Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

Бакалавр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: «Методика вивчення елементів статистики в класах математичного профілю з допомогою НІТ»

Виконала: студентка IV курсу, групи МЕФІ-41
напрям підготовки (спеціальності)
0402 «Фізико-математичні науки»,

6.040201 «Математика *»

Познаховська Діана Олегівна

Керівник канд.пед.наук, доц. Сяська Н.А.

Рецензент канд. фіз.- мат. наук, доц. Сяський В.О.

Рівне - 2016 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Завдання математики — не навчання лічби,
а навчання прийомів
людського мислення під час лічби.

Л. Толстой

Навчання математики в середніх закладах освіти України є важливим компонентом загальноосвітньої і професійної підготовки молоді, неперервної освіти, що забезпечує широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості, вмінь встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між фактами, подіями та явищами. У концепції математичної освіти 11-річної школи в Україні актуальним визначено відбір змісту навчання з урахуванням досягнень світового і вітчизняного досвіду, специфіки навчання математики в навчальних закладах, ідей та поглядів видатних математиків і методистів, сучасної психології та педагогіки. Традиційний зміст навчання математики, що складався десятиріччями, забезпечує досить високий рівень математичної підготовки учнів, проте зміни в галузі техніки, виробництва, освіти, комунікацій ставлять нові вимоги до математичної підготовки і спонукають до переосмислення традиційного змісту, з'ясування тенденцій подальшого його розвитку.

Сучасна шкільна реформа здійснюється з урахуванням Державного стандарту базової та повної середньої освіти, у якому визначені цілі розвитку освітньої галузі, що відповідають об'єктивним вимогам сучасного життя. До традиційних змістових ліній додаються нові “Елементи теорії множин. Комбінаторика”, “Початки теорії ймовірностей та елементи статистики”, визначено необхідний мінімум знань та вмінь для продовження навчання з цих тем та вимоги до їх засвоєння. Це є реальним кроком до створення умов для розвитку одного зі спеціальних і соціально важливих типів мислення – статистичного, необхідного сучасній людині як у загальнокультурному плані, так і для професійного становлення та нормальної соціалізації особистості в сучасному суспільстві.

Соціально-економічні зміни в нашому суспільстві обумовлюють потребу сформованості гнучкості, варіативності, критичності мислення, здатності висувати гіпотези перебігу подій та реальності їх підтвердження. Саме тому актуалізується необхідність включення статистичних знань і вмінь в інтелектуальний багаж кожної сучасної людини.

Проблеми статистики привертали увагу видатних математиків на різних етапах розвитку цієї науки: Н.Тарталья, Г. Лейбніца, О. Блоха, Н. Віленкіна, Б. Гнєденка, К. Рибнікова, І. Скорохода, О. Халамайзера, О. Хінчіна, М. Ядренка, І. Яглома та інших.

Питання статистики активно досліджувалися відомими зарубіжними математиками: М. Айгнером, К. Бержем, О. Оре, Дж. Райзером, Дж. Ріорданом, Дж.-К. Ротом, Р. Стенлі.

В останні десятиріччя інтерес до статистики значно посилився, оскільки виявилось, що багато проблем теорії інформації, складання та декодування шифрів, проблем, пов’язаних з розробкою оптимальних планів, тобто проблем багатьох галузей людської діяльності мають статистичний характер. У зв’язку з цим зараз, у період швидкого процесу комп’ютеризації суспільства, розвитку інформаційних мереж різного рівня та призначення, переходу до ринкових відносин в економіці, на виробництві, суспільство зацікавлене в тому, щоб рівень математичної освіти молоді відповідав вимогам часу. Людина постійно потрапляє до ситуацій планування своєї діяльності, вибору та прийняття оптимального рішення, його зміни в залежності від зовнішніх обставин. Більш успішно це робитиме людина з розвиненим комбінаторним мисленням. Тому елементи статистики включено в зміст освіти як важливу складову математичної культури кожного учня.

У 1970-80 рр. статистиці було присвячено чимало досліджень. Розглядалися різні аспекти цієї проблеми: спільне вивчення статистики та теорії ймовірностей, визначення в курсі математики наскрізної імовірнісної-статистичної лінії, вивчення елементів статистики за допомогою графів, популяризація ідей статистики, вивчення статистики в початкових класах тощо. У більшості досліджень статистиці відводиться допоміжна роль: вивчення її підпорядковано меті вивчення початків теорії ймовірностей.

З проблемою оновлення змісту освіти, що належить до розряду вічних, вже не можуть не рахуватись і безпосередні учасники навчального процесу – учителі і організатори шкільної освіти, суспільство в цілому. Гострота цієї проблеми викликана, як мінімум, такими обставинами:

- гуманізацією та демократизацією освіти, переводом її на культурно-творчу основу;

- рівневою та профільною диференціацією навчання математики;

- змінами, які відбулися в математиці в середині XX ст. і пов'язані з появою ЕОМ;

- поширенням різних типів загальноосвітніх закладів.

Тому відповідно проблема оновлення змісту математичної освіти на сучасному етапі розвитку суспільства набуває якісно нового аспекту.

Аксіомою, яка перевірена всією історією людства, є твердження: людина – головний цілісний орієнтир і міра всього в житті суспільства. Ця аксіома має безпосереднє відношення до життя будь-якого закладу освіти. Особистість учня – головний ціннісний орієнтир у діяльності школи. Сьогодні, як ніколи, вчитель повинен навчитися бачити в учневі особистість, розуміти всю складність і багатогранність її структури, враховувати вікові особливості, виявляти в учня спадкові, набуті нахили, здібності й можливості, створювати максимально сприятливі умови для їх розвитку. Тільки за таких умов учитель може по-справжньому ефективно керувати процесом навчання, розвитку й виховання учня як особистості, контролювати цей процес, надавати йому відповідних стимулів й вносити корективи.

Як зазначається у Концепції 11-річної школи України, гуманістичні цінності освіти зумовлюють зміну авторитарно-дисциплінарної моделі процесу навчання на особистісно орієнтовану.

Спрямованість вектора шкільної освіти у площину цінностей особистісного розвитку, варіативності й відкритості школи зумовлює принципову необхідність переосмислення всіх чинників, від яких залежить якість навчально-виховного процесу: змісту, методів, форм навчання і виховання, управлінських рішень, взаємовідповідальності учасників навчально-виховного процесу, системи контролю й оцінювання.

Сьогодні актуальність включення статистики до змісту шкільного курсу математики визнана математиками, методистами, цей розділ увійшов до навчальних програм. Так, у програму з математики для 5 класу згідно з концепцією математичної освіти 11-річної школи включено розв'язування статистичних задач. Програмою для класів з поглибленим вивченням математики передбачено вивчення статистики у 8 та 9 класах, але чинні підручники не містять відповідних розділів. Спостерігаються позитивні зміни для основної школи. Однак вітчизняного досвіду вивчення статистики в основній школі, по суті, не існує. Не розроблено в належній мірі методичне забезпечення в умовах рівневої та профільної диференціації. Статистичні знання можуть стати знаряддям математичного мислення тільки за умови послідовного й систематичного формування протягом усього часу вивчення математики.

Отже, методичний аспект проблем навчання статистики в основній школі досліджений недостатньо.Саме тому наше дослідження присвячене цій актуальній проблемі "Методика вивчення елементів статистики за допомогою НІТ ".

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів основної школи.

Предмет дослідження – методика навчання елементів статистики в основній школіз допомогою НІТ.

Мета дослідження – на основі вивчення та узагальнення вітчизняного і зарубіжного досвіду, психолого-педагогічної та методичної літератури, педагогічного експерименту розробити методику вивчення статистики в основній школі з допомогою НІТ.

Гіпотеза дослідження: якщо систематично й послідовно формувати статистичні знання та вміння засобом спеціально дібраної системи теоретичних відомостей і відповідних вправ та задач, то це сприятиме:

- активізації навчальної діяльності учнів;
- розвитку логічного, зокрема статистичного мислення;
- підвищенню успішності та якості знань учнів.

Методологічну основу дослідження становлять найважливіші положення теорії пізнання й розвитку мислення, діяльнісної концепції навчання, системного, комплексного та особистісно орієнтованого підходу до навчально-виховного процесу (Л. Виготський, П. Гальперін, В. Давидов, І. Лернер, С. Рубінштейн та ін.), теорії проблемного та розвиваючого навчання (Д. Ельконін, Л. Занков, З. Калмикова, М. Махмутов, І. Якиманська та ін.), наукові здобутки з методики навчання статистики (Я. Бродський, Н. Віленкін, Б. Гнєденко, А. Колмогоров, О. Маркушевич, З. Слєпкань, А. Столяр, М. Ядренко та інші.), з проблеми розвитку пізнавальної активності та управління процесом навчання (Д. Богоявленська, Є. Кабанова-Меллер, Н. Менчинська, Н. Тализіна та ін.), з методики навчання математики в школі (Г. Бевз, М. Бурда, Я. Грудьонов, Ю. Колягін, З. Слєпкань, М. Шкіль, В. Швець та ін.), сучасні концепції комп’ютерної підтримки навчального процесу (Ю. Горошко, М. Жалдак, Ю. Машбиць, Н. Морзе та інші).

Для з’ясування стану проблеми в педагогічній теорії, визначення психолого-педагогічних і методичних передумов формування татистичних знань та вмінь в учнів основної школи, розробки методичної системи навчання статистики в основній школі застосовувались такі **теоретичні методи:** аналіз наукової, психолого-педагогічної, методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження; змісту програм, підручників, що містять тему “Елементи статистики”; порівняння, узагальнення, систематизація теоретичного і практичного матеріалу.

У процесі впровадження розробленої методичної системи та перевірки її ефективності застосовувались такі **емпіричні методи:** бесіди з учителями, учнями; спостереження за процесом навчання; анкетування; систематизація та узагальнення педагогічного досвіду вчителів; аналіз ефективності дидактичних засобів та сучасних інформаційних технологій навчання; педагогічний експеримент; аналіз і опрацьовування отриманих у ході дослідження результатів.

Теоретичне значення полягає в обґрунтуванні доступності та доцільності послідовної реалізації положення концепції змісту математичної освіти в 11-річній школі та Державного стандарту базової та повної середньої освіти в освітній галузі “Математика” про включення до змісту шкільної освіти наскрізної статистичної змістової лінії, у визначенні теоретичних основ формування статистичних знань та вмінь в учнів основної школи, у розробці методичних вимог до системи навчальних завдань.

Практичне значення: розроблено та експериментально перевірено ефективність методики, спрямованої на послідовне вивчення елементів статистики в основній школі, зокрема, системи теоретичних знань, вправ і задач статистичного характеру та методичних рекомендацій з їх використання.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1Аналіз програм та шкільних підручників з теми дослідження

У 7—9 класах вивчається два математичні курси: алгебра і геометрія. Основними завданнями курсу алгебри є вдосконалення обчислювальних навичок школярів, формування формально-оперативних умінь (виконання тотожних перетворень цілих і дробових виразів, розв’язування рівнянь і нерівностей та їх систем), достатніх для вільного їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також у процесі розгляду різноманітних практичних застосувань математичного знання. Важливе завдання полягає у залученні учнів до використання рівнянь і розгляду функцій як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв’язування на цій основі прикладних та інших задач. У процесі вивчення курсу посилюється роль обґрунтувань математичних тверджень, індуктивних і дедуктивних міркувань, формування різного роду алгоритмів, що має сприяти розвитку логічного мислення і алгоритмічної культури школярів. На цьому етапі шкільної математичної освіти завершується формування поняття дійсного числа. До відомих учням числових множин долучається множина ірраціональних чисел. Основу курсу становлять перетворення цілих і дробових раціональних та ірраціональних виразів. Розглядається поняття степеня з цілим показником та його властивості. Істотного розвитку набуває змістова лінія рівнянь та нерівностей. Відомості про рівняння доповнюються поняттям рівносильних рівнянь. Процес розв’язування рівняння трактується як послідовна заміна даного рівняння рівносильними йому рівняннями. На основі узагальнення відомостей про рівняння, здобутих у попередні роки, вводиться поняття лінійного рівняння з однією змінною. Крім лінійних, передбачено вивчення квадратних рівнянь, рівнянь зі змінною в знаменнику та окремих видів рівнянь, що зводяться до квадратних. Розглядаються системи лінійних рівнянь та рівнянь другого степеня з двома змінними. Щодо останніх, то увага зосереджується на системах, де одне рівняння — другого степеня, а друге — першого степеня. Передбачається розгляд лише простіших систем рівнянь, у яких обидва рівняння другого степеня. Значне місце відводиться застосуванню рівнянь до розв'язування різноманітних задач. Важливе значення надається усвідомленому формуванню алгоритму розв'язування задачі за допомогою рівняння і його реалізації. Рівняння і задачі з їх допомогою розв'язують під час вивчення кожної теми програми. Елементарні відомості про числові нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, розгляду лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей і їх розв'язування. Розглядається розв'язування систем двох лінійних нерівностей з однією змінною. У сьомому класі вводиться одне з фундаментальних математичних понять — поняття функції. Тут же розглядається лінійна функція та її графік. Згодом ці відомості використовуються для графічної ілюстрації розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Інші види функцій розглядаються у зв'язку з вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу. Зокрема, у 8 класі в темах ― Раціональні вирази та ― Квадратні корені учні ознайомлюються з функціями у = x k і у = x та їх властивостями. У 9 класі розглядається квадратична функція. Вивчення її властивостей пов'язується з розв'язуванням квадратних нерівностей. Таким чином, функціональна лінія пронизує весь курс алгебри основної школи і розвивається у тісному зв'язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Під час вивчення функцій чільне місце відводиться формуванню умінь будувати і читати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують. Прикладна спрямованість вивчення функцій, рівнянь, нерівностей та іншого матеріалу доповнюється окремими аспектами, пов'язаними з ознайомленням учнів з відсотковими розрахунками, початковими елементарними поняттями теорії ймовірностей і статистики.

Один з найважливіших аспектів модернізації змісту математичної освіти полягає у включенні до шкільних програм елементів статистики і теорії ймовірностей. Це обумовлено роллю, яку відіграють ймовірнісно-статистичні знання в загальноосвітній підготовці сучасної людини. Без мінімальної ймовірнісно-статистичної грамотності важко адекватно сприймати соціальну, політичну, економічну інформацію та приймати на її основі обгрунтовані рішення.

Вивчення елементів комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей в основній школі стало обов'язковим після затвердження компонента державного стандарту загальної освіти. Міністерство освіти України у курс «Елементи комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей» в основній школі почали викадати з 2003/2004 навчального року.

При цьому пропонується орієнтуватися на такий зміст:

1. Розв’язуваннякомбінаторнихзавдань: перебірваріантів, підрахунок числа варіантів за допомогою правила множення.
2. Представленняданих у виглядітаблиць, діаграм, графіків. ДіаграмиЕйлера.
3. Середнірезультативимірювань.
4. Поняття і прикладивипадковихподій. Частота події, ймовірність.
5. Рівноможливі події і підрахунок їх вірогідності. Уявлення про геометричнуймовірність.

Перераховане коло питань являє собою деякий мінімум, доступний учням основної школи і достатній для формування у них первинних ймовірнісно-статистичних уявлень. [25]

Державним стандартом освіти передбачено обов'язковий мінімум, і викладені основні вимоги до рівня підготовки випускників. Для основної загальної освіти, з теми «Елементи логіки, комбінаторика, статистика і теорія ймовірностей» на даний момент встановлений наступний обов'язковий мінімум: Множини і комбінаторика. Нескінченість, елементи множини. Підмножини. Об'єднання і переріз множин. Діаграми Ейлера. Приклади розв’язування комбінаторних завдань: перебір варіантів, правило множення.

Статистичні дані. Подання даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків. Середні результати вимірювань. Поняття про статистичний виведення на основі вибірки.Поняття та приклади випадкових подій. Імовірність. Частота подій, ймовірність. Рівноможливі події і підрахунок їх вірогідності. Уявлення про геометричну ймовірность.

Вимоги до рівня підготовки випускника:

- У результатівивчення математики учень повинен знати і розумітиімовірнісний характер багатьохзакономірностейнавколишньог освіту, прикладистатистичнихзакономірностей і висновків.
- У результатівивченняелементівлогіки, комбінаторики, статистики та теоріїймовірностейучень повинен вміти:
  - Витягуватиінформаціюпредставлену в таблицях, на діаграмах, графіках; складати таблиці, будуватидіаграми і графіки.
  - Розв’язувати комбінаторнізадачі шляхом систематичного перебору можливихваріантів, а також з використанням правила множення.
  - Обчислювати середнє значення результатів вимірювань
  - Знаходити частоту події, використовуючи власні спостереження і готові статистичні дані
  - Знаходити вірогідність випадкових подій у найпростіших ситуаціях.
- Використовувати набуті знання і вміння в практичній діяльності та повсякденному житті для:
  - Аналізу реальних числових даних, подання у вигляді діаграм, графіків, таблиць

- Розв’язування навчальних і практичних завдань, що вимагають систематичного перебору варіантів,
- Порівняння шансів настання випадкових подій,оцінкаймовірності випадкової події в практичних ситуаціях,зіставлення моделі з реальною ситуацією,
- Розуміння статистичнихтверджень.

1.2 Психолого-педагогічні умови вивчення елементів стохастики в основній школі

Про важливість вивчення в школі елементів теорії ймовірностей і статистики мова йде дуже давно. І автори багатьох статей говорять про необхідність введення стохастичної лінії в основну школу. Бунімович Е.А [2] на захист цієї необхідності наводить такі аргументи:

1. Соціально-економічна ситуація.

«Потрібно навчити дітей жити в ймовірнісної ситуації. Тобто потрібно навчити їх використовувати, аналізувати й обробляти інформацію, приймати обгрунтовані рішення в різноманітних ситуаціях з випадковими результатами. Орієнтація на багатоваріантність можливого розвитку реальних ситуацій і подій, на формування особистості, здатної жити і працювати в складному, постійно мінливому світі, з неминучістю вимагає розвитку ймовірнісно-статистичного мислення у підростаючого покоління ».

2. Універсальністьімовірніснихзаконів.

«Вони стали основою опису наукової картини світу. Сучасна фізика, хімія, біологія, демографія, соціологія, лінгвістика, філ особія, весь комплекс соціально-економічних наук побудований і розвивається на ймовірнісно-статистичній базі.

Підліток у своєму житті щодня стикається з ймовірними ситуаціями. Гра і азарт становлять істотну частину життя дитини. Коло питань, пов'язаних з співвідношеннями понять «ймовірність» і «достовірність», проблема вибору найкращого з кількох варіантів розв’язання, оцінка ступеня ризику і шансів на успіх, уявлення про справедливість і несправедливість в іграх і в реальних життєвих колізіях - все це, безсумнівно, знаходиться у сфері реальних інтересів підлітка ».

3. Розвиваюча роль стохастики.

«Викладання будь-якого розділу математики благотворно позначається на розумовому розвитку учнів, оскільки прищеплює їм навички ясного логічного мислення, що оперує чітко визначеними поняттями. Все сказане повною мірою відноситься і до викладання теорії ймовірностей, але навчання «законам випадку» грає дещо більшу роль і виходить за рамки звичайного. Слухаючи курс теорії ймовірності, учень пізнає, як застосовувати прийоми логічного мислення в тих випадках, коли доводиться мати справу з невизначеністю (а такі випадки виникають на практиці майже завжди) ».

4. Прикладний характер законівтеоріїймовірностей.

«Висновки теорії ймовірностей знаходять застосування у повсякденному житті, науці, техніці і т.д. У повсякденному житті нам постійно доводиться стикатися з випадковістю, і теорія ймовірностей вчить нас, як діяти раціонально з урахуванням ризику, пов'язаного з прийняттям окремих рішень. Гарним прикладом застосування теорії ймовірностей у повсякденному житті може служити вибір найбільш доцільної форми страхування. При плануванні, наприклад, сімейного бюджету часто доводиться оцінювати витрати, що носять певною мірою випадковий характер. Знайомство на тому чи іншому рівні із законами випадку необхідно кожному. Застосування теорії ймовірностей в науці, техніці, економіці і т.д. набуває все більшого значення. Саме тому у все більшої кількості людей в процесі роботи виникає необхідність у вивченні теорії ймовірностей. Сучасна освічена людина незалежно від професії та роду занять повинна бути знайома з найпростішимипоняттями теорії ймовірностей. У наші дні, коли прогноз погоди містить повідомлення про ймовірність дощу на завтра, кожен повинен знати, що власне це означає ».

5. Взаємозв'язок математики з дійсністю.

Крім значення навчання елементам стохастики, не менше уваги приділено питанням про те, що саме і яким чином вивчати школярам. Виникає багато питань про зміст, методи, засоби. Різні дослідження пропонують різні методичні рекомендації.

Бунімович Є.А.[2] робить такі методичні рекомендації при розгляді деяких питань теорії ймовірностей. «На першому етапі навчання можна відзначити, що події достовірні і неможливі краще не відносити до випадкових подій. Досвід викладання цього матеріалу показав, що школярам 10-12 років важко вважати випадковими ті події, які відбуваються завжди, або не відбуваються ніколи. Поняття випадкової подіївідповідно уточнюється на більш пізніх ступенях навчання.Щоб довести, що дана подія - випадкове, пропонується привести приклад такого результату, колиподія відбувається, і приклад такого результату, коли він не відбувається.

Необхідно розвинути в учнів розуміння ступеня випадковості різних явищ і подій. Якісна оцінка ймовірності події призводить до того, що під час обговорення в класі на один і той же питання може бути дано кілька різних відповідей, які можуть вважатися вірними, що незвично на уроці математики і для учня і для вчителя. Наприклад, при обговоренні ймовірності настання події «вам подарують на день народження собаку» учні в залежності від особистих обставин можуть дати відповіді:
«Це малоймовірне подія»,

«Це дуже можлива подія»,

«Це достовірна подія».

При вирішенні таких завдань головне - приводиться аргументація, розуміння школярем сенсу використовуваних понять. Якщо аргументація цілком логічна і розумна, відповідь слід вважати правильним ». [2]

Про формування первинних стохастичних уявлень говорить СелютінаВ.Д. [31].

«5-6 класи є підготовчим етапом, перед вивченням стохастики, тут йде процес« інтуїтивних накопичень ». Як же слід організувати цей процес? Перш за все, шляхом експерименту, проведеного самими учнями. Як стверджує А. Плоцьк [31], «із-за своєї специфіки стохастика може бути математикою, що розуміється кожним учнем як математика, відкрита ним самим». Одна з найважливіших цілей навчання школярів елементам стохастики полягає в цілеспрямованому розвитку ідеї про те, що в природі наявні статистичні закономірності. Важливо допомогти учням правильно усвідомити реальну дійсність, відкрити для себе імовірнісну природу навколишнього світу, показати, що у світі випадків можна не тільки добре орієнтуватися, але й активно діяти.

За допомогою яких же засобів можна організувати формування первинних стохастичних уявлень школярів? До таких можна віднести:

1. стохастичніігри,
2. експерименти з випадковими наслідками, статистичнідослідження,
3. уявністатистичніексперименти і моделювання.

Для проведення експериментів поки можливе використання підручних засобів: кубики, гудзики, кнопки, саморобні вертушки і т.п. З введенням стохастичної лінії в основний курс середньої школи, згодом мають з'явитися і мінімальні набори математичного демонстраційного навчального обладнання ». [31]

Проводячи експерименти, учні можуть помітити, що ті чи інші події відбуваються частіше або рідше, щодо інших. Таким чином, можна перейти до поняття частоти, а потім і до статистичного визначення ймовірності. При класичному підході визначення поняття ймовірності для деяких подій зводиться до простішого поняття - рівноможливих елементарних подій. А це поняття грунтуєтьсяна інтуїтивній уяві людиною тих умов випробування, які начебто достовірно визначають цю рівноможливість. Але не кожне випробування піддається такій уяві. Наприклад, не може бути й мови про рівновозможливі результати випробування, що складаються в підкиданні неправильної гральної кістки, центр ваги якої свідомо усунутий з геометричного центру.

З цього випливає обмеження застосування класичної ймовірності. Класичне визначення ймовірності «працює» лише тоді, коли є кінцеве число рівновозможливих результатів. На практиці ми часто зустрічаємося з ситуаціями, де немає симетрії, яка зумовлює рівноможливірезультати. У таких випадках доводиться визначати ймовірність частотним шляхом (статистична ймовірність) [34].

За навчанням комбінаториці, теж немає єдиної думки. У статті Ткачової М.В. [35] містяться такі зауваження з навчання комбінаториці.

«На першому етапі при вивченні комбінаторики слід виробити в учнів уміння складати комбінаторні набори і почати з самого простого - складання комбінаторних наборів методом безпосереднього перебору. У віці 11-12 років діти здатні вирішувати найпростіші комбінаторні задачі на цілеспрямований перебір невеликого числа елементів певної множини і складати всілякі комбінації (з повтореннями і без повторень) з 2-3 елементів. Операція перебору розкриває ідею комбінування, служить основою для формування комбінаторних понять і хорошою підготовкою до висновку комбінаторних формул і закономірностей.

Після того як учні навчаться складати набори з елементів заданої множини із заданої властивості, на перший план виходить завдання з підрахунку кількості можливих наборів. Такі комбінаторні завдання вирішуються за допомогою міркувань, розкриваючи принцип множення. Але акцент потрібно зробити не на формальному його застосуванні, а на змістовних міркуваннях і розумінні суті поставленого в задачі питання. Принцип множення в подальшому використовується для виведення формул. Часто підрахунок варіантів полегшують графи. Одним з видів графів є дерево можливих варіантів, що є гарною наочною ілюстрацією правила множення.

Таким чином, побудова дерева можливих варіантів є одним із способів вирішення комбінаторних завдань. Така наочність допомагає краще зрозуміти принципи складання наборів (допомагає складати і впорядковувати набори). Але таку наочність можливо використовувати в задачах з невеликою кількістю можливих варіантів, або в задачах, для яких дерево можливих варіантів є правильним.

Метод перебору, принцип множення і побудова дерева можливих варіантів - це всі методи, які дозволяють вирішувати комбінаторні завдання без використання формул. Відсутність формул при вирішенні комбінаторних завдань дозволяє учням краще зрозуміти суть рішення, краще освоїти способи складання і підрахунку можливих наборів. Вже після цього можна вивести або ввести деякі формули, які учень повинен застосовувати усвідомлено і розуміти принцип їх дії ». [35]

Спірним залишається питання і про введення основних комбінаторних понять: комбінації, перестановки та розміщення. Чи всі вводити, чи потрібно вводити їх означення, чи достатньо опису.

На даний момент можна говорити про наявність деякого досвіду з даної теми. Так як цим питанням займаються вже давно, то природно, що були зроблені деякі спроби введення цього матеріалу або хоча б його елементів.

У статті Бунімович Є.А. [2] розповідається про експерименти проведених автором на базі гімназій з профільним вивченням математики. У них досліджувалися ймовірнісні уявлення школярів старших профільних класів, які ще не вивчали імовірнісний розділ. Результати дослідження показали, що навіть добрі знання і розуміння інших розділів математики саме по собі не забезпечує розвитку імовірнісного мислення. Також досвід показав, що у віці початкових класів ще багато чого в уявленнях учня про світі недостатньо сформований, не вистачає і математичного апарату для пояснення уявлень про ймовірність. У той же час основи описової статистики, таблиці та стовпчасті діаграми, а також основи комбінаторики можливо і навіть необхідно вводити в курс початкової школи. А починати виклад основ теорії ймовірності в старших класах - малоефективно. [2]

Ткачовою М.В., Васильковою Є.М. і Чуваєвою Т.В. був проведений експеримент про готовність учнів до вивчення стохастики, результати представлені в їхній статті. [37] На основі проведених експериментів були зроблені наступні висновки. в 5 класі у дітей досить високий рівень комбінаторного мислення, а потім якщо протягом 6-7 класів його не розвивати, то навички розв’язання комбінаторних задач істотно знижуються. Більшість учнів 5-6 класів готові до сприйняття поняття ймовірність у класичному і геометричному тлумаченні. Бажано навчати дітей 5-6 класів самостійного цілеспрямованому збору інформації про явища оточуючого їх життя, підрахунку даних у невеликих вибірках.

1.3Аналіз ймовірнісно-статистичної лінії у навчальній літературі

При введенні будь-якої нової теми, будь-якого нового питання в основний курс школи постає проблема викладу даного питання в шкільних підручниках.

До реалізації нового змісту у діючих підручниках автори підійшли по-різному. В одних підручниках елементи стохастики включені в основний зміст окремими параграфами. Автори ж інших підручників видають новий зміст у формі вкладишів - додаткових глав до своїх посібників.

Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., «Математика 5», Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М. «Математика 6». [9.10]

У 5 класі остання глава «введення в імовірність» містить 2 параграфа. У одному параграфі розглядаються достовірні, неможливі і випадкові події. У ній наведено завдання на визначення характеру події (достовірне, неможливе чи випадкове). У другому параграфі розглядаються комбінаторні задачі, які розв’язуються методом перебору можливих варіантів.

У 6 класі автори знайомлять з поняттям ймовірність. Дані вправи на визначення ступеня ймовірності тієї чи іншої події, виконувати які учні повинні з опорою на інтуїцію. У наступному пункті вводиться класичне визначення ймовірності. Розглядаються завдання, в яких для обчислення ймовірності використовують комбінаторне правило множення.

Авторами вводиться лише класичне визначення ймовірності і абсолютно не розглядається поняття частоти. А більш логічно і доцільно вводити класичне визначення на основі частотного.

Деякі навчальні комплекти поповнилися додатковими навчальними посібниками, які містять матеріал по Стохастиці. Макаричєв Ю.М., Міндюк Н.Г. [14]

«Алгебра: елементи статистики і теорії ймовірностей». Під редакцією Теляковського С.А.

Цей навчальний посібник призначений для учнів 7-9 класів.

Книга складається з чотирьох параграфів. У кожному пункті містяться теоретичні відомості та відповідні вправи. У кінці пункту наводяться вправи для повторення. До кожного параграфу даються додаткові вправи більш високого рівня складності в порівнянні з основними вправами.

У 7 класі матеріал об'єднаний в параграф «статистичні характеристики», який знайомить з найпростішими статистичними характеристиками (середнє арифметичне, мода, медіана, розмах). Вправи до параграфу можна розділити на 2 групи. Першу групу складають завдання на відшукання розглянутих характеристик і тлумачення їх практичного сенсу.

До другої групи належать завдання, які вимагають не тільки знання визначень досліджуваних статистичних характеристик, а й умінь проводити необхідні міркування, використовувати раніше введений алгебраїчний апарат.

Матеріал, що вивчається у 8 класі також об'єднаний в один параграф «Статистичні дослідження», де розглядаються питання організації статистичних досліджень та наочного подання статистичної інформації (таблиці частот). Спочатку повторюються основні статистичні характеристики. Вводяться нові поняття: інтервальний ряд, суцільне і вибіркове дослідження, вибірка, генеральна сукупність, репрезентативність. Знайомство з новими видами наочної інтерпретації результатів статистичних досліджень - полігонами і гістограмами.

Найбільший обсяг матеріалу припадає на 9 клас. Тут є 2 параграфа.

«Елементи статистики і ймовірність».

Це навчальний посібник для 7-9 класів.

1 Глава «Введення в комбінаторики» (7 клас) починається з історичних комбінаторних задач про магічні та латинських квадратах та інші. Потім розглядаються пункт різні комбінації з трьох елементів, де розглядаються поєднання, перестановки та розміщення, але вводити самі терміни не обов'язково. Розглядається таблиця підрахунку варіантів, яка підводить до правила множення. Також розглядаються графи, але лише як

засіб підрахунку можливих варіантів. Ця глава має і додаткові параграфи - перестановки і розбиття на дві групи, висунення гіпотез.

2 Глава «Випадкові події» (8 клас).

Спочатку розглядаються події: достовірні, неможливі, випадкові, спільні та несумісні, рівноможливими. У наступному пункті вводиться відразу класичне визначення ймовірності, після чого розглядається рішення імовірнісних задач за допомогою комбінаторики. Далі як додатковий пункт розглядаєтьсягеометрична ймовірність. Вводиться поняття протилежних подій і їх вірогідність. Поняття відносної частоти і статистичне визначення ймовірності вводиться вже в кінці розділу. І завершується додатковим пунктом - тактика ігор.

3 глава «Випадкові величини» (9 клас).

Вводяться поняття випадкової величини - дискретної і безперервного. Розглядаються таблиці розподілу значень випадкової величини та її графічне представлення (полігони). Далі розглядаються такі поняття як генеральна сукупність і вибірка, мода, медіана, розмах. А завершується глава додатковими пунктами, в яких розглядаються відхилення від середнього, дисперсія, середнє квадратичне відхилення і правило трьох сигм
На мій погляд, виклад деяких питань у цьому навчальному посібнику не зовсім вдало. По-перше, класичне визначення ймовірності вводиться до того як розглядається поняття частоти і статистичне визначення ймовірності, що, на мою думку, як я вже відзначала не зовсім логічно. По-друге, в розділі про випадкових величинах з найпростішими статистичними характеристиками знайомлять вже в останню чергу, адже саме їх учень може використовувати при аналізі статистичної інформації. По-третє, в підручнику взагалі мало уваги приділено роботі зі статистичними даними.

В кінці підручника містяться короткі методичні рекомендації для вчителя. Також методичні рекомендації до першого розділу даного навчального посібника можна знайти у статті Ткачової.

На даний момент одним з діючих підручників у школі є підручник Мерзляк, до нього також є додаткові глави для 7-9 класів: Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.

«Події, ймовірності, статистична обробка даних».

Перші два параграфи присвячені комбінаториці. Починається з розгляду простих комбінаторних завдань, розглядається таблиця можливих варіантів, яка показує принцип правила множення. Потім розглядаються дерева можливих варіантів і перестановки. Після теоретичного матеріалу йдуть вправи по кожному з підпунктів.

Наступний параграф - вибір декількох елементів, в якому розглядаються поєднання. Спочатку виводиться формула для 2-ох елементів, потім для трьох, а потім спільна для n елементів.

Третій параграф - випадкові події та їх вірогідність. Вводиться класичне визначення ймовірності.

Четвертий параграф присвячений статистиці. Розглядається угрупування інформації у вигляді таблиць. У цьому розділі вводиться багато нових термінів, і автори, оформили їх у вигляді таблиці, де крім визначень йде ще і опис цих термінів. Далі розглядається таблиця розподілу та її графічне представлення (багатокутник розподілів), нормальний розподіл. Числові характеристики вибірки (середнє арифметичне, мода, медіана). Наступний пункт - експериментальні дані та ймовірності подій, в якому йдеться про зв'язок між імовірністю та експериментальними статистичними даними, після чого вводиться визначення статистичної ймовірності. І завершує підручник параграф, що містить матеріал з наступних питань: схема Бернуллі (при розгляді двох можливих результатів)., обчислення ймовірності за допомогою функції φ, закон великих чисел. У цьому навчальному посібнику дуже мало уваги приділено теорії ймовірностей. Цей підручник нагадує підручник Ткачової. У ньому також першим справою вводиться класичне визначення ймовірності, і вже набагато пізніше вводиться статистичне визначення, пов'язане з експериментальними статистичними даними. Статистичні характеристики вводяться для вибірки, і після розгляду питання про розподіл значень випадкової величини. За комбінаториці матеріал викладено більш вдало, зауваження по даному навчальному посібнику містяться в статті Студенецька і Фадєєва. Тюрін Ю.М., Макаров А.А. та ін..

«Теорія ймовірностей і статистика».

Цей посібник для учнів 7-9 класів, в якому досліджувана лінія реалізується в наступному порядку. Перші два глави присвячені таблиць і діаграм. Розглядаються статистичні дані в таблицях, йде навчання роботі з таблицями (пошук інформації, обчислення в таблицях, занесення результатів підрахунків і вимірювань в таблиці). Розглядаються стовпчикові, кругові і діаграма розсіювання.

У третьому розділі крім основних статистичних характеристик вводяться також поняття: відхилення і дисперсії.

Четверта глава - випадкова мінливість, містить ряд прикладів мінливих величин (температура повітря кожен день, зростання або вага людини тощо). А потім в 5 главі переходимо до вивчення випадкових подій і їх ймовірностей. Імовірність випадкової події визначається тут, як числова міра його правдоподібності. Після визначення ймовірності розглядається частота і експерименти з монетою і гральної кісткою. Далі імовірнісна лінія продовжується, і розглядаються елементарні події, їх рівноможливими, протилежні події, діаграми Ейлера, об'єднання і перетину подій, додавання і множення ймовірностей.

Після цього йде блок комбінаторики, де розглядається правило множення, перестановки, поєднання, формули числа перестановок і сполучень, а потім з їх допомогою вирішуються завдання на обчислення ймовірностей. В окремих розділах розглядаються геометричні ймовірності та випробування Бернуллі (про двох можливих результатах).

Наступні кілька глав присвячені випадковим величинам: приклади випадкових величин, розподіл ймовірностей випадкових величин, їх числові характеристики (математичне сподівання, дисперсія), випадкові величини в статистиці. Дається визначення частоти, і теорема, яка стверджує, що частота наближено дорівнює ймовірності при великій кількості досвідів. Додаток включає в себе питання: формула бінома-Ньютона, трикутник Паскаля, також є декілька самостійних і контрольних робіт, за запропонованим матеріалу.

Плюсом даного посібника є те, що воно одне з небагатьох містить пункти, в яких розглядаються таблиці і діаграми. Цей пункт необхідний, тому що саме таблиці і діаграми вчать учнів поданням і початкового аналізу даних.

Не мало уваги приділено випадковим величинам і ймовірностями, але, я вважаю, що деякі пункти можна розглядати як додаткові. А поняття дисперсії і математичне очікування краще перенести для вивчення в старші класи. Комбінаторні формули в даному посібнику розглядаються, як засіб для підрахунку імовірності і даються після визначення ймовірності. Але основною метою вивчення комбінаторики є розвиток мислення, і її не можна розглядати тільки як засіб для підрахунку імовірності.

1.4 Основні теоретичні положення з теми «Статистика»

Математична статистика — розділ математики, в якому вивчають методи збору, систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Генеральна сукупність — сукупність всіх об’єктів, що підлягають дослідженню. Обсяг генеральної сукупності, тобто число об’єктів дослідження може бути досить великим, а інколи і нескінченним. Часто буває неможливо дослідити всі об’єкти генеральної сукупності.

У подібних випадках найкращим способом дослідження є вибірковий метод: з генеральної сукупності вибирають її деяку частину — вибірку та досліджують її.

Вибіркою називають сукупність об’єктів, вибраних випадковим чином з генеральної сукупності. Метод математичного дослідження, який полягає у тому, що на основі дослідження вибірки роблять висновок про всю генеральну сукупність називають вибірковим методом.

Важливим етапом дослідження є систематизація отриманих даних (вибірки), тобто подання вибірки у зручному для подальших дій вигляді.

Приклад 1. Всі одинадцятикласники деякого району писали одну й ту гаму перевірочну контрольну роботу з математики за текстами районного управління освіти. Вибірку склали30 навмання обраних робіт цих одинадцятикласників. Нехай вибрані одинадцятикласники дістали наступні оцінки.

4	3	10	6	2	8	7	5	9	11
7	12	1	8	4	9	6	7	10	5
9	6	8	3	11	7	2	8	4	10

Дані цієї вибірки можна систематизувати у таблицю за кількістю набраних балів.

Отриманий бал за контрольну роботу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість учнів	1	2	2	3	2	3	4	4	3	3	2	1

Також дані вибірки можна систематизувати за рівнями навчальних досягнень.

Рівеньнавчальнихдосягнень	Початковийрівень	Середнійрівень	Достатнійрівень	Високийрівень
Кількість учнів	5	8	11	6

Операцію розташування випадкових величин вибірки за принципом неспадання називають ранжуванням вибірки. При ранжуванні вибірки кожне наступне число вибірки не менше за попереднє.

Приклад 2. В результаті ранжування вибірки, розглянутої в прикладі 1 цього пункту, матимемо 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 10; 10; 11; 11; 12.

При статистичних дослідженнях вибірки важливим етапом є оцінювання її числових характеристик, які називають вибірковими характеристиками.

Розмах вибірки R — це різниця між найбільшим і найменшим значенням випадкової величини у вибірці.

Для вибірки, розглянутої в прикладі 1 попереднього пункту, маємо $R = 12 - 1 = 11$.

Мода вибірки M_O — те значення випадкової величини, що зустрічається у вибірці найчастіше.

Для вибірки, розглянутої в прикладі 1 попереднього пункту є дві моди — це числа 7 і 8. Можна записати $M_{O1} = 7$; $M_{O2} = 8$.

Медіана вибірки M_e — серединне значення ранжованої вибірки.

Медіана ділить ранжовану вибірку на дві рівні за кількістю частини. Якщо у вибірці непарна кількість випадкових величин, то його медіаною є число, яке стоїть посередині.

Наприклад, у ранжованій вибірці:

$$1;\ 2;\ 3;\ \boxed{3};\ 4;\ 4;\ 5,$$

що складається з 7 випадкових величин, медіаною є число 3. Можна записати $M_e = 3$.

Якщо у вибірці парне число випадкових величин, то медіана — середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

Наприклад, у ранжованій вибірці:

$$2;\ 3;\ 4;\ \boxed{4};\ \boxed{5};\ 6;\ 6;\ 7,$$

що складається з 8 випадкових величин, медіана — це середнє арифметичне чисел 4 і 5, що стоять посередині ряду. Отже, $M_e = (4 + 5)/2$.

Середнє арифметичне вибірки $\bar{x}$ — це середнє арифметичне всіх її значень $x_1;\ x_2;\ x_3;\ldots;\ x_n$.

Так, наприклад, середнє арифметичне вибірки, розглянутою у прикладі 1 попереднього пункту знаходиться наступним чином:

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 2 + 6\cdot 3 + 7\cdot 4 + 8\cdot 4 + 9\cdot 3 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2 + 12\cdot 1}{30} =$$

$$= \frac{202}{30} = 6\frac{11}{15} \approx 6{,}73 \text{ (з точністю до сотих)}$$

Статистичну інформацію можна подавати у вигляді гістограм. На рисунку 1.1 подано гістограму розподілу кількості учнів в залежності від отриманого балу, побудовану за відповідною таблицею прикладу 1, пункту 3 цього параграфа.

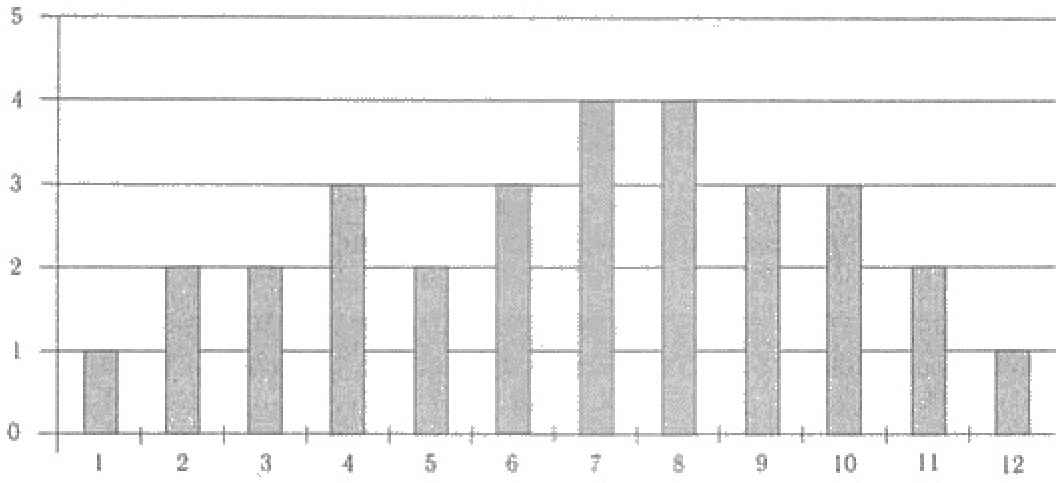


Рис. 1.1

Також зручно подавати статистичну інформацію у вигляді кругових діаграм, у яких градусна величина сектора будується пропорційно до зображуваної величини. На рисунку 1.2 подано кругову діаграму розподілу кількості учнів в залежності від рівня навчальних досягнень, побудовану за відповідною таблицею прикладу 1, пункту 3 цього параграфа.

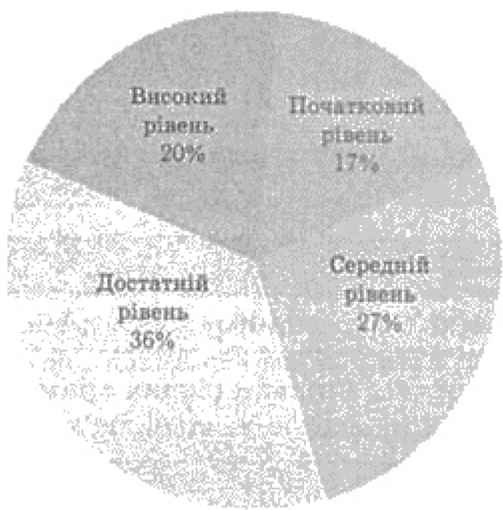


Рис. 1.2

1.5 Новітні інформаційні технології у навчальному процесі

ХХІ століття – це час переходу до високотехнологічного інформаційного суспільства, в якому якість людського потенціалу, рівень освіченості й культури всього населення набувають вирішального значення. Сьогодні для розвитку інтересу дітей до навчання на уроці недостатньо лише особистісних якостей учителя. Необхідно створити і нові технічні умови навчання. Тому необхідно звернути увагу на використання новітніх інформаційних технологій на уроках математики.

Інформаційні технології (ІТ) – це сукупність методів і засобів створення та використання інформаційних ресурсів на базі обчислювальної та комунікаційної техніки і широкого застосування математичних методів. Тому їх ще називають інформаційно-комунікаційними технологіями (ІКТ). Інформаційні технології – з одного боку, це потужний інструмент для отримання дитиною найрізноманітнішої інформації, з іншого – ефективний засіб підвищення інтересу до навчання, а також мотивації, наочності, науковості тощо. Тому їх треба активно використовувати у навчальному процесі. Один із предметів, де найбільш виправдано використання комп'ютера – це, звичайно, математика.

У зв'язку з активним розвитком інформаційних технологій та їх впровадженням у різні сфери життя все більшої актуальності набуває формування інформаційної культури сучасних школярів. Інформаційні технології – з одного боку, це потужний інструмент для отримання дитиною найрізноманітнішої інформації, з іншого – ефективний засіб підвищення інтересу до навчання, а також мотивації, наочності, науковості тощо. Тому їх треба активно використовувати у навчальному процесі. Одним із предметів, де найбільш виправдано використання комп'ютера - математика.

Концепція математичної освіти України і Держстандарт освітньої галузі «Математика» передбачають передумови для формування соціальної, комунікативної, комп'ютерної та інших видів компетентності учнів. Уроки з комп'ютерною підтримкою викликають велику зацікавленість учнів. Уроки в комп’ютерному класі дозволяють урізноманітнити види діяльності учнів. Крім того, комп’ютерні уроки дають можливість ефективно використовувати диференційований підхід у навчальному процесі.

Використання комп’ютерних програм на уроках математики розвиває інтерес до вивчення предмета, підвищує ефективність їхньої самостійної роботи, індивідуалізації процесу навчання шляхом: покращення наочності навчання, сприяння формуванню абстрактних уявлень про математичні моделі, поглиблення самостійності вивчення курсу, створення комфортних умов проведення різних форм контролю знань, що допомагає в розробці індивідуальних заходів для корекції знань учнів у межах досягнення визначених цілей навчання.

Комп’ютер допомагає розвивати розумові здібності: швидкість мислення, пам’ять, уміння переключати увагу. Програмні засоби використовуються у трьох напрямах: ілюстративному, схематичному та інтерактивному. Схематичний метод дозволяє скористатися можливостями комп’ютерних програм для побудови структурно – логічних схем та опорних конспектів. Після комп’ютерної обробки опорні конспекти стають більш наочними, цікавими. Цьому допомагає прикладна програма PowerPoint. Мультимедійні засоби навчання допомагають посилити мотивацію навчання, урізноманітнити форми подання інформації, посилити співтворчість учителя та учня на уроці, розширити самостійність учня.

Основна мета ППЗ – активізувати пізнавальну діяльність учнів; посилити самостійність в опануванні знаннями, вміннями і навиками, мотивацію та інтерес до навчання геометрії і, тим самим, покращити навчальні досягнення учнів. Методика викладання математики перебуває на етапі розроблення оптимальних форм і методів застосування комп’ютерних технологій.

У своїй практичній діяльності кожен учитель, що проводить навчальні заняття з використанням ІКТ, обирає потрібний йому за різними параметрами набір педагогічних програмних засобів, що підвищує ефективність його праці, а рівень теоретичних знань, практичних умінь і навичок його учнів наближує до вимог сьогодення. Окрім цього, для кожного вчителя є важливим не лише досягнення максимального результату роботи, але і спосіб його досягнення. Роки роботи в школі – роки навчання та пошуку, вивчення та апробації технологій, методик, прийомів та методів. Традиційні прийоми та методи навчання – вічні. Проте сьогодення змушує шукати новітні прийоми навчання. Застосування комп'ютерної техніки робить традиційні уроки математики яскравими, насиченими. На цих уроках кожен учень працює активно, в учнів розвивається допитливість, пізнавальний інтерес.

Комп'ютер дозволяє підсилити мотивацію навчання:

- шляхом активного діалогу учня з комп'ютером;
- розмаїтістю й барвистістю інформації (текс + звук + колір + анімація);
- шляхом орієнтації навчання на успіх (дозволяє довести розв'язання будь-якого завдання, опираючись на необхідну підказку);
- використовуючи ігрову форму спілкування людини з машиною;
- витримкою, спокоєм і «дружністю» машини стосовно учня.

При плануванні уроків математики з використанням ІКТ враховують:

- наявний набір комп'ютерного обладнання;
- наявність програмного-методичного комплексу до підручника, що відповідає діючій програмі;
- наявність програм-тренажерів;
- готовність учнів до роботи з використанням комп'ютера;
- можливості учня використовувати комп'ютерні технології поза класом.

В процесі викладання математики доцільно застосовувати табличний процесор MS Excel (створення кросвордів, побудова діаграм, обчислення за допомогою формул), програмне забезпечення MS Office, програму для створення презентацій PowerPoint; програмні методичні комплекси GRAN-1 і GRAN-2, програму DG (динамічна геометрія), педагогічні програмні засоби

(ППЗ): «Математика, 5 і 6 класи», «Алгебра 7-9». Проте, часте застосовування ІКТ на уроках призводить до втрати інтересу, новизни.

Можливі різні види уроків із застосуванням інформаційних технологій: уроки-бесіди з використанням комп'ютера як наочного засобу; уроки постановки і проведення досліджень; уроки практичної роботи; уроки-заліки; інтегровані уроки і так далі

Практика роботи показує, що найбільш ефективне використання комп'ютера на уроках математики:

- при проведенні усного рахунку (можливість оперативно пред'являти завдання і коригувати результати їх виконання);
- при вивченні нового матеріалу (ілюстрація різноманітними наочними засобами; мотивація вступу нового поняття; моделювання);
- при перевірці фронтальних самостійних робіт (швидкий контроль результатів);
- при розв’язанні завдань навчального характеру (виконання малюнків, складання плану роботи; відпрацювання певних навичок і умінь);
- при організації дослідницької діяльності учнів;
- при інтеграції предметів природничо-математичного циклу.

Нові інформаційні технології (НІТ) — сукупність методів і технічних засобів збирання, організації, збереження, опрацювання, передачі й надання інформації, що розширює знання людей і розвиває їхні можливості щодо керування технічними й соціальними проблемами.

Педагогічні завдання НІТ:

- інтенсифікація всіх рівнів навчально-виховного процесу, підвищення його ефективності та якості;
- побудова відкритої системи освіти, що забезпечує дитині й дорослому власну траєкторію освіти;
- системна інтеграція предметних галузей знань;
- розвиток творчого потенціалу учня, його комунікативних дій;
- формування інформаційної культури учнів;

- реалізація соціального замовлення, обумовленого інформатизацією суспільства.

Застосування комп'ютерної техніки робить уроки математики яскравими, насиченими. Процес організації навчання школярів з використанням ІКТ дозволяє:

* Активізувати пізнавальну діяльність учнів.
* Візуалізувати навчальний матеріал.
* Індивідуалізувати процес навчання.
* Здійснювати моніторингові відстеження результативності навчання.
* Створити комфортні психологічні умови для учнів при відповіді на питання, організувати самоконтроль.
* Забезпечити розвиток творчої активності школярів.
* Створити бібліотеку навчального електронного приладдя.
* Використовувати інформаційну базу глобальної мережі Інтернет та локальну шкільну мережу.
* Реалізувати входження учня у реальний світ дорослих, у виробничу діяльність людини сучасного інформаційного цифрового суспільства в процесі роботи учня й учителя з використанням комп'ютерних технологій.

Комп'ютерні презентації, виконані в різних програмних середовищах, органічно вписуються в будь-який урок, ефективно допомагають учителю за мінімальний час самостійно виготовити мультимедійний посібник до уроку, що унаочнює навчальний матеріал, дає можливість провести математичний диктант і його перевірку, продемонструвати способи розв'язання завдань тощо. Причому достатньо одного лише комп'ютера та проектора для використання презентацій на уроці математики.

Формати використання ІКТ при вивченні математики:

• самостійне навчання учнів;
• використання тренінгових (тренувальних) програм;
• використання діагностичних і контролюючих матеріалів;
• виконання домашніх самостійних і творчих завдань;

• використання комп'ютера для обчислень, побудови графіків;

• використання програм, що імітують досліди, лабораторні роботи, застосування теорії у практичній діяльності людини;

• використання ігрових і цікавих програм;

• використання інформаційно-довідкових програм.[31]

Уроки з комп'ютерною підтримкою викликають велику зацікавленість учнів, дозволяють урізноманітнити види діяльності учнів, дають можливість ефективно використовувати диференційований підхід у навчальному процесі. Комп'ютер сприяє не тільки розвитку самостійності, творчих здібностей учнів, а й дозволяє змінити саму технологію надання освітніх послуг, зробити урок більш наочним і цікавим. Інформаційні технології забезпечують інтенсифікацію діяльності вчителя і учнів на уроці, сприяє розвитку спеціальної або загальної обдарованості, посилює міжпредметні зв'язки. Все це дає можливість покращити якість навчання.

Інформаційна технологія може бути реалізована в трьох варіантах:

✓ як "проникаюча" (використання комп'ютера при вивченні окремих тем, розділів, для вирішення окремих дидактичних завдань);

✓ як основна (найбільш значима у використовуваній педагогічній технології);

✓ як монотехнологія (коли усе навчання і управління навчальним процесом, включаючи усі види діагностики, контролю і моніторингу, спираються на застосування комп'ютера).

Звичайно, ідеальний варіант – монотехнологічне навчання, тобто самостійна навчальна робота дитини в інтерактивному середовищі навчання, використовуючи готові електронні учбові курси. Проте, як показує практика, як з об'єктивних так і суб'єктивних причин, ІКТ використовується у першому варіанті, тобто не в системі, а при певній можливості чи необхідності.

Інформаційні технології, і комп'ютер зокрема, може використовуватися в різних складових освітнього процесу:

- ✓ створення уроків з використанням ІТ;
- ✓ творча проектна робота учнів;
- ✓ дистанційне навчання, конкурси;
- ✓ бібліотека, ресурси Інтернет;
- ✓ соціально - психологічний моніторинг становлення особи учня;
- ✓ творча взаємодія з педагогами.[29]

Ефективність застосування нових інформаційних технологій на уроках математики обумовлена наступними факторами:

- різноманітність форм представлення інформації;
- висока степінь наочності;
- можливість моделювання за допомогою комп’ютера різноманітних об’єктів і процесів;
- звільнення від рутинної роботи, що відвертає увагу від засвоєння основного змісту;
- можливість організації колективної та індивідуальної дослідницької роботи;
- можливість диференціювати роботу учнів у залежності від рівня підготовки, пізнавальних інтересів та ін.; використовуючи сучасні інформаційні технології;
- можливість організувати комп’ютерний оперативний контроль і допомогу з боку вчителя;
- можливості комп’ютера дозволяють учню активно приймати участь у процесі пізнання.

Сьогодення вимагає від учителя великих змін. Учитель повинен не просто надавати учням певних знань, а навчити їх мислити, структурувати інформацію та цілеспрямовано відбирати необхідне. Сучасний учитель повинен нести учням не просто нові знання, а новий тип оволодіння інформацією. В зв’язку з цим, особливого значення набуває переорієнтація мислення вчителя на усвідомлення принципово нових вимог до його педагогічної діяльності, до його готовності щодо використання засобів ІКТ у професійній діяльності. Адже, сучасні освітні інформаційні технології – це потужний стимул, який дозволяє розвивати пізнавальну активність учнів, покращує якість знань, сприяє розвитку навичок самостійного отримання знань.

РОЗДІЛII.МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТАТИСТИКИ З ДОПОМОГОЮ НІТ

2.1 Методика вивчення основних теоретичних положеньз допомогою НІТ

При вивченні елементів статистики, його основних теоретичних положень, доцільно використовувати GRAN 1.

Нехай в результаті спостережень за деяким процесом чи явищем, які при необхідності можуть бути повторені досить велику кількість разів, отримано певний набір значень деякої характеристики цього процесу чи явища: x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$. Надалі досліджувані величини (характеристики) будемо позначати великими літерами X, Y, Z і т.п. Отримані значення величини X будемо називати варіантами.

Набір отриманих значень називають статистичною вибіркою з множини можливих значень досліджуваної характеристики. Точна закономірність, яку задовольняє досліджувана характеристика, невідома, тому неможливо передбачати, які саме її значення будуть спостерігатися в той чи інший момент. Цю закономірність принаймні наближено і необхідно встановити за результатами аналізу набору спостережених значень.

Наприклад, неможливо наперед точно встановити, який саме врожай певної культури буде отриманий, якщо внести ту чи іншу кількість добрив на 1 гектар землі, тому що неможливо точно передбачити і врахувати вплив усіх факторів, від яких залежить врожай - вологість і температура повітря і ґрунту, сусідство з іншими культурами, наявність корисних комах і шкідників і т.д.

Можна навести й інші приклади процесів і явищ, значення окремих характеристик яких неможливо передбачити в наперед вказані моменти часу.

Зауважимо однак, що якщо проведена досить велика кількість спостережень, то на їх підставі з великою мірою впевненості можна говорити про деякі межі, в яких слід очікувати значення спостережуваної характеристики.

Розглянемо наступний приклад. Нехай є шестигранний кубик зі зміщеним центром мас, причому деяким чином (наприклад, на підставі дуже великого числа спостережень) встановлено, що різні “цифри” на верхній грані випадають з різними частотами: “1”– у $p_1 = 5\%$ спостережень (частота 0.05), “2” – у $p_2 = 5\%$ (частота 0.05), “3” – у $p_3 = 10\%$ (частота 0.10), “4” – у $p_4 = 10\%$ (частота 0.10), “5” – у $p_5 = 20\%$ (частота 0.20), “6” – у $p_6 = 50\%$ спостережень (частота 0.50). Будемо говорити, що в розглянутому експерименті відбулася подія E_1, якщо на верхній грані кубика виявилося “1”, E_2 – якщо “2”, ... , E_6 – якщо “6”. Позначимо через Ω множину всіх можливих наслідків, тобто $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. При цьому самі E_i можна трактувати як одноелементні підмножини множини Ω. Тоді частота попадання в будь-яку підмножину $A \subset \Omega$ дорівнює

$$P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} p_i$$

(тут індекс n вказує на кількість спостережень). Якщо при цьому проводити механічну аналогію між розподілом частот по множині Ω і розподілом одиничної маси так, що на точку E_i припадає маса p_i, то тоді в механічній інтерпретації $P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} p_i$ є маса, що припадає на множину A, тобто сума мас, що припадають на точки E_i з множини A. Слід зауважити, що при обчисленні частот усі формули цілком аналогічні до тих, які використовуються при обчисленні мас при їх відповідному розподілі по деякій множині точок.

Надалі будемо вважати, що в результаті кожного спостереження (випробування) з деякої множини Ω елементів (точок) навмання (незалежно від спостерігача) вибирається один єдиний елемент (точка). Поява того чи іншого елемента ототожнюється з відбуванням відповідної елементарної події. Тим самим встановлюється взаємно однозначна відповідність між елементами розглянутої множини і елементарними подіями, що дає підстави розглянуту множину елементів і відповідну множину елементарних подій вважати еквівалентними. Множину елементарних подій будемо позначати через Ω. Наприклад, при підкиданні монети вибирається один елемент із двохелементної множини Ω={“герб”, “цифра”}; при підкиданні шестигранного грального кубика вибирається один елемент із множини Ω ={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}; при стрілянні в круглу мішень радіуса 1 відстань точки влучення від центра мішені може набувати будь-якого значення в межах від 0 до 1 (мається на увазі, що влучення за межі мішені неможливе), тому в цьому випадку можна вважати, що навмання вибирається точка з нескінченної множини розмірності 1 – відрізка Ω=[0, 1]; якщо при стрілянні в мішень фіксуються координати x і y точки влучення, тоді можна вважати, що навмання вибирається точка з нескінченної множини розмірності 2 – круга $\Omega = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \le 1 \}$ і т.д.

Якщо навмання обрана в результаті випробування (спостереження) точка належить деякій підмножині A множини Ω, тоді говорять, що відбулася подія A. Таким чином, події ототожнюються з деякими підмножинами множини Ω. Очевидно, подія, яка відповідає множині Ω, відбувається при кожному випробуванні, тому таку подію називають вірогідною. Подію, яка відповідає порожній множині $\varnothing$, називають неможливою.

Над подіями вводяться такі ж операції, як і над множинами:

1. Сума подій A і B означає об’єднання відповідних множин і позначається $A+B$ (чи $A \cup B$) .
2. Добуток подій A і B означає перетин відповідних множин і позначається AB (чи $A \cap B$).
3. Різниця подій A і B означає різницю відповідних множин і позначається $A \setminus B$.
4. Подія $\overline{A}$, протилежна до події A, означає доповнення множини A до множини Ω, тобто $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

При цьому події A і B вважаються рівними (еквівалентними), якщо кожен елемент множини A належить множині B, тобто $A \subset B$, і в той же час кожен елемент множини B належить множині A, тобто $B \subset A$. У цьому випадку пишуть $A = B$.

Нехай спостерігається деяка подія A і проведена серія з n випробувань, у яких могла відбутися подія A. Нехай $k_n(A)$ – кількість випробувань, у яких подія A відбулася.

Відношення $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{n}$ називають статистичною імовірністю (або відносною частотою) події A в розглянутій серії з n випробувань. Саме число $k_n(A)$ називають абсолютною частотою появи події A в серії з n випробувань.

Очевидно, $P_n^*(A)$ має наступні властивості:

1. $0 \le P_n^*(A)$.
2. Якщо $AB = \varnothing$, то $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B)$.
3. $P_n^*(\Omega) = 1$.

Властивості 1–3 називають основними. З них випливають всі інші властивості статистичної ймовірності:

4. Якщо $\overline{A} = \Omega \setminus A$, то $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$.
5. $P_n^*(\varnothing) = 0$, де $\varnothing = \overline{\Omega} = \Omega \setminus \Omega$.
6. Якщо $A \subset B$, то $P_n^*(A) \le P_n^*(B)$.
7. $0 \le P_n^*(A) \le 1$, тому що $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

З 2 випливає, що для будь-яких $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB)$, оскільки $A + B = A + (B \setminus AB)$, $B = AB + (B \setminus AB)$, $A(B \setminus AB) = \varnothing$, $AB(B \setminus AB) = \varnothing$.

Як відомо, цілком аналогічні властивості має ймовірність $P(A)$ події A. Відомо також, що (відповідно до закону великих чисел) при досить великому n частота $P_n^*(A)$ появи події A в серії з n випробувань близька до ймовірності $P(A)$ цієї події і зі збільшенням числа n випробувань розходження між значеннями ймовірності $P(A)$ і частоти $P_n^*(A)$ зменшується. Тому вивчення властивостей частот $P_n^*(A)$, їх розподілів, правил обчислення частоти $P_n^*(A)$

появи події A при відомому розподілі частот по множині елементарних подій Ω дає можливість скласти досить чіткі уявлення про відповідні властивості ймовірностей, їхні розподіли, правила обчислення ймовірностей $P(A)$ події A при відомому розподілі ймовірностей по множині елементарних подій Ω.

Нехай проведена досить велика серія випробувань, в кожному з яких могла відбутися одна з елементарних подій Е з деякої множини елементарних подій Ω, і в серії спостережень відбулися елементарні події E_{cn1}, E_{cn2}, ... , $E_{cn\,n}$, де $E_{cn\,i}$ – елементарна подія, що відбулася в i-му випробуванні.

Будемо при цьому розрізняти випадки, коли множина Ω скінченна – $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$, і коли множина Ω нескінченна типу $\Omega = [a, b)$.

Наприклад, при підкиданні шестигранного кубика, коли $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, ($E_i$ =“ i ”), цілком можливо, що в деякій серії випробувань могли бути отримані результати:

$E_{cn1} = E_5 =$ “5”	$E_{cn2} = E_6 =$ “6”	$E_{cn3} = E_6 =$ “6”
$E_{cn4} = E_6 =$ “6”	$E_{cn5} = E_4 =$ “4”	$E_{cn6} = E_3 =$ “3”
$E_{cn7} = E_5 =$ “5”	$E_{cn8} = E_2 =$ “2”	$E_{cn9} = E_6 =$ “6”
$E_{cn10} = E_4 =$ “4”	$E_{cn11} = E_5 =$ “5”	$E_{cn12} = E_6 =$ “6”
$E_{cn13} = E_5 =$ “5”	$E_{cn14} = E_6 =$ “6”	і т.д.

Слід підкреслити, що в даному випадку ніякі інші результати випробувань, окрім появи однієї із шести можливих елементарних подій $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$, бути отримані не могли.

Нехай проведено n випробувань і подія E_1 відбулася m_1 разів, E_2 – m_2 разів, ..., E_k – m_k разів, причому $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

Тоді $P_n^*(E_1) = \dfrac{m_1}{n}$, $P_n^*(E_2) = \dfrac{m_2}{n}$, ..., $P_n^*(E_k) = \dfrac{m_k}{n}$.

Очевидно, $P_n^*(E_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} P_n^*(E_i) = 1$.

При цьому частота $P_n^*(A)$ попадання в будь-яку підмножину $A \subset \Omega$ за результатами даних n спостережень дорівнює

$$P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} P_n^*(E_i) \ .$$

У такий спосіб отриманий розподіл відносних частот по скінченній множині $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$ елементарних подій.

Таблицю виду

E_i	E_1	E_2	...	E_k
$P_n^*(E_i)$	$P_n^*(E_1)$	$P_n^*(E_2)$	...	$P_n^*(E_k)$

називають рядом розподілу відносних частот (статистичних ймовірностей) на множині елементарних подій $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$.

Якщо кожній елементарній події поставити у взаємно однозначну відповідність деяку точку на осі Ox, так що елементи E_i множини Ω по суті лише перепозначаються новими позначеннями x_i, то тоді сукупність спостережених значень x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$ називають вибірковою сукупністю чи вибіркою обсягу n, елементи вибірки називають варіантами, а впорядковану за спаданням вибірку називають варіаційним рядом.

У наведеному прикладі серії із 14 випробувань з гральним кубиком варіаційний ряд буде мати вигляд 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, а ряд розподілу відносних частот – вигляд:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

Зауважимо, що на практиці до таблиці заносять лише варіанти (елементарні події), що були спостережені хоча б один раз у проведеній серії випробувань. Разом з тим занесення до таблиці варіант, що не були, але могли бути спостережені, ніяк не впливає на результати наступних обчислень частот попадання в будь-які підмножини множини Ω, деяких числових характеристик розподілу частот і ін.

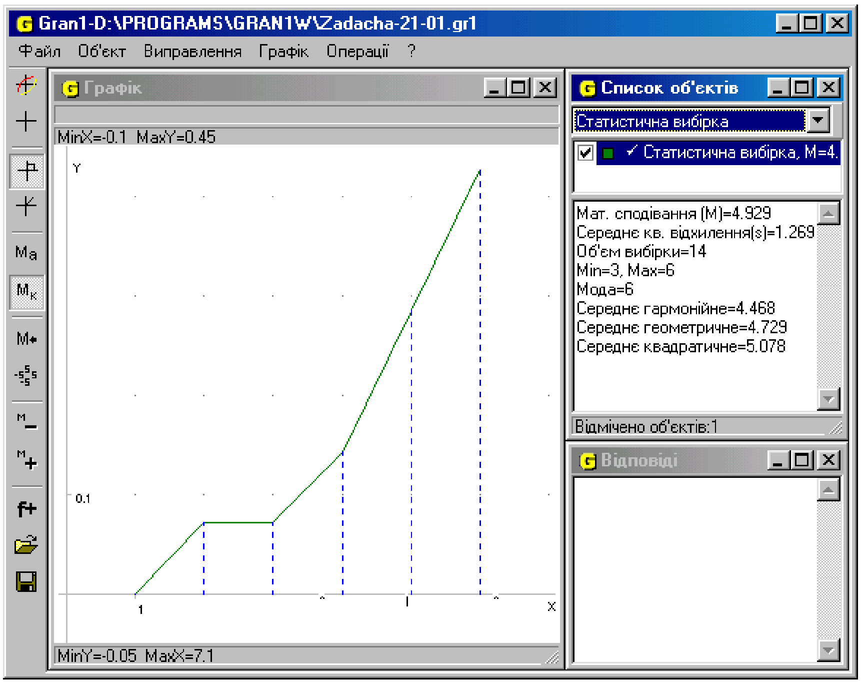


Рис. 2.1.1

Якщо на координатній площині побудувати точки $(x_i, P_n^*(\{x_i\}))$ і з'єднати їх ламаною лінією, то одержимо так званий многокутник розподілу статистичних ймовірностей (або полігон відносних частот, рис. 2.1.1).

Розподіл відносних частот (статистичних ймовірностей) по скінченній множині $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$ елементарних подій E_i будемо називати дискретним (або точковим) розподілом. Аналогічні назви зберігаються й у випадку, якщо множина $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k, ...\}$ зчисленна, тобто її елементи можна перенумерувати за допомогою всіх натуральних чисел.

Якщо множина Ω складається із скінченного числа елементів (точок) $x_1, x_2, \dots, x_k$, а до таблиці заносять абсолютні частоти m_i появи значень x_i, то результати спостережень можна подати у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_k

,

де x_i $(i=1,2,\dots,k)$ – можливі значення величини, що спостерігається, m_i – число появ значення x_i серед усіх спостережених значень. При цьому не виключається, що $m_i=0$ для деяких x_i.

Як правило, значення $x_1, x_2, \dots, x_k$ розташовують у порядку зростання. При цьому

$$x_1=\min_{1\le i\le n}(x_i)=x_{\min}, \quad x_k=\max_{1\le i\le n}(x_i)=x_{\max}.$$

Так побудовану таблицю називають рядом розподілу абсолютних частот по множині значень досліджуваної величини. Очевидно, сума абсолютних частот m_i, $(i=1,2,\dots,k)$, дорівнює n.

Якщо замість абсолютної частоти m_i значення x_i у таблицю заносять його відносну частоту $p_i^*=\dfrac{m_i}{n}$:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

,

то таку таблицю називають рядом розподілу статистичних ймовірностей (або відносних частот) по множині можливих значень досліджуваної величини. Очевидно, сума відносних частот завжди дорівнює 1.

Нехай тепер Ω – нескінченна множина елементарних подій, для якої існує взаємно однозначна відповідність між її елементами і точками деякого інтервалу виду $[a,b)$, так що будь-яке значення $x\in[a,b)$ може бути отримане під час випробувань. Нехай в результаті якоїсь (досить тривалої) серії випробувань відбулися ті чи інші елементарні події, у відповідність яким поставлені значення x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$, ($x_{cni} \in [a,b]$). У цьому випадку будувати таблицю, подібну до ряду розподілу частот, і взагалі порушувати питання про розподіл частот по будь якій скінченній множині некоректно, оскільки частота попадання в більшість точок буде дорівнювати нулю і лише для деяких (спостережених) буде відмінною від нуля, хоч немає ніяких підстав віддавати перевагу спостереженим точкам перед неспостереженими.

Зокрема, якщо спостережень дуже багато, а значення, що спостерігаються, вимірювати з великою точністю, то швидше за усе всі спостережені значення будуть різними, а відносна частота кожного з них буде близькою до нуля в межах точності обчислень, особливо якщо така точність невелика.

Оскільки в результаті спостережень можуть бути отримані будь-які значення з інтервалу $[a,b)$, доцільно поділити інтервал $[a,b)$ на скінченну кількість досить дрібних інтервалів $[a_0,a_1), [a_1,a_2), \dots , [a_{k-1},a_k)$ однакової довжини $h = \dfrac{b-a}{k}$, так що $a_0 = a$, $a_k = b$, $a_i = a_{i-1} + h = a_{i-1} + \dfrac{a_k - a_0}{k}$, і знайти відносні частоти попадання в такі інтервали.

Таблицю виду

$[a_{i-1}, a_i)$	$[a_0, a_1)$	$[a_1, a_2)$	...	$[a_{k-1}, a_k)$
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	$P_n^*([a_0, a_1))$	$P_n^*([a_1, a_2))$	...	$P_n^*([a_{k-1}, a_k))$

називають неперервним (або інтервальним) розподілом відносних частот.

Якщо тепер на координатній площині xOy побудувати графік кусково сталої функції $y = f_n^*(x)$, рівної нулю за межами проміжка $[a_0,\ a_k)$ і $\dfrac{1}{h} P_n^*([a_{i-1},\ a_i)) = \dfrac{P_n^*([a_{i-1}, a_i))}{a_i - a_{i-1}}$ на проміжку $[a_{i-1},a_i)$, $i = 1, 2, \dots , k$, тобто

$$f_n^*(x)=\begin{cases}\dfrac{P_n^*([a_{i-1},a_i))}{h} & \text{при } x\in[a_{i-1},a_i),\, i=1,2,\dots,k,\\ 0 & \text{при } x\overline{\in}[a_{i-1},a_i),\end{cases}$$

то одержиться так звана гістограма неперервного (інтервального) розподілу відносних частот спостережених значень досліджуваної величини (рис. 2.1.2). Функцію $f_n^*(x)$ називають щільністю розподілу статистичних імовірностей (відносних частот) на проміжку $[a,b)$.

Оскільки в геометричній інтерпретації при $x\in[a_{i-1},a_i)$ значення $f_n^*(x)\cdot h=P_n^*([a_{i-1},a_i))$ є площа прямокутника, довжина основи якого дорівнює h, а висота $f_n^*(x)=\frac{1}{h}P_n^*([a_{i-1},a_i))$, то $P_n^*([a_{i-1},a_i))$ можна подати у вигляді:

$$P_n^*([a_{i-1}.a_i])=\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx .$$

Очевидно, функція $y=f_n^*(x)$ має властивості:

1. $f_n^*(x)\geq 0$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx=\sum_{i=1}^{k}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx=\sum_{i=1}^{k}P_n^*([a_{i-1},a_i))=1$.

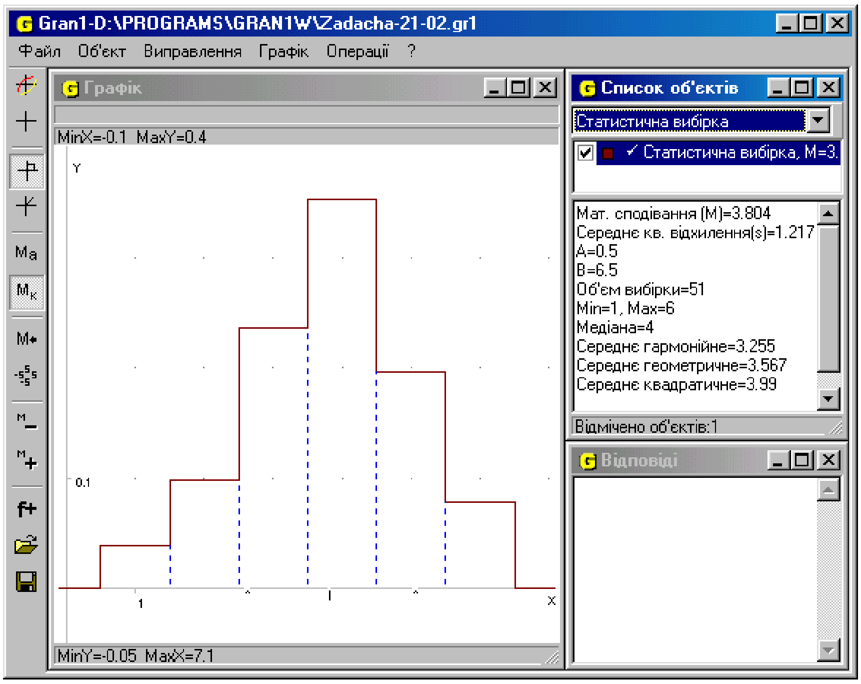


Рис. 2.1.2

В геометричній інтерпретації це означає, що площа під графіком функції $y = f_n^*(x)$ (і над віссю Ox) завжди дорівнює 1.

Якщо тепер розглядати підмножину $A \subset \Omega$, яку можна подати як об'єднання деяких із зазначених інтервалів, тоді

$$P_n^*(A) = \int_A f_n^*(x)dx = \sum_{[a_{i-1}, a_i) \subset A} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx = \sum_{[a_{i-1}, a_i) \subset A} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) .$$

При неперервному (інтервальному) розподілі відносних частот природно вважати, що частота попадання в підінтервал $[\alpha_i, \beta_i) \subset [a_{i-1}, a_i)$ дорівнює відповідній частині від $P_n^*[a_{i-1}, a_i)$:

$$P_n^*([\alpha_j, \beta_j)) = \frac{\beta_j - a_j}{a_i - a_{i-1}} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) = \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f_n^*(x)dx .$$

Нехай інтервали $[a_{i-1}, a_i)$ досить малі і крім того для довільних інтервалів $[\alpha_i, \beta_i) \subset [a_{i-1}, a_i)$, які не перетинаються, $P_n^*([\alpha_j, \beta_j)) = \frac{\beta_j - \alpha_j}{a_i - a_{i-1}} P_n^*([a_{i-1}, a_i))$, а множина (подія) A складена з таких інтервалів, тобто $A = \bigcup_j [\alpha_j, \beta_j)$.

Тоді й у цьому випадку (рис. 2.1.3)

$$P_n^*(A) = \int_A f_n^*(x)dx = \sum_{[\alpha_i, \beta_i) \subset A} P_n^*([\alpha_i, \beta_i)) .$$

Варто підкреслити, що як події можна розглядати не будь-які підмножини множини $\Omega = [a, b)$, а лише такі, які належать до сукупності σ так званих вимірних підмножин множини Ω.

Сукупність σ має наступні властивості:

1. $\Omega \in \sigma$;
2. якщо $A \in \sigma$, то і $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \sigma$;
3. якщо $A_i \in \sigma, i = 1, 2, 3, ...,$ то і $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \sigma,\ n \ge 1,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma$.

З зазначених властивостей випливає, що разом з будь-якими множинами A і B сукупності σ належать також $A \bigcup B,\ A \bigcap B, A \setminus B,$ разом з множинами

A_i, $i=1,2,3,...$ сукупності σ належать $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Зокрема сукупності σ належать всілякі об'єднання скінченного чи нескінченного числа проміжків виду $[\alpha_j, \beta_j)$, $[\alpha_j, \beta_j]$, $(\alpha_j, \beta_j]$, (α_j, β_j), що попарно не перетинаються.

Будь-якій вимірній множині $A \in \sigma$, тобто події A, можна за деяким правилом приписати відносну частоту (статистичну імовірність) $P_n^*(A)$ (імовірнісну міру множини A). Зокрема, якщо $A = \bigcup_j [\alpha_j, \beta_j)$, де $[\alpha_j, \beta_j) \subset [a_{i-1}, a_i)$, , $[\alpha_j, \beta_j) \cap [\alpha_k, \beta_k) = \varnothing$ при $j \neq k$, то

$$P_n^*(A) = \sum_j P_n^*([\alpha_j, \beta_j)) = \int_A f_n^*(x)dx \text{ , де}$$

$$P_n^*([\alpha_j, \beta_j)) = \frac{\beta_j - \alpha_j}{a_i - a_{i-1}} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) = (\beta_j - \alpha_j) f_n^*(x), x \in [\alpha_j, \beta_j).$$

Якщо $\overline{A} = \Omega \setminus A = [a,b) \setminus \bigcup_j [\alpha_j, \beta_j)$, то

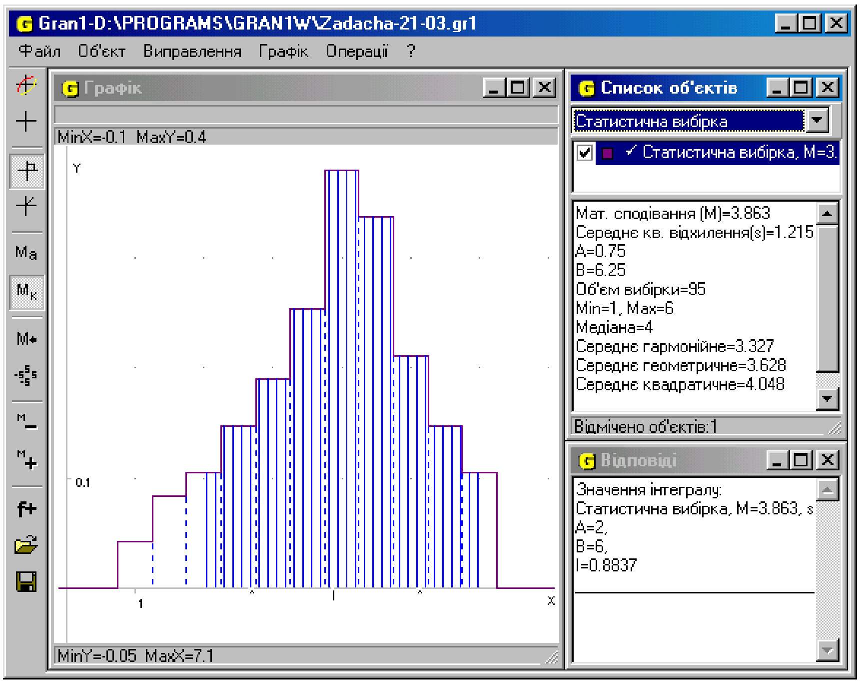


Рис. 2.1.3

$$P_n^*(\overline{A}) = 1 - \sum_j P_n^*([\alpha_j, \beta_j)) = \int_{[a,b)} f_n^*(x)dx - \int_A f_n^*(x)dx =$$

$$= \int_{[a,b)\setminus A} f_n^*(x)dx = \int_{\overline{A}} f_n^*(x)dx .$$

Виявляється, будь-який інтервал $[a,b)$ разом з вимірними підмножинами, що належать до сукупності σ, містить і підмножини, що не задовольняють вказані властивості і таким чином не належать до сукупності σ. Ці підмножини називаються невимірними. Невимірні підмножини множини Ω не розглядаються як події.

Таким чином, функція $f_n^*(x)$ описує неперервний (інтервальний) розподіл відносних частот по нескінченній множини $\Omega = [a,b)$ і є повним аналогом щільності розподілу ймовірностей на проміжку $[a,b)$ чи аналогом щільності розподілу фізичної маси уздовж деякого стержня, розташованого вздовж осі Ox так, що лівий кінець його співпадає з точкою, що має абсцису a, а правий – із точкою, що має абсцису b.

Найбільш універсальним засобом для описування як дискретних, так і неперервних розподілів відносних частот є так звана функція розподілу відносних частот (статистичних ймовірностей):

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty,\ x)) .$$

При дискретному розподілі відносних частот по скінченній множині точок $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ функція розподілу виражається рівністю

$$F_n^*(x) = \sum_{x_i < x} P_n^*(\{x_i\}) ,$$

тобто $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le x_1, \\ \sum\limits_{k=1}^{i} P_n^*(\{x_k\}), \text{ якщо } x_i < x \le x_{i+1},\ i \in \{1,2,...,k-1\} \\ 1, \text{ якщо } x_k < x, \end{cases}$,

а при неперервному розподілі на інтервалі $[a,b)$ – рівністю

$$F_n^*(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)dt \ .$$

При цьому $P_n^*([-\infty,x))$ розуміється як відносна частота попадання на проміжок $(-\infty,x)$, тобто лівіше точки x. Зокрема якщо розглядається дискретний розподіл відносних частот по скінченній множині $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_k\}$, то для довільного $x^{(0)}<\min\limits_{1\le i\le k} x_i$ буде $P_n^*((-\infty,x^{(0)}))=0$. Якщо ж розглядається неперервний розподіл відносних частот на інтервалі $[a,b)$, то $P_n^*((-\infty,x^{(0)}))=0$ для будь-якого $x^{(0)}\le a$. Тому при неперервному розподілі відносних частот на інтервалі $[a,b)$ замість $\int\limits_{-\infty}^{x} f_n^*(t)dt$ можна розглядати $\int\limits_{a}^{x} f_n^*(t)dt$, оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_n^*(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{a} f_n^*(t)dt+\int\limits_{a}^{x} f_n^*(t)dt=0+\int\limits_{a}^{x} f_n^*(t)dt\,.$$

Очевидно, при дискретному розподілі відносних частот значення функції $F_n^*(x)$ змінюються (зростають) лише в точках x_i (поставлених у взаємно однозначну відповідність елементарним подіям E_i) – при переході через точку x_i (зліва направо) значення функції $F_n^*(x)$ зростає на $P_n^*(\{x_i\})$ і далі залишається незмінним до наступної точки x_{i+1} (це випливає з означення функції $F_n^*(x)$) (рис. 2.1.4).

При неперервному розподілі відносних частот функція розподілу $F_n^*(x)$ змінюється неперервно, лінійно зростаючи на кожному із проміжків $[a_{i-1},a_i)$ зі швидкістю відповідно $\frac{1}{a_i-a_{i-1}}P_n^*([a_{i-1},\,a_i)=f_n^*(x),\ x\in[a_{i-1},\,a_i)$ (рис. 2.5).

Оскільки при $x\in[a_{i-1},\,a_i)$ функція $f_n^*(x)$ набуває сталого значення, рівного $\frac{1}{a_i-a_{i-1}}P_n^*([a_{i-1},\,a_i))$, то при $x\in[a_{i-1},\,a_i)$ за властивістю адитивності інтеграла

$$F_n^*(x)=F_n^*(a_{i-1})+\frac{(x-a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}P_n^*([a_i,a_{i-1}))=F_n^*(a_{i-1})+f_n^*(x)(x-a_{i-1})\,.$$

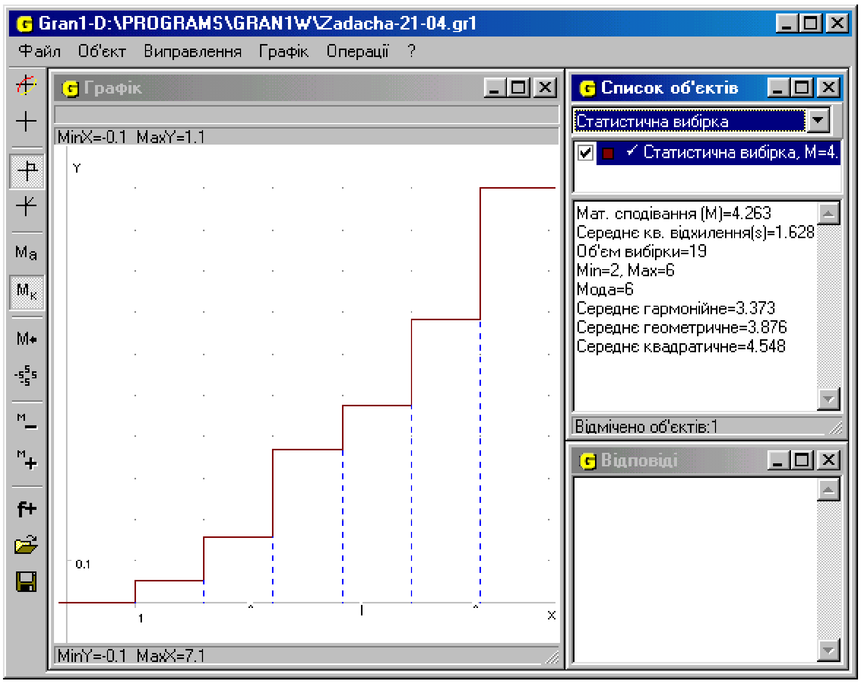


Рис. 2.1.4

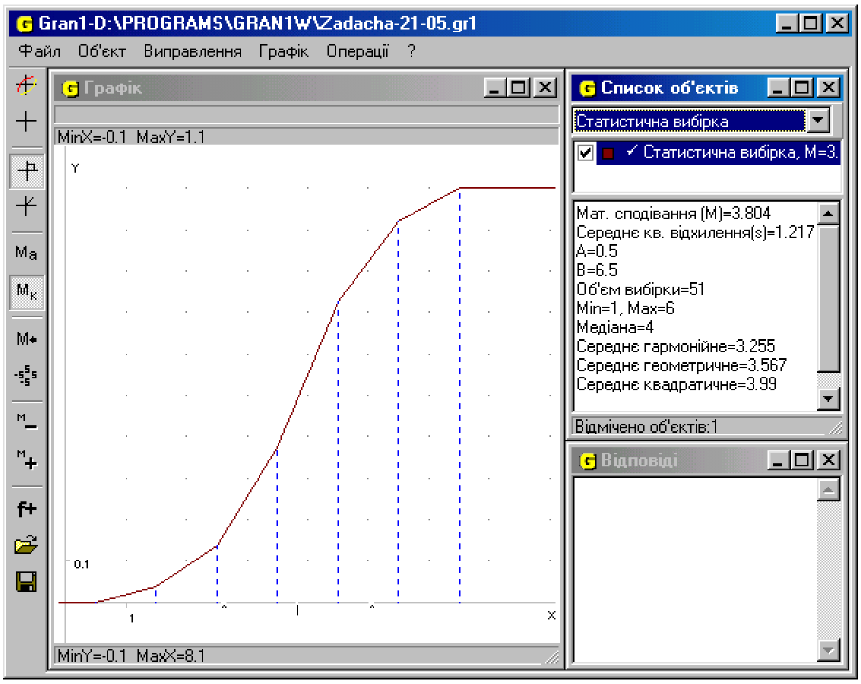


Рис. 2.1.5

Зокрема звідси випливає, що при неперервному розподілі відносних частот $f_n^*(x) = \dfrac{d}{dx} F_n^*(x)$ для всіх $x \neq a_i,\ i = 0, 1, \ldots, k$ (при дискретному розподілі щільність розподілу відносних частот втрачає зміст).

При неперервному розподілі частот функція $F_n^*(x)$ на проміжках $[a_{i-1}, a_i)$ зростає лінійно, тобто для $x \in [a_{i-1}, a_i)$

$$F_n^*(x) = F_n^*(a_{i-1}) + \frac{F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}(x - a_{i-1}),$$

тому на інтервалі (a_{i-1}, a_i)

$$(F_n^*(x))' = \frac{F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = \frac{P_n^*([a_{i-1}, a_i))}{a_i - a_{i-1}} = f_n^*(x).$$

Отже у внутрішніх точках проміжка $[a_{i-1}, a_i)$ функція $f_n^*(x)$ характеризує швидкість зростання функції $F_n^*(x)$, тобто $f_n^*(x)$ може розглядатися майже всюди як похідна від функції $F_n^*(x)$, а $F_n^*(x)$ – як первісна від функції $f_n^*(x)$.

Крім самих розподілів відносних частот важливе значення мають деякі числові характеристики цих розподілів.

Однією з найважливіших числових характеристик розподілу відносних частот спостережених значень $x_{cn\,i}$ є їх середнє арифметичне

$$M_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{cn\,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(\{x_i\}) \ .$$

Це середнє арифметичне буде ближче до значень, що зустрічаються частіше, ніж до значень, що зустрічаються рідко. Тому число M_n^* є значенням, поблизу якого в першу чергу слід очікувати одержання більшості значень у майбутніх спостереженнях, і є у певному розумінні центром розсіювання відносних частот спостережених значень досліджуваної величини.

Крім центра розсіювання важливими є характеристики величини розсіювання (чи скупченості), тобто наскільки далеко можуть бути віддалені (у переважній більшості випадків) спостережені значення досліджуваної величини від центра розсіювання, у якому діапазоні (у переважній більшості випадків) вони будуть знаходитися і т.п.

Однією з характеристик величини розсіювання є розмах вибірки $x_{\max} - x_{\min}$.

Однак більш істотною характеристикою розсіювання є так зване середнє квадратичне відхилення спостережених значень досліджуваної величини від M_n^*, тобто від центра розсіювання. Таке середнє квадратичне відхилення обчислюється за формулою

$$\sigma_n^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{cn\,i} - M_n^*)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - M_n^*)^2 P_n^*(\{x_i\})}\ .$$

Справа в тому, що найбільш істотними для визначення величини розсіювання частот значень досліджуваної величини (при досить великому числі спостережень) будуть ті значення, які у вибірці зустрічаються найчастіше. Значення ж, частота появи яких у вибірці дуже мала, практично не впливають на характеристику розсіювання частот основної маси спостережених значень досліджуваної величини. Тому характеристика $x_{\max} - x_{\min}$ може виявитися дещо завищеною в порівнянні з більш істотною характеристикою σ_n^*.

Нехай, наприклад, серед 10000 спостережених значень 1 раз зустрічається значення –1, 1 раз – +1, 9998 разів – 0. Очевидно $M_n^* = 0$. Природно вважати, що розсіювання частот окремих значень досліджуваної величини біля центра розсіювання $M_n^* = 0$ практично відсутнє:

$$\sigma_n^* = \sqrt{(-1-0)^2\,\frac{1}{10000} + (0-0)^2\,\frac{9998}{10000} + (1-0)^2\,\frac{1}{10000}} = = \sqrt{0.0002} \approx 0.014 \approx 0\ ,$$

хоча $x_{\max} - x_{\min} = 1 - (-1) = 2$. У даному випадку спостережені значення –1 і +1 несуттєві і практично не впливають на характеристики розподілу частот основної маси спостережених значень.

Іноді середнє значення характеризують не середнім арифметичним, а середнім гармонійним:

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{cn\,i}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}P_n^*(\{x_i\})}.$$

Така характеристика може бути зручнішою у випадку, наприклад, визначення середньої швидкості руху деякого тіла вздовж прямої від точки

$x=0$ до точки $x=n$, якщо відомо, що першу одиницю шляху тіло пройшло з швидкістю V_{cn1}, другу – з швидкістю V_{cn2}, … , n-у – з швидкістю $V_{cn\,n}$. Тоді час, витрачений на першу одиницю шляху, буде $\frac{1}{V_{cn\,1}}$, на другу – $\frac{1}{V_{cn\,2}}$, ... , на n-у – $\frac{1}{V_{cn\,n}}$. Загальний час, витрачений на n одиниць шляху, дорівнює $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_{cn\,i}}$ Таким чином середня швидкість на всьому шляху довжиною n одиниць дорівнює

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_{cn\,i}}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_{cn\,i}}}\ .$$

Усі характеристики автоматично обчислюються у програмі GRAN 1, та висвітлюються у віконечку «Список об’єктів».

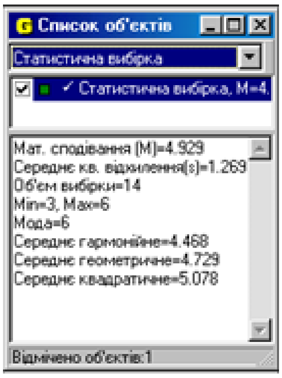


Рис. 2.1.6

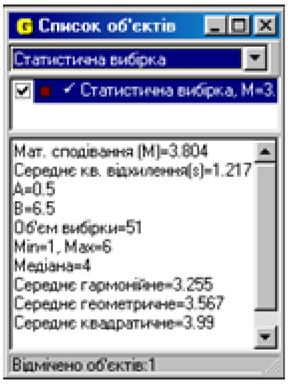


Рис.2.1.7

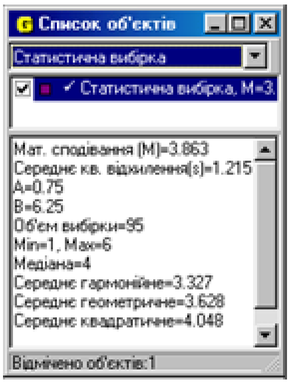


Рис.2.1.8

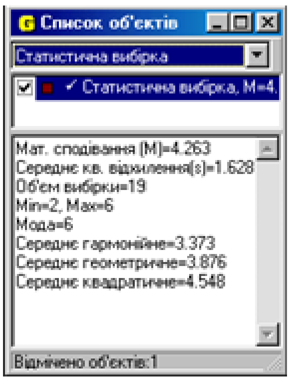


Рис.2.1.8

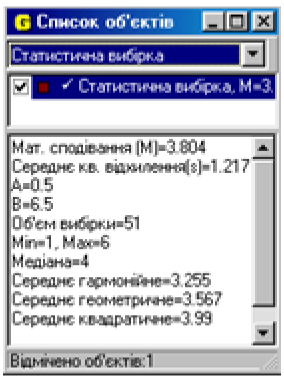


Рис.2.1.10

2.2 Методика розв'язування вправ за допомогою НІТ

Сучасний курс шкільної математики з необхідністю включає в себе вивчення стохастичної лінії. Ця тема не є тривіальною з позицій методики навчання математики, тому вчителі усіляко намагаються спростити її сприйняття учнями. Для цього залучаються різні засоби, серед яких окремою групою варто виділити спеціалізовані комп'ютерні середовища, у яких передбачено швидке моделювання і розрахунки характеристик різних вибірок. Разом з тим методична підтримка використання таких засобів обмежена, у періодичній літературі та провідних фахових виданнях ця проблема майже не піднімається та не систематизується, що ускладнює вибір як вчителів, так і учнів щодо залучення комп'ютерного інструментарію до розв'язування типових задач курсу статистики.

Аналіз науково-методичних джерел щодо використання інформаційних технологій при вивченні теорії ймовірності та основ статистики, а також відповідних програмних засобів та наявного у них інструментарію [1] дозволяє стверджувати, що найбільш зручними у використанні та найбільш вдалими з точки зору візуалізації результатів експериментів з випадковими величинами є програми *Gran1, Математический конструктор 6.0*, *GeoGebra 5.0.* На жаль інтерактивне середовище *Математический конструктор 6.0* є ліцензійним, і не кожний вчитель може дозволити собі використання його у класі, тому акцентуємо увагу на застосуванні програмних засобів *Gran1* та *GeoGebra 5.0.*

Програма *Gran1* (Україна, 1990 р., автори: М. І. Жалдак, О. В. Горошко) є продуктом вітчизняного виробництва і рекомендована Міністерством освіти і науки України як основна комп'ютерна підтримка вивчення шкільного курсу алгебри, початків аналізу та математичної статистики. Опис стохастичного інструментарію програми *Gran1* в повному обсязі та з детальними прикладами представлений у роботах М. І. Жалдака, Г. Ю. Михаліна, Ю. В. Горошка, І. М. Біляй [2-4].

Програма *GeoGebra 5.0* (Австрія, 2013 р., автор: MarkusHohenwarter) є вільно розповсюджуваним продуктом, а за кількістю публікацій про її використання та її поширенням у світі (в тому числі і в Україні) її можна вважати найпопулярнішою серед користувачів. Для роботи з випадковими величинами у середовищі *GeoGebra 5.0* передбачено вікно зі спеціальним набором інструментів, який зосереджено у вкладці *Таблицы и графики* бічної панелі *Перспективы*. Також це вікно доступне через меню інтерфейсу за шляхом *Вид/ Таблица*. Таблиця подібна до електронних таблиць *Excel*. Імена комірок можна використовувати у виразах та командах. У комірки можна вводити не лише числа, але й інші типи математичних об'єктів, які підтримує *GeoGebra 5.0* (наприклад, координати точок, функції, команди). Якщо це можливо, *GeoGebra 5.0* відразу виводить на екран графічне представлення об'єкта. Більш детально про інструменти програми можна дізнатись із меню допомоги. Про команди *GeoGebra 5.0*, які можна використовувати при вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики, детально зазначено у роботі [5-6].

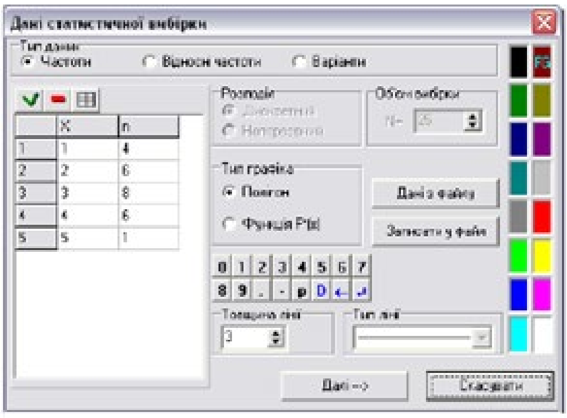
Попереднє вивчення комп'ютерних інструментів згаданих програм показало не лише розбіжність у їх кількості, а і особливостях задання об'єктів, особливостях задання параметрів вибірок, особливостях виведення результатів тощо. Це спонукало провести методичний аналіз розв'язань типових задач шкільного курсу статистики з наданням рекомендацій щодо застосування цих середовищ.

Для проведення порівняльного аналізу наведемо детальні розв'язання типових задач курсу статистики у середовищах *GeoGebra 5.0* і *Gran1.*

Задача 1. 25 учнів відповідали на питання тесту. Потім учні оцінили складність тесту від 1 (дуже простий) до 5 (дуже складний) і отримали результати: 4 учня оцінили тест як дуже простий (1); 6 учнів оцінили тест як простий (2); 6 учнів оцінили тест як складний (4); 1 учень оцінив тест як дуже складний (5). Інші учні вважали, що складність тесту була середня (3).

Для одержаних результатів побудувати полігон, функцію розподілу, обчислити математичне сподівання, моду та медіану. [7; 152]

Розв'язання (Gran1). Оскільки досліджується дискретний розподіл частот, то у вікні *Дані статистичної вибірки* вказуємо тип *Дискретний*, тип даних – *Частоти*, тип графіка – *Полігон* та введемо таблицю даних (рис. 2.2.1). В результаті у вікні *Список об'єктів* з'являється позначення щойно введеної вибірки і деякі її характеристики, які дають відповідь задачі (рис.2.2.2).



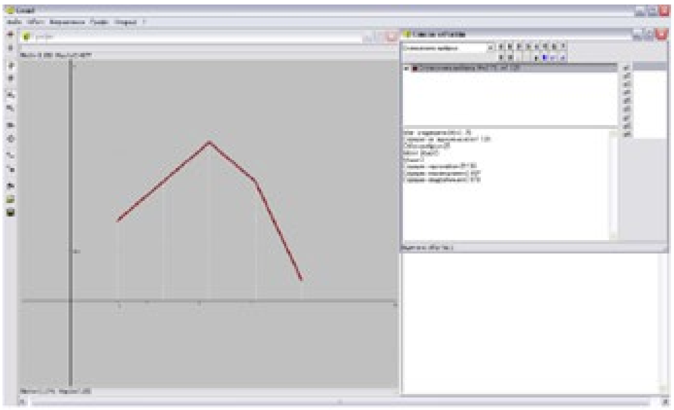


Рис. 2.2.1 Рис.2.2.2

Отримуємо, що математичне сподівання дорівнює 2.76, середнє квадратичне відхилення – 1.128, мода – 3. У вікні *Графік* також можна бачити візуалізовані характеристики вибірки: математичне сподівання *M* відмічене на осі абсцис вертикальною рискою, середнє квадратичне відхилення *S* – на осі абсцис позначками ^ (відзначені межі відрізка *[M – S,M + S])*.

Щоб побудувати графік функції розподілу відносних частот , потрібно звернутися до послуги *Об'єкт/Змінити...* та змінити тип графіка на *Функція* $F^*(x)$ і$F_n^*(x)$ потім знов побудувати графік (рис. 2.2.3).

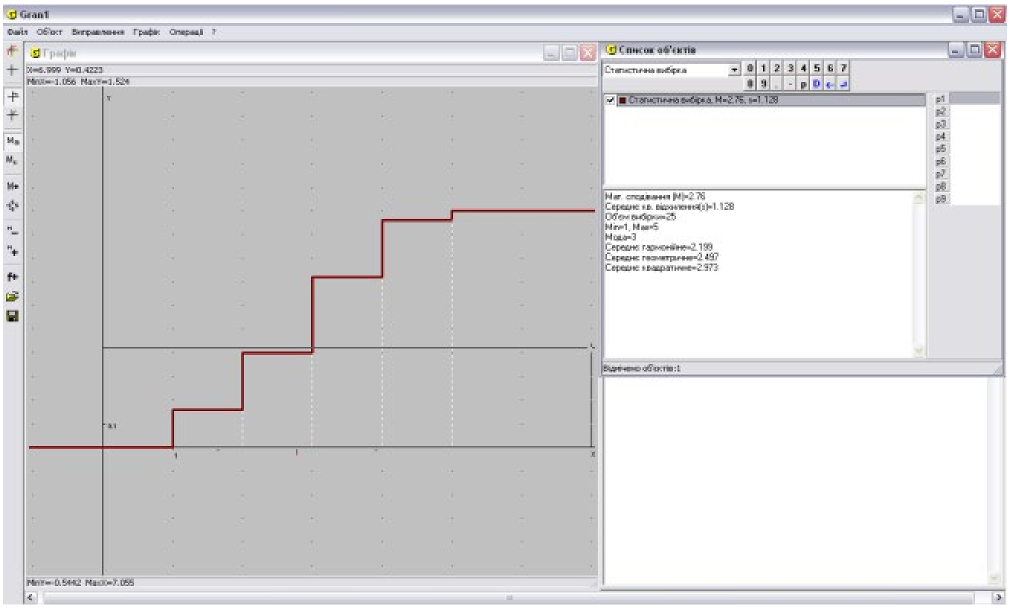


Рис. 2.2.3

Розв’язання (GeoGebra 5.0). Спочатку введемо дані в електронну таблицю. Виділимо заповнені комірки і, клацнувши правою кнопкою миші, виберемо *Створити список*. За допомогою інструменту *Аналіз однієї змінної* введемо дані (рис. 2.2.4) і натиснемо кнопку *Анализировать*, після чого з’явиться зображення гістограми. У вікні *Аналіз даних* оберемо *Показать статистические данные.* Отримаємо значення числових характеристик статистичної вибірки. У вікні *Гистограмма* вкажемо замість гістограми *Полигон частот* (рис. 2.2.5).

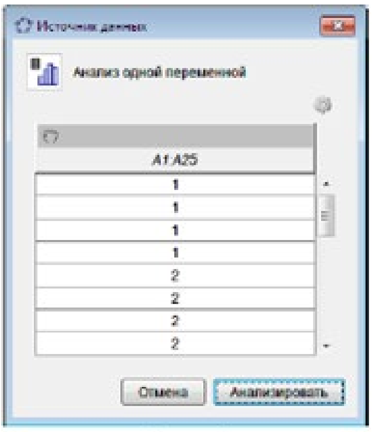


Рис. 2.2.4

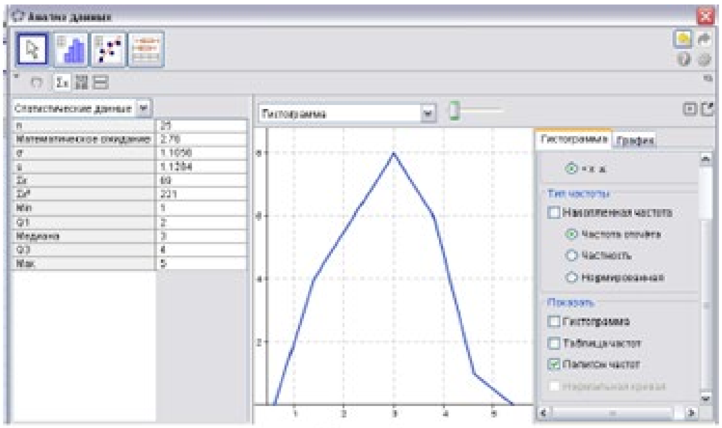


Рис.2.2.5

Отримуємо, що математичне сподівання дорівнює 2.76, середнє квадратичне відхилення – 1.128, медіана – 3. Повернувшись до класичного інтерфейсу, через рядок вводу обчислимо моду, яка дорівнює 3 (рис. 2.2.6).

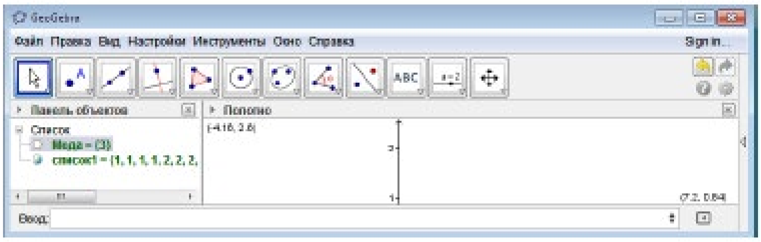


Рис. 2.2.6

Задача 2. Зміни рівня води в річці вимірювали протягом 32 весняних паводків. Результати занесені в таблицю. Побудувати гістограму, функцію розподілу, обчислити математичне сподівання, моду та медіану.

Рівень, см	0-24	25-49	50-74	75-79	100-124	125-149	150-174	175-199
Кількість випадків	0	1	3	6	7	6	5	4

Розв'язання (Gran1). Оскільки досліджується неперервний розподіл частот, то у вікні *Дані статистичної вибірки* вказуємо тип *Неперервний*, тип даних – *Частоти*, тип графіка – *Гістограма*. При введенні даних необхідно вказувати рівновіддалені середини інтервалів однакової довжини і частоти попадання у ці інтервали (рис.2.2.7). В результаті у вікні *Список об'єктів* з'являється позначення щойно введеної вибірки і деякі її характеристики, які дають відповідь задачі (рис.2.2.8).

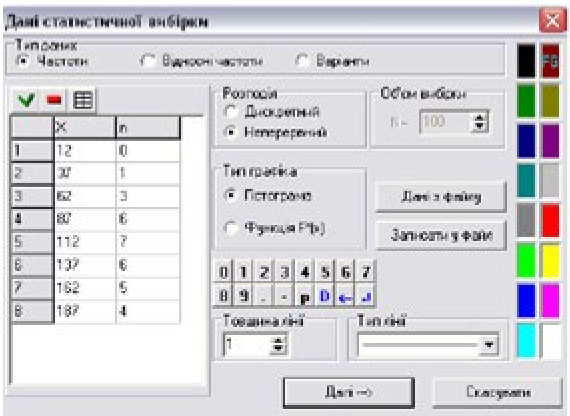


Рис. 2.2.7

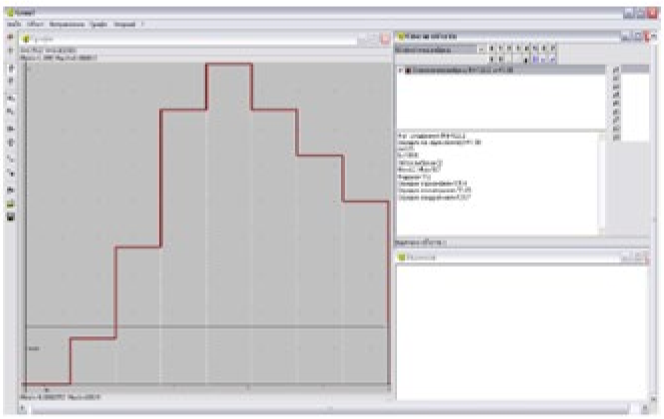


Рис. 2.2.8

Отримуємо, що математичне сподівання дорівнює 122.2, середнє квадратичне відхилення – 41.08, медіана – 112. Щоб побудувати графік функції розподілу відносних частот$F_n^*(x)$, потрібно звернутися до послуги

Об'єкт/Змінити... та змінити тип графіка на *Функція F*(x)* і потім знов побудувати графік (рис. 2.2.9).

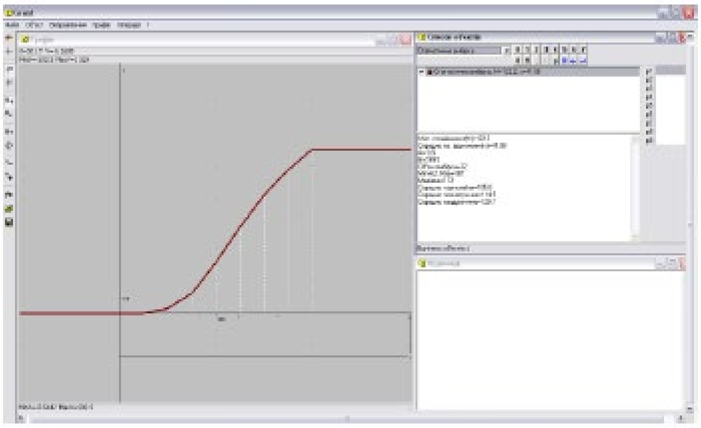


Рис. 2.9

Розв'язання (GeoGebra 5.0). Введемо в електронну таблицю результат експерименту – кількість випадків. Виділивши потрібний стовпчик зі значеннями, обираємо інструмент *Анализ одной переменной*. У налаштуваннях діалогового вікна оберемо *Класс частоты*, в якому вкажемо *Начало* – 0 (початкове значення рівня води в експерименті), *Ширина* – 24 (різниця в значеннях експерименту) (рис. 2.2.10). Натиснемо кнопку *Анализировать*, а потім у вікні *Аналіз даних* натиснемо на кнопку Σx – *Показать статистические данные.* Отримаємо значення числових характеристик статистичної вибірки (рис. 2.2.11).

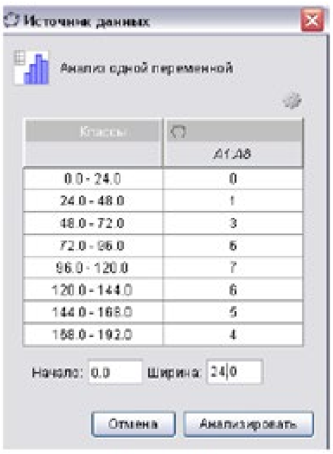


Рис. 2.2.10

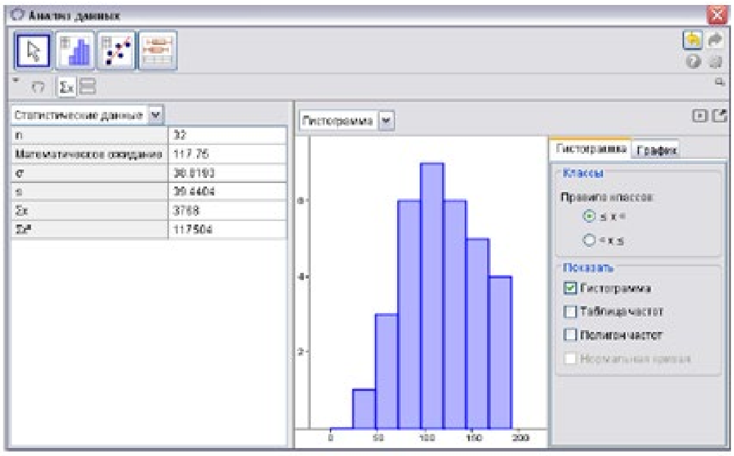


Рис. 2.2.11

Отримуємо, що математичне сподівання дорівнює 117.75, середнє квадратичне відхилення – 38.01.

Методичний коментар до задач 1 та 2. Підтримку статистичних розрахунків можна здійснювати у програмах *Gran1* та *GeoGebra 5.0.* На відміну від *GeoGebra5*.0, де дані потрібно увести у таблицю і використати інструменти аналізу, у середовищі *Gran1* пропонується обрати тип розподілу (дискретний чи неперервний) і тип даних (частоти, відносні частоти, варіанти). Також варто пам'ятати, що у *Gran1* для неперервного розподілу потрібно власноруч вводити рівновіддалені середини інтервалів і частоти попадання у ці інтервали. У *GeoGebra 5.0* можна вводити частоти, а потім в автоматизованому режимі задати ширину карманів і значення варіант.

В обох програмах передбачено можливість побудови полігону частот, але графік функції розподілу розраховується в автоматичному режимі лише у *Gran1*. В обох програмах обчислюється математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення. У *Gran1* для дискретного розподілу автоматично визначиться мода, для неперервного – медіана. При використанні *GeoGebra 5.0* моду можна визначити додатково через командний рядок, а медіану програма обчислить автоматично.

Можна також побачити відмінності у відповідях до задачі 2. Їх можна пояснити особливістю введення даних: у програмі *Gran1* беруться середини інтервалів, які задаються власноруч, а у середовищі *GeoGebra 5.0* довжина інтервалу вводиться вручну, а інтервали потім розраховуються автоматично у межах заданих значень.

У контексті вивчення шкільного курсу математики вважаємо, що найкращим вибором при розв'язанні даної задачі є програма *Gran1.*

Задача 3. Пристрій складається з трьох елементів,

Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді 0.1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили, в одному досліді. [7, с. 53]

Розв'язання (GeoGebra 5.0). В меню виберемо пункт *Вид/Калькулятор вероятностей*, тип розподілу – *Биномиальное* і введемо параметри *n=3, p=0,1*. У вікні калькулятора праворуч з'явиться закон розподілу (рис. 2.2.12).

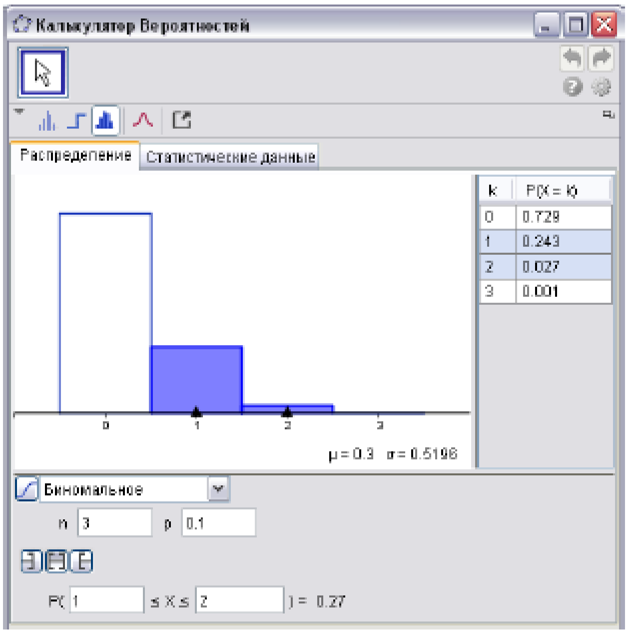


Рис. 2.2.12

Задача 4. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність зіпсованості виробу по дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що по дорозі буде зіпсовано більше трьох. [7, с. 58]

Розв'язання (GeoGebra 5.0). Обираємо пункт меню *Вид/Калькулятор вероятностей*. Виберемо тип розподілу – *Пуассона* і введемо його дані

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

Відразу у вікні калькулятора справа з'явиться закон розподілу. Ймовірність зіпсувати по дорозі більше 3 приладів дорівнює $P(4 \leq X)=0{,}9197$(рис. 2.2.13).

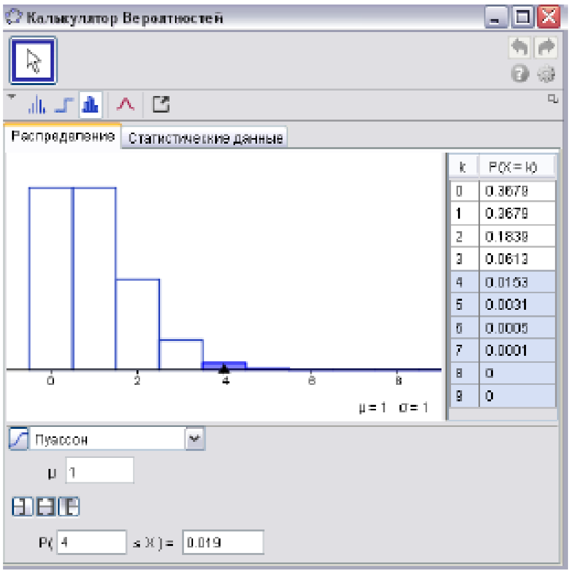


Рис. 2.2.13

Методичний коментар до задач 3 та 4. Оскільки в програмі *Gran1* не передбачено інструменту для складання закону розподілу дискретної випадкової величини, обчислення ймовірності попадання дискретної чи неперервної випадкової величини в заданий інтервал, то для розв'язування такого класу задач доцільно використовувати програму *GeoGebra 5.0*.

Задача 5 *(GeoGebra 5.0, Gran1)*. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормального розподілу випадкової величини відповідно дорівнюють 10 та 2. Знайти ймовірність того, що в результаті досліду випадкова величина прийме значення з інтервалу (12, 14). [8, с. 110]

Розв'язання (Gran1). Задаємо функцію Гауса $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, яка є функцією щільності ймовірності нормального розподілу, де . Оскільки площа під кривою Гауса, обмежена інтервалом, дорівнює ймовірності потрапляння випадкової величини в цей інтервал, то за допомогою пункту меню *Операції/Інтеграли/Інтеграл*, ввівши межі інтегрування *A=12* та *B=14*, обчислимо ймовірність як площу під кривою P(12≤X≤14) = 0,1359 (рис.2.2.14).

Розв'язання (GeoGebra 5.0). Обираємо в діалоговому вікні інструменту *Калькулятор вероятностей* неперервний тип розподілу – *Нормальное* і вводимо його дані: . Знайдемо ймовірність того, що в результаті досліду випадкова величина прийме значення з інтервалу (12, 14):P(12≤X≤14) = 0,1359 (рис.2.2.15).

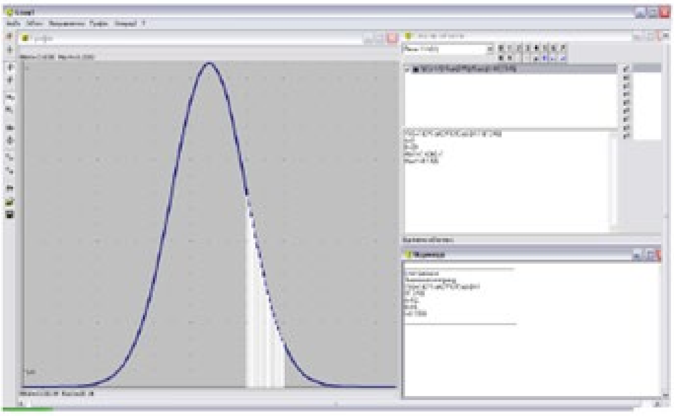


Рис. 2.2.14

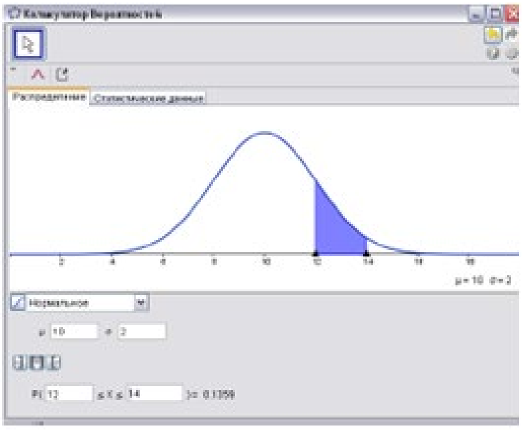


Рис. 2.2.15

Задача 6 *(GeoGebra 5.0, Gran1).* Випадкова величина розподілена нормально з математичним сподіванням 10 і середнім квадратичним відхиленням 5. Знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, в який із ймовірністю 0,9973 потрапляє випадкова величина в результаті випробувань. [7, с. 113]

*Розв'язання (Gran1). З*адамофункціюГауса $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, в якій $\mu = 10, \sigma = 5$. Оберемо пункт меню *Операції/Інтеграли/Інтеграл* і задамо межі інтегрування, які будуть залежати від параметра *p1: A=10-p1* та *B=10+p1.* Змінюємо параметр до того моменту, коли значення інтегралу (відповідно, потрібне значення ймовірності) буде 0,9973 (значення інтеграла буде змінюватися автоматично). Це відбувається при *p1=15*. Отже, шуканий інтервал *(-5,25*) (рис. 2.2.16).

Розв'язання (GeoGebra 5.0). В *Калькуляторе Вероятностей* обираємо розподіл *Нормальное* і фіксуємо математичне сподівання 10 та середнє квадратичне відхилення 5. Потім, власноруч змінюючи положення меж інтервалу, можна підібрати такі їх значення так, що ймовірність попадання у інтервал буде 0,9973. Зауважимо, що використання параметру *a* і введення симетричних відносно математичного сподівання меж (*10-a, 10+a*) не забезпечить автоматичну зміну значення ймовірності: кожного разу змінюючи параметр, потрібно буде вводити межі інтервалу *10-a, 10+a,* які будуть переобчислюватися відповідно до поточного значення параметру. Але скористатися бігунком можна – шуканий інтервал відповідатиме значенню *a=15* і визначатиметься межами *(-5,25)* (рис. 2.2.17).

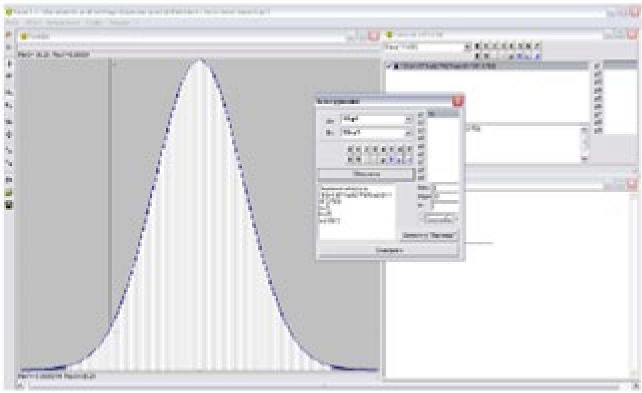


Рис. 2.2.16

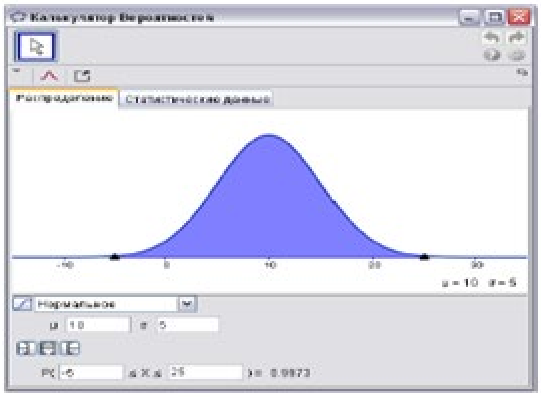


Рис. 2.2.17

Методичний коментар до задач 5 та 6. Задачі на нормальний розподіл випадкової величини можна розв'язувати в обох середовищах *GeoGebra 5.0* та *Gran1*, але у програмі *GeoGebra 5.0* часто досить скористатися інструментом *Калькулятор вероятностей* на відміну від *Gran1,* де потрібно додатково будувати графік функції Гауса.

Але використання параметрів із залученням *Калькулятора Вероятностей* середовища *GeoGebra 5.0* дещо обмежене на відміну від програми *Gran1*. Тому задачі типу № 6 краще розв'язувати за допомогою програми *Gran1* із використанням параметрів як меж інтегрування.

Подібне обмеження параметра в *Калькуляторе Вероятностей* програми *GeoGebra 5.0* зустрічається і при заданні бігунком математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення нормального розподілу (наприклад, для демонстрації зміни форми та розташування кривої Гауса залежно від числових характеристик нормального розподілу).

Отже,за результатами дослідження можна зробити наступні висновки.

1. У програмах динамічної математики, зокрема, у *Gran1, Математический конструктор 6.0*, *GeoGebra 5.0,* закладено великий потенціал інструментарію щодо його використання на уроках математики. Залучення таких програмних засобів до спрощення побудов моделей ймовірнісних задач, до організації випадкових випробувань та візуалізації їх результатів в умовах інтенсифікації навчального процесу беззаперечне.

2. Аналіз шляхів використання згаданих засобів підтверджує тезу про те, що їх використання надає навчальному процесу дослідницького характеру через використання параметрів як інструментів дослідження.

3. З огляду на шкільний курс математики української школи і вивчення в ньому змістової лінії «Теорія ймовірності та елементи статистики» доцільно на наш погляд використовувати програму *Gran1*, що додатково підтверджує проведений нами аналіз задачного матеріалу та інструментарій комп'ютерних середовищ.

4.Зрозуміло, що розглянутими у статті задачами шляхи використання середовищ *GeoGebra 5.0* та *Gran1* не обмежуються.

Інструментарій полотна *Таблица* та команд рядка вводу програми *GeoGebra 5.0* виходить далеко за рамки шкільного курсу стохастики і може бути використаний при вивченні університетських курсів теорії ймовірностей та математичної статистики (наприклад, інструмент *Калькулятор Вероятностей* дозволяє моделювати різні види розподілів, зокрема, біноміальний, Пуасона, нормальний, χ-квадрат) та при статистичному супроводі педагогічних експериментів (наприклад, при встановленні істотних відмінностей між середніми балами тощо).

2.3 Організація, проведення та результати експерименту

Предметом педагогічного експерименту було вивчення ефективності застосування НІТ при вивченні теми «Елементи статистики» з курсу алгебри і початків аналізу у 11 класі з поглибленим вивченням математики.

Педагогічний експеримент проводився в Рівненській загальноосвітній школі І-ІІІ ступенів №1 ім. Володимира Короленка Рівненської міської ради. Для експерименту було обрано 11 клас з поглибленим вивченням математики. Для учнів експериментального класу було проведено ряд уроків з використанням НІТ (конспекти проведених уроків подано в Додатку А). Задуми та ідеї, які потрібно було відобразити під час уроків, попередньо були обговорені з вчителями математики та методистами.

Мета експерименту:

- забезпечити свідоме оволодіння системою знань, умінь та навичок;
- розвинути мислення та інформаційну, статистичну культури;
- виховувати позитивні якості особистості;
- підвищення мотивації здобуття нових знань;
- розвинути уміння використовувати набуті знання в практичних ситуаціях.

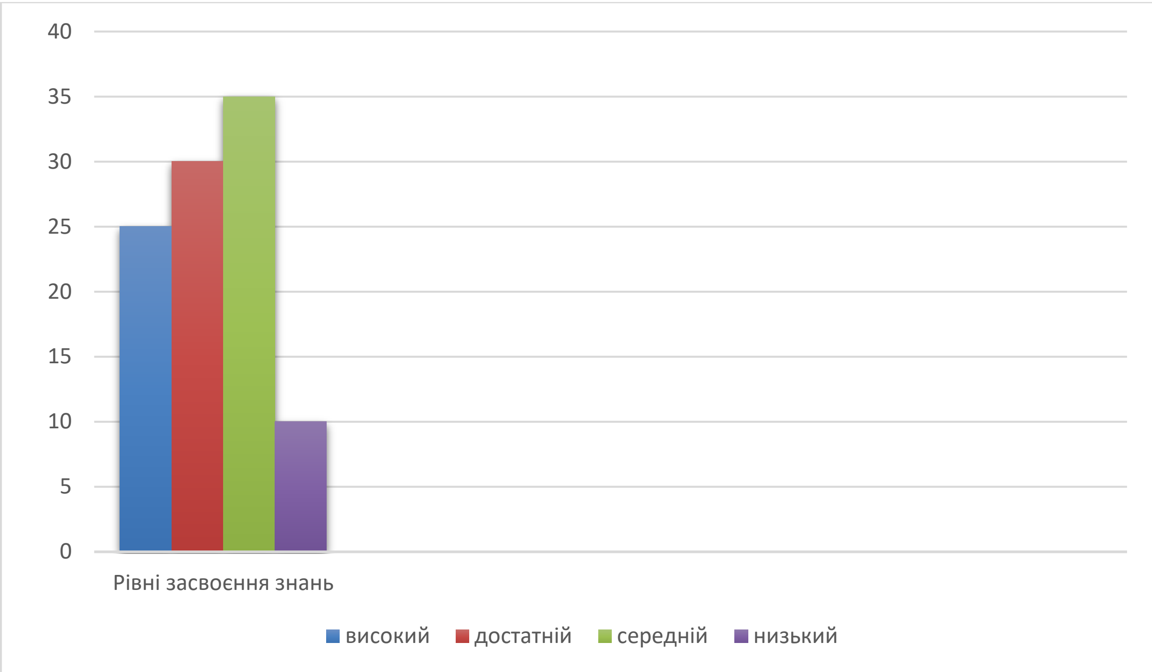
У ході першого етапу експерименту були поставлені та досягнуті наступні завдання: проаналізовано та узагальнено стан досліджуваної проблеми в теорії та практиці навчання, розроблена методика проведення уроків з теми «Елементи статистики» з використанням НІТ. Для досягнення поставлених завдань було проведено опитування серед учнів (анкету подано в Додатку Б). Результати анкетування показали, що: уроки з використанням НІТ проводяться не часто; навчальний матеріал на уроках з використанням НІТ сприймається та засвоюється краще; учні виявляють бажання відвідувати такі уроки.

На другому етапі дослідження було здійснено експериментальне впровадження цієї методики під час вивчення курсу алгебри та початків аналізу та перевірка її ефективності. Під час експериментального вивчення теми «Елементи статистики» було проведено 4 уроки (Додатки А) та контрольне опитування серед учнів (анкету для опитування подано в Додатку Б).

Результати проведених уроків подані в таблиці:

Класи	Рівень засвоєння знань			
	високий	достатній	середній	низький
Експериментальний 11 клас	25%	30%	35%	10%

Для кращої наочності побудуємо гістограму:



Порівнявши результати опитування учнів до та після проведення уроків можна зробити висновки, що відношення учнів до вивчення елементів статистики змінилося: учням більш зрозумілий новий начальний матеріал, вони покращили рівень знань завдяки наочному поданню матеріалу.

Під час проведення уроків учні проявляли інтерес до матеріалу та розвивати статистичні навички, намагалися самостійно розв’язувати та складати задачі, опрацьовували додаткову літературу та зверталися з додатковими питаннями. Деякі учні навчилися самостійно досягти успіхів у навчанні при наполегливій праці над собою та творчому підході до матеріалу.

Наведені статичні дані переконливо доводять ефективність використання комп’ютера при проведенні уроків з курсу алгебри і початків аналізу, а саме з теми «Елементи статистики», що сприяє розвитку статистичних здібностей в учнів. Це забезпечило не лише поліпшення засвоєння знань на високому та достатньому рівнях, а й сприяло формуванню навичок розв’язання більш складних завдань, творчої діяльності учнів та вмінь працювати з додатковими засобами.

Рівень зацікавлення математикою учнів, які приймали участь в експерименті при проведенні уроків значно підвищився. Учням легше сприймати новий навчальний матеріал з допомогою комп’ютерних технологій. Також вони надають перевагу такій методиці проведення уроків. Цей висновок зроблено на основі опитування.

На основі результатів експерименту з впевненістю можна сказати, що уроки пройшли на високому рівні, учні одержали глибокі знання, більш відповідально виконували завдання та опрацьовували матеріал по даній темі.

Здійснена експериментальна перевірка запропонованого змісту і методики проведення уроків, спостереження за діяльністю учнів, бесіди з вчителями та учнями дозволили зробити висновок про правильність обрання форм і методів, використаних під час проведення уроків.

ВИСНОВКИ

Входження України в Міжнародне освітнє співтовариство, впровадження компетентнісної освітньої парадигми, впровадження у навчальний процес особистісно орієнтованих технологій, роль умінь здобувати і опрацьовувати відомості, одержані з різних джерел, застосовувати їх для індивідуального розвитку і самовдосконалення, особистісна значимість для сучасних школярів визначають своєчасність і актуальність обраної теми дослідження „Методика вивчення елементів статистикики у профільних класах начання математики з допомогою НІТ”.

Підвищення ефективності навчання на уроках і самоосвіти пов’язано з використанням інформаційних технологій у навчальному процесі. У роботі вивчалися теоретичні та практичні основи інформаційних технологій (аналіз різних інформаційних джерел, знайомство з різними програмами, методиками застосування інформаційних технологій у навчальному процесі).

Досвід показує, що використання інформаційних технологій на уроці здатне перетворити навчальний процес, зробивши його більш ефективним і привабливим для учнів. Навчання з використанням інформаційних технологій стає для дитини творчим пошуком, від якого можна отримати задоволення і завдяки якому можна самоствердитися.

Комп'ютерне навчання дозволяє активізувати пізнавальну діяльність учнів, диференціювати завдання з урахуванням індивідуальних можливостей, вибирати оптимальний темп навчання, підвищувати оперативність, об'єктивність контролю і оцінки результатів навчання, розвивати навички самоосвіти, встановлювати міжпредметні зв’язки з інформатикою та іншими науками, формувати інформаційно-комунікаційну компетентність. До того ж нові інформаційні технології сприяють організації проектної діяльності учнів щодо створення навчальних програм та електронних посібників з курсу під керуванням учителів-предметників, сприйманню комп’ютера як універсального інструмента для роботи в будь-якій галузі людської діяльності, а головне, виводять дитину за межі школи, надаючи їй величезні можливості для багатогранної освіти.

Результатами впровадження інформаційних технологій у навчальний процес є:

- Розширення можливостей учителя підготувати і провести урок на високому професійному рівні.
- Активізація пізнавальної діяльності учнів.
- Підвищення мотивації учнів до навчання і компетентного вибору професійної діяльності.
- Розвиток навичок оціночної (самооціночної) діяльності.
- Оволодіння учнями ключовими компетентностями.
- Сформованість науково-дослідницьких навичок.
- Активна участь учнів та учителів в проектній діяльності та творчих конкурсах.

Використання сучасних освітніх технологій відкрило нові можливості для реалізації потреб особистості в розвитку творчого потенціалу, сприяло формуванню ключових компетентностей, дозволило стимулювати учнів та учителів до активної участі в різноманітних конкурсах.

В ході дослідження розглядався процес навчання математики учнів загальноосвітніх навчальних закладів з метою вдосконалення методики формування умінь учнів, зокрема:

1. Вивчено досвід вчителів математики загальноосвітніх шкіл навчати учнів елементів стохастики, проаналізовано результати навчально-пізнавальної діяльності учнів, виявлено актуальні проблеми навчання учнів елементів стохастики та проблеми застосування інформаційних технологій в процесі навчання математики, зокрема елементів стохастики.

2. Визначено передумови та шляхи формування умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики.

Узагальнення отриманих результатів проведеного дослідження надає можливість зробити наступні висновки:

1. Навчальна діяльність учнів організовується вчителем з використанням різноманітних форм організації навчання та дидактичних засобів. Вона спрямована на виявлення закономірних зв'язків і відношень теоретичних або експериментально спостережених фактів, явищ, процесів. В навчальній діяльності учнів домінує самостійне застосування прийомів наукових методів пізнання. В процесі навчальної діяльності учні активно здобувають знання, розвивають свої вміння.

2. Навчальні уміння учнів, як складові творчої діяльності, неможливо подати як точно описані та строго регульовані системи операцій або дій. Але можна виокремити наступні структурні компоненти навчальних умінь: організаційний, інформаційний, інтелектуальний, комунікативний, технічний.

3. Задачі зі стохастики є засобом формування навчальних умінь учнів. Їх розв'язування сприяє формуванню методологічно правильних поглядів на природу та суспільство, поглядів, що відповідають сучасній науковій картині світу, оскільки демонструють розбіжність в характері двох світів – світу математики й реальної ситуації. Вони не є алгоритмічними. Всім їм притаманна об'єктивна або, щонайменше, психологічна віддаленість від алгоритмічних схем. Статистичний підхід до навчання учнів елементів стохастики надає можливість розширити знання учнів про математичні моделі та навчити будувати ймовірнісні моделі стохастичних експериментів, формуючи в учнів науковий світогляд, уявлення про ідеї і методи математики, її роль у пізнанні дійсності.

Підвищення ефективності навчання на уроках і самоосвіти пов'язано з використанням інформаційних технологій у навчальному процесі. У роботі вивчалися теоретичні та практичні основи інформаційних технологій (аналіз різних інформаційних джерел, знайомство з різними програмами, методиками застосування інформаційних технологій у навчальному процесі).

Досвід показує, що використання інформаційних технологій на уроці здатне перетворити навчальний процес, зробивши його більш ефективним і привабливим для учнів. Навчання з використанням інформаційних технологій стає для дитини творчим пошуком, від якого можна отримати задоволення і завдяки якому можна самоствердитися.

Таким чином, з усього вище написаного можна зробити висновок: в сучасний навчальний процес інтенсивно впроваджуються нові методи навчання, які побудовані на принципі саморозвитку, активності особистості. До одного з найважливіших методів належить впровадження інформаційних технологій у навчальний процес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Жак Адамар ; [пер. с фр. М. А. Шаталов, О. П. Шаталова]. – М. : МЦНМО, 2001. – 128 с.
2. Алгебра и начала анализа : учебник для 11 кл. общеобразовательных учебных заведений / Н. И. Шкиль, З. И. Слепкань, Е. С. Дубинчук ; пер. с укр. – К. : Зодіак-ЕКО, 2003. – 400 с.
3. Алгебра і початки аналізу : Підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара. – К. : Освіта, 2003. – 311 с.
4. Алгебра і початки аналізу. 10 клас : Пробний підручник / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2004. – 456 с.
5. Алексюк А. М. Загальні методи навчання в школі / А. М. Алексюк. – К. : Рад. шк., 1981. – 206 с.
6. Андреев В. И. Дидактические условия развития исследовательских способностей старшеклассников (в процессе обучения физике) : автореф. дис. на соискание ученой степени канд. пед. наук : спец. 730 / В. И. Андреев. – М., 1972. – 21 с.
7. Бабанский Ю. К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Ю. К. Бабанский. – М. : Просвещение, 1985. – 208 с.
8. Бевз Г. П. Методи навчання математики / Григорій Петрович Бевз. – Х. : Вид. група «Основа», 2003. – 96 с.
9. Безрукова В. С. Педагогика. Проективная педагогика / В. С. Безрукова. – Екатеринбург : Деловая книга, 1996. – 344 с.
10. Беспалько В. П. Программированное обучение (дидактические основы) / В. П. Беспалько. – М. : Высш. школа, 1970. – 300 с.
11. Бех І. Д. Виховання особистості : У 2 кн. : Навч.-метод. посіб. / І. Д. Бех. – К. : Либідь, 2003.

Кн. 1 : Особистісно орієнтований підхід : теоретико-технологічні засади. – 2003. – 278 с.

Кн. 2 : Особистісно орієнтований підхід: науково-практичні засади. – 2003. – 344 с.

12. Богоявленская Д. Б. Психология творческих способностей / Д. Б. Богоявленская. - М. : Academia, 2002. – 317 с.
13. Бойко Е. И. Еще раз об умениях и навыках / Е. И. Бойко // Вопросы психологии. – 1957. – №1. – С. 18-20.
14. Болтянский В. Г. Программированное обучение и методы его осуществления / В. Г. Болтянский // Учебно-наглядные пособия по математике. – 1968. – Вып. 3. – С. 24-36.
15. Болтянский В. Г. К проблеме дифференциации школьного математического образования / В. Г. Болтянский, Г. Д. Глейзер // Математика в школе. – 1988. – №3. – С. 9-10.
16. Бондар В. І. Дидактика / В. І. Бондар. – К. : Либідь, 2005. – 264 с.
17. Боно Э. Развитие мышления : три пятидневных курса / Э. Боно ; пер. с англ. – Мн. : Попурри, 1997. – 125 с.
18. Бородин А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / Андрей Николаевич Бородин. – СПб. : Лань, 2002. – 256 с.
19. Бродський Я. С. Про вивчення елементів комбінаторики, ймовірності, статистики в школі / Яків Соломонович Бродський // Математика в школах України. – 2004. – №35(83) – С. 6-10, №36(84). – С. 15-17.
20. Бродський Я. С. Про прикладну спрямованість навчання математики / Я. С. Бродський, С. І. Великодній, О. Л. Павлов // Рідна школа. – 2006. – №2. – С. 60-63.
21. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики/ Михайло Іванович Бурда // Математика в школі. – 2007. – №7. – С. 3-6.

22. Бурда М. І. Математика 10-11 : Навчальний посібник для шкіл, ліцеїв та гімназій гуманіст. профілю / М. І. Бурда, О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований. – К. : Освіта, 2004. – 224 с.
23. Буряк В. К. Вироблення в учнів дослідницьких навичок / В. К. Буряк // Радянська школа. – 1987. – №2. – С. 17-22.
24. Бунимович Е. А. Основы статистики и вероятность : Пособие для общеобразоват. учреждений / Е. А. Бунимович, В. А. Булычев. – М. : Дрофа, 2004. – 288 с.
25. Вандер Б. Л. Математическая статистика / Б. Л. Вандер : пер. с нем. Л. Н. Большева. – М. : ИЛ, 1960. – 434 с.
26. Векслер С. И. Развитие критического мышления старшеклассников в процессе обучения : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.01 «Общая педагогика и история педагогики» / С. И. Векслер. – К., 1974. – 23 с.
27. Венецкий И. Г. Основы теории вероятностей и математической статистики / И. Г. Венецкий, Г. С. Кильдишев. – М. : Изд-во «Статистика», 1968. – 360 с.
28. Вертгеймер М. Продуктивное мышление / М. Вертгеймер ; пер. с англ. / Ред. С. Ф. Горбова, В. П. Зинченко. – М. : Прогресс, 1987. – 335 с.
29. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 11 класса : Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 1993. – 288 с.
30. Волкова Н. Д. Дослідницька діяльність учнів при вивченні геометрії, як засіб розвитку їх творчого мислення : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук / НДІ педагогіки УРСР. – К., 1972. – 21 с.
31. Волощук І. С. Методи розвитку творчих здібностей учнів молодшого шкільного віку. Методичний посібник / І. С. Волощук // Рідна школа. – 1998. – №3. – С. 29-51.

32. Всесвятский Б. В. Системный подход к биологическому образованию в средней школе / Б. В. Всесвятский – М. : Просвещение, 1985. – 143 с.
33. Гальперин П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П. Я. Гальперин // Исследования мышления в советской психологии : Сб-к научн.трудов. – М. : Наука, 1966. – С. 236-278.
34. Гилфорд Дж. Три стороны интеллекта. Психология мышления / Дж. Гилфорд. ; под ред. А. М. Матюшкина. – М. : Прогресс, 1965. – С. 433-456.
35. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – Изд. 4-е, доп. – М. : Высш. шк., 1975. – 368 с.
36. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / Семен Устинович Гончаренко. – К. : Либідь, 1997. – 374 с.
37. Голант Е. Я. Методы обучения в современной школе / Е. Я. Голант. – М. : Учпедгиз, 1957. – 152 с.
38. Грабарь М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы / М. И. Грабарь, К. А. Краснянская. – М. : Педагогика, 1977. – 136 с.
39. Гриньова М. В. Феномен навчальної діяльності / М. В. Гриньова // Педагогіка і психологія. – 1995. – №2. – С. 23-29.
40. Грохольська А. В. Застосування кодопозитивів під час вивчення теми «Вступ до стохастики» / Алла Василівна Грохольська // Математика в школі. – 2004. – №9. – С. 31-36.
41. Гурова Л. Л. Мыслительные операции в процессе осознанного решения задач / Л. Л. Гурова // Вопросы психологии, 1968. – №2. – С. 5-8.
42. Дидактичні матеріали з математики : Навчальний посібник / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – К. : Вища шк., 2001. – 271 с.
43. Жалдак М. І. Деякі властивості ймовірнісних моделей стохастичних експериментів / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін // Комп'ютерно-орієнтовані

системи навчання. Збірник наукових праць. – К. : Комп’ютер в школі та сім’ї. – 2001. – Вип. 3. – С. 49-68.

44. Жалдак М. І. Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін. – К. : Шкільний світ, 2006. – 120 с.
45. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики. Посібник для вчителів / Мирослав Іванович Жалдак. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.
46. Жалдак М. І. Математика (Алгебра і початки аналізу) з комп‘ютерною підтримкою : Навчальний посібник для підготовчих відділень / М. І. Жал-дак, А. В. Грохольська, О. Б. Жильцов. – К. : МАУП, 2003. – 304 с.
47. Жалдак М. І. Математика з комп’ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К. : РННЦ «ДІНІТ», 2004. – 254 с.
48. Жалдак М. І. Методика навчання елементів стохастики учнів старшої школи. Матеріали для проведення уроків / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, І. С. Соколовська // Математика в школі. – 2007. – №6. – С. 26-31, №7. – С. 17-22, №8. – С. 3-7, №9-10. – С. 9-14; 2008. – №1. – С. 6-10.
49. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації : Навчальний посібник / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 608 с.
50. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп’ютерно-орієнтованих систем навчання математики / Мирослав Іванович Жалдак // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Збірник наукових праць – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. – Вип. 7. – С. 3-16.
51. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. Навчальний посібник / М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, С. Ю. Берлінська. – К. : Вища школа, 1995. – 351 с.
52. Жалдак М. І. Про вивчення елементів стохастики у школі / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін // Математика в школі. – 2004. – №9-10. – С. 7-12.

53. Закон України “Про загальну середню освіту”[Електронний ресурс] : Законодательство Украины. – К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електорн. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROMWindows 98/2000/NT/XP.
54. Ительсон Л. Б. Лекции по современным проблемам психологии обучения / Л. Б. Ительсон. – Владимир. – 1972. – 264 с.
55. Кирсанов А. А. Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема / А. А. Кирсанов. – Изд-во Казанского ун-та : Казань, 1982. – 224 с.
56. Колмогоров А. Н. Введение в теорию вероятностей и комбинаторику / А. Н. Колмогоров // Математика в школе. – 2000. – №8. – С. 2-9.
57. Концепція профільного навчання у старшій школі // Математика в школі. – 2006. – №4. – С. 2-7.
58. Критерії оцінювання навчальних досягнень у системі загальної середньої освіти [Електронний ресурс] : Законодательство Украины. – К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електорн. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROMWindows 98/2000/NT/XP.
59. Лиходєєва Г. В. Елементи стохастики : практикум для студентів вищих навчальних педагогічних закладів освіти / Г. В. Лиходєєва. – Бердянськ : БДПУ, 2005. – 68 с.
60. Лиходєєва Г. В. Математичне моделювання в процесі формування навчально-дослідницьких умінь учнів / Г. В. Лиходєєва // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Безперервна фізико-математична освіта : проблеми, пошуки, перспективи» - Бердянськ : БДПУ, 2007. – С. 52-53.
61. Лиходєєва Г. В. Навчальне статистичне дослідження як засіб формування навчально-дослідницьких умінь учнів / Г. В. Лиходєєва // Тези Міжнародної науково-практичної конференції «Математична освіта в

Україні : минуле, сьогодення, майбутнє» – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. – С. 73-74.

62. Лиходєєва Г. В. Підготовка майбутніх учителів математики до викладання теорії ймовірностей та основ математичної статистики у різнопрофільних класах загальноосвітньої школи / Г. В. Лиходєєва // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – №2. – Бердянськ : БДПУ, 2002. – С. 206-212.
63. Лиходєєва Г. В. Розв'язування задач математичної статистики з використанням комп'ютера / Г. В. Лиходєєва // Математика в школі. – 2007. – №1. – С. 27-33.
64. Лютикас В. С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей? Это интересно! / В. С. Лютикас. – М. : Мир, 1993. – 216 с.
65. Машбиц Е. Й. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения / Е. Й. Машбиц. – М. : Педагогика, 1988. – 191 с.
66. Михалін Г. О. Проблема навчання теорії ймовірностей майбутнім учителем у світлі історичного розвитку наукових теорій / Михалін Г. О., Надточий С. Л. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. В кн. VII, М. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НметаУ. – С. 238 -245.
67. Михалін Г. О. Статистичні ймовірності. Прості випадкові величини. Закон великих чисел / Г. О. Михалін, О. В. Стогній // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. – №4 (11). – С. 163-170.
68. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики / Ю. Нейман ; пер. с англ. Н. М. Митрофановой и А. П. Хусу. – М. : Наука, 1968. – 448 с.

69. Нєлін Є. П. Алгебра і початки аналізу : дворівневий підручник для 11 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / Є. П. Нєлін, О. Є. Долгова. – Х. : Світ дитинства, 2005. – 392 с.

70. Онищук В. О. Типи, структура і методика уроку в школі / В. О. Онищук. – К. : Радянська школа, 1976. – 184 с.

71. Особистісний підхід у профільному навчанні старшокласників / за ред. Г. О. Балла, – К. : Деміург, 1998. – 160 с.

72. Пестерева В. Л. Формирование исследовательских умений учащихся при изучении функций в курсе алгебры восьмилетней школы : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения» / В. Л. Пестерева. – Ленинград, 1987. – 17 с.

73. Пидкасистый П. И. Самостоятельная деятельность учащихся в обучении / П. И. Пидкасистый, В. И. Коротяев. – М., 1978. – 76 с.

74. Плоцкі А. М. Імовірнісний простір на уроках математики як засіб розв’язування проблем / А. М. Плоцкі // Математика в школі. – 1999. – №4. – С. 7-12.

75. Плоцки А. М. Стохастические задачи и прикладная направленность в обучении математике / А. М. Плоцки // Математика в школе. – 1991. – №3. – С. 69-71.

76. Погорелов А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1983. – 288 с.

77. Погорєлов О. В. Планіметрія : Підручник для 7-9 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. – 3-тє видання. – К. : Освіта, 1998. – 223 с.

78. Пойа Д. Как решать задачу / Дьердь Пойа ; пер. с англ., 2-е изд., испр. – М. : Учпедгиз, 1961. – 207 с.

79. Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROMWindows 98/2000/NT/XP.

80. Програма для класів з поглибленим вивченням математики. Математика 8-11 класи [укл. М. І. Бурда, М. І. Жалдак, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара, М. Й. Ядренко] // Математика. – 2001. – №37 (145).
81. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – 2-е изд. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
82. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін : Монографія / Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400 с.
83. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Вильям Феллер. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 1984. – 528 с.
84. Шкиль Н. И. Алгебра и начала анализа : учеб. для 11 кл. общеобразоват. учеб. заведений / Н. И. Шкиль, З. И. Слепкань, Е. С. Дубинчук. – К. : Зодиак-Эко, 2003. – 399 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Урок 1.

Тема. Вступ до статистики. Статистичне спостереження, генеральна сукупність і вибірка.

Мета уроку. Учні повинні отримати уявлення про статистику як науку, її предмет і методи, статистичні спостереження та їх види, статистичні таблиці.

І. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Вступ до статистики

Теорію ймовірностей як науку про закономірності масових явищ можна розглядати як частину більш широкої науки — статистики. Термін «статистика» походить від латинського «status» — стан.

На початку ХХст. у США і в усіх західноєвропейських країнах виникли урядові статистичні бюро, які проводили переписи населення і готували результати їх обробки до публікації.

Зрозуміло, що статистичні дослідження різних країн можна порівнювати між собою тільки за умови, якщо вони велися за однією і тією самою методикою. Першими організаціями, наділеними координаційними функціями, стали, починаючи з 1919 р., міжнародні статистичні конгреси. З 1946р. при ООН працює Статистична комісія. Особливе значення мають публікації статистичних матеріалів регіональними статистичними комісіями, що входять до статистичної системи ООН. Назвемо найважливіші видання:

- Демографічний щорічник (DemographicYearbook). Із цього видання можна дізнатися про зміни чисельності населення країн світу, народжуваність, смертність, розподіл населення на міське та сільське.
- Статистичний щорічник Продовольчої комісії, де публікуються дані про урожайність і площі вирощування основних культур, а також рівні споживання і якість продовольчих продуктів, їх калорійність у різних країнах.

лікуються дані про рівень грамотності і розвиток культури та науки в міжнародному масштабі.

Така увага до статистичних даних на державному і міжнародному рівнях свідчить про необхідність оволодіння основними поняттями і методами статистики.

Ми розглянемо такі основні теми математичної статистики:

1. Статистичне спостереження, генеральна сукупність і вибірка.
2. Варіаційні ряди і найпростіші їх характеристики.
3. Полігон і гістограма, медіана і мода.
4. Статистичні характеристики варіаційних рядів — середнє арифметичне і вибіркова дисперсія.

Термін вибірка означає деяку групу, відібрану із сукупності. Якщо нас буде цікавити певна характеристика сукупності, то її називають параметром сукупності. Наприклад, розглянемо сукупність бухгалтерів України, їхня середня заробітна плата буде являти собою параметр сукупності. Але якщо відібрати 100 бухгалтерів, то це буде вибірка, а їхня середня заробітна плата буде статистичним показником, який характеризує параметр сукупності.

Метою статистичного дослідження може бути пошук величини параметра сукупності, наприклад таких, як середня зарплата держслужбовців України або середній зріст чоловічого населення Європи. Другою проблемою, яку вирішують у статистичному дослідженні, є визначення ступеню довіри до тверджень стосовно параметрів сукупності, коли параметр визначався за певною вибіркою. Наприклад, наскільки середня зарплата сотні певним чином відібраних бухгалтерів наближена до середньої зарплати всіх бухгалтерів. Проте цю сторону статистичного дослідження ми розглядати не будемо — її вивчають в університетському курсі математичної статистики.

Вибіркове спостереження застосовують із декількох причин.

1. Практичність. Генеральна сукупність, як правило, дуже велика, практично необмежена, її фізично неможливо охопити спостереженнями.
2. Затрати. Статистичне спостереження кожного з представників

сукупності потребує певних коштів, і при збільшенні обсягу вибірки такі затрат можуть зростати необмежено.

3. Виграш за часом дослідження. Часто буваєтак, що потрібно оцінити параметр сукупності терміново і неможливо за обмежений проміжок часу охопити всю сукупність.

4. Помилки. Разом зі збільшенням обсягу вибірки зростає кількість людей, залучених до статистичного спостереження, водночас збільшується ризик помилок з причини **«людського фактора».**

5. Статистичні випробування зі знищенням. Спостереження над представниками вибірки може передбачати їх знищення. Наприклад, досліджується тривалість безвідмовної роботи електролампочок певного типу. Тоді судити про цей параметр усієї сукупності лампочок можна тільки за результатом випробування певної вибірки лампочок.

Випадковий відбір. Дуже важливо, щоб вибірка була репрезентативною, тобто з достатньою повнотою і правильністю представляла б усю генеральну сукупність.

Як правило, набір даних у вибірці являє собою множину хтозна-як розкиданих чисел. Якщо послідовно переглядати їх, то виявити якусь закономірність їх еволюції досить важко. Для дослідження наявних закономірностей, за якими змінюються значення випадкової величини, експериментальні дані піддають попередній обробці.

Якщо вибіркові дані розташувати за таким порядком, щоб вони не спадали, то таку вибірку називають ранжованою, а саму операцію переходу до такої перестановки називають ранжуванням.

Після операції ранжування дані групують, тобто утворюють послідовний за зростанням ряд ознак, і називають цей ряд варіаційним рядом. Елементи варіаційного ряду — значення ознак — називають варіантами. Кількість елементів вибірки, які мають одну й ту саму дану варіанту x_i, називають частотою варіанти і позначають n_i Тоді вибірку можна задати у вигляді частотної таблиці (табл. 1).

Таблиця 1

x_i	x_1	x_2	…	x_r
n_i	n_1	n_2	…	n_r

Приклад 1. Нехай за спостереженнями випадкової величини виділено вибірку із 40 елементів (цифр):1; 3; 4; 1; 3; 2; 0; 2; 0; 5; 4; 4; 2; 6; 5; 2; 3; 2; 5; 2; 3; 0; 6; 2; 1; 4; 2; 4; 3; 5; 2; 0; 5; 3; 4; 2;1; 7; 1; 0. Розташувавши ці дані за порядком зростання, дістанемо варіаційний ряд спостережень: 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 7. У ньому налічується вісім варіант: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Частотна таблиця матиме вигляд (табл. 2).

Таблиця 2

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	5	5	10	6	6	5	2	1

Якщо кількість варіант досить значна, то сукупність їх значень розділяють на інтервали. Існує кілька загальних правил групування значень вибірки по інтервалах, які допомагають уникненню плутанини і забезпечують ефективне складання таблиць. Наведемо найважливіші з них.

1. При виборі числа інтервалів групування краще за все орієнтуватися на 10—20 інтервалів.

2. Інтервали повинні мати однакову ширину.

3. Необхідно охоплювати всю область даних. Для цього потрібно знати межі інтервалу даних.

4. Потрібно вибирати зручні інтервали групування. Якщо виразно простежується певна однакова відстань між значеннями, то їх можна використовувати як середини інтервалів.

ІІ. Закріплення нового матеріалу

1. Розв'язати задачу. Опитавши 25 жінок про розмір їхнього взуття,

отримали такі дані: 37, 34, 36, 35, 34, 36, 38, 36, 38, 35, 36, 35, 37, 39, 37, 37, 36, 36, 35, 37, 39, 38, 34, 35, 36. Складіть частотну таблицю. Вкажіть кількість варіант та частоту варіанти під номером 4.

Розв'язання (табл. 3)

Таблиця 3

Розмір	34	35	36	37	38	39
Кількість	3	5	7	5	3	2

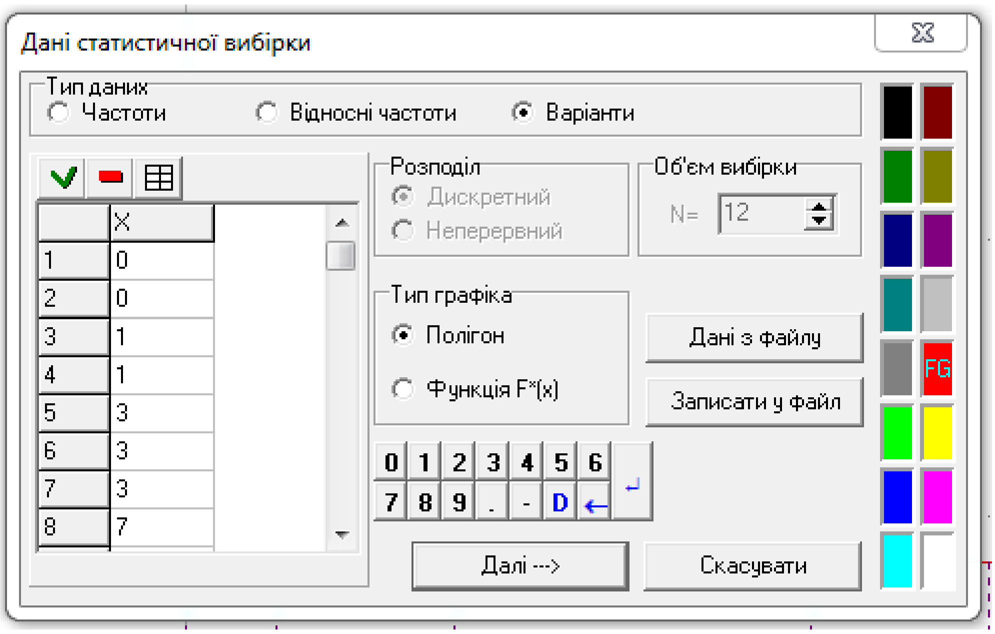
Кількість варіант — 6.

Частота варіанти під номером 4 — 5.

2. Розв'язати задачу. У математичній олімпіаді брало участь 12 учнів. Вони отримали такі бали: О, 1, О, 3, 1, 3, 3, 7, 9, 10, 11, 12. Складіть частотну таблицю. Вкажіть кількість варіант та частоту результату 12 балів, 0 балів, 3 бали.

Розв'язання:

Використаємо GRAN 1, введемо дані:



Для розв’язку нашої задачі вибиремо: *Операції/Статистика/Частотна таблиця*

Частотна таблиця

x	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
0	2	2	0.1667	0.1667
1	2	4	0.1667	0.3333
3	3	7	0.25	0.5833
7	1	8	0.08333	0.6667
9	1	9	0.08333	0.75
10	1	10	0.08333	0.8333
11	1	11	0.08333	0.9167
12	1	12	0.08333	1

Кількість варіант — 8.

Частота результату 12 балів дорівнює 1, О балів — 2, 3 балів — 3.

III. Підсумок уроку

Запитання до класу:

1. Що таке генеральна і вибіркова сукупності?
2. Навіщо застосовують вибіркове спостереження?
3. Що таке ранжування?
4. Що таке варіанта?
5. Навести приклади статистичних випробувань зі знищенням.
6. Що таке частота варіанти?

IV. Домашнє завдання

1. Конспект.
2. Розділ 8, §§ 48, 49 з підручника.
3. Вправа 227 — вказати кількість варіант, побудувати частотну таблицю; вправа 231.

(Тут і далі завдання виконуються з підручника: Шкіль М. І. та ін. Алгебра і початки аналізу. Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М. І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. — К.: Зодіак-ЕКО, 2003. - 384 с.)

Урок 2

Тема: Найпростіші характеристики варіаційних рядів.

Мета уроку. Учні повинні отримати уявлення про основні поняття варіаційних рядів, розмах вибірки, статистичний ряд, абсолютну та відносну частоту елемента. Про принцип побудови інтервального статистичного ряду розподілу.

І. Перевірка домашнього завдання

Біля дошки учень розв'язує вправу № 231 (табл. 1).

Таблиця 1

Бали	34	35	36	37	38	39	41	42	45	46
Кількість учнів	1	2	1	2	2	4	1	1	1	1

Отже, першу премію одержало 4 школярі, другу — 8, а третю — 4.

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Нагадуємо, що елементи вибіркової сукупності називають варіантами. Неспадну впорядковану послідовність варіант

$$x_1 \le x_2 \le \ldots x_n$$

називають варіаційним рядом. Іншими словами: варіаційний ряд — це спосіб запису вибірки, за якого її елементи впорядковані за величиною.

Розмах вибірки w — це різниця між найбільшим та найменшим елементом вибіркової сукупності $w = x_n — x_1$.

Нехай вибірка $\{x_1, x_2 ..., x_n\}$ містить $k(k \le n)$ попарно різних чисел z_1, z_2, ..., z_k, причому z_i, зустрічається n_i разів. Число n_i називається абсолютною частотою елемента z_i. Очевидно, що $n_i+n_2 + ... + n_k= n$.

Статистичним рядом називається послідовність пар

$(z_i, n_i,)$, де i= 1,2, ..., k.

Відносною частотою $P^*_{n_i}$ елемента z_iназивається відношення частоти цього елемента до обсягу вибірки, тобто

$$P^*_{n_i} = \frac{n_i}{n}$$

По суті, число $P^*_{n_i}$ є статистичною ймовірністю події, яка полягає в тому, що спостережувана випадкова величина дорівнює z_i.

Статистичним рядом розподілу називаютьвідповідність між варіантами z_iта їх відносними частотами $P^*_{n_i}$. Цю відповідність упорядковують у таблиці такого вигляду (табл. 2).

Таблиця 2

Варіантна	z_1	z_2	…	z_k
Відносна частота	$P^*_{n_i}$	$P^*_{n_2}$	…	$P^*_{n_k}$

Якщо ведеться спостереження над неперервною випадковою величиноюξ, і число спостережень велике, то подання статистичного матеріалу у вигляді ряду буде неможливим. Тоді проміжок, в якому знаходяться всі спостережені значення ξ, поділяють на кілька інтервалів, як правило — однакової довжини h. Нехай спостережувана випадкова величина зосереджена на інтервалі і k—кількість інтервалів, тоді h $=\frac{b-a}{k}$. Якщо n_i — кількість елементів вибірки, які потрапили в *i*-йінтервал, то покладають $P^*_{n_i}$= $= \frac{n_1}{n}$.

На практиці для унаочнення довжину інтервалу hвибирають такою, щоб n лежало в межах від десяти до двадцяти. Сучасний стан обчислю-вальної техніки на такому високому рівні, що немає принципової необхідності займатися оптимізацією довжини інтервалу.

Для повної визначеності елемент, який потрапив на границю інтервалу, відносимо до правого інтервалу.

Здобуті дані подають у вигляді таблиці 3:

Таблиця 3

Частковийінтервал	[a, a +h)	[a+h,a+2h)	…	[a+(k-1)h,a+kh]
Відносна частота	$P^*_{n_i}$	$P^*_{n_2}$	…	$P^*_{n_k}$

Таку таблицю називають інтервальним статистичним рядом розподілу спостережених частот.

Інтервальним статистичним рядом розподілу називається сукупність пар

$$\left(z_1^*, n_1\right), (z_2^*, n_2), ..., (z_k^*, n_k),$$

де z_i^* — середина i-го інтервалу;

n_i — частота потрапляння у i-й інтервал.

Приклад. Маємо вибірку із 55 спостережень:

20,3	15,4	17,2	19,2	23,3	18,1	21,9
15,3	16,8	13,2	20,4	16,5	19,7	20,5
14,3	20,1	16,8	14,7	20,8	19,5	15,3
19,3	17,8	16,2	15,7	22,8	21,9	12,5
10,1	21,1	18,3	14,7	14,5	18,1	18,4
13,9	19,1	18,5	20,2	23,8	16,7	20,4
19,5	17,2	19,6	17,8	21,3	17,5	19,4
17,8	13,5	17,8	11,8	18,6	19,1	

Подати її у вигляді частот, використовуючи сім інтервалів групування.

Розв'язання. (Рис. 1) Оскільки розмах вибірки w= 23,8 - 10,1 = 13,7, то за довжину інтервалугрупування можна взяти h = $\frac{13,7}{7} \approx 2$. За перший інтервал групування тут найзручніше вибрати 10—12. Результати групування зведемо у таб. 4:

Таблиця 4

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6	7
Межі інтервалу	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Частота	2	4	8	12	16	10	3
Відносна частота	0,036	0,073	0,145	0,218	0,291	0,181	0,054

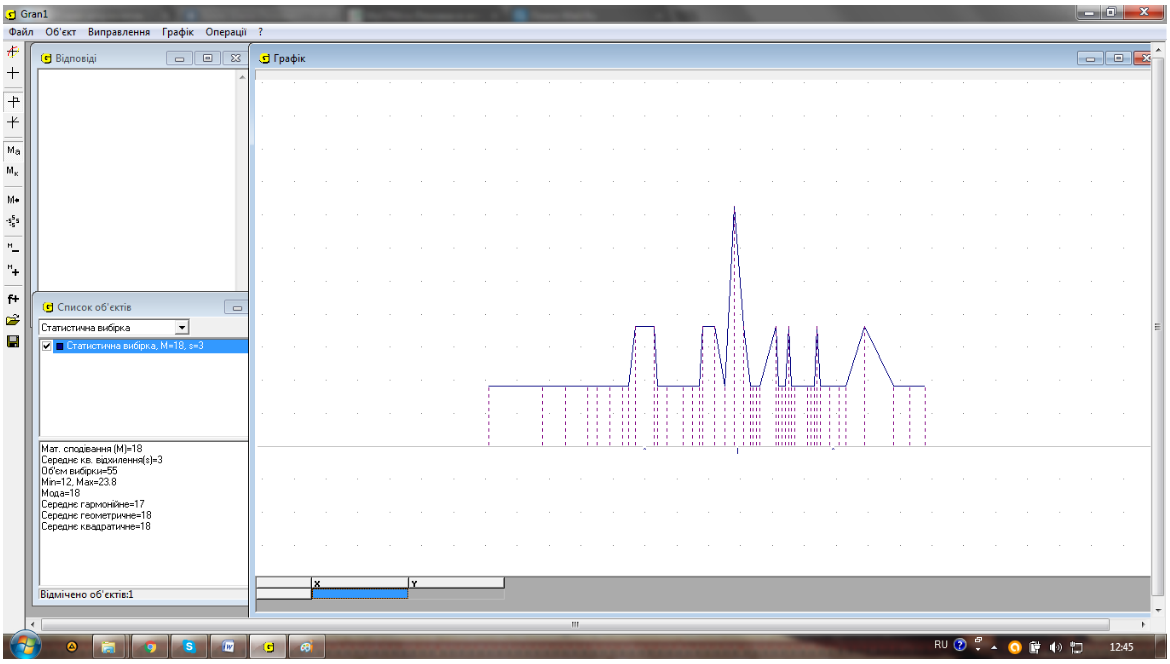


Рис.1

III. Підсумок уроку

IV. Домашнє завдання

1. Дати означення відносної частоти.

2. У класі проводиться експеримент з реєстрації номера місяця народження кожного з учнів. Побудувати варіаційний і статистичний ряди отриманої вибірки.

3. Із підручника математики кожному учню визначають певну сторінку (згідно з порядковим номером у шкільному журналі). На кожній сторінці підраховується кількість усіх слів. Побудувати варіаційний і статистичний ряди отриманої вибірки.

4. Із підручника математики кожному учню визначають певну сторінку

(згідно з порядковим номером у шкільному журналі). На кожній сторінці підраховують кількість службових слів. Побудувати варіаційний і статистичний ряди отриманої вибірки.

5. Із підручника математики кожному учню визначають певну сторінку (згідно з порядковим номером у шкільному журналі). Побудувати варіаційний і статистичний ряди процентного відношення числа службових слів до числа всіх слів.

Урок 3

Тема. Полігон і гістограма, медіана і мода.

Мета уроку. Ознайомити учнів з найпростішими прийомами аналізу статистичного матеріалу: побудовою полігону статистичного ряду та гістограми інтервального статистичного ряду. Також ознайомитися з найпростішими числовими характеристиками випадкової вибірки: медіаною та модою.

І. Перевірка домашнього завдання (фронтально)

ІІ. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

З метою створення візуального відображення статистичної інформації користуються різними графіками. Найпоширеніші види графічного відображення статистичної інформації — це полігони і гістограми. Графічне зображення варіаційних рядів за допомогою полігона чи гістограми допомагає отримати наочне уявлення про закономірності про можливі зміни спостережуваних значень.

Полігон, як правило, використовують для відображення дискретного варіаційного ряду.

Полігоном частот називають ламану з вершинами у точках (z_i, n_i), i — 1, 2, ..., k. Тут z_i- — значення i-ї варіанти, а n_i — відповідна цій варіанті частота.

Для побудови полігона частот на осі абсцис відкладають варіанти z_i, а на осі ординат — відповідні частоти. Точки (z_i, n_i) сполучають відрізками прямих і отримують полігон частот.

Зобразимо полігон частот варіаційного ряду, заданого таблицею 1.

Таблиця 1

x_i	1,5	3,5	6	9
P_i^*	0,1	0,2	0,4	0,3

За допомогою GRAN 1 можемо побудувати полігон частот:

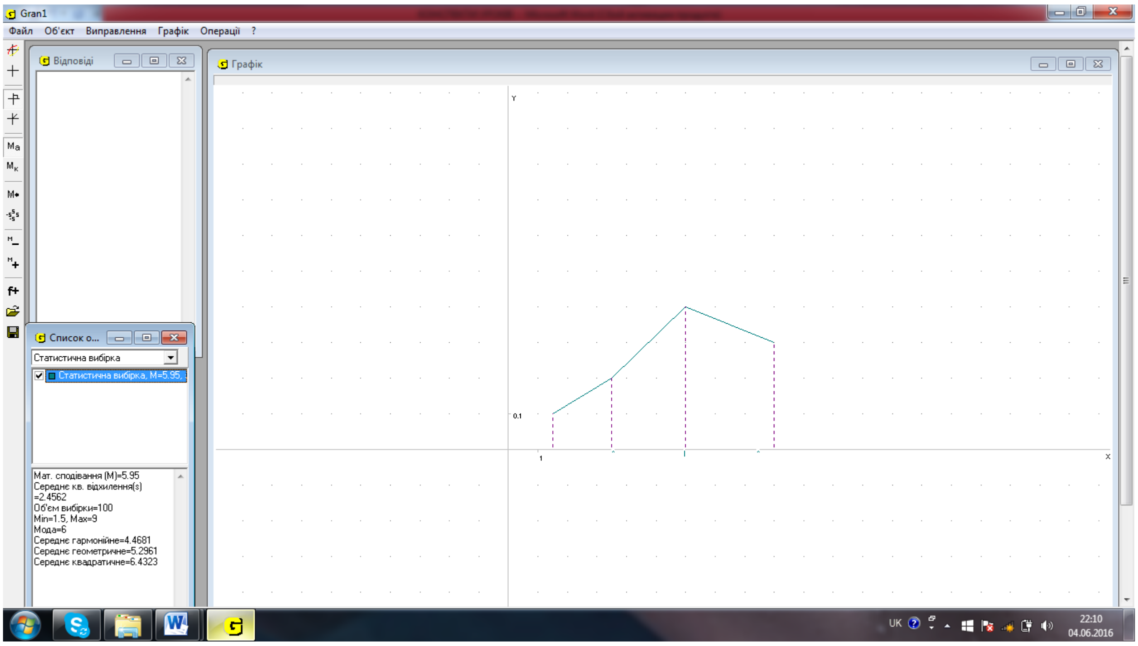


Рис. 1

По суті, полігон частот — це графічне зображення інтервального ряду (рис. 1).

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізкиякої сполучають точки (z_1, P^*_{n1}) (z_2, P^*_{n2}), ...,

(z_k, P^*_{nk}) — тобто це статистичне зображення статистичного розподілу.

Зазначимо, що можлива побудова полігона частот не тільки для дискретного варіаційного ряду, а й для інтервального статистичного ряду. В ситуації з інтервальним статистичним рядом при побудові полігонів як абсциси відповідних кінців відрізків обирають точки z_i^*.

Гістограми використовують для зображення винятково інтервальних варіаційних рядів. Для її побудови в прямокутній системі координат на осі абсцис відкладають відрізки, що є частковими інтервалами спостережень. На цих відрізках, як на основах, будують прямокутники з висотами, що дорівнюють частотам — абсолютним або відносним. Тобто розглядають два типи гістограм. Варто знати формальне означення гістограми.

Гістограмою абсолютних частот називають ступінчасту фігуру, яка побудована з прямокутників, основою яких є інтервали групування, довжини h, а висоти дорівнюють $h_i^* = \frac{n_i}{h}$.

Площа гістограми абсолютних частот дорівнює п.

Гістограмою відносних частот (або просто гістограмою) називають ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких єчасткові інтервали групування довжини h, а висота дорівнюють $\frac{P_{ni}^*}{h}$. Оскільки площа чергового прямокутника становить h x $\frac{p_{ni}^*}{h} = p_{ni}^*$, то загальна площа гістограми дорівнює одиниці. По суті, гістограма — це графічний статистичний аналог щільності.

Зобразимо гістограму абсолютних частот, задану таблицею 2.

Таблиця 2

Частковий інтервал	2—5	5—8	8—11	11—14
Абсолютна частота	9	10	25	6

Потрібно визнати, що побудова полігонів і гістограм потребує певних зусиль обчислювального та графічного характеру (Рис.2).

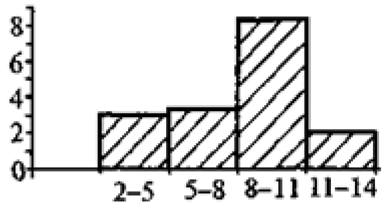


Рис. 2

Тому для оперативного аналізу статистичних даних слугують такі їх спрощені характеристики, як медіана і мода. Подамо їх означення.

Медіаною випадкової вибірки називають той її елемент, який поділяє варіаційний ряд навпіл. У цьому означенні є певна неясність: якщо число елементів у вибірці парне, то середнього елемента не існує. В цьому випадку за медіану беруть два елементи, які знаходяться посередині вибірки. Тобто в таких випадках існують дві медіани, правда, вони можуть збігатися.

Модою випадкової вибірки називають значення того елемента, який трапляється найчастіше. Можна сказати, що поняття моди в даному контексті збігається, взагалі кажучи, з побутовим значенням цього слова. Наприклад, в певному магазині продають три типи шкільних ранців: на 3 кг ваги вмісту, на 4 і на 5 кг. Випадкова вибірка з 10 елементів виявилася такою: 5, 4, 5, 4, 5, 5, 3, 3, 5, 5. Складемо частотну таблицю (табл. 3).

Таблиця 3

3	4	5
2	2	6

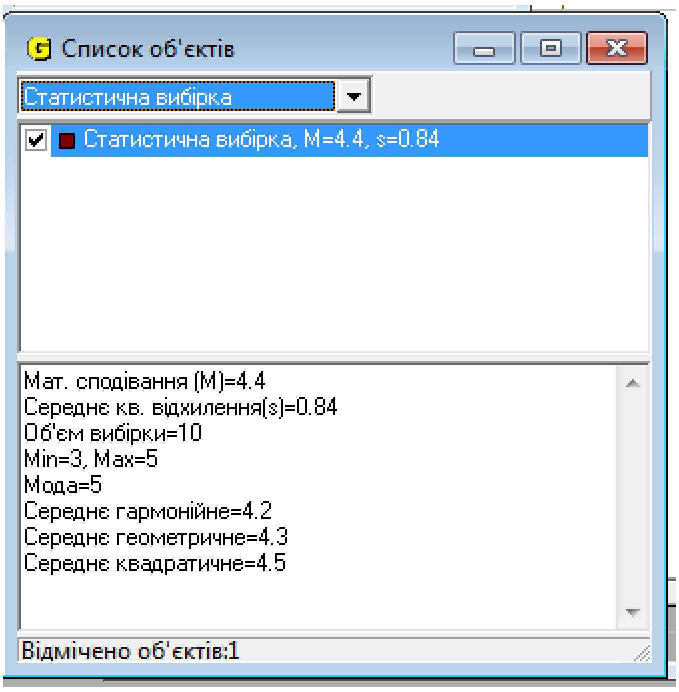


Рис. 3

Легко бачити, що варіанта 5 зустрічається найчастіше — 6 разів. Це і є мода даної вибірки.(Рис. 3)

III. Закріплення нового матеріалу

1. Розв'язати задачу. На заводі протягом семигодинного робочого дня робітник виготовляв: 10, 8, 11, 12, 11, 9, 7 деталей. Знайти моду, медіану.

Розв’язок (Рис. 4):

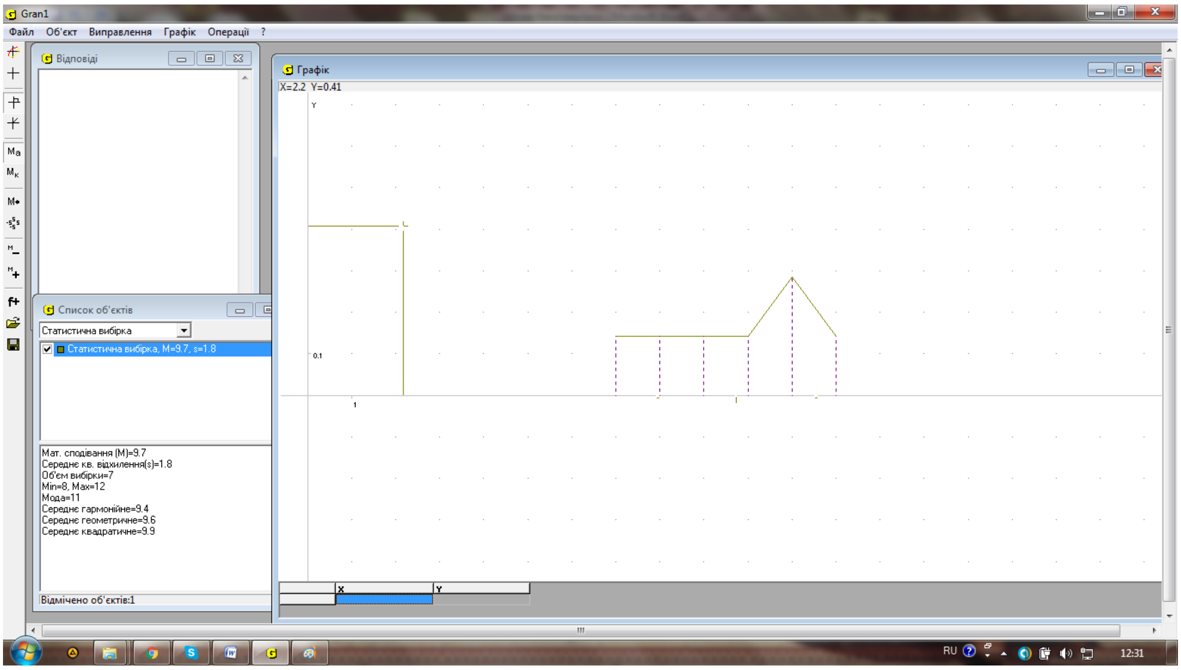


Рис. 4

Відповідь: мода — 11, медіана — 10. Побудуйте гістограму.

2. Розв'язати задачу. Група учнів у кількості 20 чоловік підтягувалася на перекладині. Результати підтягування були такі: 12, 14, 9, 10, 10, 12, 11, 8, 9, 7, 10, 10, 13, 15, 10, 9, 14, 10, 11, 13. Знайти моду, медіану.

Розв’яжемо дану задачу за допомогою GRAN 1, отримаємо такі розв’язки (Рис. 5):

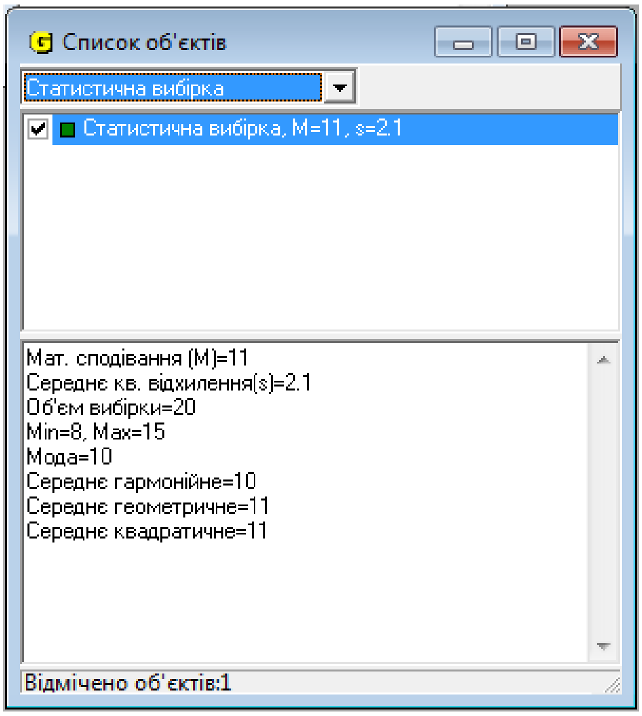


Рис. 5

Відповідь: мода — 10, медіана — 10. Побудуйте полігон.

На наступному уроці ми ознайомимося з більш інформативними числовими характеристиками випадкових вибірок.

IV. Підсумок уроку

1. Що таке полігон, як його побудувати?

2. Що таке гістограма, як її побудувати?

3. Що таке мода, як її знайти?

4. Що таке медіана, як її знайти?

V. Домашнє завдання

1. Побудувати полігони частот і відносних частот для вибірки, заданої таблицею 4.

Таблиця 4

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	30	33	12

2. Зобразити гістограму абсолютних частот, задану таблицею 5.

Таблиця 5

Частковий інтервал	2-5	5-8	8-11	11-14
Абсолютна частота	25	10	9	6

3. Зобразити гістограму абсолютних частот, задану таблицею 6.

Таблиця 6

Частковий інтервал	2-5	5-8	8-11	11-14
Абсолютна частота	25	10	9	6

4. Дослідити статистику оцінок з математики в класі за останню чверть. Скласти полігон частот, знайти медіану і моду.

5. Навести приклади різних наборів спостережень з довкілля.

Урок 4

Тема. Середнє арифметичне і вибіркова дисперсія.

Мета уроку. Ознайомити учнів з найважливішими числовими характеристиками випадкових вибірок: вибірковим середнім та вибірковою дисперсією — й основними прийомами їх обчислень.

I. Перевірка домашнього завдання

1. Вибірково перевірити зошити з виконаним домашнім завданням.

2. Перевірити засвоєння теоретичного матеріалу можна такими усними вправами:

1) За даними вибірки 1; 5; 4; 6; 3; 2; 6; 4; 5; 4:

а) заповнити таблицю 1 точкового розподілу частот.

Таблиця 1

Число	1	2	3	4	5	6
Частота						

б) заповнити таблицю 2 інтервального розподілу частот.

Таблиця 2

Інтервал	1—2	3—4	5—6
Частота			

2) Дано вибірку 2; 2; 4; 5; 7. Знайти: а) її моду; б) її медіану.

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Графічно зобразивши варіаційний ряд, дослідник отримує можливість наочного уявлення про характер поведінки генеральної сукупності і початкового її аналізу. На практиці цього буває недостатньо. Насамперед залишається неясним, як формально порівнювати два графічні зображення незалежно від індивідуальних уподобань і досвіду дослідника. Тому для подальшого вивчення характеру варіації (зміни) елементів у випадковій вибірці використовують їх числові характеристики.

Оскільки числові характеристики стосуються вибірок, то їх називають вибірковими. Ми ознайомимося з основними з них: вибірковим середнім (арифметичним — це слово часто опускають) та вибірковою дисперсією.

Вибіркове середнє арифметичне випадкової вибірки x_1, x_2,..., x_n позначають символом x і виражають формулою:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Розглянемо окремі випадки, коли обчислення вибіркового середнього можна спростити.

1. Нехай вибіркова сукупність задана своїм статистичним рядом розподілу, тобто послідовністю варіант z_1, z_2,..., z_k і послідовністю відповідних їм відносних частот p^*_{ni}, p^*_{n2}, p^*_{nk}.Тоді вибіркове середнє даної сукупності можна обчислювати за формулою

$$z_1 P^*_{n1} + z_2 P^*_{n2} + ... + z_k P^*_{nk}.$$

Якщо ж вибіркова сукупність задана послідовністю тих самих варіант і послідовністю відповідних їм абсолютних частот n_1, n_2,..., n_k, то вибіркове середнє можна обчислити за формулою:

$$\frac{z_1 n_1 + z_2 n_2 + ... + z_k n_k}{n}$$

2. Якщо кожний елемент x_i вибіркової послідовності можна представити у вигляді x_i- = cy_i- +b, то вибіркове середнє x можна виразити через вибіркове середнє $\bar{y}$ формулою :

$$\bar{x} = c\bar{y} + b$$

3. Нехай маємо дві вибіркові послідовностіоднакових об'ємів x = (x_1, x_2, ..., x_n) Іy = (y_1, y_2, ..., y_n). За ними утворюють третю послідовність x + y=(x_1+y_1,x_2 + y_2, ..., x_n + y_n). Тоді вибіркове середнє для суми послідовностей дорівнює сумівибіркових середніх, тобто $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$.

4. Якщо від кожного елемента вибіркової послідовності x відняти його вибіркове середнє $\bar{x}$іпозначити таку вибіркову послідовність x - $\bar{x}$, то її вибіркове середнє дорівнює нулю, тобто $\overline{x+y} = 0$.

Приклади обчислень вибіркового середнього можна взяти з підручника.

Вибіркове середнє — дуже важлива характеристика для статистичного матеріалу найрізноманітнішої природи. Ми часто чуємо про середню температуру місяця в певному місці, середню зарплату працівників даної галузі, середню пенсію, середній рівень опадів у даній місцевості тощо. Проте для кожного прикладу відхилення значень вибіркової послідовності від вибіркового середнього може бути досить значним і завжди важливо знати міру цього відхилення. Хотілося б скористатися вибірковим середнім відхилення, але воно, як ми уже знаємо, завжди дорівнює нулю. Тому за міру цього відхилення прийнято використовувати середнє арифметичне величин$(x_i - \bar{x})^2$ — це буде вибіркова дисперсія.

Вибірковою дисперсією випадкової вибірки $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називають величину

$$D_x^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Ця формула не завжди зручна для обчислення вибіркової дисперсії. Можна довести, що дане обчислення можна вести за такою формулою:

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - (\bar{x})^2,$$

або в розгорнутій формі:

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - (\bar{x})^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2,$$

Якщо позначити всі попарно різні варіанти $z = (z_1, z_2, ..., z_k)$, а відповідні їм абсолютні частоти $n_1, n_2, ..., n_k$ то для вибіркової дисперсії буде мати місце

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} n_1 (z_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} n_i z_1 \right)^2,$$

ІІІ. Закріплення нового матеріалу

1. Знайти центральні тенденції вибірки: 1, 4, 5, 6, 1, 3, 5, 4, 5.

За допомогою GRAN 1:

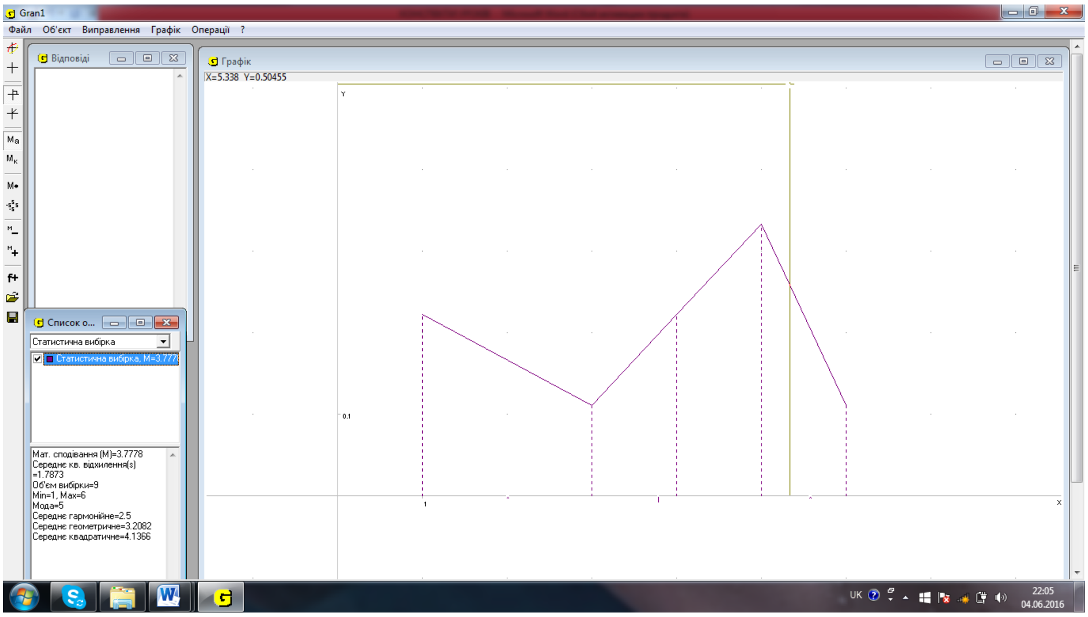


Рис. 1

Відповідь: мода — 5, медіана — 4, середнє значення $\frac{39}{11}$.

2. Знайти вибіркову дисперсію для вибірки, заданої статистичним рядом розподілу (табл. 3).

Таблиця 3

z_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	4

Розв'язання (див. табл. 4).

Таблиця 4

z_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	4
$z_i n_i$	32	60	56	40
z_i^2	4	25	49	100
$z_i^2\ n_i$	64	300	392	400

Тепер легко провести подальші обчислення:

$\sum z_i n_i =$ 32 + 60 + 56 + 40 = 188, звідки $\bar{z} = \frac{188}{40} = 4{,}7$.

$\sum z_i n_i$ = 64 + 300 + 392 + 400 = 1156, звідки $\frac{1}{n}\sum z_i^2 n_i = \frac{1156}{40}$=28,9.

D_z^* = 28,9 - (4,7)2 = 28,9 - 22,09 = 6,81.

Отже, вибіркова дисперсія даного варіаційного ряду дорівнює 6,81.

Після вивчення основних понять статистики бажано провести самостійну роботу.

IV. Самостійна робота

I рівень.

Визначте моду і медіану, використовуючи дані про відсоток жирності молока 20 корів (у відсотках): 3,8; 3,9; 4,0; 4,1; 3,8; 3,7; 3,6; 3,7; 3,9; 3,7. Складіть варіативний ряд і статистичну таблицю. Знайдіть середнє значення жирності молока (3 бали).

IIрівень.

Протягом березня середньодобова температура (в градусах) була такою: 6, 7, 5, 4, 3, 2, 5, 5, 6, 7, 6, 5, 8, 6, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 5, 6, 4, 5, 5, 6, 4, 4, 5, 6, 7. Побудуйте полігон. Знайдіть моду, медіану, середнє значення сукупності значень температури (6 балів).

IIIрівень.

За контрольну роботу учні 11 класу отримали бали (табл. 5).

Таблиця 5

Номер у списку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість балів	10	8	7	6	9	7	5	2	3	4
Номеруспиську	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Кількість балів	8	7	7	8	4	9	11	5	6	7

Визначте центральні тенденції. Побудуйте полігон (9 балів).

IVрівень.

Учні 9 класу показали результати зі стрибків у висоту (табл. 6, 7).

Таблиця 6

Номер у списку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Результат	130	135	120	115	120	125	140	138	135	130	120	130

Таблиця 7

Номер у списку	13	14	15	16	14	18	19	20	21	22	23	24
Результат	125	128	130	125	135	138	135	136	121	125	128	130

Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму. Визначте центральні тенденції (12 балів).

У самостійній роботі учень сам обирає для себе відповідний рівень

V. Домашнє завдання

1. Знайти вибіркову дисперсію для вибірки, заданої таким статистичним рядом розподілу (табл. 8).

Таблиця 8

z_i	1	3	39	45
n_i	8	16	40	26

Розв'язання. Складемо таку таблицю (табл. 9).

Таблиця 9

z_i	1	3	39	45
n_i	8	16	40	26
$z_i n_i$	8	48	1560	1170

z_i^2	1	9	1521	2025
z_i^2 n_i	8	144	60840	52650

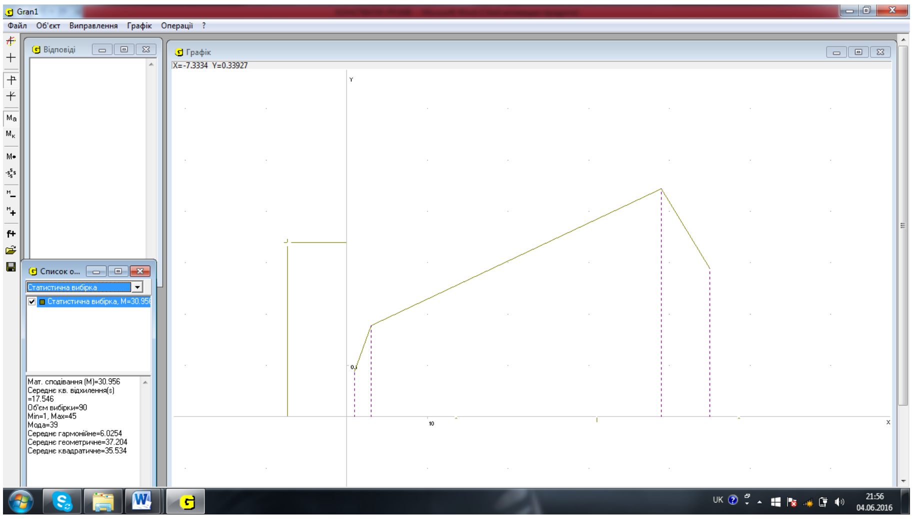


Рис. 1

Використовуючи GRAN 1, обчислення математичного сподівання виконується автоматично. (Рис. 1)

Тепер легко провести подальші обчислення:

$\bar{z} = 30{,}96.$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_1^2 n_i = \frac{1156}{40} = 28{,}9.$$

$$D_z^* = 304{,}4.$$

Отже, вибіркова дисперсія даного варіаційного ряду дорівнює 304,4.

2. Провести дослідження статистики оцінок з математики в класі за останню чверть: знайти середнє арифметичне і вибіркову дисперсію.

3. **Тема для дослідження.** Проаналізувати частоту вживання службових слів на різних сторінках підручника з математики. Вирішити питання про близькість частот та існування певної характерної частоти вживання службових слів автором підручника.

4. Розділ 8, §§52, 53

Додаток Б

АНКЕТА

Шановні учні, Ви приймаєте участь в опитуванні, ціллю якого є дослідження переваг і недоліків використання НІТ при вивченні курсу алгебри і початків аналізу.

Просимо Вас відповісти на всі запитання анкети. Результати опитування будуть використані для аналізу перспектив розробки та впровадження методики вивчення курсу алгебриі початків аналізу з допомогою НІТ.

Наперед вдячні за співпрацю!

____

П.І.П опитуваного

1. Чи сподобалися Вам уроки з використанням комп'ютерних технологій? Якщо «так», то чому?
2. Чи зрозуміліше Вам навчальний матеріал при вивченні його за допомогою НІТ, ніж традиційним шляхом?
3. Які нові можливості, на Вашу думку, може відкрити використання комп'ютера в школі?
4. Чи варто систематично використовувати комп'ютер на уроках алгебри?

Чому?
5. Чи доцільне було використання комп’ютера при вивченні теми «Елементи статистики»? Якщо «так», то чому?
6. Чи вивчення теми «Елементи статистики» з використанням комп’ютера було більш зрозумілим, ніж без його використання?
7. Виберіть найкращу форму організації навчального процесу з алгебри із використанням НІТ (виберіть варіант з переліку або вкажіть свій): А) у звичайному класі; Б) у комп’ютерному класі; В) з відвідуванням комп’ютерного класу, коли це потрібно; Г) свій варіант
8. При вивченні яких тем з курсу алгебри початків аналізу (10-11 класи) Ви б запропонували найбільш широке використання НІТ? (вказати принаймні 2-3 теми)

9. Ваші побажання щодо покращення якості уроку в сучасних умовах.