Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

бакалавр

на тему:

«Методика розв’язування математичних задач з економічним змістом на уроках математики»

Виконала: студентка IV курсу, групи МЕФ-41
напряму підготовки
6.040201 «Математика»
Моголюк Альона Валеріївна

Керівник:
доц. кан. пед. н. Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент:
доц. кан. ф.-м. н. Сяський В.О.

м. Рівне 2018 рік

ЗМІСТ

ВСТУП

Входження України в європейський освітній простір зумовило приведення вітчизняних освітніх стандартів щодо тривалості здобуття загальної середньої освіти відповідно до норм Європейського співтовариства. У даний час відбувається реформа загальної середньої освіти. Пріоритетними напрямами оновлення сучасної освіти, зокрема математичної, є підвищення якості математичної підготовки, створення умов для розвитку особистості учня, забезпечення його освітньої та особистісної самореалізації як у повсякденному житті, так і в майбутній професійній діяльності.

Останнім часом все більше уваги приділяється економічній освіті молодого покоління. Адже вижити та пристосуватися до сучасних економічних умов неможливо без знання економічних закономірностей ринкової економіки. Випускники шкіл мають оволодіти вміннями планувати власний бюджет, розпоряджатися власними коштами, шукати найкращі можливості для інвестицій та оволодіти знаннями про різні можливості примноження капіталу та банківські операції.

Математичні задачі економічного змісту – це засіб ознайомлення учнів з застосуванням математичних понять та методів у економічній галузі та розкриття можливостей математики у фінансовій теорії.

Робота з прикладними задачами економічного змісту в процесі навчання математики сприяє, з одного боку, розвитку математичного мислення, зацікавлює учнів, а з іншого – озброює їх економічними знаннями. Це відбувається завдяки математичним інтерпретаціям економічних понять, які використовуються в процесі розв’язування задач.

В даній роботі зроблено спробу поєднати теоретичний матеріал з методичними рекомендаціями та розв’язками типових задач економічного змісту, розкриті питання про прості відсотки та дисконт, лінійні функції, геометричну прогресію, інтеграл, диференціальне числення, їх застосування до розв’язування задач економічного характеру.

Актуальність обраної теми дослідження обумовлюється, насамперед, потребами реалізації Концепції національної освіти в Україні, розвитком новітніх інноваційних технологій навчання і виховання учнів загальноосвітніх навчальних закладів; розвитком ринкової економіки, що призводить до потреби кваліфікованих працівників професій економіки та підприємництва.

Метою бакалаврської роботи є: формування уявлень учнів про етапи розв'язування задач економічного характеру, про місце і можливості математики в цьому процесі.

Об'єкт дослідження – задачі економічного змісту, які розв'язуються математичними методами.

Предмет дослідження – особливості розв'язування економічних задач методами елементарної алгебри, які базуються на вмінні користуватися розрахунковими формулами, виконувати аналіз елементарних функцій і розв'язувати рівняння та нерівності шкільного курсу математики.

У відповідності до мети були поставлені **завдання бакалаврської роботи:**

1. Дослідити основні математичні задачі економічного характеру, що вивчаються на уроках математики.
2. Систематизувати теоретичні відомості і методи розв'язування економічних задач.
3. Висвітлити науково-теоретичні основи розв'язування цих задач.
4. Розробити методику розв'язуваня задач з економічними показниками.

В основі дослідження була покладена **гіпотеза:** систематичне і цілеспрямоване використання задач з економічним змістом при вивченні математики сприятиме підвищенню результативності вивчення курсу.

Практичне значення роботи полягає в тому, що матеріал роботи можна використати на уроках математики і економіки в класах з поглибленим вивченням предмету та економічних класах.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

1.1. Економічна орієнтація процесу навчання математики в школі

Трансформація змісту програм основної школи передбачає нові показники якості освіти – компетентності, які ґрунтуються на уміннях учнів використовувати здобуті на уроках знаннях та їх готовності до вирішення складних проблем в життєвих ситуаціях.

Однією із 10 ключових компетентностей Нової української школи визначено ініціативність і підприємливість – уміння генерувати нові ідеї й ініціативи та втілювати їх у життя з метою підвищення як власного соціального статусу та добробуту, так і розвитку суспільства і держави. Вміння раціонально вести себе як споживач, ефективно використовувати індивідуальні заощадження, приймати доцільні рішення у сфері зайнятості, фінансів тощо.

З 13 лютого 2017 р. відбувалося публічне обговорення програм для базової загальної середньої освіти на соціальній платформі EdEra. Учасниками обговорення могли стати всі бажаючі, які є небайдужими до стану шкільної освіти в Україні: освітяни, експерти та батьки. Міністром освіти і науки України Лілією Гриневич було запропоновано інтегрувати у навчальні програми наскрізні теми, які будуть спрямовані на формування в учнів ключових компетентностей [6].

Наразі пропонується чотири наскрізних теми, які будуть розглядатися під час вивчення всіх шкільних предметів:

1. Здоров’я і безпека.
2. Громадянська відповідальність.
3. Підприємливість та фінансова грамотність.
4. Екологічна безпека та сталий розвиток.

Згідно з пояснювальною запискою з математики щодо наскрізних ліній та їх застосування зазначається, що наскрізна лінія «Підприємливість та фінансова грамотність» спрямована на:

- розвиток лідерських ініціатив;
- здатність успішно діяти в технологічному швидкозмінному середовищі;
- забезпечення кращого розуміння учнями практичних аспектів фінансових питань (здійснення заощаджень, інвестування, запозичення, страхування, кредитування тощо). [3]

Запропонована наскрізна лінія пов'язана з розв'язуванням практичних задач щодо планування господарської діяльності та реальної оцінки власних можливостей, складання сімейного бюджету, формування ощадливого ставлення до природних ресурсів. Вона реалізується під час вивчення відсоткових обчислень, рівнянь та функцій [6].

Для ефективної реалізації у навчальному процесі цієї наскрізної лінії слід з'ясувати зміст таких понять як «фінансова грамотність», «фінансова обізнаність», «фінансова культура. На основі аналізу значної кількості різних підходів до тлумачення цих термінів подаються такі трактування цих понять.

Фінансова грамотність являє певне вміння застосовувати фінансові знання та використовувати здобуті фінансові навички, щоб отримувати максимальну користь від управління власними фінансами та застосування фінансових послуг.

Під *фінансовою обізнаністю* пропонується розуміти наявність у людини певного рівня фінансових знань та навичок, що формують його відповідний рівень компетентності з фінансових питань. Тобто оцінкою фінансової грамотності населення має бути рівень фінансової обізнаності.

Фінансова освіченість допомагає зрозуміти ключові фінансові поняття і використовувати їх для прийняття рішень про доходи, витрати і заощадження для вибору відповідних фінансових інструментів, планування бюджету, нагромадження коштів на майбутні цілі тощо. Високий рівень фінансової грамотності населення країни робить позитивний вплив як на економіку держави, так і на рівень добробуту її громадян, а саме:

– допомагає заробляти, зберігати, збільшувати та раціонально використовувати ті кошти, що має людина;
– уможливлює раціоналізацію сімейного бюджету та розширення сфер його планування, здатність керувати фінансами протягом життєвого циклу сім'ї;
– сприяє захисту населення від шахрайства, підвищує фінансову безпеку громадян;
– підвищує рівень користування фінансовими продуктами, прозорість фінансового ринку, стабільність ринків;
– сприяє збільшенню числа сумлінних позичальників, зниженню ризиків, пов'язаних з діяльністю банків;
– покращує емоційний стан кожного громадянина країни.

Набута учнями компетентність у сфері підприємливості та фінансової грамотності сприятиме виробленню в учнів умінь застосовувати фінансові знання та використовувати здобуті фінансові навички, щоб отримувати максимальну користь від управління власними фінансами та застосування фінансових послуг. Для формування в учнів фінансової обізнаності та розвитку фінансової грамотності, за новою програмою навчання математики в школі, рекомендуються задачі, що стосуються вартості товарів і послуг, сімейного бюджету, страхування, цінних паперів, благодійності, податків.

У 5 – 6 класах на уроках математики доцільно використовувати задачі, у яких потрібно з'ясувати, чи вистачить сім'ї коштів для здійснення певної покупки, порівняти дохід і витрати сім'ї, визначити, вартість якої з покупок буде більшою.

Цікавими для учнів будуть задачі на дії з десятковими дробами, що пов'язані з обміном валют. Опанування учнями знань та навичок обміну валют підсилить інтерес до вивчення математики та підсилить прикладну її спрямованість.

У 7 класі рекомендується розв'язувати сюжетні задачі на використання власних та родинних фінансів. Задачі фінансового змісту також корисно пропонувати під час вивчення теми «Функція», де особливе значення надається дослідженню функції і побудові графіків, які мають грошову залежність.

У 8 класі передбачається розв'язування сюжетних задач на:

– використання взаємозв'язків економічних явищ;
– види та розрахунки податків;
– продуктивність праці;
– вартість товару;
– витрати і доходи.

Під час вивчення теми «Нерівності» учням буде цікава задача, що розв'язуються за допомогою нерівності і поєднує знання з комбінаторики.

Наскрізна лінія, що формує фінансову грамотність учнів, може реалізовуватися під час вивчення майже всіх навчальних тем. У 10 – 11 класах пропонується ознайомлювати учнів із задачами на цінні папери, зокрема з такими їх видами, як акція та облігація, тим самим сформувати уявлення учнів про значення ринку цінних паперів [3].

Навчання економіки, розвиток в учнів способів раціонального мислення в школах не є новизною сучасності. Водночас викликає подив той факт, що цей процес відбувається здебільшого в старших класах. Молодші школярі продовжують стихійно шукати відповіді на безліч хвилюючих питань із реальної життєвої практики. Доцільно, щоб економічна освіта і формування альтернативної поведінки в школі починалися саме з середніх класів. Тоді до закінчення школи в учнів буде досить часу, щоб досконало розібратись в економічних проблемах, що їх оточують, в економічному житті, що вирує навколо них.

Метою економічного виховання на уроках математики є формування економічного мислення, тобто певного реального уявлення про економічні закономірності, бачення свого місця в економічному середовищі людей, у зв’язках економіки з життям, з власним матеріальним і моральним комфортом.

Математика посідає особливе місце в системі загальної і спеціальної освіти економічного напрямку. По-перше, вона є основним компонентом загальної освіти і розвитку особистості. По-друге – навчальним предметом, необхідним для подальшої економічної освіти і наступної професійної діяльності учнів. Великі можливості математики для економічної освіти учнів дають змогу говорити про особливе значення розробки навчально-методичного забезпечення математичної освіти для класів економічного профілю.

Основне завдання математики – розвиток логіки, якостей особистості, які необхідні для освоєння нових областей знань та для полегшення адаптації до умов життя, які постійно змінюються. Ведуча роль належить математиці у формуванні вмінь діяти відповідно до заданих алгоритмів, а також конструювати нові, тобто такі вміння, які необхідні для вільної орієнтації у “комп’ютерному світі”. За даними деяких психологічних досліджень, логічне мислення дитини формується до 13-15 років, а у більшості випадків – до більш пізнього віку. Тому Т. Фірсов говорив, що припинити підживлення інтелекту математикою, обірвати математичну діяльність у значної частини учнів при виході з основної школи було б неправильним. Отже, математика повинна мати свою логіку побудови, свої принципи відбору змісту і застосування методів навчання, які б відповідали основним дидактичним вимогам. Правильним шляхом розв’язання цього питання стає диференціація навчання математики у старшій школі, введення курсів різного обсягу та рівня.

Слід підкреслити, що особливості конкретного профілю можуть вимагати включення до відповідних курсів математики матеріалів, які розширюють і поглиблюють основний курс. Тому очевидним є те що кожна програма повинна складатися з двох частин: інваріативної (обов’язкової для вивчення всіма учнями) та варіативної (набір розділів, з яких викладач може складати матеріал, що доповнює основну частину курсу).

Математика входить до числа обов’язкових навчальних предметів для учнів середньої школи і відповідно з обраним напрямом навчання має різну питому вагу в загальноосвітній підготовці учнів за часом, який відводиться на її вивчення, а також за глибиною і охопленням матеріалу, який розглядається.

Вивчення досвіду роботи фахівців, які пов’язані з економічними професіями, показало, що основними параметрами економічного мислення є оперативність, гнучкість, критичність, вміння аналізувати ситуацію, яка склалась, знаходити шляхи виходу з неї [16].

Ці якості передбачають наявність в учнів уміння складати математичні моделі, вибирати раціональні методи разв’язування задач, оцінювати оптимальність розв’язування. Вищезазначене і складає основу економічної грамотності, яка узагальнено може бути представлена такими компонентами:

- осмислене бачення учнями взаємозв’язку між економічними поняттями;
- вміння застосовувати отриманні знання на практиці.

Розв’язування задач – це розумова робота. А щоб навчитися будь-якої справи, треба спочатку добре вивчити той матеріал, над яким доведеться працювати. Задачі слід добирати так, щоб учень міг творити, мислити, щоб мав можливість досягти вершин інтелектуальної творчості. Будучи простою, задача має бути достатньо цікавою і викликати інтерес. Психолог Л. Виготський зазначав: «…задачі, які пропонують учням, мають випереджати вже досягнутий ними рівень на один крок». Тільки так серед дітей можна виявити обдарованих для поглибленої роботи з ними. Важливим є не тільки те, чи розв’яже учень задачу, скільки те, як він міркуватиме, розв’язуючи її.

Д. Пойа стверджував, що краще розв’язати одну задачу кількома способами, ніж кілька різних чи однотипних задач. Цього принципу бажано дотримуватися й вчителеві на уроці, порівнюючи з учнями різні способи розв’язання, оцінюючи їх стандартність чи оригінальність, складність в обчисленнях, доступність новизну.

Щоб легко розв’язувати стандартні задачі, а вони є основними задачами, оскільки всі інші, зрештою, зводяться до них, треба:

1) пам’ятати всі вивчені загальні правила (формули, тотожності) і загальні твердження (означення, теореми);
2) уміти розгортати згорнені загальні правила, формули, тотожності, а також означення і теореми у послідовності кроки розв’язування задач відповідних видів [29].

Сьогодні нікого не слід переконувати в необхідності активного вивчення і застосування математики в економічній освіті. Без математики не може обійтися фактично жодна наука. Однак є розходження між математикою як одним з методів дослідження в економічній теорії і математикою як самостійною частиною економічної освіти взагалі.

Вивчення математичних дисциплін організовує мислення, сприяє розвиткові чіткості і лаконічності у викладі доводів і аргументів, дисциплінує наукові дослідження і створює необхідну базу для розуміння та зіставлення дослідницьких робіт і навчальних дисциплін різних країн.

Щодо удосконалення змісту шкільної математичної освіти, то це питання в рамках даної проблеми правомірно розглядати лише в контексті питання про профільну диференціацію шкіл, а саме орієнтуватись на середні навчальні заклади економічного профілю.

Програма з математики таких закладів має бути практично орієнтована на формування в учнів умінь та навичок виконання простих економічних розрахунків, складання кількісних описів реальних економічних процесів, дослідження математичних моделей всіляких економічних ситуацій.

1.2. Задачі з економічним змістом та їх характеристика

У педагогічній літературі немає єдиного трактування поняття “задач”. Зокрема, М. А. Данилов розуміє під задачею свідоме багатогранне виконання подібних дій з метою оволодіння навичками. З точки зору А. В. Єфремова, задача – це інформаційна сукупність зв’язків і залежностей, виражених словами, за допомогою графіків або в математичних формулах, яка утворює певну ситуацію, що визначає і спонукає розумову діяльність суб’єкта на визначення шляхом упорядкованих дій функціонального виразу невідомих компонентів через відомі.

У шкільному курсі математики до задач відносять не лише текстові, сюжетні задачі, а й прикладні. Задачі є об’єктом вивчення, і засобом навчання.

Виділяють чотири основні функції задач, причому жодна з цих функцій не може виступати ізольована від інших:

1) навчальна, яка спрямована на формування системи математичних знань учнів, їх умінь і навичок на різни етапах навчання;

2) розвивальна, яка спрямована на розвиток мислення учнів, на формування їхньої розумової діяльності, просторових уявлень, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо;

3) виховна, яка спрямована на формування наукового світогляду учнів, сприяє їхньому економічному і естетичному мисленню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, відповідальність та ін.);

4) контролююча, яка спрямована на встановлення рівня загального та математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класами в цілому [31, с.17].

Єдність теорії і практики – це один із основних принципів педагогіки. Зв’язок математики з іншими дисциплінами, зокрема з економікою, є важливим засобом реалізації цього принципу, тому курс математики повинен мати прикладну спрямованість.

У методичній літературі подано різні означення прикладної задачі, деякі вчені прикладною називають задачу, яка потребує перекладу на математичну мову, інші вважають, що прикладна задача за формулюванням і методом розв’язування повинна бути близькою до задач, що виникають на практиці.

Прикладні задачі – це задачі, фабула яких розкриває застосування математики у суміжних навчальних дисциплінах, знайомить з її використанням в організації, технології та економіці сучасного виробництва, у побуті та сфері обслуговування, при виконанні трудових операцій. У цих задачах задаються реальні умови та розглядаються реальні ситуації, що відбуваються чи можуть відбуватися на практиці. У той же час деякі дослідники ототожнюють прикладні задачі з текстовими.

Отже, прикладна задача має задовольнити такі вимоги: бути сюжетною (тобто сформульованою природною мовою, а явища та події повинні бути описані кількісно та якісно); бути моделлю реальної ситуації, що виникає на практиці; має розв'язуватися засобами математики.

Прикладні задачі розрізняють, орієнтуючись на три групи спеціальностей:

1) техніко-технологічні (промисловість, зв'язок, транспорт, будівництво, сільське господарство тощо);
2) гуманітарні (освіта, культура, право, медицина, мистецтво тощо);
3) економічні (фінанси, побут, торгівля тощо).

Задачі економічного змісту – це задачі, пов'язані з фінансами, побутом, торгівлею, грошовими розрахунками, прийняттям оптимальних рішень тощо. Основними видами задач економічного змісту є задачі на відсоткові розрахунки, кредитування, касово-розрахункове обслуговування, оптимізацію, фінансову математику [31, с. 18].

Як і будь-які інші задачі, задачі економічного змісту складаються з предметного сюжету, умови та вимоги. У предметному сюжеті вказуються економічні поняття та їхні причинно-наслідкові зв'язки в якісній або кількісній інтерпретації. До основних економічних понять, що найчастіше використовуються в сюжетних задачах, відносяться: продуктивність праці, собівартість, кредит, курс акцій, рента, бюджетний дефіцит, позичковий відсоток, заробітна плата, амортизаційні відрахування, рентабельність, дохід, витрати, прибуток. Поняття та зв'язки між ними інтерпретуються для конкретних економічних ситуацій: постановка економічної проблеми, яка пов'язана із необхідністю підвищення прибутку, продуктивності праці, рентабельності, зниження собівартості, із розрахунком ціни ринкової рівноваги, курсу акцій, кількість необхідних для обігу грошей, величини ренти, прибутку банку, сукупних витрат підприємства, прибутку підприємства, податку з доходу; номінального і реального відсотків за кредит, позичкового відсотка із впливом інфляції на заощадження громадян; прийняття оптимального рішення.

Розглянемо значимість математичних розрахунків для підприємницької діяльності в історичному аспекті. Перші спроби математичного аналізу економічних процесів були здійснені в XVI-XVII ст. Першовідкривачем математичної економіки вважається О. Курно, який на початку XIX століття зумів, діючими на той час математичними способами, проаналізувати багато закономірностей і співвідношень, характерних для економічного капіталізму. Він розробив математичний апарат теорії функціонування фірми, вперше проаналізував попит як спадаючу функцію ціни і довів, що у визначених умовах максимум прибутку досягається тоді, коли граничні витрати порівнюються граничним прибутком. З часом Л. Вальрас створив математичну теорію загальної економічної рівноваги. Е. Енгель розробив теорії функцій попиту й еластичності економічних показників. Чималий досвід використання математики був накопичений і вітчизняною економічною наукою. Одним із перших математичних досліджень міжгалузевого балансу в економіці була праця В. Дмитрієва, який на початку XX-го століття вивів формулу повних і прямих трудових витрат. Велике значення для запровадження математичних методів у економіці мало відкриття вченого-математика Е. Слуцького, який вивів рівняння взаємозалежності між зміною цін на окремі товари і прибутки споживачів, з одного боку, і структурою купівельного попиту з іншого [27].

У 30-х рр. XX-го ст. В. Леонтьєвим була розроблена теорія міжгалузевого балансу і математичний апарат для її практичного використання. Ця теорія одержала широке застосування не лише для аналізу стану і напрямів розвитку економіки, але й була використана для поліпшення інтенсифікації виробництва економіки ряду країн [16].

Математичні методи розв’язування безпосередніх виробничих завдань підприємства вперше були засновані Л. Канторовичем. Дослідник сформулював математичне поняття оптимальності, поглибив математичний апарат розв’язування подібних задач.

З часом математика поступово вторглася в усі галузі економічної науки, особливо пов’язані з управлінням економікою. Використання математичних методів у економіці особливо прискорилось у зв’язку з розвитком засобів електронно-обчислювальної техніки, без якої було б неможливим їх ефективне застосування для потреб інноваційного розвитку економіки.

Дослідники (О. Кравчук, З. Левчук та ін.) проблеми економічного виховання учнів у процесі навчання математики (однією її часткою є проблема виховання в учнів інтересу до професії сфери підприємницької діяльності) дійшли висновку, що формування економічного мислення на уроках математики повинно бути спрямоване на вироблення в учнів умінь оперувати економічними поняттями та навичок здійснювати аналіз економічних явищ в площині їх практичної доцільності. Вчені зазначають, що задачі з економічним змістом повинні містити матеріал максимально наближений до реальних практичних ситуацій, який враховує особистий досвід та спостереження учнів [25].

Слід зазначити, що задачі з економічним змістом широко використовуються під час вивчення математики в школах Великої Британії, Канади, США та в інших економічно розвинутих країнах. Так, наприклад, у школах Канади ще наприкінці 70-х років було впроваджено окремий курс “Математика для бізнесу з машинними обчисленнями”. У процесі вивчення цього курсу учні старших класів не лише оволодівають вміннями здійснювати економічні обчислення, необхідні в побуті та бізнесі, але й вивчають застосування засобів обчислювальної техніки (спершу мікрокалькуляторів, з часом персональних ЕОМ) у процесі здійснення економічних розрахунків [27].

Аналіз практики роботи сучасної вітчизняної школи та досвід економічно потужних держав свідчить про те, що знання та вміння, необхідні для здійснення економічних розрахунків, можуть формуватися в учнів протягом всього періоду шкільного навчання. Щодо формування інтересів учнів власне до підприємницької діяльності, то цей процес набуває реальної основи переважно в старших класах і сьогодні здійснюється в основному, під час вивчення ряду загальноосвітніх предметів, головним чином соціально-економічного циклу. Вивчення цих предметів дозволяє за умови відповідної організації навчально-виховного процесу ознайомити учнів з головними категоріями, поняттями та закономірностями функціонування ринкової економіки, в тому числі підприємництвом.

Наповнення навчального процесу прикладними задачами сприяє успішному застосуванню набутих знань на практиці, створює підґрунтя для того, щоб результати навчання базувалися на досягнені учнями необхідних компетентностей. Перехід загальноосвітньої школи на 12-річний термін навчання актуалізує чимало проблем, у тому числі й оновлення змісту освіти, що передбачає удосконалення наявних і створення нових підручників, розроблених з урахуванням особливостей навчального предмету, вікових особливостей учнів та досягнень.

Введення елементів прикладної математики в шкільний курс розглядали метолисти О. Астряб, Г. Бевз, Г. Возняк, Ю. Колягін, М. Маланюк, О. Маркушевич, В. Монахов, А. Мишкіс, Я. Пановко, З. Слєпкань, Л. Соколенко, В. Фірсов та інші. Деякі аспекти добору прикладних задач, зокрема задач економіко-фінансового характеру, досліджували В. Берман, Г. Дутка, Д. Межейнікова, Л. Соколенко, І. Стрельченко, О. Стрельченко, М. Терешин, І. Шапіро, В. Швець та інші.

Одним з найбільш поширених засобів виховання економічної грамотності на уроках математики є задачі, фабула яких пов’язана з виробництвом. При їх розв’язуванні часто використовуються такі економічні поняття як собівартість, продуктивність праці, економічна ефективність використання землі, продаж та купівля певних товарів. Проте учні бачать в задачах лише математичні обрахунки, а їх економічна суть “проходить” повз увагу дітей.

Тому вчителю варто більш звертати увагу на суть задач, бо вона може спростити задачі, полегшити знаходження розв’язків.

Розв’язання з учнями економічних задач сприятиме здійсненню міжпредметних зв’язків та зв’язку навчання з практичною діяльністю навчання, ознайомлення з суттю часто вживаних економічних понять і зв’язків між ними.

Учитель математики може ознайомити учнів із розв’язуванням деяких типів економічних задач у процесі вивчення відсотків (6 клас), лінійної функції (7 клас), елементів прикладної математики (9 клас), геометричної прогресії (9 клас), показникової функції та логарифмів (10-11 класи).

Як відомо, математичною основою виконання економічних розрахунків є проценти, пропорції, поняття середнього арифметичного. Вивченню цих понять в шкільному курсі математики традиційно приділяється багато уваги. Проте задачний матеріал відрізняється різноманітністю завдань економічного характеру. Тому проблема економічної спрямованості шкільного курсу математики деякою мірою може бути розв’язана завдяки збагаченню предметного змісту задач. Наступним кроком на шляху орієнтації шкільної математичної освіти на потреби економічної теорії та практики може бути удосконалення теоретичної бази шкільного курсу математики за рахунок ґрунтовного вивчення питань, які формують апарат дослідження математичних моделей конкретних виробничих ситуацій.

Для дослідження математичних моделей процесів перспективного розвитку виробництва, ціноутворення, зміни розміру земельної ренти та інших, які потребують знаходження граничного ефекту, а саме границі відношення приросту ефекта до приросту витрат, використовується метод граничного аналізу. Враховуючи це, в курсі математики середніх навчальних закладів економічного профілю доцільно поглиблено вивчати елементи диференційного числення, зокрема теорії границь.

1.3. Використання математичних методів до розв’язування задач економічного змісту.

Економічні знання й економічне мислення формуються не лише під час вивчення курсу економіки, а й при вивченні всього курсу предметів, що викладаються в школі. А особлива роль належить математиці. Це пояснюється тим, що більшість економічних проблем вирішуються за допомогою математичного аналізу який вивчають у курсі шкільної алгебри. Взаємодія математики і економіки має подвійну користь: математика одержує широке поле для різноманітних застосувань, а економіка – інструмент для одержання нових знань.

Математичні методи широко використовуються для розв’язування практичних задач у різних галузях науки, зокрема в економіці. Використання математичних методів в економіці ознаменувало XX століття. З їх використанням пов’язані роботи математичного моделювання в економіці фінансів, у розвиток якої зробили свій внесок відомі науковці: Б. Бурківський, В. Вітлінський, Б. Грабовецький, В. Здрок, Н. Лепа, В. Осипов. За допомогою економіко-математичних методів вони побудували свої теорії, провели практичні розрахунки, дали обґрунтовані висновки, здійснили прогнози й оцінили ризики багатьох економічних явищ і процесів. Основна їхня мета була проаналізувати та з’ясувати, який вплив мають математичні знання на вміння розв’язувати економічні задачі.

Математичні методи прискорюють проведення економічного аналізу, сприяють найповнішому урахуванню впливу різноманітних чинників на результати діяльності, підвищенню точності обчислень.

Застосування математичних методів вимагає:

- системного підходу до дослідження заданого об’єкта, урахування взаємозв’язків і відносин з іншими об’єктами (підприємствами, фірмами);

- розробки математичних моделей, що відображають кількісні показники системної діяльності працівників організації, процесів, що відбуваються в складних системах, якими є підприємства;
- удосконалення системи інформаційного забезпечення управління підприємством з використанням електронно-обчислювальної техніки (ЕОТ).

Розв’язування задач економічного змісту математичними методами можливо, якщо вони сформульовані математично, тобто реальні економічні взаємозв’язки і залежності виражені із застосуванням математичного аналізу. Це спричиняє необхідність розробки математичних моделей.

Включення математичних задач з економічним змістом до програми з математики основної школи та їх розв’язування сприяє створенню піднесення емоційного настрою, активності школярів у навчанні, формуванню практичних умінь та навичок, необхідних у повсякденному дорослому житті.

Під математичною задачею з економічним змістом (економічно-математична задача) розуміємо задачу, яка розкриває використання математики в економічних дисциплінах, ознайомлює із застосуванням математичних понять, операцій та законів у економічній сфері життя. З цього означення випливає, що ці задачі можуть використовуватися протягом усього навчального процесу.

Задачі економічного змісту формують економічне мислення, готують учнів і адаптують їх до умов розвитку ринкової економіки. Вони забезпечують допрофільну підготовку учнів, що спрямована на їх загальний розвиток, професійну орієнтацію, вибір профілю навчання та формування економічної грамотності засобам математики.

Ознайомитися з аналітичним представленням функції попиту, пропозиції та їх графіками учні можуть на уроках математики використовуючи запропоновані задачі. Вміння обґрунтовувати економічний зміст понять та величин, виражають їх із рівня попиту та пропозиції, учні зможуть після вивчення властивостей та законів попиту й пропозиції. Графічно визначити обсяг виручки, точку рівноваги.

Методи простих і складних відсотків розглядають в допрофільних класах. Ці питання набувають надзвичайної актуальності в сучасних умовах (отримання заробітної плати через банківські установи, кредитування, відкриття депозитів тощо). Формування в учнів елементів економічної грамотності засобами математики на прикладі задач економічного змісту можна починати з основної школи.

Цілком очевидно, що математичні задачі з економічним змістом, як прикладні, виконують декілька функцій:

- *освітню,* оскільки їх використання спрямоване на формування у школярів системи знань, умінь та навичок на різних етапах навчання;
- *розвивальну,* оскільки робота з ними розвиває вміння осмислювати зміст понять, застосовувати здобуті знання на практиці, аналізувати результати, робити відповідні узагальнення, порівняння, висновки;
- *виховну,* оскільки економічне, фінансове виховання на уроках математики може здійснюватися насамперед через ці задачі.

Розв'язування економічних задач на уроках математики необхідно використовувати для формування в учнів навичок планування своєї діяльності, розвитку в них творчого підходу до виконання завдання, формування умінь застосовувати для розрахунку теоретичні знання й обчислювальні навички.

З урахуванням зазначених умов система фінансових проблем вимагає розгляду на уроках математики формування попиту на товари та фінансові розрахунки підприємств. Розкриваючи різні аспекти, отримаємо низку задач з економічної тематики, які можуть бути запропоновані до розгляду на уроках математики в основній школі [18].

РОЗДІЛ ІІ. ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ХАРАКТЕРУ

Щоб розв'язати прикладну задачу за допомогою математичних методів, спочатку створюють її математичну модель. Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта. Математичні моделі створюють із математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів (рівнянь, нерівностей та їх систем) тощо. Розв'язування прикладних задач математичними методами здійснюється в три етапи:

1) створення математичної моделі даної задачі;
2) розв'язування цієї математичної задачі;
3) аналіз відповіді.

Модель – це такий матеріальний або уявний об'єкт, який у процесі дослідження заміщує об'єкт-оригінал [17, с. 19].

2.1. Прості, складні відсотки та дисконт

Згідно програми з математики відсотки в ЗОШ вивчають з 6 класу. Тому наведені нижче задачі корисно розв'язувати з учнями, починаючи з 6 класу і закінчуючи 11.

Відсоткові розрахунки застосовують при розв'язуванні багатьох практичних, економічних задач.

Задачі на прості відсотки зустрічаються в шкільному курсі алгебри, економіці, банківській сфері і т.д. Без розуміння їх змісту та знання формул розв'язати задачі часто буває складно. Нижче на поширених прикладах будуть дані основні задачі та формули для їх розв'язання.

Відсотком (процентом) від числа A називається одна сота частина цього числа.

Прибуток – це ціна, яку треба сплатити за використання грошей. Кількість грошей позичених (взятих в позику) або вкладених (інвестованих), називається *капіталом*, основною сумою або початковою вартістю. Через деякий обумовлений період часу особа, яка користується грошима (позичальник), повинна сплатити капітал плюс прибуток з капіталу. Прибуток з капіталу підраховується у вигляді відсотків від основної суми. Ці відсотки називаються *ставкою відсотка*, а метод підрахування прибутку – *метод простих відсотків*. Ставка відсотка визначається як обумовлений відсоток за одиницю часу [4].

1. Прості відсотки

Прості відсотки – це нарахування відсотків лише на початково інвестовану суму.

Введемо такі позначення:

$P -$ капітал (основна сума, поточна вартість, номінальна вартість) – кількість позичених або вкладених (інвестованих) грошей;

$r -$ ставка відсотка – нарахування прибутку у вигляді відсотків від основної суми за один рік;

$I -$ прибуток (у грошових одиницях) – ціна, яку треба сплатити за використання грошей;

$S -$ загальна сума (основна сума плюс прибуток, майбутня вартість, завершена вартість) – сума, яка виникла на кінець обумовленого проміжку часу;

$t -$ час (в роках) – тривалість кредиту або термін вкладу.

Формули простих відсотків:

$$I = P \cdot r \cdot t \qquad (2.1)$$

$$S = P + I \qquad (2.2)$$

$$S = P + P \cdot r \cdot t = P \cdot (1 + r \cdot t) \qquad (2.3)$$

Коли потрібно підрахувати поточну вартість (капітал), якщо відома майбутня вартість (загальна сума), то використовують формулу для обчислення простих відсотків:

$$P = \frac{S}{1+r\cdot t} \qquad (2.4)$$

Приклад 1. Вкладник розмістив суму розміром 24 000 грн. в банк. Визначте, яку суму отримає вкладник через 3 роки, якщо відсоткова ставка складає 19% в рік.

Розв'язання:

За умовою $P = 24\,000$ грн., $t = 3, r = 0{,}19$.

а) Згідно формули (2.3): $S = P \cdot (1 + r \cdot t), t > 0,\ S = 24\,000(1 + 0{,}19 \cdot 3) = 37\,680$ (грн).

Відповідь: $S = 37\,680$ грн.

Приклад 2. На весняному розпродажі ціну куртки, що коштувала 1850 грн. знизили на 40%. Скільки коштує куртка.

Роз'язання:

Початкова ціна становить100%, а знижена 100% - 40% = 60% від початкової. Нехай ціна після зниження дорівнює x грн., тоді запишемо умову у вигляді:

1850 грн. - 100%

x грн. - 60%

Складаємо пропорцію:

$$\frac{1850}{x} = \frac{100}{60};$$

$$1850 \cdot 60 = x \cdot 100;$$

$$x = \frac{1850 \cdot 60}{100}; x = \frac{111000}{100} = 1110 \text{ (грн.)}$$

Відповідь: 1110 грн.

Приклад 3. Знайдіть величину прибутку та майбутню вартість, якщо початковий капітал у розмірі 30 000 грн. дали в борг на 90 днів під 8% річних.

Роз'язання:

Обчислимо величину прибутку:

$$S = P \cdot (1 + r \cdot t) = 30\,000 \cdot \left(1 + 0{,}08 \cdot \frac{90}{365}\right) \approx 30\,591{,}78 \text{ (грн.)}.$$

Знайдемо майбутню вартість:

$$I = P \cdot r \cdot t = 30\,000 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{90}{365} = 591{,}78 \text{ (грн.)}.$$

Отже, величина прибутку становитиме $30\,591{,}78$ грн., майбутня вартість дорівнюватиме 591,78 грн.

Відповідь: $S = 30\,591{,}78$ грн.; $I = 591{,}78$ грн.

2. Складні відсотки

Для обчислення складних відсотків вивчаємо формулу:

$$\text{А}_n = \text{А}_0 \cdot (1 + 100\,p)^n,$$

де p – відсоткова ставка за певний період;

n – загальна кількість періодів нарахувань;

А_0 – початковий капітал – кількість вкладених або позичених грошей;

А_n – нарощений капітал – сума, яка утвориться на кінець обумовленого проміжку часу.

Приклад 4. Знайти прибуток від 30 000 гривень покладених на депозит на 3 роки під 10% річних, якщо в кінці кожного року відсотки додаються до депозитного вкладу.

Розв'язання. Використаємо формулу для обчислення складних відсотків:

$$A = 30\,000 \cdot \left(1 + \frac{10\%}{100\%}\right)^3 = 30\,000 \cdot 1.1^3 = 39930$$

прибуток дорівнює:

$$39930 - 30000 = 9930$$

Відповідь: прибуток 9930 гривень.

Приклад 5. У день народження сина його батьки відкрили депозит у сумі 1000 грн. у банку під виплату 18% річних із щорічним нарах уванням складних відсотків. Яка сума грошей буде на цьому рахунку, коли сину виповниться 20 років?

Роз'язання:

За умовою задачі $А_0$ = 1000 грн., p = 18 % = 0,18, n = 20. Тому $А_n = 1000(1+0{,}18)20 = 1000 \cdot 27{,}393 = 27393$(грн).

Отже, на рахунку буде 27 393 грн.

Відповідь: 27 393 грн.

Приклад 6. Вкладник поклав до банку 10 000 грн. під 16% річних. Скільки грошей буде на рахунку вкладника через 5 роки? Скільки відсоткових грошей отримає вкладник через 5 років?

Розв'язання:

A_0= 10000 ; p = 16%; n = 3. Маємо:

$$A_3 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{16}{100}\right)^3 = 15\,608{,}96(\text{грн}).$$

Через 3 роки вкладник отримає таку суму відсоткових грошей:

$$A_3 - А_0 = 15\,608{,}96 - 10\,000 = 5\,608{,}96\ (\text{грн}).$$

Відповідь: $A_3 = 15\,608{,}96(\text{грн})$, а сума відсоткових грошей через 3 роки становитиме 5 608,96 (грн).

3. Простий та дисконтний вексель

Вексель — це цінний папір, який засвідчує безумовне грошове зобов'язання векселедавця сплатити після настання терміну певну суму грошей власникові векселя (векселедержателю). Іншими словами: вексель - це цінний папір, який є засобом оформлення кредиту, що надається в товарній формі продавцями покупцям шляхом відтермінування оплати за продані товари.

Простий вексель (боргова розписка) – документ з власним підписом боржника (позичальника), в якому він зобов'язується сплатити певну суму до зазначеної в документі дати.

Дисконтний вексель – вексель, у якому сума, яку треба сплатити, нараховується від завершеної вартості S.

$d -$ ставка дисконту;

$B -$ виручена сума векселя (виручка).

Дисконт – ціна, яку треба сплатити за користування позикою протягом t років. Дисконт D підраховується як відсоток від завершеної вартості S [13].

Простий дисконт визначається формулою:

$$D = S \cdot d \cdot t \quad \left(d = \frac{D}{St}, S = \frac{D}{dt}, t = \frac{D}{Sd}\right) \tag{2.5}$$

$$B = S - A \quad (S = B + D, D = S - B) \tag{2.6}$$

$$B = S - dt = S \cdot (1 - dt) \quad \left(S = \frac{B}{1-dt}\right) \tag{2.7}$$

Користуючись формулами (2.5) – (2.7), можна розв’язувати задачі на обчислення дисконту, виручки, завершальної вартості.

Приклад 7. Підприємцю необхідно отримати 30 000 грн. банк пропонує дисконтний вексель із ставкою дисконту 11%. Знайдіть завершальну вартість якщо вексель має бути погашений через 6 місяців.

Розв’язання:

За умовою $S = 30\ 000$ грн., $d = 11\% = 0{,}11, r = 6$ місяців (1/2 року).

Із формули (2.7), маємо:

$S = \frac{B}{1-dt},\ S = \frac{30\ 000}{1-0{,}11\cdot\frac{1}{2}}$;

$S = \frac{30000}{1-0{,}055} = \frac{30000}{0{,}945} \approx 31\ 746{,}03$ (грн).

Відповідь: $31\ 746{,}03$ (грн).

Приклад 8. Вексель на суму 10 375 грн. проданий банку. Цей вексель повинен був бути погашений через 90 днів; у банку встановлена норма дисконту на рівні 15%. Якою буде виручена сума?

Розв’язання:

Знайдемо дисконт: $D = S \cdot d \cdot t = 10\ 375 \cdot 0{,}15 \cdot \frac{90}{365} \approx 383{,}73$ (грн.).

Тоді виручена сума дорівнюватиме:

$P = S - D = 10\ 375 - 383{,}73 = 9991{,}27$ (грн.).

Відповідь: $P = 9991{,}27$ грн.

Приклад 9. Підприємець планує взяти позику в банку на півроку. Яку суму повинен просити підприємець, щоб отримати 10 000 грн., за умови, що норма дисконту становить 12%?

Розв'язання:

Знайдемо величину дисконту. Якщо $P = S - D = S \cdot (1 - dt)$, то

$S = \frac{P}{1-dt} = \frac{10\ 000}{1-0{,}12\cdot 0{,}5} \approx 10\ 638{,}3$ (грн.).

Отже, щоб отримати 10 000 грн., підприємець повинен просити у банку позику в розмірі 10 638,3 грн.

Відповідь: $S = 10\ 638{,}3$ грн.

2.2. Застосування лінійної функції при розв'язуванні економічних задач

Лінійна функція має широке застосування до розв'язування економічних задач по темі "Дисконт", "Вексель". Проте її використовують і при розв'язуванні математичних задач з іншим економічним змістом, де головну роль відіграють не лише обчислення, але й побудова графіків. Наприклад, у темі "Попит та пропозиція".

Пропозиція – це обсяг товарів та послуг, який виробники хочуть і можуть поставити на ринок за різною ціною за певний проміжок часу.

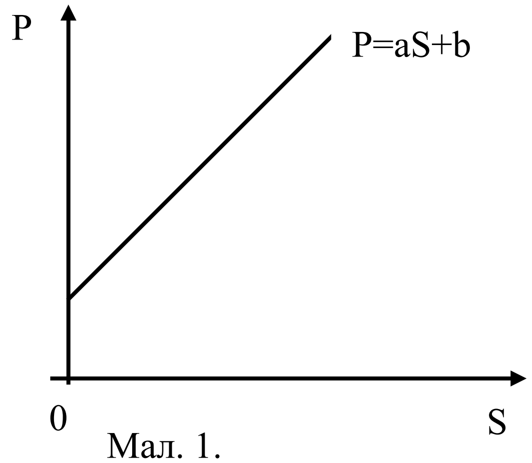
Функція пропозиції – залежність обсягу пропозиції товару за певний час від ціни цього товару.

Випуск продукції вимагає додаткових витрат. Щоб спонукати до цього виробника треба запропонувати йому підвищену ціну, тобто пропозиція є деякою функцією ціни [9].

Позначимо пропозицію через S, а ціну через P, тоді запишемо:

$S = f(P)$.

Пропозиція товару зростає зі збільшенням ціни. Дійсно, чим вища ціна на товар, тим більше число виробників намагаються запропонувати цей товар на ринку. В економіці графік залежності пропозиції від ціни називається *кривою пропозиції* і, безумовно, пропозиція товару зростає із збільшенням ціни це означає, що функція $P = aS + b$ є зростаючою, тобто $a > 0$, де a, b – сталі (мал.1)



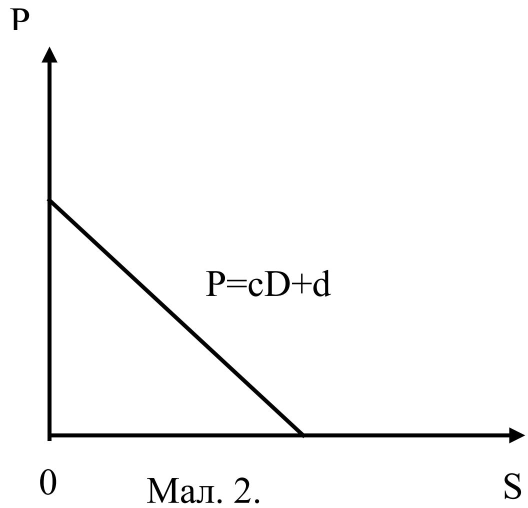
Мал. 1.

Аналогічно можна визначити попит на даний товар.

Попит – це потреба у певній кількості товару, яка обмежена діючими цінами і платоспроможністю споживачів:

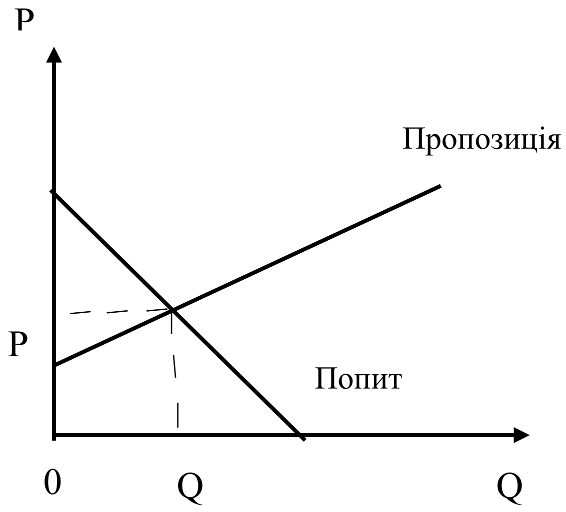
$D = f(P)$, де $D -$ попит, $P -$ ціна.

Функція попиту – це залежність обсягу попиту на певний товар від ціни цього товару. На відміну від кривої пропозиції вона є спадною функцією. Дійсно, якщо ціна на якийсь товар зростає, то кількість реалізованого товару зменшується. Крива попиту може бути записана у вигляді: $P = cD + d, c < 0$, де c, d – сталі (мал. 2).



Мал. 2.

Позначаючи кількість товару буквою Q, ми можемо криві попиту та пропозиції зобразити на одному графіку (мал. 3).



Мал. 3.

Приклад 1. Функція попиту на товар $Q_D = 6 - P$, а пропозиції – $Q_S = -4{,}6 + 1{,}5P$. Припустимо, що попит на товар зменшиться на 25%. Як це вплине на ціну товару?

Розв'язання:

1) Знайдемо рівноважну ціну (ціна яка була до змін):

$Q_D = Q_S$, тобто $6 - P = -4{,}6 + 1{,}5P$; 10,6=2,5 P; $P = 4{,}24$

2) Підставимо знайдену ціну у функцію попиту:

$Q_D = 6 - 4{,}24 = 1{,}76$.

3) Якщо попит на товар зменшився на 25%, то функція попиту зміниться:

$Q_D = 1{,}76 - 0{,}25 = 0{,}44$.

4) Знайдемо ціну, яка встановиться після змін на ринку:

$0{,}44 = -4{,}6 + 1{,}5P_1$; $P_1 = 3{,}36$.

Отже, після зменшення попиту, ціна знизиться на:

$\Delta P = P - P_1$ $\Delta P = 4{,}24 - 3{,}36 = 0{,}88$.

Відповідь: ціна знизиться на 0,88.

Приклад 2. Функція попиту на свинину задана рівнянням $Q_D = 30 - P$, де $Q_D -$ величина попиту на свинину на день (у кг); $P -$ ціна за 1 кг (у гр. од.). функцію пропозиції задано рівнянням $Q_S = 15 + 2P$, де $Q_S -$ величина пропозиції на день (у кг). Опишіть ситуацію, яка виникне на ринку м'яса, якщо ціну на ринку встановлять на рівні 3 гр. од. за 1 кг.

Розв'язання:

$Q_D = Q_S$; $30 - P = 15 + 2P$; $P = 5$ гр. од. Тоді $Q = 30 - 5 = 25$ (грн.).

Розглянемо ситуацію, коли на ринку буде встановлено ціну на рівні 3 гр. од. за 1 кг. Встановлена ціна нижча за рівноважну (3<5), отже, на ринку виникне дефіцит свинини.

Відповідь: на ринку виникне дефіцит свинини.

Приклад 3. Функція попиту має вигляд $Q_D = -90 \cdot P + 1050$, а функція пропозиції – $Q_S = 150 \cdot P$. Визначте нові параметри рівноваги, якщо пропозиція послуг перевізників змінилася на 50% унаслідок зростання цін на пальне. Опишіть ситуацію на ринку, якщо держава встановила ціну за проїзд на рівні 5 грн.

Розв'язання:

Зростання цін на ресурси є неціновим фактором пропозиції, тому функція пропозиції зміниться. Вона матиме вигляд:

$Q_{S1} = 0{,}5 \cdot Q_S$;

$Q_{S1} = 0{,}5 \cdot 150 \cdot P$;

$Q_{S1} = 75 \cdot P$.

Нові параметри рівноваги: $Q_D = Q_{S1}$; $-90 \cdot P + 1050 = 75 \cdot P$;

$1050 = 165 \cdot P$; $P \approx 6{,}36$ грн.

Звідси $Q_{S1} = 75 \cdot 6{,}36 \approx 477{,}6$ або $Q_D = 1050 - 90 \cdot 6{,}36 \approx 477{,}6$

Якщо держава встановить ціну на рівні 5 грн за проїзд, отримаємо:

$Q_D(5) = 1050 - 90 \cdot 5 = 600$;

$Q_{S1}(5) = 75 \cdot 5 = 375$.

Оскільки $Q_D > Q_{S1}$, то на ринку виникне дефіцит у розмірі: 600-375=225 (поїздок).

Отже, задачі економічного змісту потребують не лише економічного аналізу, але й чітких математичних обґрунтувань.

2.3. Задачі на відсоткові розрахунки при вивчені геометричної прогресії

Геометрична прогресія використовується при розрахунках з вкладниками, при визначенні сумарної спроможності кредитування системи банків, при обчисленні завтрашньої вартості сьогоднішніх грошей та інше.

При розв'язуванні задач економічного характеру учні повинні знати не лише поняття геометричної прогресії, формули її сум та членів, але й такі терміни як "інвестор" (вкладник), "депозити" (їх вкладає інвестор), "позичальник", "ануїтет" (це послідовність однакових внесків, які зроблені через різні проміжки часу).

Інвестор (вкладник) — людина чи комерційна установа, яка вкладає гроші та/або інші активи з метою їхнього збереження та примноження.

Депозит (вклад) – це кошти в готівковій або у безготівковій формі, у валюті України або в іноземній валюті, які розміщені клієнтами на їх іменних рахунках у банку на договірних засадах на визначений строк зберігання або без зазначення такого строку і підлягають виплаті вкладнику відповідно до законодавства України та умов договору.

Позичальник – це фізична або юридична особа, яка може отримати від банківської установи у тимчасове користування кошти на умовах повернення, платності, строковості.

Сума членів геометричної прогресії обчислюється за формулою:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad (2.8)$$

В багатьох задачах ми зустрічаємося з фінансовою операцією, яку називають ануїтетом, що означає здійснення однакових платежів через рівні проміжки часу. Остаточна сума складається з всіх платежів плюс складні відсотки, що нараховуються на ці платежі [9].

Корисно отримати формулу для обчислення платежів ануїтету в загальному вигляді. Якщо позначити періодичні платежі через R, число платежів – n, а щорічну ставку відсотка – r.

Враховуючи, що $i = \frac{r}{m}$, де $m -$ кількість конверсійних періодів за рік, то:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Звідси: $R = S \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$.

Приклад 1. Дехто вносить по 100 гривень у кінці кожного місяця на "Скарбничку". Внески приносять прибутки у 8% при поквартальному нарахуванні:

а) знайти суму вкладу через 5 років?

б) який прибуток буде накопичений через 5 років?

Розв'язання:

Дано: $R = 100, i = \frac{8\%}{4} = 2\%, n = 4 \cdot 5 = 20.$

а) $S = R \cdot S_{20/0,02} = 100 \cdot 24{,}297 = 2429{,}7$ (грн.).

б) Дійсно було зроблено 20 внесків по 100 грн. у "Скарбничку" або 20·100=2000 грн., отже, прибуток становить: 2429,7 – 2000=429,7 (грн.).

Відповідь: а) 2429,7 (грн.); б) 429,7 (грн.).

Приклад 2. Керівництво фірми вважає, що через 5 років для заміни частини обладнання буде сума у розмірі 10 000 грн. якими повинні бути щомісячні платежі, якщо відсоткова ставка становить 6% річних?

Розв'язання:

У даному випадку $S = 10\ 000, i = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% = 0{,}05.$

N=5·12=60.

Підставимо числові значення у формулу: $S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$,

$R = 10\ 000 \cdot \frac{0{,}005}{(1+0{,}005)^{60}} = 143{,}33$ (грн.).

Це і є величина щомісячних платежів.

Відповідь: 143,33 грн.

Приклад 3. Дано систему шести однакових банків. Нехай в один із них внесено S_0 =1 000 000 грн. обчислити сумарну величину кредиту, видану цим банком, причому норма обов'язкових резервів p_0 складає 10%

Розв'язання:

Кредити банків утворюють геометричну прогресію $S_n = a(1-q)^n/(1-q)$, зі знаменником $q = 1 - p$, де $p = \frac{p_0}{100}$, а p_0 дорівнює числу процентів, які відраховуються в обов'язковий резерв.

Вільні резерви першого банку дорівнюють:

$S_0 \cdot q = 900\ 000$ грн., де $p = \frac{p_0}{100} = 0{,}1$.

Тоді $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

$S_6 = \frac{1\ 000\ 000 \cdot 0{,}9 \cdot (1-(0{,}9)^6)}{1-0{,}9} \approx 4\ 217\ 033{,}7$(грн.).

Відповідь: 4 217 033,7грн.

2.4. Диференціальне числення в задачах економічного змісту

Розв'язування задач економічного змісту методами диференціального числення вимагає введення фрагментів економічної теорії, які доцільно вводити після вивчення та закріплення відповідного математичного матеріалу.

1. Економічний зміст похідної

З економічним змістом похідної знайомимо учнів на конкретних прикладах після засвоєння правил диференціювання.

а) Задача про продуктивність праці.

Нехай функція $u = u(t)$ виражає кількість виробленої продукції u за час t. Необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0. Очевидно, за період часу від t_0 до t_0+$\Delta\, t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta u)$; тоді середня продуктивність праці за цей період часу $W_{\text{сер}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, що продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як границю середньої продуктивності праці за час від t_0 до t_0+$\Delta\, t$ при $\Delta\, t \to 0$, тобто $W = \lim\limits_{\Delta\, t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t)$.

Отже, похідна обсягу виробленої продукції щодо часу $u'(t_0) -$ це продуктивність праці в момент часу t_0 [7].

Приклад 1. Обсяг продукції u (ум. од.) цеху протягом робочого дня є функцією $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, де t — час (год). Знайти продуктивність праці через 2 год від початку роботи.

Розв'язання:

Продуктивність праці визначається похідною $u'(t)$. Тоді $u'(t) = (-t^3 - 5t^2 - 75t + 425)' = -3t^2 - 10t + 75$. Знаходимо продуктивність праці у момент часу $t = 2$, тоді $u'(t) = -3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 75 = -12 - 20 + +75 = 43$ (од).

Відповідь: продуктивність праці через 2 години від початку роботи становить 43 одиниці.

б) Задача про граничний ефект виробництва.

Нехай $K = K(x)$ – функція витрат виробництва, що залежить від кількості продукції x. При збільшенні кількості продукції на Δx, середній приріст витрат виробництва є $\frac{\Delta K}{\Delta x}$. Граничними витратами виробництва називається границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = k'(x)$. Граничні витрати виробництва збігаються із швидкістю зміни витрат виробництва [7].

Розв'язуючи задачі на закріплення економічного змісту похідної, основну увагу потрібно звертати на інтерпретацію знайдених результатів.

Приклад 2. На основі досліджень встановили функцію прибутку від ціни p за одиницю продукції: $f(p) = -50p^2 + 500p$. Визначити, яким буде граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень $p = 2, p = 5, p = 10$.

Розв'язання:

Граничний прибуток визначатися похідною $f'(p)$:

$$f'(p) = -100p + 500.$$

Обчислимо $f'(2) = 300$; $f'(5) = 0$; $f'(10) = -500$.

Інтерпретація. На цьому етапі важливо, щоб учні дійшли таких висновків:

1) При збільшенні ціни одиниці продукції до 5 тис. грн. прибуток зростатиме і буде найбільшим при $p = 5$ тис. грн.; $f(p) = 1250$ тис. грн.

2) Якщо ціна одиниці продукції, починаючи з 5 тис. грн., збільшуватиметься, то прибуток фірми зменшуватиметься. Так, при $p = 8$ тис. грн. прибуток фірми дорівнюватиме $f(8) = -50 \cdot 8^2 + 500 \cdot 8 = 800$ (тис. грн.). У цьому випадку фірма зазнає порівняно з оптимальним варіантом збитків на $1250 - 800 = 450$ (тис. грн.).

2. Прикладні задачі на застосування похідної та відносної похідної (еластичності) функції.

Для дослідження економічних процесів і розв'язування прикладних економічних задач часто використовується поняття еластичності функції, яка означається через похідну.

Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x}{y} \cdot y' \qquad (2.9)$$

Еластичність функції наближено відображає на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної x на 1%.

Приклад 3. Залежність між собівартістю одиниці продукції у (тис. грош. од.) та випуском продукції *x* (млрд. грош, од.) виражається функцією y=0,5x+80. Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд. грош. од.

Розв'язання: За формулою еластичності собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При x = 60 $E_{x=60}(y) = -0{,}6$

Відповідь: при виробництві продукції в розмірі 60 млн. грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%.

Еластичність функції застосовується при аналізі попиту та пропозиції.

Попит – це кількість товару, яка потрібна покупцю.

Цінова еластичність попиту ED – це величина, яка характеризує те, як попит реагує на зміну ціни. Якщо |ED|> 1, то попит називається *еластичним*, якщо |ED| <1, то – *не еластичним*. У разі ED = 1 попит називається *абсолютно не еластичним*, тобто зміна ціни не призводить ні до якої зміни попиту [7].

Навпаки, якщо найменше зниження ціни спонукає покупця збільшити покупки від 0 до межі своїх можливостей, кажуть, що попит є абсолютно еластичним. У залежності від поточної еластичності попиту, підприємець приймає рішення про зниження або підвищення цін на продукцію.

Приклад 4. За допомогою досліду були встановлені функції попиту $q=\frac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p + 0{,}5$, де q та s — кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, p — ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни.

Розв'язання:

а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s, \frac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5$ звідки $p = 2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності попиту та пропозиції за формулою:

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)};\ E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p = 2$маємо $E_p = 2(q) = -0{,}3;\ E_p(s) = 2(s) = 0{,}8.$

Тому що отримані значення еластичності за абсолютною величиною менші 1, то попит і пропозиція даного товару за рівноважної (ринкової) ціни нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціна не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції.

Відповідь: при збільшенні ціни p на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

3. Дослідження динаміки функцій в економічних процесах

Особливістю пропонованої системи задач є те, що в них, як правило, задана функціональна залежність між величинами в економічних, фінансових ситуацій. Вимагається дослідити цю залежність при виконанні певних вимог.

Рекомендовано задачі двох видів:

1) на дослідження зміни функціональної залежності (зростає або спадає) при виконанні певних вимог;

2) на дослідження динаміки зміни цієї залежності (зростає або спадає повільніше або швидше).

Приклад 5. Підприємство виробляє за місяць x одиниць продукції. Залежність фінансових нагромаджень підприємства від обсягу випуску продукції виражається формулою $Ax(x) = -0{,}01x^3 + 300x - 500$. При яких значеннях x одиниць продукції фінансові нагромадження підприємства зменшуються?

Розв'язання:

$A'(x) = -0{,}03x^2 + 300$. Якщо $A' < 0$, то $-0{,}03x^2 + 300 < 0$,

$0{,}03x^2 + 30000 > 0$, або $x^2 + 1000 > 0$. Нерівність справедлива при $x < -100$ і $x > 100$.

Інтерпретація. Якщо випуск продукції перевищує 100 одиниць, фінансові нагромадження підприємства зменшуються.

Приклад 6. На підприємстві змінні витрати місячного обсягу (x тонн) випуску продукції визначаються функцією: $K = \frac{1}{10x^3} - \frac{9}{2x^2} + 80x + 300$. Як змінюються витрати залежно від випуску продукції щомісяця?

Розв'язання:

$K' = \frac{3}{10x^2} - 9x + 80$. Дискримінант $D = 81 - 96 = -15 < 0$. Отже, $K' > Q$ для будь-якого x. Обчисливши $K' = \frac{3}{5x} - 9$, отримаємо: $K' > 0$, якщо $x > 15$; $K' < 0$, якщо $x < 15$.

Інтерпретація. Якщо випуск продукції не перевищує 15 т на місяць, то змінні витрати зростають повільніше; якщо місячний випуск перевищує 15 т, то змінні витрати зростають швидше.

Розглянемо застосування похідної при побудові математичної моделі для розв'язування економічної задачі. Нехай С – загальна вартість корпоративних витрат на виробництво x одиниць певної продукції $\mathrm{C}(x)$ – функція вартості. При збільшенні кількості одиниць виробничої продукції від x_1 до x_2 з'являється додаткова вартість, яку позначимо: $\Delta\mathrm{C} = \mathrm{C}(x_2) - \mathrm{C}(x_1)$. Тоді середня швидкість зміни вартості:

$$\frac{\Delta\mathrm{C}}{\Delta x} = \frac{\mathrm{C}(x_2) - \mathrm{C}(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}.$$

Границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ є миттєвою швидкістю зміни вартості відносно виробленої кількості одиниць продукції, а саме похідна функції вартості називається в економіці *маржинальною вартістю*. Функція маржинальної вартості позначається $\mathrm{C}'(x)$.

$$\mathrm{C}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dc}{dx}.$$

Для випадку, коли x може набувати лише цілих значень, вираз $\Delta x \to 0$ може не мати конкретно змісту. Візьмемо $\Delta x = 1, n \to \infty$ (так, що Δx мале порівняно з n) і запишемо $\mathrm{C}'(x) \approx C(n+1) - C(n)$.

Тоді маржинальна вартість виробництва n одиниць продукції приблизно еквівалентна вартості виробництва ще однієї додаткової одиниці (тобто $n+1$ одиниці продукції).

Функцію загальної вартості часто розглядають як многочлен

$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, де $a -$ умовно-постійні витрати (оренда, тепло, обслуговування, адміністративні витрати тощо). Інші вирази, що входять до формули: bx; cx^2; $dx^3 -$ є вираженням вартості матеріалів, сировини, паливно-енергетичних ресурсів, праці і т. ін. Наприклад, вартість сировини може бути пропорційна x, але вартість праці може частково залежати від більш високого степеня x, завдяки вартості додаткових годин праці, деяких моменті неефективності, які мають місце у великомасштабних операціях.

Функція $C(x)$ при маркетингових дослідженнях не може бути розглянута без функцій $p(x), P(x), R(x)$.

$p(x)$ – ціна одиниці продукції, яку виробник може встановити за умови продажу x одиниць продукції. Можна очікувати, що функція $p(x)$ як функція залежності ціни від попиту буде спадною.

При збуті x одиниць продукції за ціною одиниці продукції $p(x)$, загальний прибуток складатиме $R(x) = x \cdot p(x)$, де $R(x) -$ функція доходу.

$R'(x) -$ маржинальна функція доходу є швидкістю зміни доходу залежності від кількості одиниць продукції, що продається. Загальний прибуток при збуті x одиниць дорівнює $P(x) = R(x) - C(x)$, де $P(x) -$ функція прибутку [28].

Приклад 7. Підприємництво пропонує оптовому покупцеві ціну 450 грн. за одиницю продукції за умови придбання 1000 одиниць продукції на тиждень. Дослідження, проведені службою маркетингу, стверджують, що при знижені ціни кожної одиниці продукції на 10 грн., обсяг збуту зросте на 100 одиниць на тиждень.

Визначити:

1) максимально можливу величину доходу підприємництва за тиждень, обсяг продажів, що відповідає цьому доходу. Величину максимальної знижки (дисконту) в ціні для покупця з урахуванням отримання підприємством максимального доходу. Функцію ціни вважати лінійною.

2) Максимально можливу величину прибутку на тиждень, обсяг продажів, що відповідає цьому прибутку. Величину максимального дисконту в ціні для покупця, з урахуванням отримання підприємством максимального прибутку. Функцію вартості вважати відомою: $C(x) = 6800 + 150x$.

Розв'язання:

Складемо функцію ціни: $p(1000) = 450$ за умовою задачі. Враховуючи результати дослідження служби маркетингу: $p(1100) = 440$.

1. Припустивши, що функція ціни лінійна, запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$p - p_0 = k(x - x_0): \Rightarrow k = \frac{p - p_0}{x - x_0}: \Rightarrow k = \frac{440 - 450}{1100 - 1000} = -0{,}1;$$

$$p - 450 = -0{,}1(x - 1000); \Rightarrow p(x) = -0{,}1x + 550.$$

Отже, $p(x) = -0{,}1x + 550 -$ функція ціни одиниці продукції за умови, що підприємство продає x одиниць продукції.

Складемо функцію доходу:

$R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (-0{,}1x + 550) = -0{,}1x^2 + 550x.$

$R'(x) = -0{,}2x + 550;$

$-0{,}2x + 550 = 0; \Rightarrow x = 2750.$

Маємо: 2750 – кількість продажу одиниць продукції що забезпечує отримання підприємством максимального доходу.

$p(2750) = -0{,}1 \cdot 2750 + 500 = 275$ (грн.).

Отже, ціна одиниці продукції при обсязі збуту 2750 становить 275 грн.

450-275=175 (грн.) – дисконт підприємства покупцю в ціні за одиницю продукції що забезпечує підприємству отримання максимального доходу.

$R(2750) = 2750 \cdot 275 = 756\,250$ (грн.) – максимальний можливий дохід підприємства при обсязі збуту 2750 одиниць за тиждень.

2. Знаючи функцію доходу $R(x) = -0{,}1x^2 + 550x$ і функцію вартості $C(x) = 68\,000 + 150x$, запишемо функцію прибутку:

$P(x) = R(x) - C(x) = -0{,}1x^2 + 550x - 68\,000 - 150x = -0{,}1x^2 + +440x - 68\,000.$

Досліджуємо цю функцію на екстремум:

$P'(x) = -0{,}2x + 400;$

$-0{,}2x + 400 = 0 \Rightarrow x = 2000.$

$P''(x) = -0{,}2 < 0 \Rightarrow x = 2000 -$ точка максимум.

$P(2000) = -0{,}1 \cdot 2000^2 + 400 \cdot 2000 - 68\,000 = 332\,000$ (грн.)

Отже, 2000 – кількість одиниць продукції, за якої підприємство отримує максимальний прибуток; 332 000 грн – максимальний можливий прибуток.

$p(2000) = -0{,}1 \cdot 2000 + 500 = 350$ (грн.).

Якщо 350 грн. – ціна одиниці продукції що забезпечує максимальний прибуток, то 450-350=100 (грн.) – величина дисконту в ціну за одиницю продукції з урахуванням отримання підприємством максимального прибутку.

2.5. Застосування інтегрального числення в економіці

Останнім часом з'явилася велика кількість шкіл, учні яких вибирають економічні спеціальності як свою подальшу діяльність. Як правило, вчителі, що працюють в таких класах, дають учням більш глибокі знання по звичайних темах шкільного курсу математики, часто орієнтуючись на програми для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики. Але при такій організації навчання практично не розглядаються економічні доповнення тієї або іншої теми, мало часу приділяється застосуванню математичного моделювання до розв'язування економічних задач. Не є виключенням і тема, присвячена визначеному інтегралу в інших областях знань.

Традиційно практичне використання інтеграла ілюструється обчисленням площ різних фігур, знаходженням об'ємів геометричних тіл і деякими доповненнями у фізиці і техніці. Проте роль інтегралу в моделюванні економічних процесів не розглядається. Часто про економічні доповнення інтеграла не йде мова і в класах економічного напряму. Разом з тим, інтегральне числення дає багатий математичний апарат для моделювання і дослідження процесів, що відбувається в економіці [8].

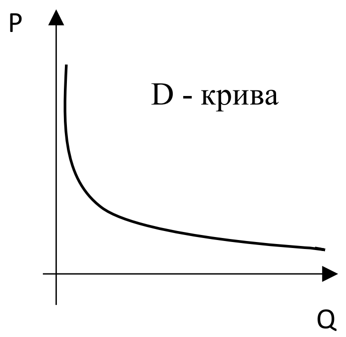
Зупинимося на декількох прикладах застосування інтегрального числення в економіці. Почнемо з поняття споживчого надлишку. Поняття споживчого надлишку вперше використав в 1844 р. французький інженер і економіст Ж.Дюпюі (1804 -1866).

Для цього введемо декілька економічних понять і позначень.

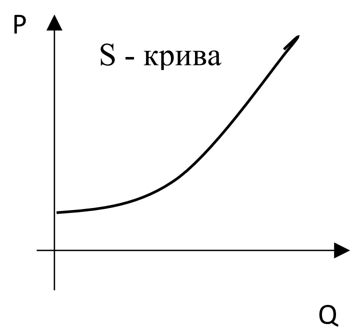
Попит на даний товар – це залежність між кількістю товару, який купують протягом певного проміжку часу, і цінною даного товару. За умови, що всі фактори, крім ціни товару, зафіксовані матимемо залежність, яку називають *функцією попиту від ціни:* $Q = f(P)$. Графічним зображенням функції попиту є крива попиту (мал.1). Ця крива є спадною функцією, тобто якщо ціна на якийсь товар підвищується, то кількість проданого товару буде зменшуватись. Саме тому можемо сформулювати закон попиту: зі зростанням ціни обсяг попиту скорочується, і навпаки.

В економічній теорії прийнято відкладати ціну (P – незалежна змінна) по осі ординат, а обсяг попиту (Q) або інші параметри (залежні від ціни) – по осі абсцис. З точки зору математики необхідно було б зробити навпаки: незалежну змінну відкладати по осі абсцис, а залежну – по осі ординат.

Пропозиція товару – це кількість товарів, яку виробник (продавець) готовий продати за певною цінною у визначений проміжок часу. За умови, що всі чинники, крім ціни даного товару, зафіксовані, матимемо *функцією пропозицію від ціни:*$Q = f(P)$. Графічним зображенням функції пропозиції є крива пропозиції (мал.2), яка у більшості випадків є зростаючою. Звідси випливає закон пропозиції: із підвищенням ціни обсяг пропозиції зростає, і навпаки[30].

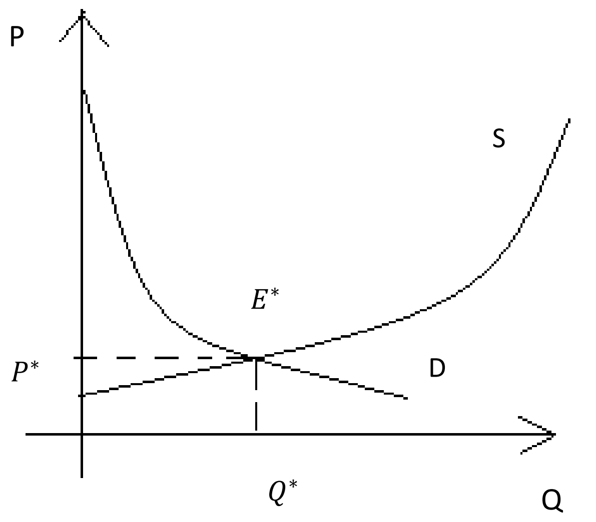


Мал. 1.



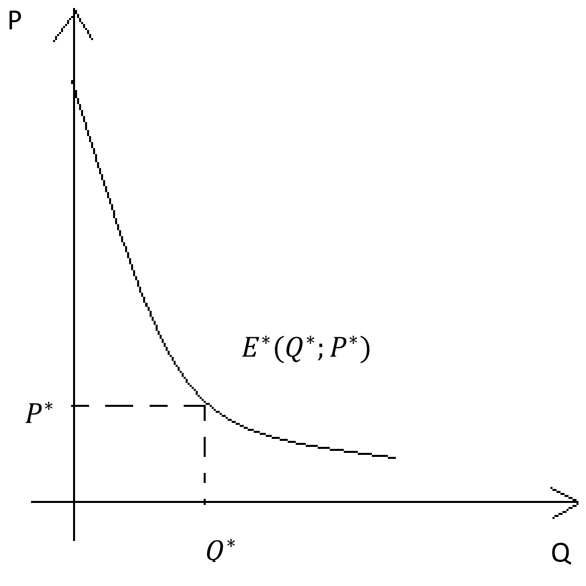
Мал. 2.

У економіці інтерес становить точка перетину кривих попиту і пропозиції. Цю точку називають *точкою рівноваги*, а відповідну їй ціну – *рівноважною ціною.* Рівновага на ринку встановлюється, коли збігаються обсяг попиту(Q_D) та обсяг пропозиції (Q_S): $Q_D = Q_S$ (мал. 3). $E^*(P^*; Q^*) -$ точка рівноваги.



Мал. 3.

Надалі для зручності аналізу ми розглянемо не залежність $Q = f(P)$, а зворотні функції попиту і пропозиції, характеризуючи залежності $P = f(Q)$. Перейдемо тепер до розгляду інтегрального аналізу для визначення споживчого надлишку. Для цього зобразимо на графіку обернену функцію попиту $P = f(Q)$. Допустимо, що ринкова рівновага встановилася в точці $E^*(Q^*; P^*)$ (крива пропозиції на графіку відсутня для зручності подальшого аналізу).



Мал. 4.

Але припустимо тепер, що товар в кількості Q^*продається продавцями не відразу, а поступає на ринок невеликими партіями ΔQ. Саме таке припущення разом з припущенням про безперервність функції попиту і пропозиції є основним при висновку формули для розрахунку споживчого надлишку. Відзначимо, що дане припущення цілком виправдане, тому що така схема реалізації товару досить поширена на практиці і витікає з мети продавця підтримувати ціну на товар якомога вище. Тоді отримаємо, що спочатку пропонується товар в кількості, який продається за ціною $P = f(Q)$. Оскільки по припущенню величина ΔQ мала, то можна вважати, що вся перша партія товару реалізується за ціною, при цьому витрати покупця на покупку такої кількості товару складуть $P_1 \Delta Q$, що відповідає площі заштрихованого прямокутника S. Далі на ринок поступає друга партія товару в тій же кількості, яка продається за ціною $P_2 = f(Q_2)$, де $Q_2 = Q_1 + \Delta Q$ – загальна кількість реалізованої продукції, а витрати покупця на покупку другої партії відповідають площі прямокутника S_2

Продовжимо процес до тих пір, поки не дійдемо до рівноважної кількості товару $Q^* = Q$ ... Тоді стає ясно, якою повинна бути величина ΔQ для того, щоб процес продажу закінчився в точці Q^*.

$$\Delta Q = \frac{1}{n} Q^*.$$

В результаті отримаємо що ціна n – ї партії товару $P_n = f(Q_2) = f(Q^*) = P^*$, а витрати споживачів на покупку цієї останньої партії товару складуть $P_n \Delta Q$ або площа прямокутника S_n.

Таким чином ми отримаємо, що сумарні витрати споживачів при покупці товару дрібними партіями ΔQ рівні $P_1 \Delta Q + P_2 \Delta Q + \cdots + P_n \Delta Q = S_1 + \cdots + S_n$. Оскільки величина $\Delta Q -$ дуже мала, а функція $f(Q)$ неперервна, то $\sum_{i=1}^{n} S_i$ приблизно дорівнює площі фігури B, яка як відомо при малих приростах ΔQ дорівнює визначеному інтегралу від оберненої функції попиту при зміні аргументу від 0 до Q^*, тобто у результаті отримаємо, що

$$S = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ$$

Приклад 1. Попит на товар задано рівнянням $Q_D = 10 - P$, а пропозицію — рівнянням $Q_S = -8 + P$. Визначте рівноважну ціну та рівноважну кількість продажу. Що станеться на ринку, якщо держава встановить ціну на даний товар 5 грн за 1 од.? виробники продаватимуть даний товар по 7 грн за 1 од.?

Розв'язання: Ринкова ціна встановлюється у точці рівноваги, коли величина попиту дорівнює величині пропозиції. Щоб знайти точку рівноваги, необхідно прирівняти праві частини рівняння попиту і рівняння пропозиції: $10 - P = -8 + P; 3P = 18; P = 6$. Отже, рівноважна ціна дорівнює 6 грн. Визначимо рівноважну кількість продажу: $Q = 10 - P = 4$ (од.).

Якщо держава встановлює ціну, яка дорівнює 5 грн за одиницю товару, то вона менша за ринкову, тобто $Q_D > Q_S$, отже, величина попиту перевищує величину пропозиції, що приведе до виникнення дефіциту в розмірі: $Q_D(5) - Q_S(5) = 5 - 2 = 3$ (од.) Ціна 7 грн — вища за рівноважну: $Q_S > Q_D$ (за умовою). Тоді $Q_S(7) - Q_D(7) = 6 - 3 = 3$ (од.). Отже, виникне надлишок.

Відповідь: рівноважна ціна дорівнює 6 грн, рівноважна кількість продажу – 4 од., виникне надлишок.

Приклад 2. Функцію попиту задано рівнянням $P = f(Q) = 25 - 2Q^2$. Рівноважний обсяг продажу дорівнює 2. Знайдіть вигоду споживача.

Розв'язання:

Знайдемо рівноважну ціну: $P_0 = f(Q_0) = 25 - 2 \cdot 2^2 = 17$.

Тоді вигода споживача становитиме:

$CS = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - P_0 \cdot Q_0 = \int_0^2 (25 - 2Q^3)dQ - 17 \cdot 2 = (25Q - \frac{2}{3}Q^3)\Big|_0^2 - 34 \approx 13{,}4$ (гр. од).

Відповідь: $P_0 = 17; CS = 13{,}4$ гр. од.

Приклад 3. Відомо, що попит на деякий товар задається функцією $p = x^2$, де $x -$ кількість товару (в шт.), $p -$ ціна одиниці товару (в грн.), а рівновага на ринку даного товару досягається при $p^* = \partial^* = 1$. Визначне величину споживчого надлишку.

Розв'язання:

$CS = \int_0^1 (4 - x^2)dx - 1 = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 - 1 = 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3}$ (грн.)

Відповідь: $2\frac{2}{3}$ грн.

Приклад 4. Функцію попиту задано рівнянням $P = f(Q) = 5 + 4Q^3$, рівноважний обсяг продажу дорівнює 3. Знайдіть вигоду виробника.

Розв'язання:

Знайдемо рівноважну ціну: $P_0 = f(Q_0) = 5 + 4 \cdot 3^3 = 113$.

Тоді вигода виробника дорівнює:

$PS = P_0 Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ = 113 \cdot 3 - \int_0^3 (5 + 4 \cdot Q^3)dQ = 339 - (5Q + Q^4)\Big|_0^3 = 243$ (гр. од.).

Відповідь: $P_0 = 113$; $PS = 243$ гр. од.

Приклад 5. На пшеничному полі після приземлення космічного корабля залишився слід, який нагадує фігуру, обмежену лініями

$y = |x^2 - 2x - 8|$ та $y = 3 + |x - 1|$.

Необхідно визначити збитки, завдані агрокомплексу, якщо з 1 м^2 отримують у середньому 3,8 кг пшениці, яка коштує 0,8 грн./кг.

Розв'язання:

$S = 2\int_1^2 \left(-(x^2 - 2 - 8) - \left(3 + (x - 1)\right)\right)dx + 2\int_3^4 \left(3 + (x - 1) - \left(-(x^2 - 2x - 8)\right)\right)dx + 2\int_4^5 \left(3 + (x - 1) - (x^2 - 2x - 8)\right)dx = 26\frac{2}{3}$ (м^2).

Обчислимо збитки: $26\frac{2}{3} \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}8 = 81{,}07$ (грн.)

Відповідь: 81,07 грн.

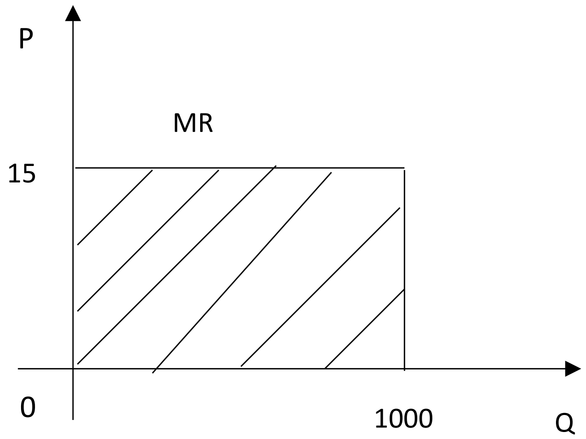
Приклад 6. Граничний дохід від реалізації продукції дорівнює 15 грн. Визначте графічно та аналітично дохід від продажу 1000 од. продукції.

Розв'язання:

Відомо, що $MR = TR'(Q)$, де $Q -$ кількість проданої продукції. За умовою задачі $MR = 15$ грн.

Тоді $TR = \int_0^{1000} 15dQ = 15Q\Big|_0^{1000} = 15000$ (грн.)

Побудуємо графік (мал. 1)



Мал. 1.

Відповідь: 15 000 грн.

2.6. Проведення та результати педагогічної діагностики

Педагогічний експеримент – це дослідницька діяльність, що здійснюється з метою вивчення причинно-наслідкових зв'язків у педагогічних явищах.

Суть педагогічного експерименту, як методу дослідження, полягає у спеціальній організації діяльності учнів та вчителів з метою перевірки та обґрунтування наперед розроблених теоретичних припущень.

Сучасна школа не може не зазнавати змін, які диктує XXI століття. Вона мусить готувати молодих творчих менеджерів, лідерів, здатних оцінити минуле і творити краще майбутнє. А для цього недостатньо орієнтуватись на передачу і засвоєння досвіду, накопиченого людством. Найголовнішим завданням вчителя є навчити учнів мислити, розвивати творчі здібності і навички та залучити їх до самостійної пізнавальної діяльності.

Діагностика проводилась в Рівненській ЗОШ І-ІІІ ст. №22 Рівненської міської ради, для цього було обрано 7-Б клас. Для учнів було підібрано ряд уроків з теми: «Лінійна функція в економіці» і на прикладі них показано застосування лінійної функції до побудови і аналізу функцій попиту та пропозиції. Всі задуми, які необхідно було організувати, було попередньо обговорено з учителями математики та економіки.

Під час діагностики учні виявили значний інтерес до предмету, намагалися самостійно розв'язувати задачі, задавали додаткові запитання. Після проведення уроку узагальнення та систематизація знань (Додаток Б) було проведено контрольну роботу (Додаток В), рівень засвоєння знань учнями записано у таблиці:

Рівні засвоєння знань	Рівень знань до проведення експерименту	Рівень знань після педагогічного експерименту
Високий	16%	17%
Достатній	51%	53%
Середній	23%	22%
Низький	10%	9%

Отже, підібраний дидактичний матеріал у бакалаврській роботі сприяє зацікавленості учнів до навчального предмету, допомагає зрозуміти складний за змістом матеріал на простих прикладах, сприяє досягнення поставленої мети вчителем.

ВИСНОВКИ

В сучасному світі математика все глибше проникає в усі сфери життя людського суспільства. З математикою пов’язані економічна та господарська діяльність, науково-технічний прогрес, посилюється її роль в розвитку інших наук, зокрема гуманітарних. Освіта має бути орієнтована на виховання математичного мислення, яке в своєму розвинутому вигляді означає здатність створювати математичні структури, уміння аналізувати їх властивості, а також інтерпретувати результати аналізу.

Розв’язування математичних задач економічного змісту на уроках математики сприяє створенню необхідного емоційного настрою, активності учнів у навчанні та розширенню сфери практичного застосування вмінь та навичок учнів, отриманих у процесі вивчення математики.

З чотирьох основних функцій задач жодна не може виступати ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель має виділяти провідну і домагатися її реалізації в першу чергу.

При роботі з математичними задачами економічного змісту потрібно дотримуватись виконання таких вимог до задач:

1. Доступність учням змісту економічних понять, даних у задачі, і зв’язків між ними.

2. Реальність ситуації, що описується в задачі, числових даних, постановки запитання й отриманого результату.

3. Дотримання єдиних позначень економічних понять.

4. Задачі з економічним змістом мають сприяти логічному й аналітичному осмисленню математичних понять, методів і прийомів у контексті специфіки змісту різних спеціальних дисциплін.

5. Задача має бути зрозумілою для учнів, викликати в них інтерес до розв’язання. А він може бути зумовлений як змістом задачі (актуальність економічної проблеми, її практична значимість, незвична фабула тощо), так й інформацією викладача про практичну значимість цієї задачі.

6. Формулювання задачі повинно бути по можливості лаконічним і чітким.

7. Задачі, по можливості, необхідно добирати так, щоб вони мали різні способи розв’язання.

У зміст задач потрібно включати невеликі фрагменти теорії. Аналізуючи її, учні з’ясовують обсяг і зміст певного економічного поняття, досліджують особливості зміни значень величин, що його характеризують, потім пропонуються задачі, де використовується це поняття.

При підборі задач з економічним змістом доцільно враховувати:

- фактори, які визначають функції задач;
- етап заняття, на якому буде розв’язуватися дана задача;
- специфіку навчальної ситуації на цьому етапі.

У бакалаврській роботі показано як практично використовуються знання і вміння, пов’язані з математикою в економіці. Розглянуто послідовність економічно-математичних моделей, які доцільно використовувати при розв’язуванні задач економічного змісту на уроках математики.

Отже, такі задачі сприяють вирішенню багатьох завдань навчального процесу, їх з успіхом можна використовувати для обґрунтування теми уроку, створення проблемних ситуацій, розкриття наукового і практичного значення матеріалу. Все це є важливим засобом розвитку в учнів творчого мислення, інтересу до навчання, виховання, потреби у засвоєнні нового матеріалу.

Додаток А

Задачі для 6 класу

Задача 1. Ощадний банк виплачує 16 % річних. Скільки виплатив банк вкладнику за рік, якщо вклад складав 100 тис. грн., 200 тис. грн., 5 млн. грн.?

Розв'язання: 1) якщо вкладник поклав 100 тис. грн., то за рік банк виплатить йому: $100\,000 \cdot 0{,}16 = 16\,000$ грн.

2) якщо вкладник поклав 200 тис. грн., то за рік банк виплатить йому:

$200\,000 \cdot 0{,}16 = 32\,000$ грн.

3)) якщо вкладник поклав 5 тис. грн., то за рік банк виплатить йому:

$5\,000\,000 \cdot 0{,}16 = 800\,000$ грн.

Відповідь: 1) 16000 грн. 2) 32000 грн. 3) 800000 грн.

Задача 2. У результаті першої переоцінки товару його ціну знизили на 20 %. При наступній переоцінці нову ціну зменшили ще на 20 %. І, насамкінець, при сезонному розпродажі останню ціну зменшили ще на 30 %. Якою стала продажна ціна товару, якщо спочатку вона становила 1000 грн.?

Розв'язання: В результаті першої переоцінки ціна товару стала рівна:

1000 – (20 % від 1000) = 800 грн.

В результаті другої переоцінки:

800 – (20 % від 800) = 640 грн.

В результаті останньої переоцінки: 640 – (30 % від 640) = 448 грн.

Отже, ціна продажу становила 448 грн.

Відповідь: 448 грн.

Задача 3. Визначте загальну суму для 10 000 грн., вкладених на 1 рік під 24% річних із квартальним компаундом.

Розв'зання: За умовою задачі $P = 10\,000$ грн.; $r = 0{,}24$; $m = 4$ періоди, $t = 1$ рік.

Визначимо відсоткову ставку за конверсійний період:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}24}{4} = 0{,}06.$$

Визначимо кількість конверсійних періодів: $n = m \cdot t = 4 \cdot 1 = 4$.

Отже, загальна сума дорівнює:

$S = P \cdot (1 + i)^n = 10\ 000 \cdot (1 + 0{,}06)^n \approx 12\ 624{,}77$ (грн).

Відповідь: $12\ 624{,}77$ (грн).

Задача 4. Підприємець вклав у банк 10 000 грн з річною ставкою 16%. Знайдіть загальну суму через 2 роки після вкладу, застосовуючи метод простих і метод складних відсотків, якщо компаунд у випадку складних відсотків піврічний. Порівняйте отримані результати.

Розв'язання: Обчислимо загальну суму за формулою простих відсотків:

$S = P \cdot (1 + r \cdot t) = 10\ 000 \cdot (1 + 0{,}16 \cdot 2) = 13\ 200$ (грн).

Обчислимо загальну суму за формулою складних відсотків:

$S = P \cdot (1 + i)^n = 10\ 000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}16}{2}\right)^4 \approx 13\ \ 604{,}89$ (грн).

Порівнюючи отримані результати, зробимо висновок: за однакових заданих умов (однаковий початковий капітал, річний відсоток, термін вкладу) більший прибуток підприємець отримає при нарахуванні відсотків за методом складних відсотків, ніж за методом простих відсотків.

Задачі для 9 класу

Задача 1. Ви взяли в банку в кредит 1 млн. у.о. на 10 місяців при щомісячній кредитній ставці 30 %. Скільки вам прийдеться виплатити за кредит?

Розв'язання: Плата за кредит – це щомісячні виплати, тобто 30 % від 1 млн. протягом 10 місяців, тобто $П_{\text{за кредит}}$ = 0,3 ·106 ·10 = 3 млн. у.о

Відповідь: 3 млн. у.о.

Задача 2. Кредит отриманий на 12000 грн. під 10% річних на залишок кредиту на 12 років зі щорічною виплатою $\frac{1}{12}$ частини кредиту. На скільки зміняться відсоткові гроші виплати кредиту, якщо взяти цю суму на той самий строк під 10% від суми кредиту?

Розв'язання. Складемо послідовність щорічних виплат отриманого кредиту.

$$12000 \cdot \frac{1}{12} = 1000 \text{ (грн.)}.$$

тоді відсоткові виплати за 1 рік становлять:

(12000 - 1000)•0,1 = 11000 (грн.);

за другий рік – (12000 - 2•1000) -0,1 = 1000 (грн.);

за третій рік – (12000 - 3•1000) 0,1 = 900 (грн.);

за одинадцятий рік – (12000 - 11•1000) 0,1 = 100 (грн.);

за дванадцятий рік – 0 грн.

Отже, отримали арифметичну прогресію, різниця якої 100 грн. Тому для обчислення всіх відсоткових грошей скористаємося формулою суми арифметичної прогресії:

$$S = \frac{1100+100}{2} \cdot 11 = 6600 \text{ (грн.)}.$$

якщо взяти 12000 грн. на 12 років під 10% річних на суму кредиту, то відсоткові виплати будуть дорівнювати:

12000•0,1 = 1200 (грн.) щорічно, а років – 12, тому всі відсоткові виплати дорівнюють 1200•12 =14400 (грн.). Виплати більше на 14400-6600=7800 (грн.).

Відповідь: на 7800 гривень.

Задача 3. Для відпочинку родини влітку потрібно не менше 5 000 грн. Кожного місяця сім’я може заощаджувати до 10% сімейного бюджету. Скільки місяців сім’я має відкладати гроші на відпочинок, якщо її щомісячний бюджет становить 7 600 грн?

Розвязання: Нехай сім’я зможе заощадити потрібну суму за n місяців, тоді накопичена сума становить $7600 \cdot 0{,}1 \cdot n \geq 5000$. Отримаємо $n \geq 6{,}58$.

Отже, потрібну суму сім’я буде збирати 7 місяців.

Відповідь: 7 місяців.

10 клас

Задача 1. За ціною 2 у. о. обсяг попиту дорівнює 6 од., а за ціною 4 у. о. — 2 од. Функція попиту лінійна. Запишіть функцію попиту. Знайдіть максимальну ціну попиту.

Розв'язання: Загальний вигляд лінійної функції попиту: $QD = a - bP$, де a і b — сталі величини. За умовою задачі:

$$\begin{cases} 6 = a - 2b, \\ 2 = a - 4b. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: $a = 10$; $b = 2$. Тоді функція попиту матиме вигляд: $Q_D = 10 - 2P$. За умови максимальної ціни попиту величина попиту дорівнює нулю:$10 - 2P = 0; P = 5$. Отже, максимальна ціна попиту становить 5 у. о.

Задача 2. Підприємець поклав у банк 50 000 у. о. під 8 % річних із піврічним нарахуванням складних відсотків. Через 2 роки він поклав на той самий рахунок ще 15 000 у. о., але відсоткова ставка на цей момент змінилася і становила вже 6 % річних. Скільки грошей буде у підприємця на рахунку через 4 роки після того, як він поклав 50 000 у. о.? Який при цьому буде прибуток підприємця?

Розв'язання: Знайдемо суму грошей, яка була на рахунку підприємця через 2 роки після першого вкладу:

$S = P\,(1 + i\,)^n = 50\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^4 \approx 68\,024{,}45$ (у. о.).

За умовою через 2 роки підприємець поклав у банк ще 15 000 у. о. Визначимо суму на його рахунку:

$68\,024{,}4\,5 + 15\,000 = 83\,024{,}45$ (у. о.).

Знайдемо загальну суму грошей на рахунку ще через 2 роки (при 6 % піврічного нарахування складних відсотків):

$S = P\,(1 + i\,)^n = 83\,024{,}45 \cdot (1 + 0{,}06)^4 \approx 104\,816{,}45$(у. о.).

Тобто через 4 роки на рахунку підприємця буде 104 816,45 у. о.

Отже, прибуток підприємця складе:

$$104\,816{,}4\,5 - 50\,000 - 15\,000 = 38\,816{,}45 \text{ (у. о.)}.$$

Відповідь: через 4 роки у підприємства буде 104 816,45 у. о. на рахунку; при цьому прибуток буде становити 38 816,45 у. о.

Додаток Б

Конспект уроку

Тема уроку. Лінійна функція в економіці. Функції попиту та пропозиції

Мета уроку:

навчальна: повторити, узагальнити і систематизувати знання учнів з теми: «Лінійна функція, її графік та властивості»; показати учням можливості застосування знань з цієї теми під час вивчення економічних питань, зокрема функції попиту і пропозиції; ознайоми з відповідною економічною термінологією;

розвивальна: формувати вміння і навички в побудові графіків функцій; розвивати мислення, увагу, творчість;

виховна: виховувати інтерес до набуття знань.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань і вмінь.

Форми роботи на уроці: індивідуальна, групува.

Міжпредметні зв'язки: економіка.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

II. Перевірка домашнього завдання.

III. Актуалізація опорних знань.

Запитання до класу

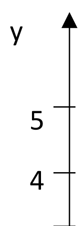
1. Що називається лінійною функцією?

2. Що називається областю визначення функції?

3. Що називається областю значення функції?

4. Користуючись графіком функції знайдіть область визначення, область значення, вкажіть зростання (спадання) функції

(*Відповіді:* $D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; зростає)



IV. Застосування знань.

1. Що називається попитом? (**Попит** – це форма вираження потреб, представлених на ринку і забезпечених грошовими засобами.)

2. Що таке пропозиція? (**Пропозиція** – це кількість товарів, яка перебуває на ринку або може бути доставлена на ринок; визначається виробництвом, але не тотожне йому.)

Функція – залежність, за якої кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної ($y = f(x)$).

Функція попиту – залежність, за якої кожному значенню ціни p відповідає число q ($q = f(p)$, де $p -$ ціна товару, $q -$ кількість товару, що споживачі готові купити за даною ціною).

Приклад: Якщо ціни на товар знижуються, то ви можете купити товару більше чи менше? А якщо підвищуються?

(*Відповідь:* за умови підвищення ціни зменшується кількість, а за умови зниження ціни зменшується кількість товару).

V. Закріплення знань.

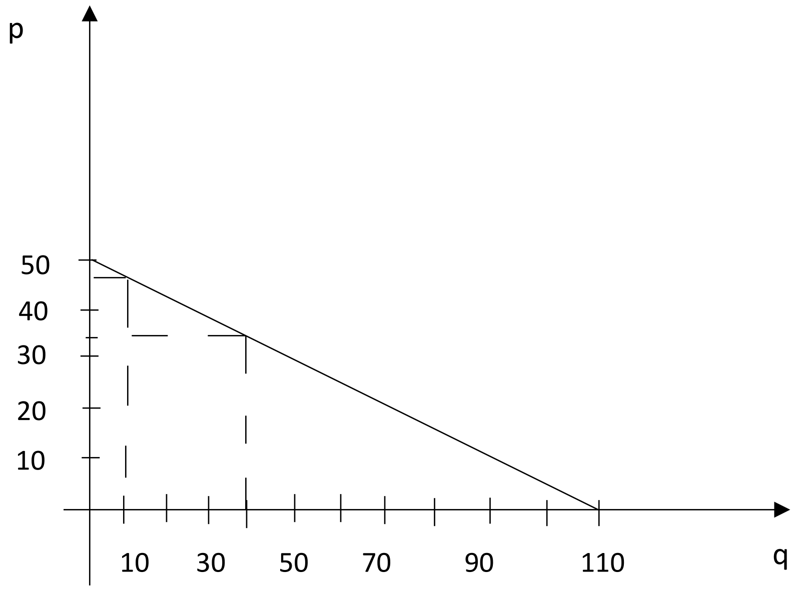
Приклад 1. На рисунку зображено функцію попиту на персики.

Визначте:

1. Область визначення і область значення функції попиту.

2. Величину попиту на персики за ціною: p=25, p=30, p=45.

3. Ціну, за якої величина попиту дорівнює: q=40, q=10



Розв'язання:

1. $D(y): p \in [0; 50]$;

2. $E(y): q \in [0; 110]$;

3. при $p_1 = 25;\ p_2 = 30;\ p_3 = 45$;

$q_1 = 55;\ q_2 = 50;\ q_3 = 10.$

4. при $q_1 = 40;\ q_2 = 10$;

$p_1 = 35;\ p_2 = 45.$

Приклад 2. Функцію пропозиції задано формулою: $q = 30p - 300.$

Знайти: 1) область визначення; 2) область значень; 3) ціну, за якою товар буде запропоновано до продажу в об'ємі: $q = 150; q = 300;$ 4) обєм пропозиції за ціною одиниці товару: $p = 300; p = 500.$

Для побудови графіка зобразіть систему координат, виберіть одиничний відрізок.

Розв'язання:

При $p = 0, q = 700.$

При $q = 0, p = 600.$

1. $D(y): p \in [0; 600].$

2. $E(y): q \in [0; 700].$

3. при $q_1 = 150;\ q_2 = 30;$

$p_1 = 550;\ p_2 = 300.$

4. при $p_1 = 300;\ p_2 = 500;$

$q_1 = 300;\ q_2 = 100.$

VI. Підсумок уроку

На сьогоднішньому уроці ми ознайомилися з функціями попиту та пропозиції.

- Як ви вважаєте, функція попиту є лінійною?
- Назвіть область визначення і область значень.

Рефлексія:

Учні відповідають на запитання:

1. Яких нових знань набули на уроці?
2. В якому настрої ви перебували на уроці?
3. Що на уроці заважало вам працювати продуктивно, успішно?
4. Що було зайвим на уроці? Які негативні елементи на уроці ви помітили?

VII. Домашнє завдання

1. Вивчити теоретичний матеріал з підручника.
2. Виконати приклад: Побудуйте графік функції попиту $q = 1200 - 6p$.

Знайти: 1) область визначення; 2) область значень; 3) ціну, за якою товар буде запропоновано до продажу в об’ємі: $q = 6000; q = 450;$ 4) об’єм пропозиції за ціною одиниці товару: $p = 35; p = 150; p = 50.$

Додаток В

<u>Контрольна робота</u>

на тему: «Лінійна функція в економіці»

Тематична контрольна робота складається з трьох задач у кожному з варіантів. Завдання 1 оцінюється у 3 бали; завдання 2 оцінюється у 4 бали; завдання 3 – 4 бали, всього – 12 балів.

Варіант 1

Задача 1. Функція попиту на товар $Q_D = 12 - P$, а пропозиції – $Q_S = 2P - 6$. Припустимо, що попит на товар зменшиться на 25%. Як це вплине на ціну товару.

Задача 2. Функція пропозиції на полуницю має вигляд: $q = 2p - 180$.

1) Побудуйте графік.

2) Знайдіть область визначення та область значення.

3) Ціну за якою товар буде запропоновано до продажу в об'ємі $q = 28, q = 46$.

4) Об'єм пропозиції за ціною одиниці товару $p = 32, p = 53$

Задача 3. Побудуйте графік функції попиту $q = 1 - 6p$. За допомогою графіка визначте:

1) область визначення;

2) область значень;

3) величину попиту на товар за ціною: $p = 30, p = 90$;

4) ціну, за якої величина попиту дорівнює: $q = 110, q = 60$.

Варіант 2

Задача 1. Функція попиту на товар $Q_D = 6 - P$, а пропозиції – $Q_S = -4{,}6 - 1{,}5$. Припустимо, що попит на товар зменшиться на 30%. Як це вплине на ціну товару.

Задача 2. Побудуйте графік функції попиту $q = 120 - 3p$. За допомогою графіка визначте:

1) область визначення;

2) область значень;

3) величину попиту на товар за ціною: $p = 20,\ p = 75$;

4) ціну, за якої величина попиту дорівнює: $q = 120, q = 80$.

Задача 3. Функція пропозиції на апельсини має вигляд: $= q = 20p - 150$.

1) Побудуйте графік.

2) Знайдіть область визначення та область значення.

3) Ціну за якою товар буде запропоновано до продажу в об'ємі $q = 30, q = 55$.

4) Об'єм пропозиції за ціною одиниці товару $p = 35, p = 55$.

Відповіді:

Завдання	Задача 1	Задача 2	Задача 3
Варіант 1	Ціна знизиться на 0,125	$1. D(y): p \in [0; 160)$ $2. E(y): q \in [0; 90)$ 3. при $q_1 = 28;\ q_2 = 46$ $p_1 = 100;\ p_2 = 76.$ 4.при $p_1 = 32;\ p_2 = 53;$ $q_1 = 70;\ q_2 = 58$	$1. D(y): p \in [0; 105)$ $2. E(y): q \in [0; 120)$ 3. при $q_1 = 110;\ q_2 = 60$ $p_1 = 15;\ p_2 = 60.$ 4.при $p_1 = 30;\ p_2 = 90;$ $q_1 = 90;\ q_2 = 30$
Варіант 2	Ціна знизиться на 0,22	$1. D(y): p \in [0; 100)$ $2. E(y): q \in [0; 150)$ 3. при $q_1 = 120;\ q_2 = 80$ $p_1 = 45;\ p_2 = 70.$ 4.при $p_1 = 20;\ p_2 = 75;$ $q_1 = 140;\ q_2 = 55$	$1. D(y): p \in [0; 150)$ $2. E(y): q \in [0; 80)$ 3. при $q_1 = 30;\ q_2 = 55$ $p_1 = 70;\ p_2 = 45.$ 4.при $p_1 = 35;\ p_2 = 55;$ $q_1 = 70;\ q_2 = 45$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник, 3-тє видання. / Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989.

2. Бурда М. І. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів / Бурда, Б.В. Кудренко, О.Я. Біляніна та інші // Математика в рідній школі. – 2017. – №7 – 8. – С. 10 – 16.

3. Бурда М. І. Особливості навчання математики за новими програмами / М. Бурда, Д. Васльєва // Математика в рідній школі. – 2017. – №7 – 8. – С. 2 – 9.

4. Вазінська Г. Розв'язування усіх типів задач на відсотки / Г. Вазінська // Світ виховання. – 2007. - №4(23). – С. 25-30.

5. Василюк Н. Навчаємо учнів виконувати фінансові операції / Н. Василюк // Математика в рідній школі. – 2017. – №5. – С. 30 – 34.

6. Васильєва Д. Розвиток фінансової грамотності учнів на уроках математики / Д. Васильєва, Н. Василюк // Математика в рідній школі. – 2017. – №6. – С. 2 – 7.

7. Дутка Г. Застосування диференціального числення в задачах економічного змісту / Г. Дутка // Математика в школі. – 1999. – №2. – С. 23-25.

8. Желтуха Т.В. Застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач геометричного, фізичного та економічного змісту / Т.В. Желтуха // Математика в школах України. – 2009. - №35. – С. 15-21.

9. Ігнатенко М. Застосування лінійної функції для розв'язування задач з економіки / М. Ігнатенко // Математика в школі. – 2002. -№3.

10. Калашников І. Вивчення похідної у задачах економічного профілю / І. Калашников, Т. Коваленко, К. Костриця // Математика в школі. – 2004. - №7. – С.49-53

11. Кикоть В.М. Математичні задачі пов'язані з економікою: посібник для учнів 5-9 класів та вчителів / В.М. Кикоть, О.О. Кислюк. – Шепетівка, 2013. – 50с.

12. Копилєв О.А. Застосування геометричної прогресії в економіці / О.А. Копилєв // Математична газета. – 2001. - №12.

13. Копилєв О.А. Застосування шкільного курсу математики в економіці / О.А. Копилєв, Т.А. Грицишина // Економіка в школах України. – 2006. - №6-7.

14. Крамер К. Н. Высшая математика для экономистов / К.Н. Крамер. – М.: Юнити, 2007.

15. Лавінський М. Математика в економіці: навч. програма курсу за вибором для старших класів економічного профілю / М. Лавінський // Математика. – 2008. - №27-28. – С. 31-36.

16. Макарова Н. Математика в допомогу економіці / Н. Макарова // Завуч. – 2007. - №21. – С.23.

17. Межейникова Т. Математичні задачі з фінансовим змістом в основній школі / Т. Межейникова. – Харків, 2003.

18. Мельник Г. Застосування математичних методів до задач економічного змісту / Г. Мельник, Н. Баюн // Математика в рідній школі. – 2017. – №3. – С. 20-23.

19. Мерзляк А.Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія 2017. – 416с.

20. Методичні рекомендації щодо викладання математики у 2017 – 2018 навчальному році. Витяг з додатку до листа Міністерства освіти і науки України від 09.08.2017 р. № 1/9-436 // Математика в рідній школі . – 2017. - №9. – С. 2-5.

21. Мірецька Л. Математичний практикум з розв’язування задач / Л. Мірецька // математика в школі. – 2007. - №5. – С. 37-43.

22. Моськіна Л.Є. Економіка на уроках математики в 7 класі / Л.Є Моськіна // Математика в школах України. – 2008. – №12. – С. 23-27.

23. Нічуговська Л.І. Прикладні аспекти математики: лінійна функція та її економічне застосування / Л.І. Нічуговська // Математика в школі. – 2003. - №8. – С. 43-47.

24. Нічуговська Л.І. Математичне моделювання в системі економічної освіти: монографія / Л.І. Нічуговська. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2003. – 289 с.

25. Нічуговська Л.І. Формування економічного мислення учнів засобами математики / Л. І. Нічуговська // Пост методика. – 2000. - №2. – С. 28-30.

26. Пастушок Г. Математичне моделювання при розв'язуванні задач конкретного практичного змісту / Г. Пастушок // Нова педагогічна думка. – 2007. - №4. – С. 138-139.

27. Симонов А.С. Экономика на уроках математики / А.С. Симонов. – М.: Школа – Пресс, 1999. – 160 с.

28. Стасюк В. Використання похідної функції на прикладі розв'язування економічних задач / В. Стасюк, С. Григулик //Математика в школі. – 2008. - №5. – С. 39-41.

29. Столяр Н.В. Розвиток творчих здібностей учнів на уроках математики / Н.В. Столяр // Математика в школах України. – 2014. – №4 – 5. – С. 9-13.

30. Стрельченко О. Елементарні функції та прикладні задачі економічного напрямку на уроках математики в школі / / О. Стрельченко, І. Стрельченко, М. Вайнтрауб // Математика в школі. – 2005. - №6. – С.44-49.

31. Ткач Ю.М. Задачі економічного змісту в математиці / Ю.М. Ткач. – Харків.: Вид-во «Ранок», 2011. – 176 с. – (Курс за вибором)

32. Ткач Ю.М. Теоретичні основи економічної орієнтації процесу навчання математики в школі / Ю.М. Ткач. // Математика в школі. – 2004. - №5. – С. 47-54.

33. Яценко С.Є Задачі економічного змісту в курсі алгебри: програма курсу за вибором для учнів 8 – 9 класів. /С.Є. Яценко, Ю.М. Ткач. – Чернігів, 2009. – С. 188 – 194.