаційну культуру, ніж формувати уміння розв'язувати задачі, доводити математичні твердження.

Виконання поставленого завдання можливе за умови комплексного підходу до навчання, суттєвими параметрами якого є єдність усіх функцій навчання (освітньої, розвивальної і виховної) та всіх компонентів навчально-виховного процесу (цілей, змісту, методів і прийомів, організаційних форм і засобів навчання), використання традиційних і новітніх досягнень педагогіки, психології і методики навчання математики.

1.2. Роль доведень в математиці

Доведення у математиці – процедура, за допомогою якої встановлюють істинність гіпотези чи будь-якого твердження. Принципи доведення вивчаються спеціальною областю математики – теорією доказів.

У математиці доказом також називається ланцюжок логічних висновків, що показує, що при якомусь наборі аксіом і правил виводу є правильним деяке твердження. Залежно від контексту, може матися на увазі формальний доказ (побудована за спеціальними правилами послідовність тверджень, записана на формальній мові) або текст на природній мові, за яким за бажанням можна відновити формальний доказ.

Доведення у сучасному курсі математики посідають все меншу роль, все більш популярними стають видання «Геометрія у таблицях», «Алгебра у таблицях», в яких подаються зведені у таблиці довідкові матеріали зі шкільного курсу математики, наводяться типові задачі і алгоритми їх розв’язування.

Все це знаходить відображення у зовнішньому незалежному оцінюванні знань з математики – починаючи з 2010 року з нього вилучені задачі з розгорнутою формою відповіді, і одним з мотивів такого вилучення був факт, що більшість учасників тестування до розв’язування цих задач у 2008 і 2009 роках не приступала.

Кожна розвинена особистість, кожне розвинене суспільство буде постійно задавати і шукати відповіді на питання:

1. Що таке математика?
2. Що таке доведення у математиці?
3. Яка мета навчання математики?
4. Яке місце доведень у навчанні математики?
5. Що таке наука?
6. Яке місце у науці посідає математика?

Ці питання вічні і ніколи не буде знайдено однозначних остаточних відповідей на них [6].

На питання: «Яка роль доведень у математиці?» абсолютна більшість відповідей саме така: «Для доведення правильності математичних тверджень або їх спростування». І це правильно, тому що математика – це єдина з наук, в якій доведення (виводимість з системи аксіом) виступає виключним критерієм істинності будь-якого факту. Разом із тим визнання головної ролі доведень у навчанні математики викликає сумнів з багатьох причин: неможливість з різних причин проведення доведень на достатньо високому рівні строгості, трудомісткість побудови курсу математики із строгим дотриманням дедуктивних принципів тощо.

Необхідність доведення є наслідок одного з основних законів логіки (логіка - наука про закони правильного мислення) – закону достатньої підстави. Цей закон містить вимогу,щоб будь-яке висловлене нами твердження було обґрунтоване, тобто щоб воно супроводжувалося досить переконливими аргументами, що підтверджують істинність нашого твердження, його відповідність фактам, дійсності. Такими аргументами можуть бути як вказівки на можливість перевірки шляхом спостереження і досліду, так і правильно побудоване міркування, що містить систему умовиводів. Доведення тверджень має на меті встановити його достовірність за допомогою логічного висновку з уже доведених або відомих істин [11].

Для створення психологічних передумов успішного засвоєння готових доведень важливо не пропускати проміжні ланки доведення. Психологи обґрунтовують це тим, що міркування, пов'язані з поновленням пропущених ланок, відвертають увагу учнів від основної лінії доведення. Відомі педагоги-математики середньої та вищої школи на своїх уроках і лекціях завжди прагнули роз'яснювати учням навіть дрібниці, щоб усунути будь-яку неясність, зосередити увагу на головному.

Перш ніж проводити докладне доведення, потрібно спочатку назвати основні етапи і твердження, на яких воно ґрунтуватиметься. Це дає можливість звернути увагу учнів на структуру доведення в цілому, виявити його основну ідею, назвати метод. Це обґрунтовуються тим, що докладне, розгорнуте доведення забезпечує утворення зв'язків між окремими ланками, а коротка схема з вказівкою на ідею і метод доведення забезпечує розуміння структури основних зв'язків в цілому, сприяє міцності засвоєння матеріалу.

Отже, етапами вивчення теореми є:

- Мотивація вивчення теореми та розкриття її змісту;
- Робота над структурою теореми;
- Мотивація необхідності доведення теореми;
- Побудова креслення і короткий запис змісту теореми;
- Пошук доведення, доведення та його запис;
- Закріплення теореми;
- Застосування теореми.

1.3. Аксіоми та теореми. Необхідні та достатні умови

Вивчення теорем і їх доведень в курсі геометрії починається із 7 класу і посідає значне місце в навчальному матеріалі. Наприклад, в курсі геометрії 7 класу паралельні підручники містять по 18 теорем. Крім того, в них передбачено значну кількість задач на доведення, які в традиційних підручниках геометрії, наприклад у підручнику А. П. Кисельова, відігравали роль теорем. Теореми і їх доведення розвивають логіку мислення учнів, просторові уявлення та уяву, вчать методам доведення, сприяють усвідомленню аксіоматичної побудови математики. Доведення дають змогу учням засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості, зокрема обгрунтованість суджень, стислість, чіткість висловлення думки.

На рівні обов'язкового мінімуму відповідно до програми учні мають розв’язувати типові задачі на обчислення, доведення і побудову, виконувати доказові міркування, ґрунтуючись на теоретичних фактах (аксіоми, теореми, означення).

Для виконання цих вимог учні мають знати формулювання аксіом і основних теорем: ознаки рівності й подібності трикутників, ознаки паралельності прямих, теорему Піфагора, ознаки паралельності й перпендикулярності прямих і площин у просторі та ін.

Чи повинні учні знати всі доведення теорем? Під час вивчення певної теми на рівні обов'язкових результатів навчання учні мають знати формулювання теореми, основні етапи доведення, найважливіші обґрунтування і найпростіші застосування теореми; на рівні 8-12 балів уміти доводити і застосовувати теорему в складніших випадках.

Теорему не можна вважати засвоєною, якщо учні не вміють застосовувати її до розв’язування типових задач. У реальній шкільній практиці вчителі реалізують ці вимоги по-різному. Основними недоліками у вивченні теорем та їх доведень є формалізм у знаннях і вміннях учнів. Деякі з них сумлінно виучують доведення теорем за підручником, але не можуть відтворити їх на зміненому положенні рисунка, з іншими буквенними позначеннями і, що найголовніше, часто не вміють застосовувати теорему в конкретних ситуаціях.

У математиці доводиться мати справу з висловленнями (або твердженнями), які доводяться (теореми, задачі на доведення), і такими, що їх домовляються приймати без доведення (аксіоми). Введення аксіом, як і первісних (неозначуваних) понять, пов’язане з дедуктивним характером побудови математики. Справді, доведення будь-якого твердження Т складається з тверджень, істинність яких обгрунтовується раніше доведеними істинними твердженнями Т. Оскільки низка раніше доведених тверджень не може бути нескінченною, виникає потреба в аксіомах, що в перекладі з грецької мови означає «повага», «авторитет». На основі аксіом, доведених раніше тверджень і означень доводять нові твердження (теореми, задачі на доведення).

Залежно від логічної структури теореми, як і будь-якого висловлення, розрізняють чотири їх види: прямі, обернені, протилежні, контрапозитивні (іншими словами, протилежні оберненим, або обернені протилежним щодо прямої теореми).

Запишемо пряму теорему у вигляді умовного висловлення.

«Якщо P, то C», (1)

де P – умова теореми, C – висновок. Помінявши в теоремі (1) місцями умову і висновок, дістанемо обернену щодо (1) теорему:

«Якщо C, то P». (2)

Замінюючи в теоремі (1) P і C їхніми запереченнями $\overline{P}$ і $\overline{C}$, дістанемо протилежну щодо (1) теорему:

«Якщо $\overline{P}$, то $\overline{C}$». (3)

Одночасно помінявши місцями в теоремі (1) умову і висновок – P і C – і замінивши їх запереченнями $\overline{P}$ і $\overline{C}$, дістанемо контрапозитивну (протилежно обернену або обернену протилежній) теорему щодо (1):

«Якщо $\overline{C}$, то $\overline{P}$». (4)

Теореми (1) і (4), а також теореми (2) і (3) рівносильні.

Отже, якщо теорему (1) доведено, то немає потреби спеціально доводити теорему (4).

До теорем, в яких є кілька умов або висновків (складені теореми), можна сформулювати декілька обернених теорем. З них не всі можуть виявитися правильними. Розглянемо теорему: «Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло». Обернене твердження: «Якщо навколо многокутника можна описати коло, то він – правильний» не є справедливим твердженням. У цьому легко пересвідчитися за допомогою контр-прикладу. Справді, коло можна описати і навколо прямокутника, і навколо рівнобічної трапеції, які не є правильними многокутниками. Якщо з твердження «A» випливає твердження «B» і з «B» випливає «A» (символічно «A => B» і «B => A»), то твердження «A» і «B» називаються рівносильними і позначаються A <=> B. Наприклад, теореми «Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм» і «Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл» – рівносильні твердження. Це правильні взаємно обернені теореми.

З відношенням слідування і рівносильності безпосередньо пов'язані три види умов, що стосуються умовних тверджень: необхідні, достатні, необхідні і достатні. Умова називається необхідною, якщо без її наявності висновок не може виконуватися. Наприклад, у твердженні «Якщо число закінчується парною цифрою, то воно ділиться на 2» умова «Якщо число закінчується парною цифрою» є необхідною умовою, бо число не може ділитися на 2, якщо воно не закінчується парною цифрою.

Умова називається достатньою, якщо за її наявності висновок обов'язково виконується. Наприклад, у твердженні «Якщо функція зростаюча або спадна на певній множині значень аргументу, то вона має обернену функцію на цій множині» умова зростання або спадання (тобто умова монотонності) є достатньою умовою для існування оберненої функцій до даної. Проте функція може мати обернену і тоді, коли умова монотонності не виконується, але кожного свого значення функція набуває лише для одного значення аргументу.

Умова називається необхідною і достатньою, якщо без її виконання висновок не може виконуватись і в разі її виконання висновок обов'язково виконується. У випадку істинності прямої і оберненої теорем умова кожної з них є необхідною і достатньою. Наприклад, кожна з умов двох взаємно обернених теорем щодо паралелограма, наведених вище, є умовою необхідною і достатньою. Умови необхідні і достатні трапляються не тільки в теоремах, а і в означеннях понять. Наприклад, в означенні паралельних прямих простору є дві суттєві ознаки (лежати в одній площині і не перетинатися). Кожна з них є необхідною і лише разом вони достатні для того, щоб дві прямі простору були паралельні. У шкільному курсі твердження, які містять необхідну і достатню умову, формулюють по-різному. Зокрема: «Для того щоб ..., необхідно і достатньо ...». У стверджувальному реченні вживають словосполучення «тоді і тільки тоді», «ті і тільки ті» та ін. Наприклад: « Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю».

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕМ ТА ЇХ ДОВЕДЕНЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Методика навчання учнів доведенню теорем

У більшості теорем і задач на доведення процес доведення спрямований на те, щоб показати, що об'єкти, задані в умові теореми (задачі), містять необхідні й достатні або достатні ознаки понять, про які йдеться у висновку. У геометричних доведеннях такими поняттями можуть бути фігури, їхні властивості, відношення між фігурами. Тому учні мають навчитися розгортати умови, тобто діставати з умови ознаки шуканого поняття, оскільки в складніших теоремах ці ознаки подано в умові неявно, вони приховані за змістом інших понять.

Навчанням доведень називатимемо навчання готових доведень, пропонованих учителем або підручником, і навчання учнів самостійного пошуку доведень, на відміну від А. А. Столяра, який навчання доведень розуміє як навчання розумових процесів пошуку, відкриттів і побудов доведення, а не навчання відтворення і заучування готових доведень. Наше розуміння загальної методичної проблеми навчання доведень пояснюється тим, що готові доведення мають велике значення у процесі навчання математики. За умови належної організації навчання готових доведень можна формувати в учнів компоненти самостійного пошуку і побудови доведення. Готові доведення мають виступати як моделі, на яких учні навчаються розумових дій і прийомів розумової діяльності, що покладено в основу вміння доводити, методів доведень та їх застосування, вчаться самостійно шукати доведення за аналогією з вивченим.

Проблему навчання доведень доцільно поділити на кілька навчальних завдань, які розв'язують послідовно:

1) вивчення готових доведень, вміння відтворювати їх;

2) самостійна побудова доведення за вивченим зразком;

3) пошук і виклад доведення за вказаним учителем методом (способом);

4) самостійний пошук і виклад доведення учнями.

Для успішного навчання доведень потрібно, щоб учні оволоділи досить повною системою теоретичних знань і умінь (поняття та їх означення, аксіоми, теореми, уміння виконувати основні побудови тощо). Шкільна практика свідчить, що цього недостатньо для глибокого усвідомлення і сприйняття учнями готових доведень і самостійного їх відшукання. Використання елементів логіки (роз’яснення учням правил виведення, логічна організація навчального матеріалу) також не розв'язує проблеми ефективного навчання доведень. З цього приводу заслужена вчителька України В. М. Осинська зазначає, що в процесі засвоєння програмного матеріалу учні навчалися застосовувати елементи логіки і математичної символіки. Через два роки експериментальної роботи вона переконалася, що це дещо підвищило їхню математичну культуру. Особливо позитивний ефект був виявлений у здібних учнів, а середні й слабкі учні, як і раніше, погано міркували і розв'язували задачі. Навчання елементів логіки не полегшило засвоєння математики школярами з низьким рівнем розвитку.

Підготовка до навчання учнів доведеням здійснюється вже в 5-6 класах, де вони ознайомлюються з першими твердженнями і роблять перші кроки у виконанні дедуктивних умовиводів. Цілеспрямоване навчання доведенню починається з перших уроків систематичного курсу планіметрії введенням понять «теорема», «доведення теореми». Учні мають вчитися виконувати аналіз формулювання теореми, тобто відокремлювати умову від висновку. На перших етапах учні стикаються з труднощами, якщо теорему не сформульовано у формі умовного речення, тобто в термінах «якщо ..... то...». Для зменшення цих труднощів доцільно запропонувати їм усні вправи на виділення умови і висновку з відомих уже тверджень, на переформулювання твердження в умовне речення і відокремлення умови та висновку. Для прикладу наведемо такі твердження:

1. Якщо сума цифр ділиться на 3, то і число ділиться на 3.

2. Сума двох протилежних чисел дорівнює нулю.

3. Якщо чисельник дробу збільшити в кілька разів, то і дріб збільшиться в стільки само разів.

4. Зі збільшенням знаменника дробу в кілька разів дріб зменшується в стільки само разів.

Уміння доводити математичні твердження має чотири основні складові:

1) дія підведення об'єкта під поняття;

2) володіння необхідними і достатніми ознаками понять, про які йдеться у висновку;

3) дія вибору ознак понять, які відповідають заданим умовам;

4) дія розгортання умов.

З метою забезпечення свідомого засвоєння учнями готових доведень і навчання їх самостійно шукати доведення потрібно заздалегідь формувати ці складові. Наприклад, щоб навчити учнів дії розгортання умов, можна запропонувати їм таку усну вправу: «Дано два рівні суміжні кути ∠ ∠COB і ∠ BOD. Що нам тим самим ще дано?».

Розгортаючи умови, часто доходять висновку, що потрібно переформулювати висновок теореми або задачі. Прийом переформулювання висновку теореми або задачі сприяє формуванню вміння доводити твердження.

Наприклад, учням пропонують довести твердження: точки A, B і C лежать на одній прямій, якщо бісектриси прилеглих кутів ∠ABD і ∠DBC перпендикулярні. Учні мають міркувати так: оскільки потрібно довести, що точки A, B і C лежать на одній прямій, то досить довести, що маємо розгорнутий кут і що точка B є його вершиною, а точки A і C належать доповняльним півпрямим (сторонам розгорнутого кута).

Під час вивчення готових складніших доведень (наприклад, ознак рівності трикутників) доцільно запропонувати учням готову таблицю, в якій у лівому стовпчику записано твердження, з яких складається доведення, у правому – відповідні обґрунтування. Наведемо приклад такої таблиці (табл. 1) для першої ознаки рівності трикутників (рис. 1).

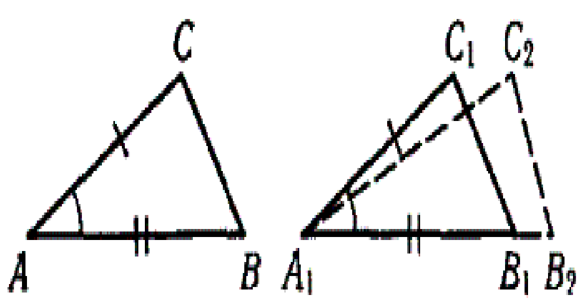


Рис.1

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$

$AC = A_1C_1$

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

Довести: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Демонструючи цю таблицю, потрібно спочатку закрити правий стовпчик, поступово відкривати його в міру того, як учні самостійно знаходитимуть потрібні обґрунтування.

За цим зразком учні самостійно можуть скласти в зошитах аналогічну таблицю після вивчення другої ознаки рівності трикутників.

Твердження	Обґрунтування
1. Існує $\Delta A_1B_2C_2$, рівний ΔABC, у якого одна вершина збігається з вершиною A_1, вершина B_2 лежить на промені A_1B_1, а C_2 — в одній площині з C_1 відносно прямої A_1B_1	1. За аксіомою про існування трикутника, рівного заданому
2. $A_1B_1 = A_1B_2$	2. Оскільки $A_1B_1 = AB$ за умовою, а $A_1B_2 = AB$ за означенням рівних трикутників
3. Точка B_2 збігається з B_1	3. За аксіомою про відкладання відрізка, рівного заданому
4. $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$	4. Оскільки $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ за умовою, а $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$ за означенням рівних трикутників
5. Промінь A_1C_2 збігається з променем A_1C_1	5. За аксіомою про відкладання кута, рівного заданому
6. $A_1C_1 = A_1C_2$	6. Оскільки $A_1C_1 = AC$ за умовою, а $A_1C_2 = AC$ за означенням рівних трикутників
7. Отже, $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$	7. Оскільки їх вершини збіглися
8. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$	8. Оскільки $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ за доведенням, а $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$ за аксіомою про існування трикутника, рівного заданому

Таблиця 1. Доведення першої ознаки рівності трикутників

Такі таблиці доцільно складати учням після самостійного вивчення окремих найпростіших теорем на уроці за підручником.

Під час вивчення готових доведень теорем учні мають усвідомлювати істотні елементи доведення, відсторонюватися від неістотних (розміщення рисунка, позначення літерами) і помічати істотне спільне в доведеннях. Наприклад, істотним спільним у доведенні всіх трьох ознак подібності трикутників є те, що доведення кожної ознаки починається з виконання перетворення гомотетії одного з даних трикутників з коефіцієнтом, що дорівнює відношенню довжини сторони другого трикутника до довжини відповідної сторони першого. Доводиться, що отриманий при гомотетії допоміжний трикутник дорівнює першому, а отже, подібний другому з даних трикутників.

Навчання учнів уміння самостійно здійснювати пошук доведення значною мірою залежить від володіння основними складовими уміння доводити і методами доведень.

У більшості теорем і задач на доведення процес доведення спрямований на те, щоб показати, що об'єкти, задані в умові теореми (задачі), містять необхідні й достатні або достатні ознаки понять, про які йдеться у висновку. У геометричних доведеннях такими поняттями можуть бути фігури, їхні властивості, відношення між фігурами. Тому учні мають навчитися розгортати умови, тобто діставати з умови ознаки шуканого поняття, оскільки в складніших теоремах ці ознаки подано в умові неявно, вони приховані за змістом інших понять.

При цьому цілеспрямований пошук потрібних ознак має відбуватися якнайкоротшим шляхом. Це можливо лише тоді, коли учень знає, де слід шукати потрібну ознаку. Для полегшення пошуку доцільно надавати учням набір «пошукових областей». Наприклад, якщо в умові теореми або задачі трапляються поняття «прямий кут», «рівні суміжні кути»», «бісектриса розгорнутого кута», то кожне з цих понять містить умову перпендикулярності двох прямих. Після вивчення скалярного добутку двох векторів і означення й ознак перпендикулярності прямої та площини в 10 класі до «пошукових областей» для встановлення перпендикулярності двох прямих (відрізків) додаються ще дві ознаки:

1) дві прямі перпендикулярні, якщо скалярний добуток двох векторів, що лежать на кожній з цих двох прямих, дорівнює нулю;

2) дві прямі перпендикулярні, якщо одна з них перпендикулярна до площини, на якій лежить друга.

У процесі підготовки до пошуку складніших доведень можна скористатися правилами-орієнтирами, що вказують, як встановити найпоширеніші відношення між двома фігурами: рівність, подібність, паралельність прямих або відрізків. Наприклад, щоб довести рівність трикутників, досить:

1) підвести їх до однієї з ознак рівності або скористатися означенням рівних трикутників;

2) довести, що один з трикутників можна дістати з другого, виконавши деякий рух (симетрія, поворот, паралельне перенесення).

Для доведення рівності відрізків або кутів досить:

1) довести рівність трикутників або інших фігур, елементами яких є зазначені у вимозі відрізки (кути), а потім зробити висновок про рівність відповідних відрізків (кутів);

2) довести, що один відрізок (кут) можна отримати з другого, виконавши деякий рух.

Після вивчення скалярного добутку двох векторів на площині й у просторі учнів ознайомлюють ще з одним способом доведення рівності відрізків і кутів - векторним.

Слід звернути увагу учнів і на те, що у зв’язку з доведенням рівності фігур часто користуються властивостями вимірювання відрізків та кутів і загальними властивостями величин: а) дві фігури рівні між собою, якщо кожна з них рівна третій; б) якщо від двох рівних відрізків (або кутів) відняти рівні відрізки (або кути), то дістанемо рівні відрізки (або кути). Те саме справедливе щодо додавання.

Необхідною умовою правильного вибору потрібної ознаки поняття, до якого підводиться об'єкт, є усвідомлення всіх істотних властивостей і ознак. З цього погляду важливо під час вивчення основних понять та їхніх відношень привести в систему ці властивості й ознаки і показати можливість їх використання.

Володіння методами доведень і вміння вибрати потрібний метод - важлива умова для забезпечення самостійного виконання доведення. В процесі навчання учнів самостійного пошуку доведень найважливішим є аналітичний метод. Навчати учнів володінню аналітичним методом найкраще у вигляді евристичної бесіди, використовуючи зразки доведень. Наведемо модель організації діяльності учнів під час використання аналітичного методу на прикладі задачі на доведення.

Приклад 1. Довести, що бісектриса BD внутрішнього кута трикутника ABC ділить протилежну сторону на відрізки AD і DC, пропорційні його сторонам BA і BC (рис.2).

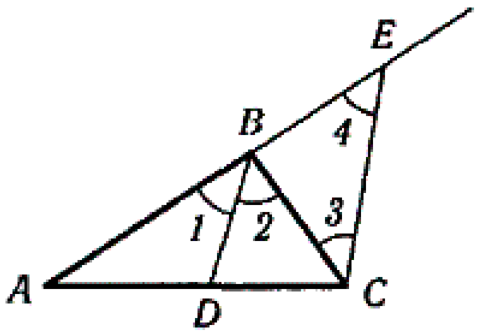


Рис. 2

Дано: ΔABC

BD – бісектриса $\angle ABC$

Довести: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Учитель: Звідки можна дістати пропорцію,яку потрібно довести?

Учень: Можна скористатися подібністю трикутників або властивістю відрізків, що відтинаються по сторонах кута трикутника прямою, паралельною протилежній стороні.

Учитель: Чи є на рисунку подібні трикутники?

Учень: Ні, немає.

Учитель: Як розміщені на рисунку перші три відрізки, що входять у пропорцію, яку потрібно довести?

Учень: Три з них розміщені на сторонах кута $\angle BAC$.

Учитель: На яку думку наштовхує нас цей факт?

Учень: Скористатися властивістю відрізків, що відтинаються на сторонах трикутника прямою, паралельною протилежній стороні.

Учитель: Де може лежати четвертий відрізок?

Учень: На продовжені сторони АВ.

Учитель: Як його побудувати?

Учень: Продовжити сторону АВ і через точку С провести пряму, паралельну BD, до перетину з прямою АВ в точці Е.

Учитель: Яку пропорцію тепер можна скласти?

Учень: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$

Учитель: Порівняйте цю пропорцію з тією, яку потрібно довести. Який висновок з цього можна зробити?

Учень: Потрібно довести, що ВЕ = ВС.

Учитель: Чим є на рисунку ці відрізки?

Учень: Сторонами ΔCBE.

Учитель: За якої умови дві сторони трикутника рівні?

Учень: Дві сторони трикутника рівні, якщо вони лежать напроти рівних кутів.

Учитель: Рівність яких кутів потрібно довести?

Учень: Потрібно довести, що $\angle 3 = \angle 4$ [11].

Після цього, виходячи з умови теореми, доводиться рівність зазначених кутів і робиться висновок про рівність відрізків.

Ознайомлювати учнів з аналітичним методом доведення та відповідним правилом-орієнтиром найзручніше на прикладі наведеної задачі, а застосувати його під час доведення теорем про площі багатокутників.

У міру сформованості в учнів основних складових уміння доводити і набуття першого досвіду виконання доведень слід запропонувати евристичну схему пошуку доведення. Ця схема може мати такий вигляд:

1. Виділити те, що дано в умові, і вказати, що потрібно довести.

2. Ввести всі потрібні позначення. У геометричних теоремах (задачах) попередньо виконати рисунок.

3. Записати умову і висновок теореми (задачі) у символічній формі.

4. Назвати ознаки, потрібні для доведення.

5. Розгорнути умови, тобто з того, що дано, вивести можливі наслідки.

6. Порівняти з умовами та їхніми наслідками кожну з ознак, за якими можна довести те, що потрібно. Вибрати ознаку, зручну для доведення.

7. Якщо безпосередньо вибрати відповідну ознаку не вдається, подумати, які ще потрібні для доведення ознаки можуть бути задані в умові.

8. Постійно пам'ятати, що коли пошук доведення ускладнено, потрібно звертатися до даних і до того, що випливає з них.

Для геометричних доведень цю схему можна доповнити вказівками щодо геометричного рисунка: після виконання третього пункту схеми проаналізувати рисунок, позначити на ньому рівні елементи, прямі кути, паралельні відрізки та інші характерні особливості рисунка і окремих його елементів. Потім, виділивши на рисунку елементи фігур, відношення яких потрібно довести або які потрібно визначити, задати собі запитання: чим ще є або чим ще могли б бути дані елементи? Окремі елементи рисунка (відрізки, кути тощо) доцільно зіставляти з іншими елементами, включати їх до складу інших фігур, розглядати в різноманітних зв'язках з іншими елементами (прийом переосмислювання елементів задачі). Якщо на рисунку немає фігур або елементів, необхідних для використання ознак, за допомогою яких можна довести те, що потрібно, то слід виконати додаткові побудови і зробити всі висновки, що випливають з них.

Неможливість і єдиність чого-небудь у математиці завжди доводять методом від супротивного. Інколи цим методом доводять обернені твердження.

2.2. Методика вивчення основних методів доведення теорем

У шкільному курсі математики учні ознайомлюються з такими основними методами доведень:

1) синтетичний;

2) аналітичний;
3) аналітико-синтетичний (його називають ще методом руху з двох кінців);
4) доведення від супротивного;
5) метод повної індукції;
6) метод математичної індукції;
7) метод геометричних перетворень (центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія і подібність);
8) алгебраїчний метод, окремими випадками якого є векторний і координатний.

2.2.1. Методика вивчення аналітичного методу доведення

Суть аналітичного методу доведення полягає в тому, що вихідним пунктом для обгрунтування необхідного твердження є саме це твердження, яке шляхом логічних обгрунтованих кроків зводиться до твердження про яке наперед відомо, що воно істинне.

Щодо навчання учнів самостійного пошуку доведень, то найважливішим є аналітичний метод. Навчання учнів володіння аналітичним методом найкраще проводити на зразках доведень у вигляді евристичної бесіди.

Математика і методики її навчання містять два види аналітичних міркувань. Перший з них разом із синтетичним описав Евклід у своїх «Началах», хоча вони були відомі ще раніше Платону (428 - 348 до н. е.) й Арістотелю (384 - 322 до н. е.). Другий вид увів Папп (III ст.).

Навчально-теоретична модель аналітичного методу доведення може бути такою:

1. Змістовий аналіз твердження, виділення того, що дано в умові, і того, що вимагається довести у висновку.

2. Змістовий аналіз умови та висновку твердження, встановлення існуючих логічних зв'язків. Обґрунтування того, чи не є умова достатньою для того, щоб зробити висновок. Якщо так, то твердження є доведеним, якщо ні - то перейти до пункту 3.

3. Відшукання раніше доведеного твердження (аксіоми), з якого випливає висновок. Якщо його знайдено, то твердження є доведеним, якщо ні - то перейти до пункту 4.

4. Відшукання поки ще не доведеного твердження, якого достатньо, щоб зробити висновок.

5. Знаходження наступного твердження, яке є достатнім для того, щоб виконувалося попереднє твердження. Якщо знайдене твердження вже доведене або безпосередньо випливає з умови теореми, то твердження доведене. В іншому випадку – перейти до чергового виконання пункту 5.

6. Контроль виконаних дій у процесі застосування аналітичного методу доведення.

7. Змістовий аналіз та оцінка (самооцінка) засвоєння аналітичного методу доведення тверджень (знако-символьна фіксація) [9].

Правило-орієнтир аналітичного методу доведення може виглядати так:

1. Запитати: з якого раніше відомого твердження випливає висновок доводжуваного твердження? Іншими словами, знайти доведене раніше твердження (або аксіому), якої достатньо, щоб зробити висновок доводжуваного твердження.

2. Якщо такого раніше відомого твердження знайти не вдається, то треба шукати інше, поки ще не доведене твердження, з якого випливав би висновок доводжуваного.

3. Потім треба шукати наступне твердження, з якого випливало би попереднє, і так далі, поки не буде одержане твердження, яке безпосередньо випливає з умови теореми.

4. Зробити висновок, що дане твердження доведене, оскільки весь ланцюжок достатніх умов для виконання висновку задовольняється в силу умови доводжуваного твердження.

Ознайомити учнів з аналітичним методом доведення і відповідним правилом-орієнтиром найзручніше на прикладі задачі, а застосувати його - під час доведення теорем про площі многокутників.

Суть аналізу Евкліда можна пояснити на прикладі доведення нерівності.

Приклад 2. Довести нерівність $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$. Міркуватимемо так.

1. Припустимо,що задана нерівність правильна.

2. Виведемо з неї наслідки: помножимо обидві частини на $a^2 > 0$ ($a^2 \neq 0$ за умовою). Дістанемо $a^4 + 1 \geq 2a^2$.

3.Перенесемо $2a^2$ в ліву частину останньої нерівності. Дістанемо $a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0$.

4. Запишемо ліву частину нерівності у вигляді квадрата двочлена: $(a^2 - 1)^2 \geq 0$.Остання нерівність правильна за будь-якого *a.*

Отже, міркування виконувалися від того, що потрібно довести. При цьому з припущення правильності того, що слід довести (основа), виводились наслідки, які привели до очевидної правильної нерівності (наслідку).

Приклад 3. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

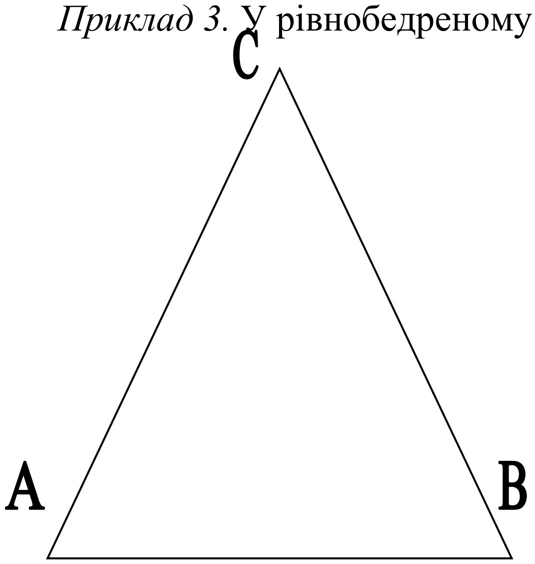


Рис. 3

Доведення.

Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою AB (рис. 3). Доведемо, що в нього ∠A = ∠B. Трикутник CAB дорівнює трикутнику CBA за першою ознакою рівності трикутників. Справді, CA=CB, CB=CA, ∠C=∠C. З рівності трикутників випливає, що ∠A=∠B. Теорему доведено.

Такі аналітичні міркування називають аналізом Евкліда. Проте цей аналіз не можна вважати доведенням, хоча ми й дістали очевидну правильну нерівність, оскільки правильність наслідку ще не гарантує правильності основи. Справді, з хибної основи правильними міркуваннями можна дійти правильного наслідку. Наприклад, $-a = a$, де $a \neq 0$ – хибне твердження. Якщо піднести обидві частини цієї неправильної рівності до квадрата, дістанемо правильну рівність $a^2 = a^2$. Перехід від істинності наслідку до істинності основи можливий тільки тоді, коли основа і наслідок – правильні взаємно обернені судження.

Саме з цієї причини аналіз Евкліда не можна вважати доведенням, і тому його називають інколи «недосконалим аналізом».

На відміну від аналізу Евкліда аналіз Паппа відповідає всім вимогам доведення і тому його називають «досконалим аналізом», або аналітичним методом доведення. Папп так характеризує аналітичний метод доведення: в аналізі шукане вважається знайденим, і визначаємо, звідки його було б отримано, і далі, що передувало б цьому останньому, доки не дійдемо до чого-небудь відомого - того, що могло б стати вихідним пунктом.

Логічною основою аналітичного методу, як і синтетичного, є аксіома: з правильного твердження завжди випливає правильний наслідок.

Схема міркувань при цьому така:

$B \leftarrow A_n \leftarrow A_2 \leftarrow A_1 \leftarrow A$

Відмінність аналізу Евкліда від аналітичного методу доведення (аналізу Паппа) полягає також у тому, що в аналізі Евкліда з припущення правильності доводжуваного виводять необхідні умови (наслідки), а в аналітичному методі добирають достатні умови для виконання висновку твердження, яке доводять.

2.2.2. Суть синтетичного методу доведення

Часто аналіз Евкліда допомагає знайти синтетичний метод доведення. У синтетичному методі доведення міркування проводиться від умови або від уже відомого твердження до доводжуваного. При синтетичному методі не пояснюється чому за вихідне береться те чи інше твердження, тому доведення цим методом здається учням штучно видуманим. У геометричних доведеннях синтетичним методом важко здогадатися про додаткову побудову, яку часто в процесі доведення треба виконати.

Правило-орієнтир пошуку доведення синтетичним методом за допомогою аналізу Евкліда можна задати так.

1. Припустити, що висновок (вимога) теореми (задачі на доведення) правильний.

2. Вивести з цього припущення всі можливі наслідки.

3. Переконатися, що отриманий висновок-наслідок є або очевидною, або встановленою раніше істиною.

4. Взявши отриманий істинний висновок за вихідний, проаналізувати твердження у зворотному напрямі та перейти до висновку про правильність твердження, яке доводять.

Приклад 4. Доведіть, що в рівностороннього трикутника всі кути рівні.

1. Нехай ∠A=∠B (рис. 4)

2. ΔABC – рівнобедрений (за теоремою у рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні) з основою AB.

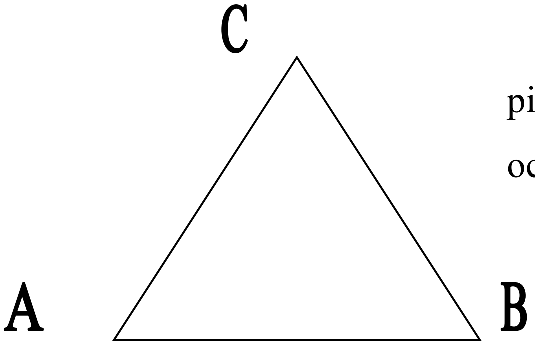


Рис.4.

3. Оскільки AB=BC (ΔABC – рівносторонній), то ΔABC – рівнобедрений з основою AC.

4. За теоремою (див. п. 2) ∠A=∠C.

5. Таким чином всі кути трикутника рівні ∠A=∠B=∠C.

2.2.3. Суть аналітико-синтетичного методу

Суть аналітико-синтетичного методу полягає в тому, що пошук доведення починають аналітичним методом, але міркування не доводять до кінця, а, спиняючись на певному кроці, починають міркувати у зворотному напрямку, тобто з розгортання умови. Отже, далі доведення виконують синтетичним методом.

Наведемо приклад розв'язування задачі на доведення цим методом.

*Приклад 5***.** Довести, що у чотирикутника, описаного навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні (рис. 5).

Доведення. Щоб довести, що $AB + CD = BC + AD$, досить довести, що $AM + BM + CK + DK = DL + AL + BN + CN$, де M, N, K, L - точки дотиків кола і чотирикутника.

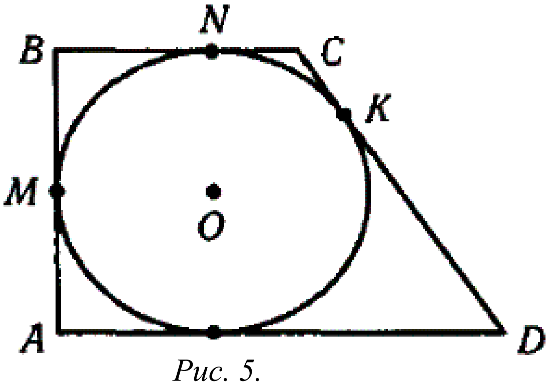


Рис. 5.

Розгорнемо умову теореми. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки до кола, *AM* = *AL, BM* = BN, *CK* = *CN, DK* = *DL.* Додавши ці рівності почленно, дістанемо *AM* + *BM* + + *CK* + *DK* = *AL* + *BN* +*CN* + *DL,* що й потрібно було довести.

Приклад 6. Доведіть, що коли в паралелограма всі кути рівні, то він прямокутник.

Доведення. Кути паралелограма, прилеглі до однієї сторони, є внутрішні односторонні, тому їх сума дорівнює 180°. За умовою ці кути рівні, тобто кожний з них прямий. А прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі. Теорему доведено.

У цих доведенях міркування здійснювалися послідовно: то від висновку теореми, то від умови. Рух з протилежних боків у загальному випадку виконують доти, доки міркування не дійдуть спільного твердження або суперечливих висновків. Цей метод особливо зручний, якщо перетворення лише умови чи лише висновку теореми (задачі) не приводить до мети.

2.2.4. Суть та методика вивчення методу від супротивного

Метод доведення від супротивного вводиться вже в 7 класі на початку навчання курсу планіметрії. Його логічною основою є закон виключення третього: з двох супротивних тверджень одне завжди правильне, друге – неправильне, а третього бути не може. Завдяки цьому закону замість доведення певного твердження під час використання методу доведення від супротивного доводять, що супротивне йому твердження – неправильне, і на цій підставі роблять висновок, що правильне доводжуване твердження.

Варто рекомендувати учням письмово оформляти доведення методом від супротивного у вигляді трьох кроків відповідно до наведеного правила – орієнтира; усні доведення теж будувати за цією схемою. Після введення методу доцільно дати зразок такого оформлення.

Замість безпосереднього доведення даного твердження можна показати, що супротивне йому твердження неправильне. З цього випливатиме справедливість даного. При цьому стосовно супротивного твердження проводять аналіз Евкліда, з нього виводять наслідки. Деякі автори метод від супротивного ще називають непрямим, зведенням до абсурду. Доводячи методом від супротивного твердження: «Якщо P, то Q» (1) ми спочатку замінюємо його новим твердженням, оберненим протилежному: «Якщо Q, то P» (2) і доводимо це нове твердження. А тому, що ці два твердження завжди рівносильні, то з цього доведення випливає також справедливість даного твердження (1). Іноді з припущення виводять наслідок, який суперечить цьому самому припущенню або деякому вже обґрунтованому твердженню чи аксіомі. Це також свідчить про те, що припущення (твердження, супротивне доводжуваному) неправильне, а, отже, правильне доводжуване твердження.

Іноді, щоб показати абсурдність припущення, розбивають його на кілька випадків і розглядають кожний з них окремо. Такі доведення називають ще непрямими або роздільними.

Доводячи методом від супротивного, треба спростувати твердження, супротивне даному, а не протилежне, як неправильно пояснюється в багатьох підручниках і посібниках, бо для протилежних тверджень закон виключеного третього неправильний.

Нехай, наприклад, маємо твердження «P>Q». Супротивним і протилежним йому будуть відповідно твердження «P не більше Q» і «P<Q». Якщо ми хочемо довести методом від супротивного це твердження, то ми повинні показати, що твердження «P не більше Q» неправильне. Якщо ж ми покажемо, що неправильне твердження «P<Q», то з цього ще не випливатиме справедливість доводжуваного, бо може бути, «P=Q».

Після розгляду конкретних двох прикладів доведень методів від супротивного учні колективно складають його правило – орієнтир.

1. Припустити супротивне тому, що треба довести.

2. Користуючись припущенням, відомими аксіомами і раніше доведеними твердженнями шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить одній з наведених умов:

- умові твердження, що доводиться;
- відомій аксіомі;
- раніше доведеному твердженню;
- припущенню.

3. Зробити висновок, що припущення - неправильне, а правильне те, що треба довести.

Досвід показує, що правило-орієнтир методу доведення від супротивного доцільно оформити у вигляді таблиці та вивішувати її кожного разу в подальшому вивченні курсу під час використання цього методу.

Слід рекомендувати учням письмово оформлювати доведення методом від супротивного у вигляді трьох кроків відповідно до правила-орієнтира; усні доведення також будувати за цією схемою. Після введення методу доцільно дати зразок такого оформлення.

Приклад 7. Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

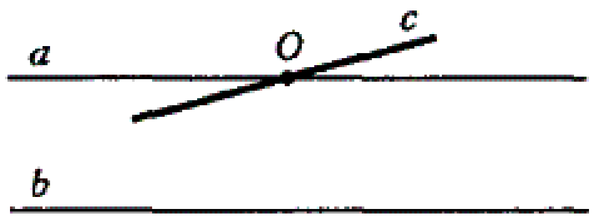


Рис. 6

Дано: a, b, c — прямі;

c перетинає a в точці O.

Довести: с перетинає b.

Доведення

1. Припустимо, що с і b не перетинаються, тобто що с$\|b$.

2.Тоді дістанемо,що через точку О перетину прямих a і c проходять дві різні прямі a і c, які паралельні прямій b. Проте це суперечить аксіомі про властивість паралельних прямих.

3. Висновок: припущення неправильне, а правильне те, що пряма с перетне пряму b.

Приклад 8. Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і до того ж тільки одну.

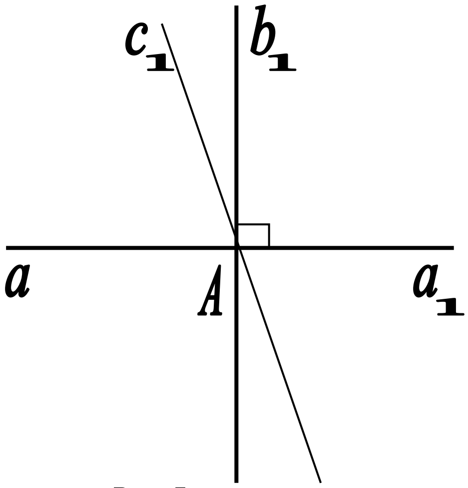


Рис. 7

Доведення.

Нехай a – дана пряма і А – точка на ній. Позначимо через a_1 – одну з півпрямих прямої a з початковою точкою А (рис. 7). Відкладемо від пів прямої a_1 кут $(a_1\ b_1)$, що дорівнює 90°. Тоді пряма, яка містить промінь b_1, буде перпендикулярна до прямої a.

Припустимо, що крім побудованої прямої існує інша пряма, яка теж проходить через точку А і перпендикулярна до прямої a. Позначимо через c_1 півпряму цієї прямої, що лежить в одній півплощині з променем b_1.

Кути $(a_1\ b_1)$ і $(a_1\ c_1)$, кожен з яких дорівнює 90°, відкладемо в одній півплощині від прямої a_1. Але від прямої a_1 у даній півплощині можна відкласти тільки один кут, що дорівнює 90°. Тому не може бути іншої прямої, яка проходить через точку А і перпендикулярна до прямої a. Отримали суперечність. Теорему доведено.

2.2.5. Методика вивчення повної та математичної індукції

Суть методу повної індукції полягає в тому, що доводжувану теорему розчленовують на скінченне число тверджень і доводять кожне з цих тверджень окремо.

Логічною основою цього методу є така аксіома логіки: якщо якусь властивість мають всі елементи множини А і всі елементи множини В і якщо множина М є сума множин А і В, то цю саму властивість має і кожен елемент множини М.

Приклад 9. Доведіть, що кожне натуральне число n, яке задовольняє нерівність $1 < n \leq 14$, або просте, його можна подати у вигляді добутку не більше як трьох простих множників.

Розв´язування

Розглянемо натуральні числа від 2 до 14. Серед цих чисел 2, 3, 5, 7, 1 і 13 – прості, а числа 4, 6, 9, 10, 14, - можна подати у вигляді добутку множників.

Повна індукція дає висновки не ймовірні, а достовірні. У цьому важлива перевага повної індукції. Основою достовірності висновків є те, що засновки у повній індукції вичерпують клас предметів.

Повна індукція застосовується не завжди. Вона можлива лише в тих випадках, коли кількість предметів, що складає клас, невелика, чітко обмежена і всіх їх можна вивчити.

Логічною основою методу математичної індукції є принцип, взятий в шкільному курсі за аксіому: якщо твердження $A(n)$, яке залежить від натурального числа n, виконується для $n = 1$ і з припущення, що воно виконується для натурального числа $n = k$, випливає, що воно виконується і для $n = k + 1$, то це твердження виконується для будь-якого натурального числа n.

Правило-орієнтир доведення методом математичної індукції містить три кроки:

1. Перевірити правильність твердження для $n = 1$.

2. Припустити, що твердження правильне за $n=k$; довести, використовуючи це припущення, що твердження правильне за $n = k + 1$, тобто для наступного значення n.

3. Зробити висновок, що на підставі принципу математичної індукції твердження правильне для будь-якого натурального n.

Відомо, що будь-яке доведення – це дедуктивне міркування. Метод математичної індукції не є винятком, хоча історично в його назві є термін «індукція». Справді, на першому кроці в цьому методі виконують індуктивне міркування, але завдяки посиланню на загальне, раніше відоме твердження – принцип математичної індукції (аксіому) в третьому кроці, в цілому міркування, які здійснюють у методі математичної індукції, дедуктивні.

2.2.6. Суть методу геометричних перетворень

Метод геометричних перетворень використовується і для доведення теорем, і для розв'язування різноманітних задач. При цьому основною формою роботи є розв'язування задач на побудову.

У міру вивчення геометрії учні впевнюються, що не завжди можна дістати відповідь на поставлене запитання внаслідок безпосереднього аналізу заданої фігури або конфігурації. Часто доводиться виконувати деякі перетворення фігури. Це дає змогу зблизити окремі елементи, дістати відрізки або кути, які відповідають даним умови (наприклад, різницю двох сторін, периметр трикутника тощо).

Такі перетворення фігур не випадкові. Це окремі випадки застосування геометричних перетворень.

Основна мета вивчення геометричних перетворень - ознайомити учнів з різними видами рухів (осьова і центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення) та подібністю і гомотетією, їх властивостями, ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень, ознак подібності трикутників до розв'язування задач [12].

Учні повинні розуміти суть кожного із зазначених у програмі видів геометричних перетворень, знати їх властивості, ознаки подібності трикутників і вміти застосовувати їх до розв'язання найпростіших задачь [3].

Вивчивши центральну та осьову симетрії вже можна скласти правило – орієнтир методу руху, яке в подальшому вивченні навчального матеріалу повністю підтвердить себе як правило – орієнтир методу геометричних перетворень.

1. Провести синтетичний аналіз доведення теореми (задачі).

2. Визначити, які об’єкти чи частини об’єктів, що розглядаються в доведенні, могли утворитися методом геометричних перетворень.

3. Застосувати основні властивості геометричних перетворень.

4. Зробити висновок.

2.2.7. Суть та методика вивчення центральної та осьової симетрії

Суть методу центральної симетрії полягає в тому, що дану в умові задачі фігуру (або її елементи) замінюємо фігурою, симетричною даній відносно деякої точки або прямої.

Симетрією відносно точки O (центральною симетрією) простору називається перетворення простору, яке точку O відображає на себе, а будь-яку іншу точку M відображає на таку точку M_1 так, що точка O є серединою відрізка MM_1.

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то вона називається центрально-симетричною, а точка O – центром симетрії. Наприклад, паралелограм є центрально-симетричною фігурою. Його центром симетрії є точка перетину діагоналей [4].

Даний метод можна застосовувати до тих завдань, в умові яких в тій чи іншій формі вказана точка, яка є центром симетрії шуканої або допоміжної фігури.

Приклад 10. Доведіть, що образом даної прямої l при симетрії відносно точки O, яка не належить прямій l, є пряма, паралельна даній.

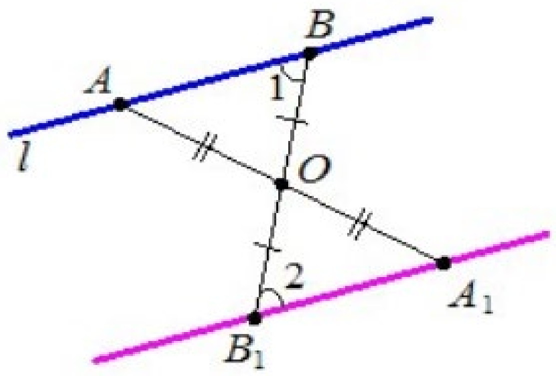


Рис. 8.

Доведення. Оскільки центральна симетрія – це рух, то образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знати дві будь-які її точки. Оберемо на прямій l довільні точки A і B. Нехай точки A_1 і B_1 – їх образи при центральній симетрії відносно точки O. Тоді пряма A_1B_1 – образ прямої l. Оскільки $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, $\angle AOB$ і $\angle A_1OB_1$ рівні як вертикальні, то трикутники AOB і A_1OB_1 рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 2$. Отже, $l \parallel A_1B_1$.

Симетрією простору щодо даної прямої l (осьовою симетрією) називається перетворення, яке кожну точку прямої l відображає на себе, а будь-яку іншу точку M простору відображає на таку точку M_1, що пряма l служить серединним перпендикуляром до відрізка MM_1. Пряма l називається віссю симетрії. Наприклад, прямі, що проходять через точку перетину діагоналей прямокутника паралельно його сторонам, є осями симетрії прямокутника.

Важко вказати загальні ознаки завдань, що вирішуються методом осьової симетрії. У більш складних завданнях метод осьової симетрії може бути застосований, якщо в умовах утримується сума або різниця частин деякої ламаної лінії. Можна обмежиться зазначенням, що метод осьової симетрії застосуємо для задач, в умові яких зазначена пряма, яка є віссю симетрії частини елементів фігури. Таку пряму легко встановити за властивостями фігур. Застосування осьової симетрії доцільно для завдань, які легко вирішуються, якщо частина даних розташована по один бік деякої прямої, а решта – по другий.

Для методу осьової симетрії це правило може бути таким.

1. Припустити, що задачу розв'язано. Обрати певну симетрію відносно даної прямої або прямої, яку легко побудувати. Замінити один з даних елементів симетричним відносно обраної осі симетрії.

2. Розв'язати задачу стосовно побудованого симетричного елемента та інших даних. Цим самим задача зведеться до відомої чи до простішої.

3. Від допоміжної задачі перейти до шуканої, застосувавши обернене перетворення симетрії.

2.2.8. Методика вивчення повороту та паралельного перенесення

Метод повороту і паралельного перенесення корисно застосовувати тоді, коли в умові задачі дано трикутник з відомим кутом між рівними сторонами (рівносторонній, рівнобедрений прямокутний трикутник) або дано фігуру, в якій можна виділити зазначений трикутник.

Правила-орієнтири методів паралельного перенесення і повороту подібні.

1. Припустити, що задачу розв'язано. Один з даних елементів перенести паралельно собі в певному напрямку на задану відстань (або повернути навколо

даної точки на певний кут). Результатом такого перетворення буде допоміжна фігура, яку можна побудувати за даними задачі.

2. Побудувати допоміжну фігуру й оберненим паралельним перенесенням (поворотом) виконати побудову шуканої фігури.

Приклад 11. Зовні квадрата на його сторонах побудовані рівносторонні трикутники. Довести, що чотирикутник із вершинами в центрах побудованих трикутників є квадратом.

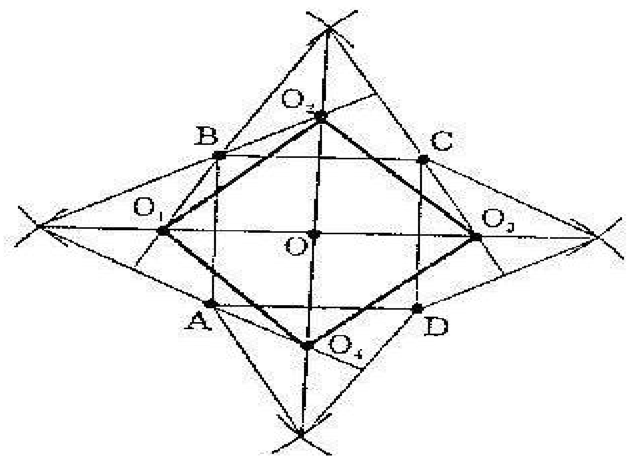


Рис. 9.

Доведення

Центри O_1, O_2, O_3, O_4 побудованих рівносторонніх трикутників лежать на осях симетрії даного квадрата *ABCD*, які проходять через середини протилежних сторін квадрата, бо ці центри лежать на медіанах (і висотах) побудованих трикутників.

Отже, діагоналі одержаного чотирикутника взаємно перпендикулярні. Крім того, діагоналі чотирикутника рівні, у точці *O* діляться пополам. Тому поворотом навколо центра *O* квадрата *ABCD* на 90° чотирикутник відображається на себе. Отже, $O_1O_2O_3O_4$ - квадрат.

Приклад 12. AB і CD – паралельні прямі. Точки A і D лежать по один бік від січної BC. Доведіть, що промені BA і CD однаково напрямлені.

Рис.10

Доведення

Зас ю променя CD паралельне перенесення, при якому точка C переходить у точку B (рис. 10). Тоді пряма CD суміститься з прямою BA. Точка D, переміщуючись вздовж прямої, паралельної CB, залишається в тій самій півплощині відносно прямої BC. Тому промінь CD суміститься з променем BA, отже, ці промені однаково напрямлені.

2.2.9. Суть методу гомотетії та подібності

Найчастіше метод гомотетії та подібності використовуються у задачах на побудову, тому що розглядається не задана в умові задачі фігура, а їй подібна. Умова задачі дає змогу побудувати фігуру подібну шуканій або дає можливість «помножити» певним способом побудовану фігуру і, якщо потрібно, помістити її у потрібне положення.

Перетворення, які змінюють тільки розміри фігур, але не форму, називають перетворенням подібності. При перетворенні подібності з коефіцієнтом k $(k > 0)$ відстані між двома довільними точками фігури змінюються в k разів. Тобто якщо A і B прообрази такого перетворення, а відповідно A_1 і B_1 - їхні образи, то $|A_1B_1| = k|AB|$.

Гомотетією з центром O і коефіцієнтом $k \neq 0$ називається перетворення, при якому образом довільної точки M є така точка M_1 , що $\overrightarrow{\mathrm{OM_1}} = k \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$, де k – коефіцієнт гомотетії [6].

Методом подібності розв'язують такі задачі на побудову, в яких дані містять умови, що визначають нескінченну множину подібних фігур. Труднощі для учнів полягають у тому, щоб розділити умову задачі на дві частини. Одну з них використовують для побудови допоміжної фігури, подібної до шуканої, а друга, що визначає розміри фігури, дає можливість за допомогою перетворення подібності допоміжної фігури побудувати шукану. Умови, що визначають розміри фігури, можуть бути двох видів. Це довжина будь-якого елемента фігури або розміщення фігури відносно інших даних фігур. Доцільно розглянути задачі, які передбачають умови кожного з цих двох видів.

Правило-орієнтир методу подібності можна сформулювати так:

1. Відокремити в умові задачі дві частини і, відкинувши ту, що визначає розміри фігури, побудувати фігуру, подібну до шуканої.

2. Ввести відкинуту умову і, застосовуючи перетворення подібності допоміжної фігури, побудувати шукану фігуру.

Приклад 13. Довести, що в довільній трапеції точка перетину продовжень бічних сторін ,точка перетину діагоналей і середини основ лежать на одній прямій.

Доведення. Нехай ABCD – довільна трапеція, а M, P, N, L вказані в умові чотири точки. Розглянемо гомотетію $H_M^{k_1}$, де $k_1 = \frac{AD}{BC}$. Маємо: $H_M^{k_1}(B) = A$, $H_M^{k_1}(C) = D$, тоді $H_M^{k_1}(BC) = AD$, $H_M^{k_1}(N) = L$ *(*як середини гомотетичних відрізків).

Звідси випливає, що точки M, N, L належать прямій.

Розглянемо тепер гомотетію $H_P^{k_2}$, де $k_2 = -\frac{AD}{BC}$.

Отримуємо $H_P^{k_2}(B) = D$, $H_P^{k_2}(C) = A$, тоді $H_P^{k_2}(BC) = DA$,а $H_P^{k_2}(N) = L$. Це означає, що точки P, N, L належать прямій. Із розглянутих гомотетій випливає, що точки M, P, N, L належать одній прямій [12].

2.2.10. Векторний метод та метод координат

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом – орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах доведення двох тверджень, перше з яких учні вміють доводити і без застосування векторів. Внаслідок виділення суттєвого спільного в обох доведеннях учні колективно під керівництвом учителя можуть прийти до правила – орієнтира векторного методу доведення тверджень.

1. Виділити в формулюванні теореми (задачі) умову і вимоги, виконати рисунок. Сформулювати вимоги мовою векторів і, враховуючи їх, позначити вектори на рисунку.

2. Враховуючи умови і вимоги, скласти допоміжні векторні рівності. Для цього виразити, якщо це потрібно, вектори у вигляді суми чи різниці інших векторів, або у вигляді добутку вектора на число. Перетворити одержані рівності й прийти до потрібної.

3. Перекласти одержану рівність на мову геометрії.

Приклад 14. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Дано: ΔABC,

AP⊥BC,

BQ⊥AC

O - точка перетину AP і

BQ лежить CL.

Довести: CL⊥AB

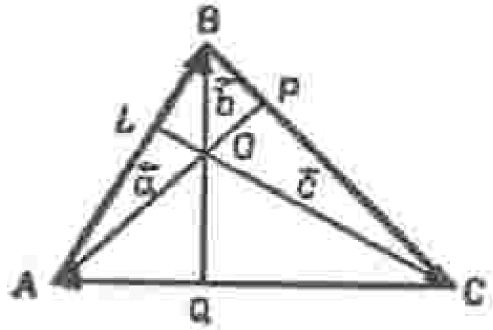


Рис. 11

Доведення

Введемо вектори $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}},$ і $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}.$

Треба довести, що $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}\ , \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}.$

За умовою $\vec{a}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = 0$, $\vec{b}(\vec{a} - \vec{c}) = 0$, тоді ми можемо зробивши перетворення скласти наступні вирази

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}; \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$

$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 0,$

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \vec{c} \cdot \overrightarrow{BA} = 0,$

так як $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AB}$ - протилежні вектори, тому $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, а це означає, що CL ⊥AB, тобто відрізок CL – висота ΔABC.

Найважчим для учнів є позначення векторів на рисунку. Досвід раціонального позначення векторів набувається на практиці, однак певні орієнтири в цьому дає аналіз формулювання теореми (задачі). Для формування навичок використання правила-орієнтира варто запропонувати учням розв'язати векторним методом відомі з планіметрії твердження про властивість середньої лінії трикутника, про суму квадратів діагоналей паралелограма, про властивість діагоналей ромба, прямокутника.

Слід звернути увагу школярів на те, що векторний метод доведення теорем не універсальний, його зручно застосовувати для доведення паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільності відрізка в даному відношенні, для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів.

Приклад 15. Довести, що діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом (рис. 12).

Доведення. Виразимо сторони ромба через вектори наступним чином $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, із означення ромба $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

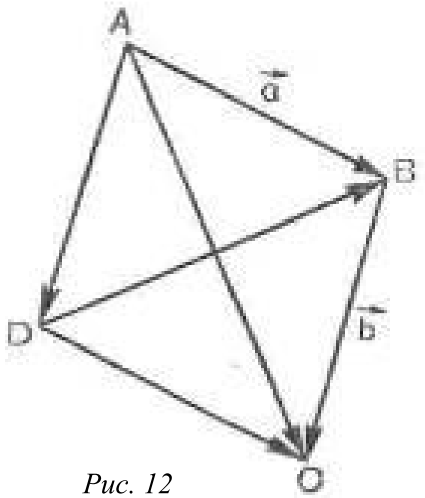


Рис. 12

За означенням суми та різниці векторів ми маємо, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Розглянемо $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$ (за властивістю скалярного добутку). Так як сторони ромба рівні то і a=b, тоді $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$, AC⊥DB.

Метод координат є основним методом дослідження властивостей геометричних фігур в аналітичній геометрії. Цей метод спрощує розв'язання багатьох геометричних задач, доведення теорем, дає можливість спростити виклад теоретичного матеріалу, що стосується векторів, тригонометричних функцій.

Правило – орієнтир методу координат:

1. Виділити умови і вимоги задачі (теореми). Обрати систему координат, відносно якої перевести вимоги на мову координат і скласти рівності зі змінними.

2. Використовуючи умови задачі (теореми), перетворити рівності зі змінними і прийти до результату на мові координат.

3. Здобутий результат перевести на мову геометрії.

Координати дозволяють визначати за допомогою чисел положення будь-якої точки простору або площини. Це дає можливість «шифрувати» різного роду фігури, записуючи їх за допомогою чисел. Співвідношення між координатами найчастіше визначає не одну точку, а декілька або безліч (сукупність) точок. Наприклад, якщо відзначити всі точки, у яких абсциса дорівнює ординаті, тобто точки, координати яких задовольняють рівняння x = y, то вийде пряма лінія - бісектриси першого і третього координатних кутів.

Іноді, замість «безліч точок», говорять «геометричне місце точок». Наприклад, геометричне місце точок, координати яких задовольняють співвідношення x = y – це, як було сказано вище, бісектриси першого і третього координатного кута (рис. 13).

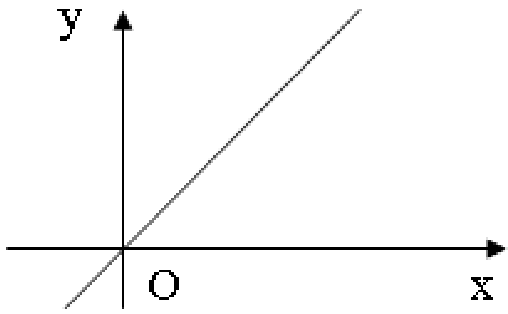


Рис.13

Встановлення зв’язків між алгеброю, з одного боку, і геометрією - з іншого, було по суті революцією в математиці. Воно відновило математику як єдину науку, в якій немає «китайської стіни» між окремими її частинами.

Суть методу координат як методу доведення та розв'язання завдань полягає в тому, що, задаючи фігури рівняннями і висловлюючи в координатах різні геометричні співвідношення, ми можемо вирішувати геометричну задачу засобами алгебри. Зворотно, користуючись координатами, можна тлумачити алгебраїчні та аналітичні співвідношення і факти геометрично і таким чином застосовувати геометрію до вирішення алгебраїчних задач.

Метод координат - це універсальний метод. Він забезпечує тісний зв'язок між алгеброю і геометрією, які, з'єднуючись, дають «багаті плоди», які вони не могли б дати, залишаючись розділеними.

Щоб вирішувати завдання як алгебраїчні, так і геометричні методом координат, необхідне виконання 3 етапів:

1) переклад завдання на координатну (аналітичну) мову;

2) перетворення аналітичного вираження;

3) зворотний переклад, тобто переклад з координатної мови на мову, в термінах якої сформульовано задачу.

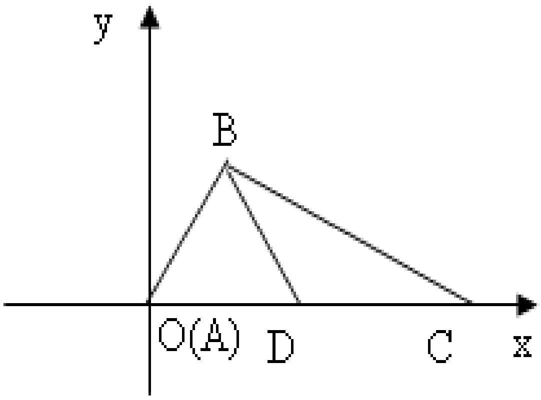


Рис. 14

Приклад 16. У трикутнику ABC: AC = b, AB = c, BC = a, BD - медіана. Доведіть, що $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{2}$.

Доведення. Виберемо систему координат так, щоб точка A служила початком координат, а вісь Ox була прямою AC (рис. 14).

У вибраній системі координат точки A, C і D мають наступні координати: A(0,0), C$(b, 0)$, D($\frac{b}{2}, 0)$. Позначимо координати точки B через x і y. Тоді використовуючи формулу для знаходження відстаней між двома точками, заданими своїми координатами, отримуємо: $x^2 + y^2 = c^2$, $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ (1) .

За тією ж формулою $BD^2 = (x - \frac{b}{2})^2 + +y^2$ (2) . Використовуючи формули (1) знаходимо x та y. Вони рівні:

$$x = \frac{c^2-a^2+b^2}{2b}; \qquad y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2-a^2+b^2)^2}{4b^2}}.$$

Далі, підставляючи x та y формулу (2), знаходимо

$$BD^2 = (\frac{c^2-a^2+b^2}{2b})^2 + c^2 - -\frac{(c^2-a^2+b^2)^2}{4b^2}. \quad BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{2}.$$

РОЗДІЛ ІІІ. ПРИЙОМИ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ПРИ РОБОТІ З ТЕОРЕМАМИ ТА ЗАДАЧАМИ НА ДОВЕДЕННЯ

3.1. Складання плану доведення теорем або задач

В підручниках доведення подаються в стислій формі без деталізації деяких кроків. Розбиття доведень на окремі твердження – корисний спосіб роз'яснення учням суті доведення. Також досить ефективним є складання плану доведення теореми (спочатку колективно, а потім можна індивідуально). Адже, правильно складений план доведення теореми майже гарантує правильне її доведення. Але складання плану може виявитися складним і тривалим процесом. Тому вкрай необхідно пропонувати учневі ненав'язливі питання, поради, які допомагають йому краще і швидше скласти план доведення, «відкрити» його ідею.

Складання плану доведення можна проводити за наступними пунктами.

1) Чи відома розв'язана будь-яка інша аналогічна задача? Якщо така задача відома, то складання плану доведення не буде складним.

2) Подумайте, чи відома вам теорема, аксіома чи твердження, до яких можна звести доводжуване. Якщо так, то шлях складання плану доведення очевидний: звести дану теорему до доведеної раніше.

3) Варто скористатися порадою: «Спробуйте сформулювати умови теореми інакше». Іншими словами, спробуйте перефразувати теорему, не змінюючи її математичного змісту.

При переформулюванні теореми користуються або визначеннями даних в ній математичних понять (замінюють терміни їх визначеннями), або їх ознаками (точніше сказати, достатніми умовами). Треба відзначити, що здатність учня переформулювати теорему є показником розуміння математичного змісту завдання.

4) Складаючи план доведення, завжди слід задавати собі запитання: «Чи всі дані теореми використані?». Виявлення невикористаних даних теореми полегшує складання плану її доведення.

5) Нерідко трапляється так, що, важко скласти план доведення. Тоді може допомогти ще одна порада: «Спробуйте довести лише частину теореми», тобто

спробуйте спочатку задовольнити лише частини умов, щоб далі шукати спосіб довести решту.

6) Нерідко у складанні плану виконання завдання допомагає відповідь на запитання: «Для якого окремого випадку можливо досить швидко довести теорему?».

Приклад 17. Доведіть теорему Піфагора – у прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи (рис. 15).

Доведення теореми можна провести складаючи такий план :

1. Розглянути прямокутний трикутник з катетами a і b, гіпотенузою c і висотою, проведеною до гіпотенузи h_c.
2. Для цього трикутника записати метричні співвідношення для катетів.
3. Виконати почленно додавання обох частин здобутих рівностей.
4. Перетворити праву частину здобутої рівності, використавши аксіому вимірювання відрізків.
5. Перекласти шукану нерівність з математичної мови на звичайну.

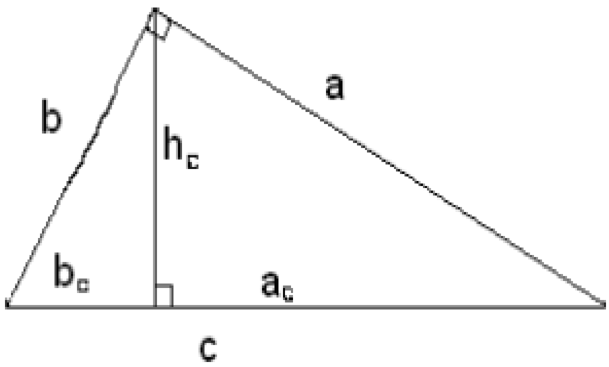


Рис. 15

Доведення за складеним планом буде звучати наступним чином: згідно з метричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику з катетами a і b та гіпотенузою c будемо мати $a^2=c\cdot a_c$, $b^2=c\cdot b_c$. Додаючи ці рівності почленно, отримаємо $a^2 + b^2 = c\cdot a_c + c\cdot b_c = c\cdot(a_c + b_c) =c^2$. Отже, у прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи. Теорему доведено.

3.2. Відтворення доведення теореми чи задачі за складеним планом

Суть даного прийому полягає в тому, що учням дається готовий план доведення нової теореми і пропонується самим здійснити доведення за допомогою цього плану. План вказує лише загальний контур доведення теореми. При реалізації плану потрібно враховувати всі деталі та розглядати їх ретельно і терпляче, доводити правильність кожного кроку посиланнями на відповідні, відомі раніше математичні факти, пропозиції. Переваги:

1) план розбиває доведення теореми на ряд простих, елементарних завдань, які учні можуть вирішити;

2) в учнів з'являється впевненість у тому, що вони зможуть довести нову теорему;

3) план дозволяє охопити все доведення у цілому, в учнів виникає відчуття повного розуміння.

Оскільки схеми доведення всіх трьох ознак паралелограми майже однакові (відмінність тільки в застосуванні різних ознак рівності трикутників та використанні або означення паралелограма, або вже доведеної ознаки паралелограма за двома протилежними сторонами), то роботу з доведення ознак можна організувати так: ознаку паралелограма за двома протилежними сторонами доводить учитель за участі учнів, складає план доведення, а потім пропонує учням самостійно довести наступні ознаки за складеним планом.

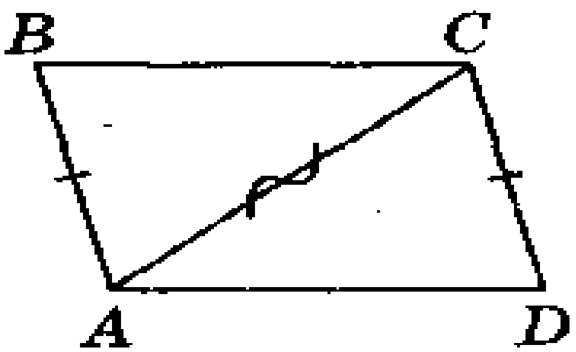


Рис. 16

Приклад 18. (Ознака, яку доводить вчитель за участі учнів). Доведіть ознаку паралелограма - якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник – паралелограм.

Доведення.

Нехай у чотирикутнику ABCD (рис. 16) AB||CD, AB = CD. У даному чотирикутнику проведемо діагональ AC. Оскільки AB || CD, а AC – січна, то $\angle BAC = \angle DCA$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих і січній.

AC – спільна сторона трикутників BAC і DCA, AB = CD за умовою. Отже, $\Delta BAC = \Delta DCA$ за двома сторонами і кутом між ними. Звідси $\angle BCA = \angle DAC$. Оскільки ці кути внутрішні різносторонні при прямих BC і AD і січній AC, то BC||AD. Отже, AB ||CD, BC ||AD. Таким чином, у чотирикутнику ABCD протилежні сторони паралельні, отже, він паралелограм за означенням, що й треба було довести.

План доведення теореми буде виглядати так**:**

1) спочатку доводиться рівність трикутників (здобутих у результаті проведення однієї або двох діагоналей паралелограма);

2) із рівності трикутників випливає рівність відповідних елементів цих трикутників (які у свою чергу є елементами паралелограма);

3) на основі доведеної рівності певних елементів паралелограма із використанням означення (а потім доведеного попереднього твердження) доводиться той факт, що даний чотирикутник – паралелограм.

Наступні ознаки доводять учні, за допомогою плану.

Приклад 19. Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

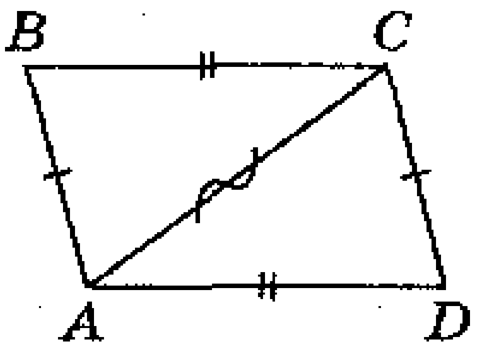


Рис. 17

Доведення.

1) Нехай у чотирикутнику ABCD (рис. 17) AB = CD, BC = AD. У даному чотирикутнику проведемо діагональ AC. У трикутниках ABC і CDA: AB=CD, BC = AD – за умовою, AC – спільна сторона.

2) Отже, $\Delta ABC = \Delta CDA$ за трьома сторонами. Звідси $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$ як відповідні кути рівних трикутників.

3) Оскільки кути BAC і DCA – внутрішні різносторонні при прямих AB і CD і січній AC, а кути BCA і DAC – внутрішні різносторонні при прямих BC і AD і січній AC, то відповідно AB||CD, BC||AD. Отже, чотирикутник ABCD – паралелограм за означенням, що й треба було довести.

Приклад 20. Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм.

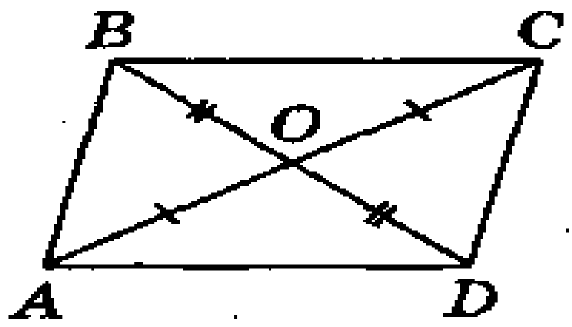


Рис. 18

Доведення

1)Нехай ABCD – даний чотирикутник, діагоналі якого перетинаються в точці O (рис. 18). У трикутниках BOC і DOA: BO = DO,OC = OA – за умовою; ∠BOC = ∠DOA як вертикальні.

2)Отже, ΔBOC = ΔDOA за двома сторонами і кутом між ними. Звідси ∠BCO = ∠DAO, причому ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих BC і AD і січній AC. Отже, BC||AD. Аналогічно доводимо рівність трикутників BOA і DOC і паралельність прямих AB і CD.

3)Оскільки протилежні сторони чотирикутника паралельні, то цей чотирикутник – паралелограм за означенням, що й треба було довести.

3.3. Ліквідація пропусків у доведенні

Для пояснення доведення теорем також використовують прийом ліквідації пропусків у доведенні, який полягає в створенні пропусків у доведенні, які потрібно заповнити використовуючи вивчений раніше матеріал і зробити кінцевий висновок. Суттєвою його перевагою є те, що в учнів розвивається мислення і впевненість у власних силах, бажання доводити подібні теореми.

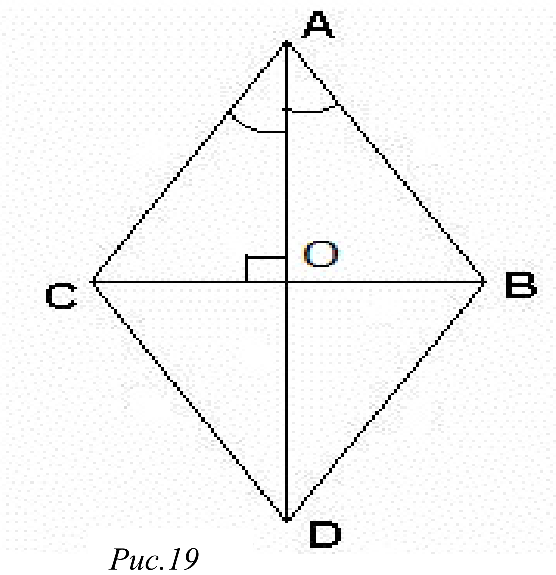


Рис.19

Приклад 21. Доведіть, що діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і є бісектрисами його кутів (рис. 19).

Доведення

Розглянемо ΔACB. За означенням ромба AC=_____, тоді ΔACB

____________.

За властивістю ______________ CO=____, тоді AO – ___________ΔACB. У рівнобедреному трикутнику медіана, ______ до його ________, є бісектрисою і ___________.

Отже, AO – бісектриса ∠∠____, яка перпендикулярна до основи ____, тобто ___ – бісектриса ∠∠____ і AD⊥ ___.

Аналогічно доводиться, що AD – _________∠∠D, CB – _____________ ∠∠___ і ∠ ∠___.

Теорему ___________.

Доведення з заповненими пропусками буде виглядати наступним чином: розглянемо ΔACB; за означенням ромба AC=AB, тоді ΔACB рівнобедрений. За властивістю паралелограма CO=OB, тоді AO – медіана ΔACB. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до його основи, є бісектрисою і висотою.

Отже, AO – бісектриса ∠∠A і перпендикулярна до основи CB, тобто AD – бісектриса ∠∠A і AD⊥ CB. Аналогічно доводиться, що AD – бісектриса ∠∠D, CB - бісектриса ∠∠C і ∠∠ B.

Теорему доведено.

3.4. Відшукання помилок у доведенні

Один з прийомів, який привчає дітей миттєво реагувати на помилки. Учнів заздалегідь попереджають про те, що пояснюючи матеріал, учитель навмисно припускається помилок. Також домовляються про умовний знак, яким користуватимуться учні аби звернути увагу на знайдену помилку.

Приклад 22. Доведіть, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним (рис. 20).

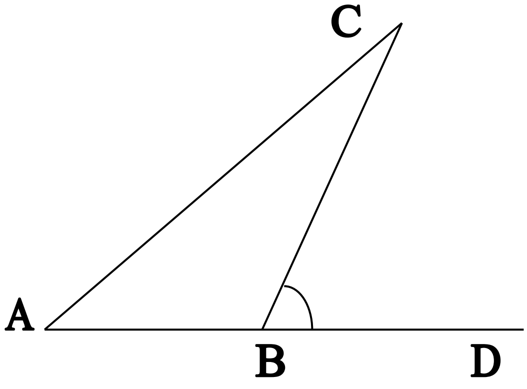


Рис. 20

Доведення

Доведення можна провести поетапно, виправляючи очевидні помилки і пояснюючи кожну з них, та виділяючи їх будь-яким символом для кращого запам’ятовування та профілактики подальшого здійснення.

Текст доведення з помилками буде виглядати наступним чином:

1) Доведення побудоване на теоремі про різницю кутів трикутника (сума кутів трикутника дорівнює 360°).

2) Сума кутів ΔABE дорівнює 180° — ∠∠ACB +∠∠ABC +∠∠DBC = 190°.

3) Зовнішній кут трикутника суміжний (суміжними називаються кути, які не мають спільної вершини і одної спільної сторони) з ∠∠ABC , отже, ∠∠CBD + ∠∠ABD = 180°. ⇔ ∠∠ABC = 180° + ∠∠CBD.

4) З рівності ∠∠ACB + ∠∠ABC + ∠∠BAC = 180° обчислимо ∠∠ABC:

∠∠ABC =180° + ∠∠BAC +∠∠ACB.

5) Ми отримали дві рівності для обчислення ∠∠ACC, ліві частини яких рівні, отже, рівні і праві: 180° − ∠∠CBD = 180° − ∠∠BAC −∠∠ACB.

6) Перетворимо останню рівність і дістанемо: ∠∠CBB = ∠∠BAC + ∠∠ACB.

7) Отже, зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, суміжного з ним.

Доведення без помилок

1) Доведення побудоване на теоремі про суму кутів трикутника (сума кутів трикутника дорівнює 180°).

2) Сума кутів ΔABC дорівнює 180°: ∠∠ACB + ∠∠ABC + ∠∠BAC = 180°.

3) Зовнішній кут трикутника суміжний (суміжними називаються кути, які мають спільну вершину і одну спільну сторону, а дві інші утворюють пряму лінію; суміжні кути доповнюють один одного до 180°) з ∠∠ABC , отже, ∠∠CBD + ∠∠ABC = 180°. ⇔ ∠∠ABC = 180° − ∠∠CBD.

4) З рівності ∠∠ACB + ∠∠ABC + ∠∠BAC = 180° обчислимо ∠∠ABC:

∠∠ABC = 180° − ∠∠BAC −∠∠ACB.

5) Ми отримали дві рівності для обчислення ∠ABC, ліві частини яких рівні, отже, рівні і праві: 180° − ∠∠CBD =180° − ∠∠BAC −∠∠ACB.

6) Перетворимо останню рівність і дістанемо: $\angle\angle CBD = \angle\angle BAC + \angle\angle ACB$.

7) Отже, зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.

3.5. Аргументація основних кроків (етапів) доведення

Доведення – це виведення одного знання з іншого, істинність якого раніше встановлена і перевірена практикою.

Доведення є мисленний процес, спрямований на підтвердження якогось положення через інші безсумнівні, раніше обґрунтовані доведення.

Для кращого розуміння поняття «аргументація» можна ввести визначення тези та аргументу.

Теза – це положення, що обґрунтовується.

Аргумент (логічна основа, підстава, довід, доказ) – положення, з допомогою якого обґрунтовується теза. Роль аргументів можуть відігравати аксіоми, теореми, властивості, логічні операції тощо.

Аргументація – це сукупність умовиводів, необхідних для логічного виведення тези. Аргумент є невід’ємною частиною доведення. Основними типами аргументів у процесі доведення є: судження про достовірно відомі факти; наукове визначення понять; загальноприйняті в науці узагальнення, раніше доведені закони науки, властивості, аксіоми чи теореми.

За способом аргументації доведення поділяються на прямі і непрямі.

Прямим називається доведення, у якому теза обґрунтовується аргументом без використання суперечних тез і припущень.

Непрямим називається доведення, у якому істинність тези обґрунтовується із застосуванням суперечного тезі припущення (антитези).

Прямі і непрямі доведення у разі підтвердження чи спростування тези здійснюються за допомогою різних прийомів.

Аргументація має бути послідовною, логічно стрункою.

Правила щодо аргументації:

• аргументи, що наводяться для доведення, повинні бути істинними і не суперечити одне одному;

• аргументи мають бути достатньою основою для доведення;

• аргументи повинні бути судженнями, істинність яких доведена;

Помилки в аргументації:

• стрибок у доведенні;

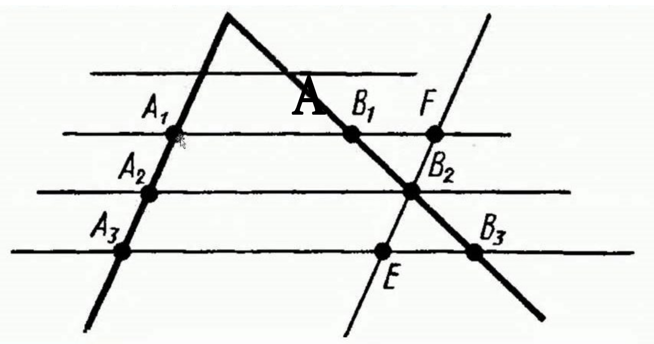
• порушення правил умовиводу;

• порушення правил силогізму.

Перший вид помилок полягає у нездатності вивести тезу з наведеної основи, у невмінні розкрити внутрішній логічний зв'язок положення з висунутими доведеннями. Другий вид помилок виникає в результаті «перескакування» через проміжні ланки в ланцюгу умовиводів, висловлювання тези безпосередньо слідом за основою, без виявлення того, як теза логічно випливає із цієї основи. Третій вид помилок полягає у порушенні правил умовиводу – правил силогізму, умовно-категоричного умовиводу, правил наукової індукції [10].

Коментування (аргументування) вирішення завдань полягає в наступному: усі учні самостійно вирішують одну і ту ж задачу, а один з них послідовно пояснює (коментує) рішення. Деякі вчителі перетворюють коментування до запису під диктовку: один учень відтворює голосом все, що він записує в зошит (без будь-яких пояснень), а всі інші поспішно записують сказане ним. Ясно, що таке застосування коментування не приносить належної користі.

Коментування позначає пояснення, тлумачення чого-небудь. Саме так і слід розуміти коментування при вирішенні математичних завдань. Учень-коментатор пояснює, на якій підставі він виконує те чи інше перетворення, проводить те чи інше міркування, побудову. При цьому кожен крок у вирішенні завдання повинен бути виправданий посиланням на відомі математичні пропозиції.



Приклад 23. Доведіть теорему Фалеса – якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.

Доведення. Відповідно до даного прийому основні кроки доведення і їх аргументацію можна подати у вигляді таблиці, яку потрібно заповнити учням. Таблиця доведення може виглядати так:

Основні кроки (етапи) доведення	Аргументація
1.Проведемо через точку B_3 пряму $EF \parallel AC$.	Аргумент 1- ?
2.$A_1A_2=FB_2$, $A_2A_3=B_2E$.	
3. $FB_2= B_2E$.	Аргумент 2 - ?
4. $\angle\angle B_1B_2F=\angle\angle EB_2B_3$.	Аргумент 3 - ?
5. $\angle\angle B_1F\ B_2=\angle\angle B_2EB_3$.	Аргумент 4 - ?
6.$\Delta\ B_1B_2F=\Delta\ EB_2B_3$.	Аргумент 5 - ?
7. $B_1B_2= B_2B_3$.	Аргумент 6 - ?

В колонку «Аргументація» учні повинні вписати такі аргументи (теореми, властивості, аксіоми і т. д.), які б доводили кроки записані в лівій колонці таблиці.

Заповнена таблиця доведення теореми Фалеса матиме вигляд:

Основні кроки (етапи) доведення	Аргументація
1.Проведемо через точку B_3 пряму $EF \parallel AC$.	1.Через будь-яку точку можна провести пряму паралельну до даної.
2. $A_1A_2=FB_2$, $A_2A_3=B_2E$.	2.Паралельні прямі перетинаються паралельними прямими, тому можна використати властивість паралелограма.
3. $FB_2= B_2E$.	3.$A_1A_2= A_2A_3$.
4. $\angle\angle B_1B_2F=\angle\angle EB_2B_3$.	4.Рівні як вертикальні.
5. $\angle\angle B_1F\ B_2=\angle\angle B_2EB_3$.	5.Рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих A_1B_1 та A_2B_2 і

6.$\Delta B_1B_2F = \Delta EB_2B_3$. 7. $B_1B_2 = B_2B_3$.	січній EF. 6.За другою ознакою рівності трикутників (якщо сторона й прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні). 7.$\Delta B_1B_2F = \Delta EB_2B_3$

РОЗДІЛ IV. ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТА СТАТИЧНА ОБРОБКА ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ

Ефективність будь-якої методики повинна обгрунтовуватися даними від її практичного застосування. Тому під час проходження виробничої практики було проведено педагогічний експеримент. У експерименті брали участь учні 7-Б класу ЗОШ №28 м. Рівне. Їх розділили на дві групи. Контрольна група А (15 учнів) вивчала тему, а точніше доведення теорем даної теми, за традиційною методикою, а експериментальна група Б (15 учнів) – за розробленою методикою. Для учнів експериментальної групи були проведені уроки, на яких теореми доводились із використанням поданої в роботі методики, а саме, різних прийомів, які використовуються при роботі з теоремами (або задачами на доведення). Для контрольної групи такі уроки не проводились. Матеріал, який розглядався, попередньо був обговорений з учителями математики та методистами з метою доцільного використання часу учнів і донесення до них корисних і необхідних порад щодо доведень на майбутнє.

Мета експерименту: на основі аналізу проведених уроків та раніше набутих знань встановити рівень засвоєння готових доведень та самостійного пошуку доведень учнями, перевірити ефективність даної методики для експериментального дослідження теорем.

Варто виділити три основні етапи методичних особливостей педагогічного експерименту:

- проаналізувати стан досліджуваної проблеми в підручниках та навчальних посібниках;
- дослідження рівня знань учнів з предмету (проведення бесіди, консультації з вчителями, аналіз оцінок учнів за перший семестр); розробити методику проведення уроків;
- впровадження методики в навчальний план учнів, перевірка якості набутих знань за допомогою тестування.

Уроки організовувались так: розпочинались з актуалізації опорних знань та мотивації навчальної діяльності учнів, потім на основі повтореного, учні за допомогою вчителя, який застосовував один з прийомів, які використовуються при роботі з теоремами (ліквідація пропусків в доведенні, відшукання помилок в доведенні, доведення за складеним планом, складання плану доведення та інші) обговорювали і запам'ятовували готові доведення. На наступних заняттях учні відтворювали уже відомі доведення і пробували самостійно вивести аналогічні доведення, інколи їм доводилося пропонувати свої міркування чи методи щодо доведення теорем.

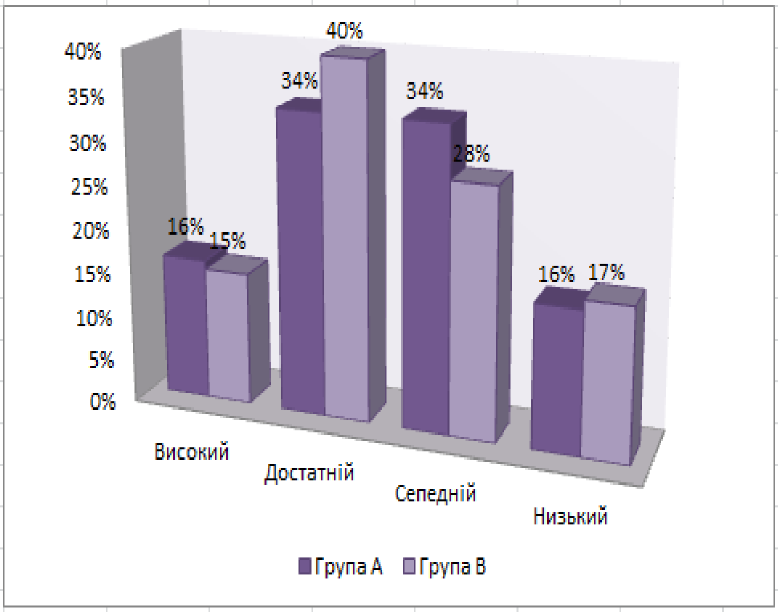
Під час першого етапу експерименту були досягнуті наступні результати: проаналізовано і узагальнено стан досліджуваної проблеми в теорії та практиці навчання математики.

У ході другого етапу експерименту було досліджено рівень знань учнів з предмету, проведено бесіди з вчителями і методистами (поради і настанови яких принесли велику користь в роботі); розроблена методика проведення уроків.

Для перевірки рівня знянь теорем та методів їх доведень було проведено

контрольне тестування. Результати рівня знань учнів подані в лінійній гістограмі:

	Група А	Група В
Високий	16%	15%
Достатній	34%	40%
Сепедній	34%	28%
Низький	16%	17%



Слід зазначити, що під час проведення експерименту учні виявляли інтерес до матеріалу, особливо до теорем, доведення яких було подано в таблицях; відвідували заняття, старанно виконували домашнє завдання та опрацьовували матеріал підручника. Деякі учні виявили особливий інтерес до доведення теорем та вивчення математики в цілому.

Результати експерименту

Рівень знань учнів, які приймали участь в експерименті значно покращився:

- учнів, що знають матеріал на високому рівні стало більше на 8% від початкового показника;
- учнів, що знають матеріал на достатньому рівні стало більше на 12% від початкового показника;
- учнів, що знають матеріал на середньому рівні стало менше на 11% від початкового показника;
- учнів, що знають матеріал на низькому рівні стало менше на 9% від початкового показника.

У сучасній математиці доведення відіграють важливу роль, тому не варто просто вчити дітей заучувати готові доведення, а потрібно сприяти тому, щоб вони самостійно їх знаходили і вміли обґрунтовувати свої думки.

Отже, здійснений педагогічний експеримент показав, що незважаючи на розвиток методики навчання математики все ж таки є недоліки у системі математичної освіти та шкільній програмі з математики. Під час вивчення доведень в учнів розвивається логіка мислення, уява, уявлення, позитивні якості особистості. Ось чому варто правильно навчати дітей доводити теореми за допомогою різних методів доведення в різних класах.

ВИСНОВКИ

В своїй праці «Міркування про метод» класик французького раціоналізму Рене Декарт писав: « Метод – це спосіб правильно спрямувати свій розум і відшукати істину». На заняттях з математики учні знайомляться з різними методами доведення: методом доведення від супротивного, методом математичної індукції, методом геометричних перетворень (центральна і осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія і подібність), алгебраїчним методом, окремими випадками якого є векторний і координатний методи, та найбільш важливими методами – аналітичним, синтетичним та аналітико-синтетичним.

Слід пам’ятати, що для кращого усвідомлення методів і структури доведення теорем (задач) дуже важливо з перших уроків навчати учнів загальних (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування та узагальнення, класифікація та систематизація) і специфічних розумових дій, та прийомів розумової діяльності, що лежать в основі вмінь доводити математичні твердження.

В шкільному курсі математики доведенням і методам доведень відведена не остання роль, тому що вони можуть бути представлені в завданнях державної підсумкової атестації з математики та в завданнях вступних іспитів до ВНЗ. Слід зазначити, що все ж вивчення готових доведень домінує над навчанням учнів самостійному пошуку доведень.

Багато методистів, педагогів і психологів присвячували свої роботи проблемам вивчення доведень в школі, розкривали суть, алгоритми і правила-орієнтири кожного з методів доведень, але найкращого і найефективнішого з них не було знайдено. Ними були наведені лише рекомендації щодо вивчення кожного методу з урахуванням науково-теоретичних, психолого-педагогічних та вікових особливостей учнів; названо основні етапи засвоєння матеріалу та методи розвитку творчих здібностей учнів.

В ході дослідження була підтверджена гіпотеза про те, що під час вивчення методів доведень теорем, тверджень і задач з використанням різнотипних методичних прийомів, починаючи з найлегших і закінчуючи найважчими для сприйняття, та їх комбінаціями з використанням ІКТ, учні будуть розуміти доведення як складову частину розв’язування, а також в них розвиватиметься логіка мислення, уява, уявлення, позитивні якості особистості та відбуватиметься усвідомлення аксіоматичної побудови математики.

Отже, починаючи уже з 5-6 класів учням подають базовий матеріал для майбутніх математичних доведень, і збільшують його паралельно з розв’язанням відповідних завдань, враховуючи індивідуальні та вікові особливості кожного. Тому можна впевнено сказати, що методика вивчення теорем та їх доведень в шкільному курсі математики – це одна з сходинок всебічного розвитку учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Навчальний посібник. / Бевз Г. П. — Київ : Вища школа, 1989. – 367 с.
2. Гришина Т. Рівнева організація роботи над теоремою // Математика в школі. – 2002. – №1. – С.17–20.
3. Погорєлов А. В. Геометрія: учеб. пособие для 7-11 кл. сред. шк. / Погорєлов А. В. – М. : Просвещение, 1986. – 345 с.
4. Погорєлов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підр. для 7-9 кл. серед. шк. – 4-те вид. – К. : Освіта, 2001. – 223 с.
5. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.uk.xlibx.com/4psihologiya/42635psihologopedagogichnimetodichni-osnovi-rozvivalnogo-navchannya-matematiki-ternopil-pidruchnikiposibniki-2004-u.php.
6. Резніченко Р. Формування прийому вивчення теорем за текстом підручника // Математика в школі., 2003. – №6. – С. 33–35.
7. Розвиток математики в Україні. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/images/education/average/new_pr/math.doc.
8. Роль доведень у навчанні математики та їх підтримка засобами комп'ютерного моделювання у пакетах динамічної геометрії. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.ii.npu.edu.ua/2009-11-27-11-40-37/103-19/906-2009-11-27-12-10-09576.
9. Семенець С. П. Методика навчання математики (підготовлено на основі концепції розвивальної освіти): навчальний посібник / Семенець С. П. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. – 536 с.
10. Сластенко Є. Ф. Логіка: Навчальний посібник. / Є. Ф. Сластенко, С. М. Ягодзінський – К. : НАУ, 2005. – 192 с.

11. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів вищих пед. навч. закладів – 2-ге вид. доп. і перероб. / Слєпкань З. І. – К. : Вища школа, 2006. – 582 с.
12. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальності пед. навч. закладів / Слєпкань З. І. – К. : Зодіак–ЕКО, 2000. – 385 с.
13. Фетисов А. И. О доказательствах в геометрии.; М. : ФИЗМАТГИЗ, 1954.– 61 с.
14. Хмара Т. М. Шляхами математики: Хрестоматія для учнів 5-9 кл. / Хмара Т. М. – К. : Пед. преса, 1999. – 196 с.