Форма № Н-9.02

Міністерство освіти і науки України

Рівненський державний гуманітарний університет

Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

Бакалавр

на тему:

«Методика проведення позакласної роботи з математики у профільних класах на тему «Тригонометричні функції. Тригонометричні рівняння та нерівності»

Виконала : студенктка 4 курсу , групи МІ-42

Напрям підготовки(спеціальності)

0402 «Фізико-математичні науки»,

6.040201 «Математика»

Куруц Христина Іванівна

Керівник: канд. пед.наук. проф. Белешко Д.Т

Рецензент:

Рівне - 2017 року

Зміст

ВСТУП

Актуальність роботи полягає в тому, що тригонометричні рівняння і нерівності в математиці відіграють важливу роль. Лінії тотожних перетворень, рівнянь та нерівностей розвиваються у зв'язку з вивченням тригонометричних функцій, формул тригонометрії. Дана тема є однією із найскладніших у шкільному курсі математики. Тригонометричні рівняння виникають при розв’зуванні задач по планіметрії, стереометрії, астрономії, фізики й в інших областях. Сьогодні вивченню основних тригонометричних понять, таких як функцій числового аргументу, приділяється значна увага в курсі математики старшої школи. Існує кілька різних підходів щодо викладання даної теми у загальноосвітньому курсі математики, а тому вибір оптимального з них є особливо актуальним для молодого вчителя. Крім того, значні труднощі при вивченні теми ”Тригонометричні функції, рівняння і нерівності” в курсі математики виникають ще й з невідповідністю між достатньо великим обсягом змісту і відносно невеликою кількістю годин, виділених на вивчення даної теми, що залежить і від профілю навчання. Отже, постає проблема у детальному відборі змісту та розробки ефективних методів викладання даної теми. Тригонометричні функції лежать в основі спеціального математичного апарату – гармонічного аналізу, за допомогою якого вивчаються різні періодичні процеси: коливання, розповсюдження хвиль, деякі атмосферні явища, тощо, що й обумовлює актуальність поглибленого вивчення зазначеної теми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У різних варіантах тематичних планів, що відповідають певному рівню, з опорою на підручники різних авторів, в основному ставляться такі цілі: ввести поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса для довільного кута; систематизувати, узагальнити і розширити знання про тригонометричні функції довільного аргументу; вивчити властивості тригонометричних функцій; навчити учнів будувати графіки тригонометричних функцій і виконувати деякі перетворення цих графіків. Зазначені цілі, певним чином, реалізовано вітчизняними і зарубіжними відомими математиками у підручниках і посібниках з математики для старшої школи, зокрема: Алімовим Ш.А., Бевзом Г.П., Башмаковим М.І., Колмогоровим А.М., Мордковичем А.Г., Неліним Є.П., Шкілем М.І. та ін. Колмогоров А.М., Нелін Є.П., Шкіль М.І.. Вони акцентують увагу на прикладну спрямованість, зміст їх підручників відрізняється значною науковістю і близькістю до математичного аналізу. Підручник Мордковича А.Г. відрізняється доступнішим для учнів викладом теоретичного матеріалу, порівняно з іншими підручниками, який ведеться детально, докладно і літературно грамотно; наявністю значної кількості прикладів з детальним розв'язуванням.

Окремі підходи в доведенні тверджень курсу алгебри і початків аналізу розглядали автори підручників А.Колмогоров, М.Шкіль, З.Слєпкань, О. Дубинчук, Т.Колесник, Т.Хмара, Є.Нелін та інші. Проблемою методики навчання старшокласників курсу алгебри і початків аналізу займалися М.Жалдак, Т.Зайцева, І.Лупан, М.Головань, В.Дровозюк, Є. Смирнова, Т.Олійник.

Об'єктом дослідження є процес вивчення тригонометрії в курсі старшої школи.

Предметом даної бакалаврської роботи є методика дослідження і вдосконалення змісту вивчення тригонометричних функцій на позакласних заняттях в 10-11 класі.

В основу дослідження була покладена **гіпотеза** : математична підготовка учнів при проведенні позакласних занять підвищиться, за умови доцільно розробленої системи проведення позакласних заходів, яка включає в себе систематизований зміст матеріалу занять та методику проведення позакласної роботи у відповідності до його змісту.

Мета дослідження - розробити зміст, ефективні шляхи, методи, засоби та організаційні форми позакласної діяльності учнів при вивченні теми «Тригонометрична функція. Тригонометричні рівняння і нерівності».

Відповідно до мети, формулюємо завдання роботи:

- розглянути проблеми побудови позакласних гурткових занять.
- розглянути теоретичні основи теми «Тригонометричні функції, рівняння і нерівності».
- вивчити методичні особливості викладання теми «Тригонометричні функції, рівняння і нерівності» при проведенні гурткових робіт.
- систематизувати відомості про розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей;
- з'ясувати місце тригонометричних рівнянь та нерівностей в програмі з математики, конкретизувати вимоги до знань, умінь та навичок учнів;
- подати приклади розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей різної складності;
- зробити висновки.

Практичне значення. Питання, пов'язані з тригонометричними функціями рівняннями та нерівностями, використовуються в різних галузях математики. Знання про тригонометричні рівняння і нерівності стають складовою світогляду і певним обсягом цієї інформації повинна володіти кожна освічена людина.

Апробація:основні положення дипломної роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів, магістрів та бакалаврів РДГУ -2017

Структура і об'єм роботи. Робота складається з вступу, трьох розділів, висновку, списку використаної літератури.

У першому розділі розглянуто основні елементи історії математики на позакласних заняттях та проблемну побудову позакласних занять з математики в профільних класах.

У другому розділі розглянуті основні теоретичні відомості про тригонометричні функції, а саме: найпростіші тригонометричні функції, способи їх застосування, методичні особливості вивчення теми.

У третьому розділі розглядається методика викладання тригонометричних рівнянь і нерівностей. У даному розділі також наведені основні типи рівнянь та нерівностей, способи їх розв’язання, способи та приклади розв’язання складніших нерівностей.

Розділ 1. Зміст і форми організації позакласної роботи з математики у профільних класах

1.1. Елементи історії тригонометрії

Важливу роль у навчанні математики відіграє використання історичного матеріалу, який підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює потяг до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику як невід'ємну складову загальнолюдської культури. На дохідливих змістовних прикладах слід показувати учням, як розвивалися математичні поняття і відношення, теорії й методи.

Ознайомлювати учнів з іменами та біографіями видатних вчених, які створювали математику, зокрема видатних українських математиків, що сприятиме національному і патріотичному вихованню. Використання під час уроків і позакласних занять із математики елементів з її історії є не лише ефективним засобом розвитку інтересу учнів до предмета, але й має пізнавальне і виховне значення.

Історія тригонометрії нерозривно пов'язана з астрономією, адже саме для вирішення завдань цієї науки стародавні вчені стали досліджувати співвідношення різних величин в трикутнику.

На сьогоднішній день тригонометрії є одним із розділів математики, що вивчає залежність між значеннями величин кутів і довжин сторін трикутників, а також займаються аналізом алгебраїчних тотожностей тригонометричних функцій.

Сам термін, що дав назву цього розділу математики, вперше був виявлений в заголовку книги під авторством німецького вченого-математика Питискуса в 1505 році. Слово «тригонометрія» має грецьке походження і означає «вимірюю трикутник». Якщо бути точніше, то мова йде не про буквальне вимірювання цієї фігури, а про її вирішення, тобто визначення значень її невідомих елементів за допомогою відомих.

Історія тригонометрії почалася більше двох тисячоліть тому. Спочатку її виникнення було пов'язане з необхідністю з'ясування співвідношень кутів і сторін трикутника. У процесі досліджень з'ясувалося, що математичне вираження даних співвідношень вимагає введення особливих тригонометричних функцій, які спочатку оформлялися як числові таблиці.

Передбачається, що спочатку тригонометрії існувала як частина астрономії. Потім вона стала використовуватися в архітектурі. А з часом виникла доцільність застосування даної науки у різних галузях людської діяльності. Це, зокрема, астрономія, морська і повітряна навігація, оптика, електроніка, архітектура та інші.

Одним з найважливіших досягнень ранніх часів є визначення співвідношення катетів і гіпотенузи в прямокутних трикутниках, яке пізніше отримало назву теореми Піфагора.

Історія виникнення тригонометрії як відокремленого розділу математичного навчання почалася в Середньовіччі. Саме тоді вчені замінили хорди синусами. Це відкриття дозволило ввести функції, що стосуються дослідження сторін і кутів прямокутного трикутника. Тобто саме тоді тригонометрії початку відособлюватися від астрономії, перетворюючись в розділ математики. Перший спеціалізований трактат з тригонометрії з'явився в X—XI столітті. Автором його був середньоазіатський вчений Аль-Біруні.

У Новий час більшість вчених стало усвідомлювати надзвичайну важливість тригонометрії не тільки в астрономії і астрології, але і в інших сферах життя. Це, в першу чергу, артилерія, оптика та навігація у далеких морських походах. Тому в другій половині XVI століття ця тема зацікавила багатьох видатних людей того часу, в тому числі М. Коперника, Й. Кеплера, Ф. Вієта. Коперник відвів тригонометрії кілька глав свого трактату «Про обертання небесних сфер» (1543).

Надання тригонометрії сучасного змісту і виду стала заслуга Леонарда Ейлера. Його трактат «Введення в аналіз нескінченних» (1748) містить визначення терміна «тригонометричні функції», яке еквівалентне сучасному.

Визначення тригонометричних функцій на всій числовій прямій стало можливим завдяки дослідженням Ейлера не тільки допустимих від'ємних кутів, але і кутів більше 360°.

Тригонометрії не відноситься до прикладних наук, в реальному повсякденному житті її завдання рідко застосовуються. Однак цей факт не знижує її значущості. Дуже важлива, наприклад, техніка тріангуляції, яка дозволяє астрономам досить точно виміряти відстань до недалеких зірок і здійснювати контроль за системами навігації супутників.

Також тригонометрію застосовують у навігації, теорії музики, акустики, оптики, аналізі фінансових ринків, електроніці, теорії ймовірностей, статистики, біології, фармацевтиці, хімії, теорії чисел, метеорології, океанології, картографії, багатьох розділах фізики, топографії і геодезії, архітектури, фонетиці, економіці, електронній техніці, машинобудуванні, комп'ютерній графіці і т. д. Історія тригонометрії та її роль у вивченні природничо-математичних наук вивчаються і донині. Можливо, в майбутньому областей її застосування стане ще більше.

1.2. Проблемна побудова гурткових занять

Розвиток творчого мислення учнів, їх пізнавальної діяльності, прагнення до пошуків досліджень - одна з важливих проблем оптимізації навчання і комплексного підходу до навчально-виховної роботи, до використання у навчально-виховному процесі різних форм, позакласних заходів, зокрема гуртків.

Гурткова робота розвиває естетичні та художні смаки учнів, поглиблює їх знання, розвиває їх творчі здібності, виховує почуття краси. Добре спланована гурткова робота аж ніяк не перевантажує учнів. Навпаки, вона значно полегшує сприйняття та засвоєння матеріалу на уроках, допомагає учням працювати за покликанням. У процесі гурткової роботи педагог має змогу глибше пізнати особистість кожного вихованця, допомогти йому самовизначитись. Вона нерозривно зв'язана з навчально-виховним процесом, що здійснюється на уроках і ґрунтується на знаннях і навичках, набутих учнями на заняттях. Характерною особистістю гурткової роботи є те, що вона не регламентується обов'язковими програмами, а це надає їй гнучкості і дозволяє краще враховувати прагнення кожної дитини. Як правило, заняття гуртка проводять два рази на місяць.

Плануючи роботу гуртків, слід передбачити розширення практичних навичок і вмінь, якими учні оволодівають у процесі навчання на уроці. Для цього на заняттях учням можна пропонувати практичні роботи з програмних тем геометрії та алгебри, ознайомлювати з роботою мікрокалькуляторів і комп'ютерів тощо.

На засіданнях математичних гуртків можна також готувати учнів до участі в математичних олімпіадах різних рівнів (шкільних, районних, міських, обласних).

Цінність гурткової роботи полягає в тому, що вона, в деякій мірі, вирішує проблему організації вільного часу школярів, задовольняє їх різноманітні інтереси, активізує пізнавальну діяльність школярів, тощо.

Активізуючи пізнавальну діяльність школярів, вона в той же час створює умови для практичного застосування одержаних ними знань.

І відповідає наступним виховним цілям:

1. Пробудження і розвиток стійкого інтересу учнів до математики.

2. Розширення і поглиблення знань учнів з програмового матеріалу.

3. Оптимальний розвиток математичних здібностей у учнів.

4. Виховання високої культури математичного мислення.

5. Розвиток у учнів уміння самостійно і творчо працювати з навчальною і науково-популярною літературою.

6. Розширення і поглиблення уявлень учнів про практичне значення математики в техніці і практиці.

7. Розширення і поглиблення уявлень учнів про культурно-історичну цінність математики, про ведучу роль математичної школи у світовій науці.

8. Виховання у учнів почуття колективізму і вміння поєднувати індивідуальну роботу з колективною.

9. Встановлення більш тісних ділових контактів між вчителем математики і учнями і на цій основі більш глибоке вивчення пізнавальних інтересів і запитів учнів.

10. Створення активного, здатного надати вчителю математики допомогу в організації ефективного навчання математиці всього колективу даного класу (допомога у виготовленні наочних посібників, заняттях з невстигаючими, у пропаганді математичних знань серед інших учнів).

Зрозуміло, що реалізація цих цілей частково здійснюється на уроках. Але в процесі класних занять, обмежених рамками навчального часу і програми, це не вдається зробити в достатньому обсязі. Тому кінцева і повна реалізація цих цілей переноситься на позакласні заняття.

Не варто вважати позакласною роботою додаткові заняття з тими учнями, що не встигають з математики, а також індивідуальні і групові заняття з тими, хто навчається з випередженням. Робота з цими категоріями учнів безпосередньо пов'язана з вивченням на різному рівні вимог програмового матеріалу.

До форм позакласної роботи також можна віднести:

1) позашкільну роботу в дитячих будинках творчості, в літніх таборах тощо;

2) роботу різних рівнів заочних математичних шкіл.

Всередині кожної з цих форм існують різноманітні форми позакласної роботи:

- математичний гурток;
- тиждень або місячник математики;
- математичні вечори;
- клуби веселих і кмітливих математиків;
- математичні вікторини, конкурси, турніри;
- шкільні олімпіади;

- математична преса (класна і шкільна математичні газети, бюлетені, стенди тощо);
- математичні екскурсії;
- шкільні наукові конференції;
- позакласне читання науково-популярної літератури з математики;
- підготовка учнями доповідей, рефератів, творів з математики;
- виготовлення математичних моделей тощо.

Названі форми позакласної роботи часто перетинаються, і тому їх важко чітко розмежувати.

Розділ 2. Зміст та проведення позакласної роботи на тему «Тригонометричні функції».

2.1. Методика вивчення тригонометричних функцій

Під час вивчення теми «Тригонометричні функції» в курсі алгебри і початків аналізу в 10 класі знання учнів формуються на основі відновлених на початку навчального року знань про функції їх властивості та графіки (синус, косинус і тангенс зокрема). Основна увага має бути зосереджена на розгляді тригонометричних функцій будь-якого числового аргументу і основних тригонометричних тотожностей. Доцільно попередньо повторити і розширити відомості про радіанну систему вимірювання кутів і дуг.

Перш ніж вводити поняття тригонометричної функції числового аргументу, доцільно докладніше, ніж у курсі геометрії 9 класу, розглянути поняття «радіанна міра кута». Потрібно пояснити причину її введення, специфіку і переваги перед іншими системами вимірювання кутів. Можна нагадати учням про різні системи вимірювання кутів.

Радіанну міру кутів широко використовують у математиці, фізиці, техніці. Передумовою її запровадження був такий факт: якщо розглянути два концентричні кола радіусів r_1 і r_2 і два різні центральні кути $\angle$ $\angle AOB = \alpha^0$і $\angle DOC = \beta^0$ з відповідними дугами $l_1, l_2, l_1' \; i \; l_2'$, то за відомою формулою довжини дуги:

$$l_1 = \frac{\pi\alpha^\circ r_1}{180^\circ},\quad l_2 = \frac{\pi\alpha^\circ r_2}{180^\circ},\quad l_1' = \frac{\pi\beta^\circ r_1}{180^\circ},\quad l_2' = \frac{\pi\beta^\circ r_1}{180^\circ}.$$

Поділивши обидві частини кожної з чотирьох рівностей на відповідний радіус, дістанемо:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ},\quad \frac{l_2}{r_2} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ},\quad \frac{l_1'}{r_1} = \frac{\pi\beta^\circ}{180^\circ},\quad \frac{l_2'}{r_2} = \frac{\pi\beta^\circ}{180^\circ}.$$

Звідси:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = m,\quad \frac{l_1'}{r_1} = \frac{l_2'}{r_2} = n.$$

Якщо $\alpha > \beta$, то $m > n$. Отже, для деякого центрального кута відношення довжин дуг концентричних кіл до радіусів є величиною сталою і може слугувати характеристикою величини відповідного центрального кута. Встановлено, що для довільного центрального кута $\frac{l}{r} = a$, де α – стала для цього центрального кута. Число а, що дорівнює відношенню довжини дуги до радіуса кола, називають радіанною мірою кута.

Якщо $l = r$, то α=1. Тому в радіанній системі за одиницю виміру величини кута взято центральний кут, для якого довжина відповідної дуги дорівнює довжині радіуса. Міру цього кута називають радіаном. Радіан є одиницею радіанної міри кутів. Радіанною мірою дуги кола називають радіанну міру відповідного центрального кута.

Для радіанної міри кута і відповідної одиниці традиційно не запроваджено позначення. Тому якщо розглядають тригонометричну функцію кута, міра якого виражена в градусах, наприклад 30°, то записують $\sin 30°$. Якщо міра кута виражена в радіанах, то пишуть: $\sin\frac{\pi}{6}$ Це означає, що цей кут містить $\frac{\pi}{6}$ радіан, а у виразі sin 2—2 радіани.

Деякі учні помилково вважають, що символ π є позначенням одиниці радіанної міри. Щоб спростувати це неправильне уявлення, потрібно у прикладах використовувати аргументи тригонометричних функцій не тільки з ірраціональним числом π або його частками, а й з іншими дійсними числами.

Специфікою радіанної міри є й те, що радіан міститься в розгорнутому куті $\pi \approx 3{,}14$ разів, а градус 180. Перевага радіанної системи вимірювання кутів – формули довжини дуги і площі сектора у випадку вимірювання відповідного центрального кута в радіанах спрощуються: $S = \frac{ar^2}{2}$, де r – радіус кола, a – радіанна міра центрального кута.

Найбільшою перевагою радіанної міри – для малих кутів, виміряних у радіанах, виконуються наближені рівності $\sin\alpha = \alpha$, $tg\alpha = \alpha$. Справді, нехай

α=3°. Оскільки 3°=0,0524 радіана, а sin 3°=0,0523, то справедлива наближена рівність sin 0,0524=0,0523. Для градусної міри рівність sin3°=3 не має смислу.

Цю властивість радіанної міри широко застосовують у математичному аналізі та інших науках.Практика свідчить, що виведення формул переходу від градусної міри кута до радіанної і навпаки не спричинює труднощів в учнів. Помилок вони припускаються, здебільшого заокруглюючи наближені значення, отримані під час застосування згаданих формул.

2.2 Основні властивості тригонометричних функцій. Обернені тригонометричні функції.

Перш ніж вивчати властивості тригонометричних функцій, попередньо потрібно довести їхню періодичність і, послуговуючись означенням та цією властивістю, побудувати графіки. Графіки дають змогу виявити інші властивості, а потім обгрунтувати їх аналітично.

Використовуючи означення синуса і косинуса числового аргументу та враховуючи їх геометричну інтерпретацію на одиничному колі, матимемо sin(x+2nπ) = sinx, cos(x+2nπ) = cosx, де $n \in Z, n \cap\neq 0$, тобто періодом синуса і косинуса є числа $2\pi n$.

Застосовуючи лінії тангенсів і котангенсів, неважко зробити висновок, що $tg(x+n\pi)=tgx$, $ctg(x+n\pi)=ctgx$, тобто періодом тангенса і котангенса є числа πn.

Застосовуючи лінії тангенсів і котангенсів, неважко зробити висновок, що $tg(x+n\pi)=tgx$, $ctg(x+n\pi)=ctgx$, тобто періодом тангенса і котангенса є числа πn.

Доведемо методом від супротивного, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число $2\pi n$. Припустимо, що існує додатне число 1< $2\pi n$, таке, що $\sin(x+l)=sinx$. Тоді при $x=\frac{\pi}{2}$ маємо $\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

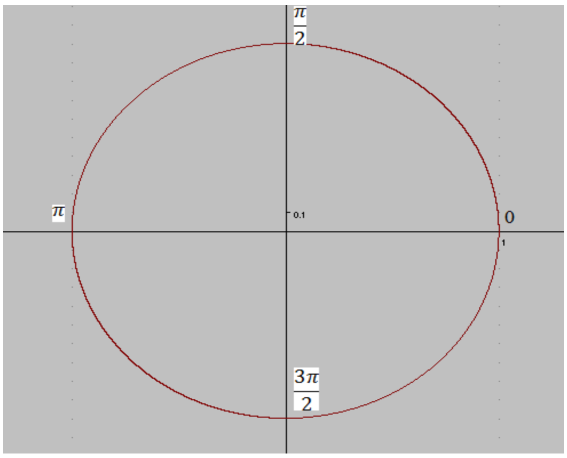


рис. 2.1

Однак синус може дорівнювати 1 лише в т. $P_{\frac{\pi}{2}}$, яка відповідає на одиничному колі числам $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$. Отже, $\frac{\pi}{2} + l = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, звідки $l = 2n\pi$. За припущенням, $0 < l < 2\pi$, тобто $0 < 2n\pi < 2\pi$.

Поділивши всі три частини останньої нерівності на 2π, дістанемо $0 < n < 1$, що суперечить умові, оскільки $n \in Z$, а між 0 і 1 немає жодного цілого числа. Отже, припущення неправильне, а справедливе те, що 2π – найменший додатний період функції $y = \sin x$.

Аналогічно, взявши рівність $\cos(x + l) = cosx$, де x=0, можна довести, що найменшим додатним періодом для функції $y + cosx$ є число 2π. Доведемо, що число π є найменшим додатним періодом функції $y + tgx$. Припустимо, що існує додатне число $l < \pi$ таке, що $tg(x + l) = tgx$. Тоді за $x = 0$ матимемо $tg(0 + l) = tg0 = 0$. Однак тангенс дорівнює 0 лише в двох точках P_0 і P_π одиничного кола, які відповідають числам nπ, де $n \in Z$.

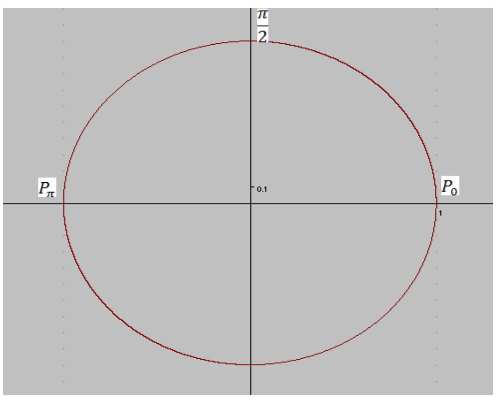


рис. 2.2

Тому l=nπ. За припущенням, $0<l<\pi$, тобто $0<n\pi<\pi$. Поділивши всі три частини останньої нерівності на π, дістанемо $0 < \pi < 1$, що суперечить умові.

Отже, припущення неправильне, а справедливе те, що π — найменший додатний період функції $y = tgx$. Доцільно розглянути сім властивостей тригонометричних функцій і систематизувати їх так, як це наведено для функції y = sin x.

1. Оскільки синус існує для будь-якого дійсного числа і як ордината точки одиничного кола змінюється на відрізку $[-1;1]$, то областю визначення функції y=sin x є множина R всіх дійсних чисел, областю значень – відрізок $[-1;1]$.

2. Якщо при повороті навколо точки *O* на кут α початковий радіус *OA* переходить у радіус *OB*, то при повороті на кут α початковий радіус *OA* перейде у радіус *OB`*, симетричний *OB* відносно осі абсцис (рис. 16).

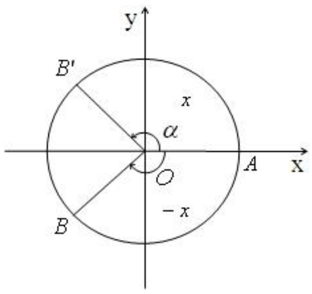


Рис. 16

рис. 2.3

Абсциси точок B і $B`$ рівні, а ординати рівні за модулем, але протилежні за знаком. Це означає, що $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$, $tg(-x) = -tg\,x, ctg(-x) = -ctg\,x.$ Таким чином, функції $y = \sin x,\ y = \mathrm{tg}\, x, y = ctg\ x$, непарні, а функція $y = \cos x$ парна.

3. Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π.

4. Функція набуває значення, що дорівнює 0 (нулі функцій) при $x = k\pi$, де $k \in Z$, оскільки ординати точок одиничного кола перетворюються на нуль на відрізку $[0; 2\pi]$ у двох точках $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = \pi$, а функція періодична.

5. Проміжки зростання функції – відрізки $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, де $n \in Z$. Оскільки $y = sinx$ – періодична функція, то досить довести зростання на одному із названих відрізків, наприклад на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Скористаємось означенням зростаючої функції. Нехай $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $x_2 > x_1$. Доведемо, що різниця $f(x_2) - f(x_1)$ додатна.

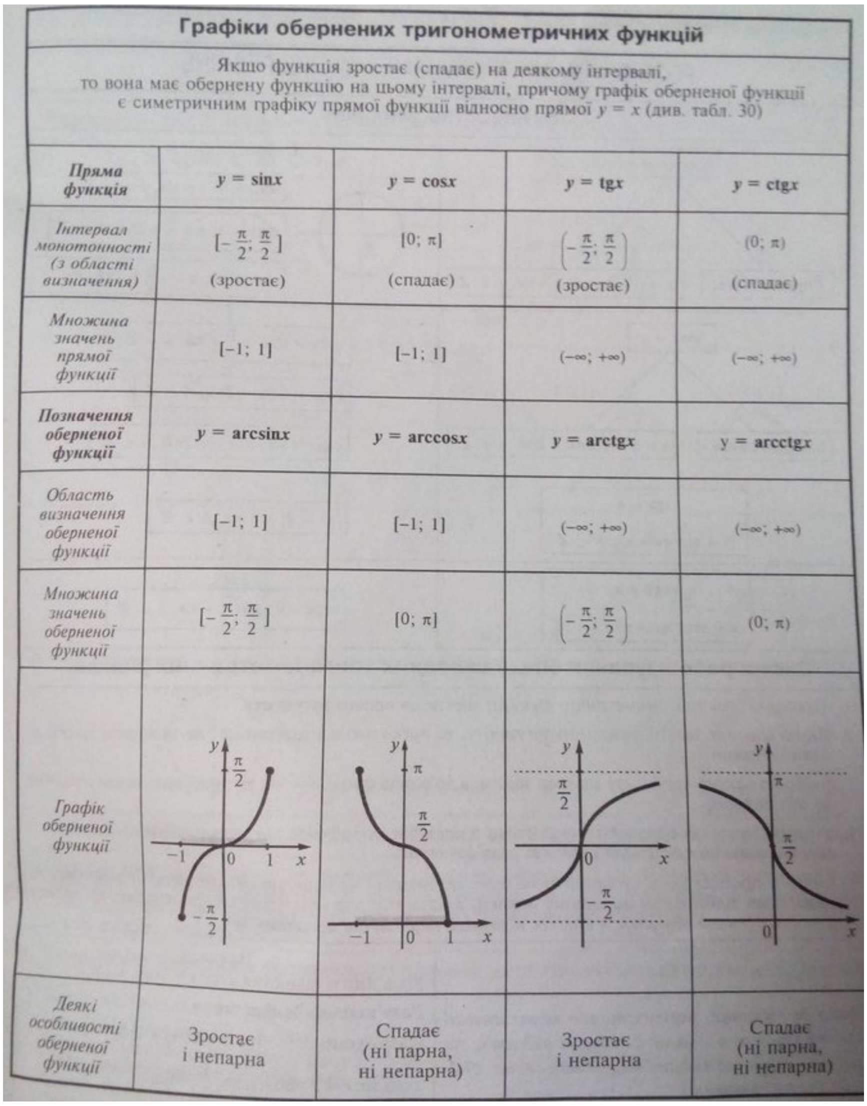
Справді $f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2cos\frac{x_1+x_2}{2}\ sin\frac{x_2-x_1}{2}$, оскільки за умовою $x_2 - x_1 > 0, -\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, тому, $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, отже, $cos\frac{x_1+x_2}{2} > 0$ і $sin\frac{x_1+x_2}{2} > 0$.

6. Проміжками, де синус додатний, є $x \in (2\pi n; \pi + 2n\pi), n \in Z$, оскільки на відрізку [0;2π], довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду 2π, функція додатна на проміжку (0;π). Синус від'ємний на проміжку $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2n\pi), n \in Z$, оскільки на відрізку [0;2π] він від'ємний на проміжку (π;2π).

7. Синус досягає максимуму, що дорівнює 1, в точках $\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$, а мінімуму, що дорівнює -1, у точках $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$ ордината точки одиничного кола дорівнює 1 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і -1 при $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

За такою самою схемою вводяться властивості функцій $y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$.

Якщо функція зростає (спадає) на деякому інтервалі, то вона має обернену функцію на цьому інтервалі, причому графік оберненої функції є симетричним графіку прямої функції відносно прямої $y = x$.



Графіки обернених тригонометричних функцій

Якщо функція зростає (спадає) на деякому інтервалі, то вона має обернену функцію на цьому інтервалі, причому графік оберненої функції є симетричним графіку прямої функції відносно прямої $y = x$ (див. табл. 30)

Пряма функція	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Інтервал монотонності (з області визначення)	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (зростає)	$[0; \pi]$ (спадає)	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (зростає)	$(0; \pi)$ (спадає)
Множина значень прямої функції	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Позначення оберненої функції	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область визначення оберненої функції	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Множина значень оберненої функції	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Графік оберненої функції				
Деякі особливості оберненої функції	Зростає і непарна	Спадає (ні парна, ні непарна)	Зростає і непарна	Спадає (ні парна, ні непарна)

рис. 2.4

2.3 Перетворення тригонометричних виразів

Для тотожних перетворень тригонометричних виразів необхідні знання формул і вміння ними користуватися. Запам'ятовування й застосування тригонометричних формул полегшується, якщо вводити формули групами:

- співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу;
- формули додавання, подвоєного аргументу;
- половинного аргументу (пониження степеня);
- перетворення суми й різниці тригонометричних функцій на добуток;
- перетворення добутку тригонометричних функцій на суму;
- вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу (універсальна тригонометрична підстановка).

Доцільно підкреслювати, що, наприклад, сума (різниця) синусів або косинусів перетворюютъся в добуток, а у формулах половинного аргументу — аргумент збільшується вдвічі, а степінь зменшується вдвічі. Учням корисно мати на картці, або на останній сторінці зошита, а ще краще — на зворотному боці тригонометра ці формули. Мінімум формул можна записати такими блоками. Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу: $\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$, $\boldsymbol{tg\alpha\, ctg\alpha = 1}$, $\boldsymbol{tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}}$, $\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}}$, $\boldsymbol{1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}}$, $\boldsymbol{tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}}$.

Щоб полегшити учням запам'ятання та орієнтування в основних тригонометричних тотожностях, ми розроділяємо їх на три групи:

1. формули квадратів:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1,$$

$$sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1,$$

$$csc^2\alpha - ctg^2\alpha = 1.$$

2. формули обернених величин:

$$sin\alpha\, csc\alpha = 1,$$

$$cos\alpha\, sec\alpha = 1,$$

$$tg\alpha\, ctg\alpha = 1.$$

3. формули ділення:

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha,$$

$$\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha.$$

Такий розподіл формул також дає можливість цілком одноманітно розв'язувати всі типи задач на обчислення значень усіх тригонометричних функції якого-небудь аргументу, коли відома одна з цих функції. При цьому розв'язок виходить найбільш раціональний, вільний від зайвих обчислень та вибору можливих знаків.

Корисно дати учням деякі поради щодо тотожних перетворень тригонометричних функцій:

- одиницю можна подати у вигляді суми $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$;

  якщо можливо, то звести тригонометричні функції до однакового аргументу;
- якщо в сумі більш ніж два доданки зрізними аргументами, то згрупувати їх і застосувати формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток;
- якщо аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha,\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha,$ тощо, то застосувати формули зведення;
- якщо до аргументу додається $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ і т. п., то застосувати формули додавання;
- універсальну тригонометричну підстановку застосовувати в особливих випадках.

Можна запропонувати учням при розв’язуванні задач додержуватись такої послідовності: спершу звертатись до формул квадратів, потім до формул обернених величин, далі до формул ділення і, нарешті, знову до формул обернених величин. Таким чином, формули квадратів і формули ділення використовуються лише по одному разу, а формули обернених величин – двічі. Так і переходим до прищеплення учням основних навичок у доведенні тригонометричних тотожностей. Для більш ефективного засвоєння інформації даємо учням такі вказівки.

Вказівка 1. Перетворюйте складнішу частину тотожності до другої частини – простішої.

Приклад 1. Довести тотожність:

$$2(cos^6\alpha + sin^6\alpha) - 3(cos^4\alpha + sin^4\alpha) = 1.$$

Доведення. Складнішою є ліва частина тотожності, її і перетворимо. Через те, що

$$cos^6\alpha + sin^6\alpha = (cos^2\alpha)^3 + (sin^2\alpha)^3,$$

то $2(cos^6\alpha + sin^6\alpha) - 3(cos^4\alpha + sin^4\alpha) = 2(cos^2\alpha + sin^2\alpha)(cos^4\alpha -$
$cos^2\alpha\, sin^2\alpha + sin^4\alpha) - 3(cos^4\alpha + sin^4\alpha) = -cos^4\alpha + 2cos^2\alpha\, sin^2\alpha +$
$sin^4\alpha) = -(cos^2\alpha + sin^2\alpha)^2 = -1,$

що й треба було довести.

Приклад 2. Довести тотожність:

$$\frac{1 + 2\sin a \cos a}{sin^2a - cos^2a} = \frac{tg\ a + 1}{tg\ a - 1}.$$

Виражаємо праву частину через $\sin a$ і $\cos a$.

$$\frac{tg\ a + 1}{tg\ a - 1} = \frac{\frac{sin\ a}{cos\ a} + 1}{\frac{sin\ a}{cos\ a} - 1} = \frac{sin\ a + cos\ a}{sin\ a - cos\ a}.$$

Чисельниик і знаменник виразу ще не мають потрібного вигляду. Спробуємо звести до потрібного вигляду хоча б одну із частин цього дробу.

Легко зрозуміти, що досить знаменник помножити на $sin\ a + cos\ a$, щоб він набув потрібного вигляду.

$$\frac{sin\ a + cos\ a}{sin\ a - cos\ a} = \frac{(\sin a + \cos a)^2}{(\sin a - \cos a)(\sin a + \cos a)} = \frac{sin^2a + cos^2a + 2\sin a\cos a}{sin^2a - cos^2a}$$
$$= \frac{1 + 2\sin a \cos a}{sin^2a cos^2a}$$

Вказівка 2. Перетворюйте одну частину тотожності до виразів (функції, кутів), що містяться в другій частині тотожності.

Приклад 3. Довести тотожність:

$$\frac{1 - sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos\alpha}{1 + sin\alpha}.$$

Розв’язання даної тотожності спричинить певні труднощі, тому, що перетворювати одночасно всю тотожність не дозволяється. Цьому можна запобігти якщо розв’язання логічно обґрунтувати за допомогою вказівки 2.

Дійсно, помітивши, що в чисельнику правої частини міститься $cos\alpha$, вводимо $cos\alpha$ і в чисельник лівої частини тотожності:

$$\frac{1 - sin\ \alpha}{cos\alpha} = \frac{(1 - sin\alpha)cos\alpha}{cos^2\alpha}.$$

Знаменник правої частини даної тотожності $cos\alpha$ не містить, тому виражаємо знаменник цього дробу через $sin\ \alpha$:

$$\frac{(1-sin\alpha)cos\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{(1-sin^2\alpha)\ cos\alpha}{1-sin^2\alpha}=\frac{(1-sin\alpha)\ cos\alpha}{(1-sin\alpha)(1+sin\alpha)}=\frac{cos\alpha}{1+sin\alpha}.$$

Приклад 4. Довести тотожність:

$$sin^2a\ sec^2\beta+tg^2\beta cos^2a=sin^2a+tg^2\beta.$$

На даному етапі вивчення вчителі не дозволяють учням одночасно перетворювати всю тотожність, тому розв'язання даного приклади спричинить певні труднощі.

Його можна розв'язати спираючись на вказівку 2.

$$\frac{1-\sin a}{\cos a}=\frac{(1-\sin a)\cos a}{cos^2a}.$$

Знаменник правої частини даної тотожності *cos a* не містить, тому виражаємо знаменник цього дробу через *sin a*:

$$\frac{(1-\sin a)\cos a}{cos^2a}=\frac{(1-\sin a)\cos a}{1-sin^2a}=\frac{(1-\sin a)\cos a}{(1-\sin a)(1+\sin a)}=\frac{\cos a}{1+\sin a}.$$

Приклад 5. Довести тотожність:

$$tg^3a\ cosec^2a-cosec\ a\sec a+ctg^3a\ sec^2a=tg^3a+ctg^3a.$$

Щоб не виконувати багато важких і зайвих перетворень, важливо помітити, що права частина містить tg^3a і $ctg^3\ a$, можна одразу виділити ці доданки в лівій частині тотожності:

$tg^3a\ cosec^2a-cosec\ a\sec a+ctg^3a\ sec^2a==tg^3a(1+ctg^3a)-cosec\ a\sec a+ctg^3a(1+tg^2a)=tg^3a+tg^3a\ ctg^2a-cosec\ a\ seca+ctg^3a+ctg^3a\ tg^2a=tg^3a+ctg^3a+tg\ a-cosec\ a\sec a+ctg\ a=tg^3a+ctg^3a+\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{1}{\sin a\cos a}+\frac{\cos a}{\sin a}=tg^3a+ctg^3a+\frac{sin^2a-1+cos^2a}{\sin a\cos a}=tg^3a+ctg^3a.$

Вказівка 3. Якщо крім синуса і косинуса, в тотожність входять ще які-небудь тригонометричні функції, то подавайте всі функції через синуси і косинуси.

Приклад 6. Довести тотожність:

$$ctg\alpha + \frac{sin\alpha}{1 + cos\alpha} = cosec\alpha.$$

За вказівкою маємо:

$$ctg\alpha + \frac{sin\alpha}{1 + cos\alpha} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} + \frac{sin\alpha}{1 + cos\alpha} = \frac{cos\alpha + cos\alpha + sin^2\alpha}{sin\alpha(1 + cos\alpha)}$$

$$= \frac{1 + cos\alpha}{sin\alpha(1 + cos\alpha)} = \frac{1}{sin\alpha} = cosec\alpha.$$

Приклад 7. Довести тотожність:

$$\frac{2 - sec^2 a}{1 - 2cos^2 a} + tg^2 a = -1.$$

Роблячи, як і раніше, отримаємо:

$$\frac{2 - sec^2 a}{1 - 2cos^2 a} + tg^2 a = \frac{2 - \frac{1}{cos^2 a}}{1 - 2cos^2 a} + \frac{sin^2 a}{cos^2 a} = \frac{2cos^2 a - 1}{cos^2 a(1 - 2cos^2 a)} + \frac{sin^2 a}{cos^2 a}$$

$$= \frac{-1 + sin^2 a}{cos^2 a} = \frac{-cos^2 a}{cos^2 a} = -1.$$

Приклад 8. Довести тотожність:

$$sec^2 a + cosec^2 a = sec^2 a \, cosec^2 a.$$

Перетворюємо ліву частину:

$$sec^2 a + cosec^2 a = \frac{1}{cos^2 a} + \frac{1}{sin^2 a} + \frac{sin^2 a + cos^2 a}{cos^2 a \, sin^2 a} = \frac{1}{sin^2 a \, cos^2 a}$$

$$= \frac{1}{cos^2 a} * \frac{1}{sin^2 a} = sec^2 a \, cosec^2 a.$$

Вказівка 4. Якщо тотожність містить тільки тангенс і котангенс, то не слід (як правило) переходити до синуса і косинуса.

Приклад 9. Довести тотожність:

$$\frac{1 + tg\alpha}{1 + ctg\alpha} = tg\alpha.$$

$$\frac{1 + tg\alpha}{1 + ctg\alpha} = \frac{1 + tg\alpha}{1 + \frac{1}{tg\alpha}} = \frac{(1 + tg\alpha)tg\alpha}{1 + tg\alpha} = tg\alpha.$$

Приклад 10. Довести тотожність:

$$(1 + tg^2 a)(1 + ctg^2 a)tg^2 a - (1 - tg^2 a)^2 = 4tg^2 a.$$

$(1+tg^2a)(1+ctg^2a)tg^2a-(1-tg^2a)^2 == (1+tg^2a)(1+ctg^2a)tg^2a-(1-tg^2a)^2 = 1+2tg^2a+tg^4a-1+2tg^2a-tg^4a = 4tg^2a.$

Вказівка 5. Використовуйте основні тригонометричні тотожності в різному вигляді.

Приклад 11. Довести тотожність:

$$1+sin\alpha = \frac{cos\alpha + ctg\alpha}{ctg\alpha}.$$

Перетворюємо праву частину:

$$\frac{cos\alpha + ctg\alpha}{ctg\alpha} = \frac{sin\alpha\, ctg\alpha + ctg\alpha}{ctg\alpha} = \frac{ctg\alpha(sin\alpha + 1)}{ctg\alpha} = 1 + sin\alpha.$$

Приклад 12. Довести тотожність:

$$\sqrt{a^2 + 2a^2 \sin a \cos a} = |a(\cos a + \sin a)|.$$

Перетворюємо підкореневий вираз:

$$\sqrt{a^2 + 2a^2 \sin a \cos a} = \sqrt{a^2(1 + 2 \sin \mathrm{a} \cos a)} =$$

$$\sqrt{a^2(sin^2a + cos^2a + 2 \sin a \cos a)} = \sqrt{a^2(\sin a + \cos a)^2} =$$

$$\sqrt{[a(\sin a + \cos a)]^2} = |a(\sin a + \cos a)|.$$

Приклад 13. Довести тотожність:

$$\frac{\sin a}{\cos a + \sin a} - \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} = \frac{tg^2a + 1}{tg^2a - 1}.$$

Перетворимо ліву частину:

$$\frac{\sin a}{\cos a + \sin a} - \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} = \frac{\sin a \cos a - sin^2a - cos^2a - \sin a \cos a}{cos^2a - sin^2a}$$

$$= \frac{sin^2a + cos^2a}{sin^2a - cos^2a}.$$

Оскільки $\frac{sin^2a}{cos^2a} = tg^2a,$ то поділивши чисельник і знаменник знайденого дробу на cos^2a, дістанемо:

$$\frac{sin^2a + cos^2a}{sin^2a - cos^2a} = \frac{cos^2a\, tg^2a + cos^2a}{cos^2a\, tg^2a - cos^2a} = \frac{tg^2a + 1}{tg^2a - 1}.$$

Приклад 14. Довести тотожність:

$$1 + tg\ a + \sin a + \cos a = (1 + tg\ a)(1 + \cos a).$$

$$1 + tg\ a + sin\ a + \cos a = 1 + tg\ a + \cos a\ tg\ a + \cos a = (1 + tg\ a) + \cos a(tg\ a + 1) = (1 + tg\ a)(1 + \cos a).$$

Вказівка 6. Тотожність буде доведена, якщо її частини перетворити до одного й того самого виразу. Дану вказівку використовують тоді, коли важко перетворити одну частину в другу.

При користуванні даною вказівкою треба особливо чітко вести записи.

Приклад 15. Довести тотожність:

$$(sin\alpha + cos\alpha)^2 = 1 + \frac{2}{tg\alpha + ctg\alpha}.$$

Перетворимо ліву частину:

$$(sin\alpha + cos\alpha)^2 = sin^2\alpha + 2sin\alpha\ cos\alpha + cos^2\alpha = 1 + 2sin\alpha\ cos\alpha.$$

Перетворимо праву частину:

$$1 + \frac{2}{tg\alpha + ctg\alpha} = 1 + \frac{2}{\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha}} = 1 + \frac{2sin\alpha\ cos\alpha}{sin^2\alpha + cos^2\alpha} = 1 + 2sin\alpha\ cos\alpha.$$

Тотожність доведена.

Приклад 16. Довести тотожність:

$$(\frac{\sec a + tg^2 a}{\cos a + ctg^2 a})^2 = \frac{sec^2 a + tg^2 a}{cos^2 a + ctg^2 a}.$$

Перетворюємо ліву частину нерівності:

$$(\frac{\sec a + tg^2 a}{\cos a + ctg^2 a})^2 = (\frac{\frac{1 + \sin a}{\cos a}}{\frac{\cos a \sin a + \cos a}{\sin a}})^2 = [\frac{(1 + \sin a)\sin a}{\cos a(\sin a + 1)\cos a}]^2 = \frac{sin^2 a}{cos^4 a}.$$

Перетворюємо праву частину тотожності:

$$\frac{sec^2 a + tg^2 a}{cos^2 a + ctg^2 a} = \frac{\frac{1 + \sin a}{cos^2 a\ sin^2 a + cos^2 a}}{sin^2 a} = \frac{(1 + sin^2 a)sin^2 a}{cos^2 a + ctg^2 a} = \frac{sin^2 a}{cos^4 a}.$$

Тотожність лівої і правої частини доведена.

Приклад 17. Довести тотожність:

$$2(cosec\ 2a + ctg\ 2a) = ctg\ \frac{a}{2} - tg\ \frac{a}{2}.$$

Перетворюємо ліву частину тотожності:

$$2(cosec\ 2a + ctg\ 2a) = 2\left(\frac{1}{\sin 2a} + \frac{\cos 2a}{\sin 2a}\right) = \frac{2(1+\cos 2a)}{\sin 2a} = \frac{4cos^2a}{2\sin a \cos a}$$
$$= 2ctg\ a.$$

Перетворюємо праву частину тотожності:

$$ctg\ \frac{a}{2} - tg\ \frac{a}{2} = \frac{1}{tg\ \frac{a}{2}} - tg\ \frac{a}{2} = \frac{1 - tg\frac{a}{2}}{tg\frac{a}{2}} = 2\frac{1 - tg^2\frac{a}{2}}{2\ tg\frac{a}{2}} = 2\ ctga.$$

Наведені вказівки потрібно давати учням поступово, в міру засвоєння їх та набуття відповідних навичок. Подані тригонометричні вказівки рівносильні і при доведенні тотожностей з усіх інших розділів тригонометрії і в багатьох інших перетвореннях тригонометричних виразів.

Але в інших випадках, коли результат перетворення невідомий, застосування цих вказівок може дати і не найбільш раціональний розв’язок.

РОЗДІЛ 3. Методичні особливості проведення позакласної роботи з математики на тему «Тригонометричні рівняння і нерівності»

3.1. Найпростіші тригонометричні рівняння та їх розв'язування

Рівняння називається тригонометричним, якщо невідома величина входить під знак тригонометричної функції. Такими є, наприклад, рівняння $\mathbf{\sin x - \cos x - tgx + 1 = 0;\ \sin x + \cos x = 1, ...}$

Розв'язати тригонометричне рівняння – значить визначити, всі значення невідомої величини, які його задовольняють. Тригонометричне рівняння може не мати розв'язків. Наприклад, рівняння $\sin x = 8$ розв'язків не має, бо абсолютна величина синуса не може бути більша за одиницю.

Якщо тригонометричне рівняння має розв'язки, то їх безліч. Усяку множину розв'язків тригонометричного рівняння, яка задається формулою, називають загальним розв'язком. Так, загальним розв'язком найпростішого рівняння $\sin x = 0$ буде $x = k\pi$, де $k \in Z$. Розв'язки за певних значень k називають частинними. Наприклад, при k = 0 дістанемо частинний розв'язок попереднього рівняння x = 0, при k = 1, – x = π.

До найпростіших рівнянь належать такі рівняння:

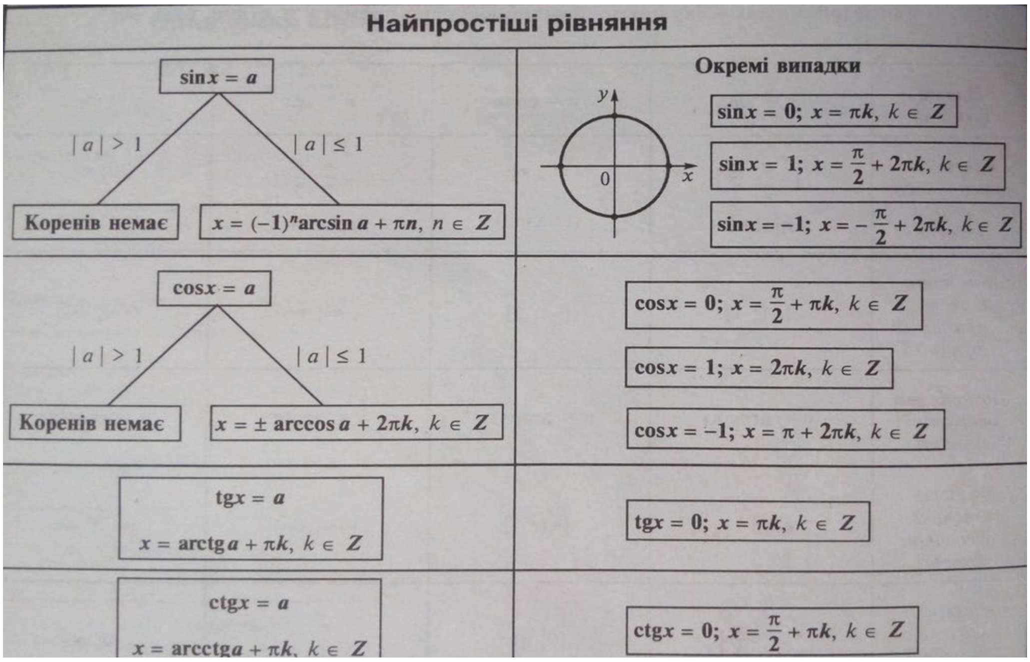


рис. 3.1

Приклад 3.1. Розв’язати рівняння $3\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$.

Розв’язання. Запишемо $\sin^2 x$ через $\cos x$, скориставшись формулою $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тоді $3(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 = 0$ або $3\cos^2 x + \cos x - 4 = 0$.

Введемо заміну: $\cos x = z$. Тоді $3z^2 + z - 4 = 0$, звідки $z_1 = 1;\ z_2 = -\frac{4}{3}$.

Підставивши значення z в $\cos x = z$ дістанемо: 1) $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$, де $k \in Z$, 2) $\cos x = -\frac{4}{3}$, то $x = \emptyset$, бо $|\cos x| \le 1$.

Приклад 3.2. Розв’язати рівняння $\sqrt{3}\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

Розв’язання. Розв’яжемо рівняння відносно тангенса. Тоді

$tg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$$2x + \frac{\pi}{6} = arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + k\pi = -arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

або $2x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, де $k \in Z$.

Приклад 3.3. Розв’язати рівняння $\arcsin\left(x^2 + x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Розв’язання. Розв’яжемо рівняння відносно аргументу arcsin:

$$(x^2 + x + \frac{\sqrt{3}}{2}) - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Звідки: $x^2 + x = 0$ і $x_1 = 0, x_2 = -1$.

Ці значення x задовольняють умову $-1 \le x^2 + x + \frac{\sqrt{3}}{2} \le 1$ і тому вони є розв’язками рівняння.

3.2. Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь

1.Розв’язування однорідних рівнянь

Рівняння виду $a_n \sin^n x + a_{n-1}\sin^{n-1} x\cos x + \dots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + {}$ $+ a_0 \cos^n x = 0$ називається однорідним рівнянням n-го степеня відносно синуса і косинуса. Це такі рівняння, у яких ліва частина є многочленом, у кожному члені якого сума показників степенів синуса і косинуса одного і того самого аргументу однакова, а права – 0. однорідні рівняння n-го степеня відносно синуса і косинуса розв'язують діленням обох частин на $\cos^n x$ або $\sin^n x$. Проте попередньо слід довести, що $\cos x \neq 0$ або $\sin x \neq 0$.

Однорідне тригонометричне рівняння 1-го степеня - це рівняння виду: $a\, sin\, x + b\cos x = 0$, де a і $b \neq 0$

Приклад 3.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos x$. Оскільки корені рівняння $\cos x = 0$ не є коренями вихідного рівняння, то $\cos x \neq 0$. Маємо:

$$\sqrt{3\frac{\sin x}{\cos \mathrm{x}}} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \to \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0 \to$$

$$\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \to \; x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Відповідь:$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Однорідне тригонометричне рівняння 2-го степеня - це рівняння виду: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, де a, b і $c \neq 0$

Приклад 3.5. Розв'яжіть рівняння $3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$.

Розв'язання. $3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$

$$3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$$

$3\,\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$, тому що $\cos^2 x \neq 0$.

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{2}{3}$$

$$x = \mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$\mathrm{tg}\, x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4}\pi k, k \in Z$; $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$.

Однорідні тригонометричні рівняння n-го степеня розв'язуються аналогічно до вищеназваних.

2. Графічний спосіб.

Приклад 3.4. Розв'яжіть рівняння $\mathbf{\sin x - \cos x = 0}$.

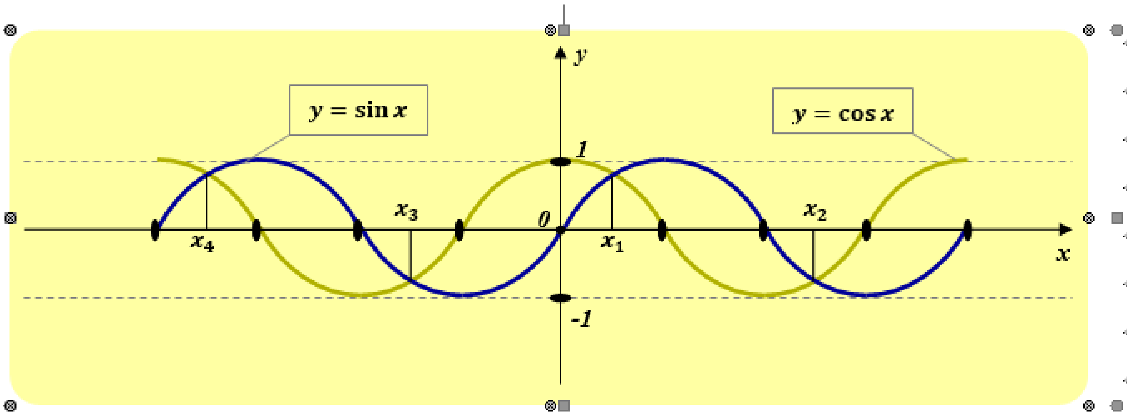


рис. 3.2

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $\sin x = \cos x$ і введемо функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$. Побудувавши в одній системі координат графіки цих функцій, знайдемо розв'язки рівняння як абсциси точок перетину графіків.

Відповідь: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$

3. Знаходження розв'язків рівнянь за допомогою одиничного кола

Приклад 3.5. Розв'язати рівняння $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x} = 0$.

$$\begin{cases} 1+\cos 2x = 0; \\ 1-\sin x \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -1; \\ \sin x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pi + 2\pi n; \\ x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

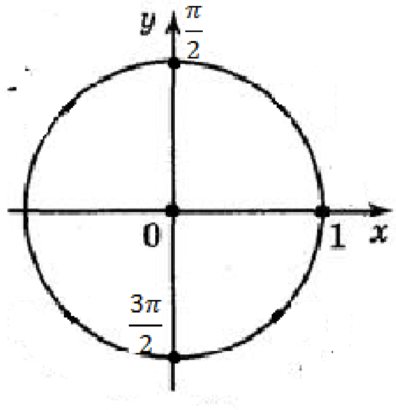


рис. 3.3

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$$n = 0, x = \frac{\pi}{2};$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi;$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi.$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$k = 0, x \neq \frac{\pi}{2};$$

$$k = 1, x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi.$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\pi n = 2\pi k;$$

$$n = 2k + 1.$$

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

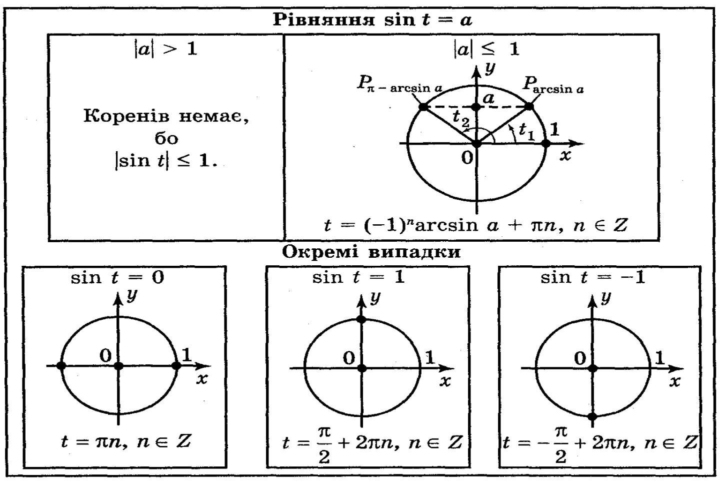


Рис. 3.4

4. Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції

$$\sin x + \cos x = 0$$

Перенесемо $\cos x$ у праву частину і, враховуючи, що $\cos x = \pm\sqrt{1+\sin^2 x}$, дістанемо рівняння:

Приклад. 3.6. $\sin x = \pm\sqrt{1 - sin^2 x}$ (8)

Підставивши до квадрата обидві частини рівняння, дістанемо:

$$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ або } 2\sin^2 x = 1$$

Звідси, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ тобто маємо:

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \text{, де } k \in Z \text{ (9)}$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi \text{, де } k \in Z \text{ (10)}$$

Ці дві формули задають чотири множини розв'язків:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \text{ де } n \in Z,$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \text{ де } n \in Z,$$

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \text{ де } n \in Z,$$

які дістанемо, якщо підставимо в формули (9) та (10) $k = 2n$ і. $k = 2n + 1$. Серед цих розв'язків можуть бути сторонні, оскільки до квадрата було піднесено обидві частини рівняння (8). Враховуючи періодичність синуса, досить перевірити лише чотири зображені на колі розв'язки.

Можна перевірити, що розв'язки даного рівняння задаються формулами:

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \text{ де } n \in Z, \text{ (11)}$$

$$x = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi, \text{ де } n \in Z, \text{ (12)}$$

які неважко об'єднати в одну. Справді, подавши вираз (12) у вигляді $x=\pi+\frac{3\pi}{4}+2n\pi=\frac{3\pi}{4}+(2n+1)\pi$ і, зауваживши те, що числа виду $2n$ і $2n+1$ дають всі цілі числа, дістанемо:

$$x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ \text{де}\ k\in Z.$$

5. Спосіб розкладання на множники

Перепишемо рівняння $\sin x+\cos x=0$ у вигляд:

Приклад.3.7. $\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=0$,

Застосуємо формули перетворення суми синусів. Дістанемо:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\bullet\cos(x-\frac{\pi}{4})=0.$$

Оскільки,

$$2\sin\frac{\pi}{4}\neq 0,\ \text{то}$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=0,$$

звідки,

$$x-\frac{\pi}{4}=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \text{де}\ k\in Z$$

$$x=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ \text{де}\ k\in Z.$$

Приклад. 3.8. Розв'яжіть рівняння $\mathbf{2\sin x\cos 2x-1+2\cos 2x-\sin x=0.}$

Розв'язання. Згрупуємо доданки у лівій частині рівняння:

$$(2\sin x\cos 2x-\sin x)+(2\cos 2x-1)=0.$$

$$2\sin x\cos 2x-1+2\cos 2x-\sin x=0$$

$$(2\cos 2x-1)(\sin x+1)=0$$

Враховуючи умову рівності нулю, маємо:

$$2\cos 2x-1=0\ \text{або}\ \sin x+1=0.$$

Кожне з цих рівнянь легко звести до найпростішого:

$$2\cos 2x = 1$$
$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$
$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$\sin x = -1$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

Відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

6. Спосіб введення допоміжного аргументу

Вивчаючи гармонічні коливання, перетворюємо у добуток вираз $a\sin x + b\cos x$:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2} \bullet \sin(x+\varphi),$$ де $\varphi = arctg\frac{b}{a}$ допоміжний аргумент.

Застосовуючи це перетворення до лівої частини рівняння $\sin x + \cos x = 0$, дістанемо:

$$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 0,$$ бо $\varphi = arctg\, l = \frac{\pi}{4}$.

Звідси,

$$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 0,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$ де $n \in Z$.

Останнє рівняння можна було дістати інакше, записавши дане рівняння у вигляді:

$$\sin x + \cos x = 0,$$
$$\sin x + tg\frac{\pi}{4}\cos x = 0,$$
$$\sin x\cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}\cos x = 0,$$
$$.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$ де $n \in Z$.

7. Спосіб піднесення до квадрата

Рівняння $\sin x + \cos x = 0$ можна розв'язати способом піднесення до квадрата обох його частин. Справді,

$$(\sin x + \cos x)^2 = 0,$$

$$\sin^2 x + 2\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x = 0,$$

$$\sin 2x + 1 = 0,$$

$$\sin 2x = 1,$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \text{, де } n \in Z.$$

У даному випадку піднесення до квадрата не спричинило появу сторонніх розв'язків.

8. Тригонометричні рівняння з параметрами

Рівняння з параметрами – це рівняння, до запису якого, крім змінної та числових коефіцієнтів входять також буквені коефіцієнти – параметри. Розв'язати тригонометричне рівняння з параметрами – значить для будь-якого припустимого значення параметра знайти множину всіх розв'язків даного рівняння. Таким чином розв'язання задач з параметром відрізняється від розв'язання аналогічної задачі без параметра, необхідністю є дослідити всі можливі значення невідомого при всіх припустимих значеннях параметра.

Приклад 3.9. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + 2(a-1) \cdot \sin x - 4a = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sin x = t$, $|t| \le 1$;

$$t^2 + 2(a-1)t - 4a = 0$$

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 + 4a = a^2 - 2a + 1 + 4a = (a+1)^2 \ge 0$$

$$t_1 = -a + 1 + a + 1 = 2 - \text{не задовольняє умову } |t| \le 1$$

$$t_2 = -a + 1 - a - 1 = -2a$$

$$|-2a| \le 1; 2|a| \le 1;\ |a| \le \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -2a; x = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin(2a) + \pi n, n \in Z$$

Відповідь: при $a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ $x = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin(2a) + \pi n, n \in Z$

Окремі види тригонометричних рівнянь доцільно пов'язати з використанням формул тригонометричних функцій подвійного аргументу, формул перетворень в суму добутків $\sin\alpha \cos\beta$, $\sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha\ cos\beta$.

Під час розв'язування тригонометричних рівнянь особливу увагу слід звертати на рівносильність рівнянь. Важливо, щоб учні свідомо виконували тотожні перетворення, чітко уявляли, які з них можуть привести до порушення рівносильності рівнянь. Множення і ділення обох частин тригонометричного рівняння на вираз із змінною, піднесення обох частин рівняння до квадрата можуть привести до порушення рівносильності. Можливі випадки появи сторонніх розв'язків, а також втрати розв'язків, пов'язані з властивостями тригонометричних функцій. В зв'язку з цим перевірка є обов'язковим етапом розв'язування тригонометричного рівняння, якщо в процесі його розв'язування виконувались перетворення, які можуть привести до порушення рівносильності.

3.3 Втрачені і сторонні корені тригонометричних рівнянь. Перевірка знайдених розв'язків тригонометричних рівнянь

Під час розв'язування рівнянь взагалі й зокрема тригонометричних доводиться виконувати різні математичні операції, які призводять до звуження або розширення областей існування рівнянь, внаслідок чого може змінитися й множина розв'язків рівнянь. Отже, виконання математичних перетворень може призвести до рівняння, яке не є еквівалентним даному.

Якщо область визначення рівняння звужується, то можлива втрата розв'язків, якщо розширюється, то можлива поява сторонніх розв'язків.

Деякі операції, які можуть призводити до втрати розв'язків або до появи сторонніх коренів. Корені можуть бути втрачені, коли:

а) рівняння ділять на вираз, що містить змінну, причому втрачається той корінь, при якому цей вираз перетворюється в нуль;

б) вирази логарифмують, оскільки ця операція звужує область визначення.

Поява сторонніх коренів можлива тоді, коли:

а) обидві частини рівняння множать на вираз, що містить змінну, причому стороннім коренем є той корінь, при якому цей вираз перетворюється в нуль;

б) обидві частини рівняння підносять до парного степеня;

в) взаємно протилежні доданки скорочують;

г) вирази потенціюють, оскільки ця операція розширює область визначення.

Тому, розв'язуючи рівняння, треба стежити за зміною області визначення рівнянь і передбачити втрату або появу сторонніх коренів. Якщо в процесі спрощення виразів не використовувались згадані перетворення, то сторонніми коренями можуть бути лише ті, за яких ліва або права частини рівняння не визначені. Відсіюють сторонні корені перевіркою знайдених, підставляючи їх у вихідне або в еквівалентне йому рівняння.

Розв'язки тригонометричного рівняння періоду l достатньо перевірити на проміжку $\left[-\frac{l}{2};\frac{l}{2}\right]$ який дорівнює за довжиною періоду рівняння, причому, якщо рівняння містить тільки парні або тільки непарні функції, то перевіряють лише невід'ємні корені на півперіоді $[0;\frac{l}{2}]$, бо корінь $x=a$ передбачає існування кореня $x=-a$.

Якщо період рівняння не перевищує 2π то перевірку доцільно виконувати на одиничному колі, надаючи к послідовно значень $0;\pm 1;\pm 2;\pm 3$ і т. д., не виходячи за межі періоду рівняння і позначаючи точками корені. Якщо період рівняння більший від 2π, то корені перевіряють на числовій прямій.

Приклад 3.10. Розв'язати рівняння $(\sin x-1)\cos x=\sin x-1.$

Розв'язання. Часто, щоб розв'язати таке рівняння, обидві частини його ділять на $\sin x-1$ і втрачають множину коренів: $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,$ де $n\in Z,$

оскільки при цих значеннях ліва і права частини рівняння дорівнюють нулю. Тому тут треба перенести всі члени рівняння в ліву частину і розкласти її на множники: $(\sin x - 1)(\cos\ x - 1) = 0$, звідси:

1) $\mathbf{\sin x - 1}$, $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, де $\boldsymbol{n \in Z}$;

2) $\mathbf{\cos\ x - 1}$, $\boldsymbol{x = 2n\pi,\ n \in Z}$.

Корені перевіряти не слід, бо еквівалентність рівняння не порушувалась [2;7].

Приклад 3.11. Розв'язати рівняння $\frac{tg\,x}{tg\,4x} = 1$.

Розв'язання. Рівняння визначено при всіх x, крім $x = \frac{n\pi}{4}$ і $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$

Послідовно маємо: $\boldsymbol{tg\,4x - tg\,x = 0,\ \frac{\sin 3x}{cos 4x\, cos\, x} = 0.}$

Звідки,

$$\boldsymbol{\sin 3x = 0, 3x = n\pi,\ x = \frac{n\pi}{3}}.$$

У процесі розв'язування рівняння область його визначення розширилась і тому перевірка знайдених коренів обов'язкова. Ліва частина рівняння — парна періодична функція з періодом $\boldsymbol{\pi}$. Тому потрібно перевіряти корені в проміжку $[0; \frac{\pi}{2}]$. Якщо $\boldsymbol{n = 0}$, то $\boldsymbol{x = 0}$. Корінь не задовольняє рівняння - це сторонній корінь. Якщо $\boldsymbol{n = 1}$, то $x = \frac{\pi}{2}$. Цей корінь задовольняє рівняння. У проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ який дорівнює за довжиною періоду, рівняння має два корені - $\pm\frac{\pi}{3}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$ – загальний розв'язок рівняння.

3.4 Тригонометричні рівняння з додатковими умовами

Часто на розв'язання тригонометричних рівнянь накладаються різні умови. Наприклад, розв'язки повинні бути обов'язково додатні, задовольняти певну нерівність тощо. Щоб розв'язати рівняння з додатковими умовами, треба розв'язати його, не враховуючи цих умов, і з множини всіх розв'язків вибрати ті, які задовольняють додаткові умови.

Приклад 3.12. Знайти всі корені рівняння $\sin x\ tg 2x+\sqrt{3}(\sin x-\sqrt{3}\, tg\, 2x)=3\sqrt{3}$, які задовольняють нерівність $2+\log_{\frac{1}{2}} x\leq 0$.

Розв'язання. Перетворимо задану умову: $log_{\frac{1}{2}}x \leq -2$, звідки $x\geq 4$. Знайдемо множину розв'язків рівняння. Послідовно дістанемо:

$$\sin x\,(tg\,2x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}\,tg\,2x)-3\sqrt{3}=0;$$

$$\sin x\,(tg\,2x+\sqrt{3})-3(tg\,2x+\sqrt{3})=0;$$

$$(tg\,2x+\sqrt{3})\bullet(\sin x-3)=0;$$

$$\sin x-3\neq 0; tg\,2x+\sqrt{3}=0;$$

$$tg\ 2x=-\sqrt{3};$$

$$2x=-\frac{\pi}{3}+n\pi;$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{6}(3n-1).$$

Оскільки $x\geq 4$, то $\frac{\pi}{6}(3n-1)\geq 4$. Розв'язавши цю нерівність відносно n,маємо $n\geq\frac{8}{\pi}+\frac{1}{3}$. Отже, додаткова умова виконується при $n = 3;4;...$

Розв'язування тригонометричних рівнянь з модулем

Модулем, або абсолютною величиною, дійсного числа (позначається $|a|$), називається невід'ємне число, яке визначається за правилом:

$$|a|=\begin{cases} a,\ якщо\ \ a\geq 0,\\ -a,\ якщо\ \ a<0.\end{cases}$$

Процес розв'язування прикладів, які містять абсолютну величину, зводиться до зняття знака модуля, тобто до заміни прикладів з абсолютною величиною прикладами без абсолютної величини [2].

Приклад 3.11. Розв'язати рівняння $|ctg\ x|=\frac{5\sin x-4\cos x}{\sin x}$.

Розв'язання. Якщо $ctg\, x \geq 0$,то

$$ctg\, x = \frac{5\sin x - 4\cos x}{\sin x} = 5 - 4ctg\, x(\sin x \neq 0),$$

або

$$5ctg\, x = 5, ctg\, x = 1 \text{ і } x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi.$$

Якщо $ctg\, x < 0,$то $- ctg\, x = 5 - 4ctg\, x, 3ctg\, x = 5, ctg\, x = \frac{5}{3}$ що суперечить умові, при якій розв'язується приклад, а саме $ctg\, x < 0$. Отже, вказана умова не виконується, рівняння розв'язків не має. Отже, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Розв'язування тригонометричних рівнянь з параметром

Параметром називається змінна величина, яка в умовах даної задачі стає сталою. Розв'язати рівняння з параметром - це означає встановити відповідність між значенням параметра і змінною, які задовольняють рівняння при заданих умовах.

Приклад 3.12 Розв'язати рівняння $a\, tg\, x + ctg\, x = 2.$

Розв'язання. Помноживши обидві частини рівняння на $tg\, x$, дістанемо $a\, tg^2 x - 2tg\, x + 1 = 0.$

Отже, $tg\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$ де $a \neq 0$ і $a \leq 1,$ звідки $x = arctg \frac{1 \pm \sqrt{1-a}}{a} + n\pi$ – загальний розв'язок рівняння. Якщо $a = 0$, то $ctg\, x = 2$ і $x = arctg 2 + n\pi$. При $a > 1$ рівняння розв'язків не має.

3.5 Розв'язування тригонометричних нерівностей

Нерівності в математиці відіграють важливу роль. Їх використовують у математичному аналізі, теорії функцій, програмуванні та в усіх інших розділах математики. Не випадково й у школі їм приділяють багато уваги. Із знаками “<” і “>” учні ознайомлюються ще в початкових класах. У IV-VI класах знаки використовують для порівняння чисел, розглядають подвійні нерівності, нерівності із знаками “≤” і “≥”.

Окремий розділ «Нерівності» вивчають у кінці 7 класу. Тут учні ознайомлюються з властивостями числових нерівностей, вчаться розв'язувати нерівності з однією змінною та їх системи, застосовувати нерівності до вивчення властивостей функцій та ін.

Квадратичні, дробово-раціональні та інші нерівності розв'язують в старших класах.

В ході вивчення нерівностей повинні бути розкриті такі логічні поняття як: невідоме, рівносильність, рівність, логічне слідування та інші. Для того щоб розв'язати нерівність треба знайти всі її розв'язки, або довести, що розв'язків немає.

***Нерівності можна класифікувати за видом функції. Вони бувають*:**

- алгебраїчними: нерівності $f(x) <> g(x)$ називаються алгебраїчними, якщо $f(x)$ і $g(x)$ - алгебраїчні функції;

- трансцендентними - якщо хоч одна із функцій $f(x)$ і $g(x)$ трансцендентна;

- раціональними, якщо алгебраїчні функції $f(x)$ і $g(x)$ цілі раціональні;

- дробово-раціональними, якщо хоч одна із раціональних функцій $f(x)$ і $g(x)$ дробово-раціональна;

- ірраціональним, якщо хоч одна із алгебраїчних функцій $f(x)$ і $g(x)$ ірраціональна.

Прийоми розв'язання і дослідження нерівностей і їх систем:

1. логічні методи обґрунтування розв'язання;
2. обчислювальні прийоми;
3. наочно-графічні прийоми.

Формування умінь і навичок розв'язування рівнянь і нерівностей.

Для того, щоб формувати в учнів вміння розв'язувати нерівності потрібно спочатку визначити мету, потім ознайомитися з відповідними поняттями. Наступний крок – це пояснення учням прийомів і методів розв'язання нерівностей. Далі вони повинні вміти застосовувати ці знання на практиці.

Існує два шляхи розгортання змісту лінії нерівностей:

- спочатку вивчається матеріал, який відноситься до рівнянь, потім до нерівностей. В старших класах логарифмічні, показникові, тригонометричні рівняння і нерівності вивчаються в більш тісному зв'язку.
- основні класи нерівностей вивчаються відразу за вивченням відповідних рівнянь. Деякі класи рівнянь і нерівностей зближені, а інші не пов'язані в часі.

Методи розв'язання нерівностей та їх систем:

- метод інтервалів;

- графічний метод;

- функціональний метод.

Розв'язання тригонометричних нерівностей зводиться, як правило, до розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей, тобто нерівностей виду $\sin x > a, \cos x < a$ і т.д., а також до розв'язання сукупностей, систем або сукупностей систем найпростіших тригонометричних нерівностей. Для розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей у багатьох випадках зручно користуватися числовим колом, на якому множина значень змінної, яка задовольняє задану найпростішу нерівність, зображується у вигляді однієї або декількох дуг, а також аналітичним способом.

Найпростіші тригонометричні нерівності.

Функція *sin x* має найменший додатний період 2π. Тому нерівності виду:

$$\sin x > \alpha, \quad \sin x > a, \ \textbf{(1)}$$

$$\sin x < a, \quad \sin x < a \ \textbf{(2)}$$

досить розв'язати спочатку на якому-небудь відрізку довжини 2π. Множину всіх розв'язків одержимо, додавши до кожного зі знайдених на цьому відрізку розв'язків числа виду 2 πn, $n \in Z$. Нерівність **(1)** зручно розв’язати спочатку на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Приклад 3.16. Розв'язати нерівність $\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)<\frac{2}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Позначимо $t=\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}$, тоді нерівність буде мати вигляд $\sin t<\frac{1}{\sqrt{2}}$. На відрізку $\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{5\pi}{2}$ множиною розв'язків цієї нерівності є інтервал $\frac{3\pi}{4}<t<\frac{9\pi}{4}$. Множину всіх розв'язків запишемо у вигляді

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n<t<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\ \text{де } n\in Z \quad \mathbf{(7)}$$

Підставивши в **(7)** $t=\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}$, одержимо:

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n<\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,$$

звідки $\frac{4\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi n<x<\frac{13\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi n, n\in Z$. Всі ті і тільки ті значення x, кожне з яких при якомусь $n\in Z$ задовольняє цим нерівностям, і є розв'язками даної нерівності.

Приклад 3.17. Розв'язати нерівність $\cos 2x-\sin 2x\ge 0$.

Розв'язання. Перетворимо цю нерівність за допомогою введення допоміжного кута, у результаті одержимо нерівність $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0,$ яка має таке ж рішення, що й перше. Із властивостей косинуса випливає, що розв'язками цієї нерівності є ті й тільки ті значення x, кожне з яких при якомусь $n\in Z$ задовольняє нерівності:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,\text{тобто } -\frac{3\pi}{8}+\pi n\le x\le\frac{\pi}{8}+\pi n.$$

Приклад 3.18. Розв'язати нерівність $\sin x+\cos 2x>1$.

Розв'язання. Скориставшись формулою $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ й позначивши $t = \sin x$, запишемо дану нерівність у вигляді:

$t(1-2t) > 0$. Звідси $0 < t < \frac{1}{2}$. Таким чином, розв'язками даної нерівності є ті й тільки ті значення x, для яких $0 < \sin x < \frac{1}{2}$. (8)

На відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ліва нерівність має розв'язок (рис. 2.23) $0 < x < \pi$. Серед цих значень x розв'язками правої нерівності системи (8) є $0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} < x < \pi$. Це і є множина всіх розв'язків системи (8), а значить, і даної нерівності на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Тепер, використовуючи періодичність функції $\sin x$, легко знайти на числовій прямій всі розв'язки.

Відповідь: $2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi n + 2\pi n, n \in Z$

Приклад 3.19. Розв’язати нерівність $|\sin x| > |\cos x|$.

Розв’язання. Оскільки $|\sin x| \geq 0, |\cos x| \geq 0$, то можемо піднести обидві частини початкової нерівності до квадрата, отримавши при цьому нерівність, рівносильну початковій:

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in Z.$

Приклад 3.20. Розв’язати нерівність $\sin x \cos x < \frac{1}{4}$.

Розв’язання. Помноживши обидві частини початкової нерівності на 2 використовуючи формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, дістаємо:

$$sin\, x \cdot cos\, x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 sin\, x \cdot cos\, x < 2 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow sin\, 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} + \pi n < x < \frac{13\pi}{12} + \pi n, n \in Z$$

Відповідь: $\frac{5\pi}{12} + n\pi < x < \frac{13\pi}{12} + n\pi, n \in Z.$

Розв’язок більш складних нерівностей.

Приклад 3.13. Розв'язати нерівність $\sin x \geq \cos x$.

Розв'язання. Перенесемо $\cos x$ в ліву частину нерівності й використаємо формулу введення допоміжного аргументу:

$$sin\,x - cos\,x = \sqrt{2}\left(\frac{sin\,x - cos\,x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(sin\,x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot cos\,x\right) = \sqrt{2}\,sin(x - \frac{\pi}{4})$$

Таким чином,

$$sin\,x \geq cos\,x \Leftrightarrow \sqrt{2}\,sin(x - \frac{\pi}{4}) \geq 0 \Leftrightarrow sin(x - \frac{\pi}{4}) \geq 0.$$

Позначимо $t = x - \frac{\pi}{4}$. Тоді нерівність буде мати вигляд $\sin t \geq 0$. Множина розв'язків цієї нерівності $2n\pi \leq t \leq \pi + 2n\pi, n \in Z$. Оскільки $t = x - \frac{\pi}{4}$, то дістанемо: $2n\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2n\pi \leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2n\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 3.14. Розв'язати нерівність $2sin^2\,x + 3sin\,x - 2 > 0$.

Розв'язання. Позначивши $\sin x$ через t приходимо до нерівності $2t^2 + 3t - 2 > 0$. Ця нерівність виконується при $t < -2$ і $t > \frac{1}{2}$. Тоді всі розв'язки початкової нерівності повинні задовольняти або нерівності $\sin x < -2$ або нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$. Нерівність $\sin x < -2$ не виконується ні при яких значеннях x нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ виконується при $\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in Z$.

Відповідь: $\bigcup_{n\in Z}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

3.6 План роботи математичного гуртка під час вивчення теми «Тригонометрична функція. Тригонометричні рівняння і нерівності»

План роботи математичного гуртка для учнів 10 класу з поглибленим вивченням математики , на тему: «Тригонометрична функція. Тригонометричні рівняння і нерівності»

№	Дата	Тема заняття	Примітки
1		Властивості тригонометричних функцій	
2		Побудова графіків тригонометричних функцій	
3		Обернені тригонометричні функції	
4		Розв'язування систем тригонометричних рівнянь	
5		Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей	
6		Розв’язування однорідних тригонометричних рівнянь	
7		Розв’язування тригонометричних рівнянь способом зведення до однієї тригонометричної функції	
8		Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу	

3.7. Зміст та форми роботи математичного гуртка

Зміст та форми роботи математичного гуртка наведені у методичному посібнику «МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРОВЕДЕННЯ ГУРТКОВОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ У СТАРШИХ КЛАСАХ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «Тригонометрична функція. Тригонометричні рівняння і нерівності»» [2]

ВИСНОВКИ

Тема "Тригонометричні рівняння й нерівності" вивчається в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу. Саме в цей час тригонометричні рівняння й нерівності найбільш широко використовуються при вивченні інших навчальних дисциплін. Для її засвоєння в учнів повинна бути вже сформована і напрацьована система методів розв'язування різного роду рівнянь і нерівностей. Крім того, необхідне врахування вікових та індивідуальних навчальних особливостей кожного з учнів, що має досить значний вплив при вивченні не тільки даної теми, а й будь-якої іншої.

Мету роботи досягнуто – досліджено методику викладання тригонометричних рівнянь і нерівностей при поглибленому вивченні предмету. Поставлені завдання виконано повністю:

- розглянуто теоретичні відомості з розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей;

- розглянуті методичні особливості вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей в шкільному та поглибленому курсі математики;

- наведено наочні рисунки та графіки, що мають допомогти у формуванні правильного розуміння теоретичного змісту теми.

Гіпотеза знайшла підтвердження. Розглянуто основний зміст і форми організації позакласної роботи з математики у старшій школі. Розроблено зміст, ефективні шляхи, методи, засоби та організаційні форми позакласної діяльності учнів при вивченні теми «Тригонометрична функція. Тригонометричні рівняння і нерівності». Також розроблено план роботи математичного гуртка та методичний посібник для гурткової роботи під час вивчення теми «Тригонометрична функція. Тригонометричні рівняння і нерівності».

Дана дипломна робота може бути використана вчителями класів природничо-математичного профілю при підготовці до уроків з теми

«Тригонометричні рівняння та нерівності», оскільки розглянуто методику і приклади, що розраховані на профільні класи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. II семестр. Академічний рівень. / Бабенко С.П. - Харків: Основа, 2011. - 253 с.

2.Белешко Д.Т. Методичні вказівки до проведення гурткової роботи з математики у старших класах під час вивчення теми «Тригонометрича функція. Тригонометричні рівняння та нерівності»/ Д.Т.Белешко , Х.І.Куруц – Рівне, 2017. - 44 с.

3.Гальперіна А.Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань / А.Р. Гальперіна, і. О. Золотарьова. — Х.: Вид-во «Ранок», 2010. — 176 с.

4. Істер О.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики - 11 клас / О.С. Істер, О.І. Глобін, І.Є. Панкратова - К.: Центр навч.-метод. літератури,2011.-112с.

5. Кожеуров П.Я. Курс тригонометрии для техникумов / П.Я. Кожеуров. - М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. - 296 с.

6. Кожеуров П.Я. Тригонометрія. 6-е видання / П.Я. Кожуров. - М. : Гос. изд-во «Физ.-мат. литературы», 1961. - 329 с.

8. Кожеуров П.Я. Тригонометрія. 7-е видання / П.Я. Кожуров. - М. : Гос. изд-во «Физ.-мат. литературы», 1963. - 342 с.

9. Математичні олімпіадні змагання школярів України:2007-2008 та 2008-2009: За ред. Б.В.Рубльова - Львів:Каменяр,2010,-549с.

10. Мерзляк А.Г. Алгебра. 9 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір - Х.:Гімназія, 2009. - 379с.

11. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики /А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський В.Б. Полонський, М.С. Якір - Х.:Гімназія, 2010. - 415 с:

12. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв'язувати задачі // А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір - К.Генеза,2008.-312с.:

13. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл.

загаль-ноосвіт. навч. закладів. / Є.П. Нелін , О.Є. Долгова— 2-ге вид., виправл. і доп.— Х.: Світ дитинства, 2006.— 416

14. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. - навч. Закладів./ Є.П. Нелін — 2-ге вид., виправ. і доп. — X.: Світ дитинства, 2006.— 448 с. (укр

15. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загально-освіт. навчальн. закладів : академ. рівень / С. І. Нелін. X. : Гімназія, 2010. — 416 с.

16. Резуненко В.О. Ярмак В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів. / Резуненко В.О. Ярмак В.О. - Х.: Вид.група "Основа" 2011.- 94 с.

17. Решебник по учебнику: СУПЕР ГДЗ. Готові домашні завдання. 10 клас. Розв'язання вправ та завдань до усіх шкільних підручників. Кн. 1.(Решебник (ГДЗ) по учебнику Математика (Алгебра), 10 класс (Г.П. Бевз, В.Г. Бевз)) — X.: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2011.— 1184 с.

18. Сипченко Т.М. Календарно-тематичний план з математики. 5—11 класи /Т. М. Сипченко.— 2-ге вид., перероб. і доп.— Х.: Видавництво «Ранок», 2011.— 128 с.

19. Титаренко О.М. 5770 задач з математики з відповідями. / О. М. Титаренко - 2–ге вид.випр.– Харків: ТОРГСІНГ ПЛЮС, 2007. – 336 с.

20. Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики:Навчальний посібник. / О.М. Титаренко – Х.: Торсінг, 2003. – 368 с.

21. Фурман М.С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. / М.С. Фурман — X. : Вид. група «Основа», 2010. — 159 с.

22. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. — К.: Зодіак-ЕКО, 2002. - 272 с.