Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

бакалавра

на тему

Методика підготовки учнів до розв’язання олімпіадних задач у 9 класах

Виконала: студентка IV курсу групи МЕФ-41

Галузі знань 01 «Освіта»

спеціальності 014.04 «Середня освіта. Математика»

Нагорна Ганна Вікторівна

Керівник доц. Крайчук О.В.

Рецензент

Рівне – 2018 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Внутрішній розвиток сучасної математики – це скарбниця важливих та захоплюючих задач, які виникають під час фундаментальних та прикладних досліджень. Вирішення таких задач вимагає постійного притоку в науку молодих творчих сил. Нашій державі потрібні тисячі фахівців, науковців різних спеціальностей, які професійно володіють математичними методами. Це є однією з багатьох причин необхідності всілякого розвитку різноманітних форм змагань юних математиків, що спонукають здібну молодь до поглибленого вивчення такої прекрасної науки як метематика. Насамперед шлях до оволодіння математичними знаннями для учнівської молоді пролягає через розв'язування складних та оригінальних задач. Кожне математичне дослідження – як теоретичного, так і прикладного характеру, складається з розв'язування окремих задач, і ці задачі не зводяться до простого використання відомих алгоритмів, а вимагають саме творчої роботи думки, кмітливості, спостережливості. Не менш важливим чинником є інтуїція: спочатку вгадати, передбачити правильну відповідь, а потім довести – за таким принципом у математиці зроблено не одне відкриття. Ось чому з точки зору професійної математики доцільно залучати учнів до розв’язування задач, які, з одного боку, спираються на шкільний курс, а з іншого – потребують неабияких проявів фантазії, гнучкості міркувань, схильності до аналізу та синтезу ідей.

До проблеми розв’язування задач при вивченні математики як науки тією чи іншою мірою зверталося багато відомих математиків фахівців з методики викладання математики. Особливу увагу розв’язуванню задач як засобу розвитку мислення, формування системи математичних понять, добору задач до підручників у середній школі приділяли Г. П. Бевз [4], Д.Т. Белешко [5, 6], Ю. М. Колягін [15, 16], І. Ф. Тесленко [37], Л. М. Фрідман та ін [38, 41].

Психологічний та методичний аспект процесу розв’язування задач досліджували Г. О. Балл [1,2], Л. Л. Гурова [13], Н. О.Менчинська [24, 25], З. І. Слєпкань [30, 31], Л.М. Фрідман [39, 40] та ін.

У працях І.А. Горчакова [12], В. А. Оганесяна [26], Е. Н. Турецького [41], Д. Пойа [28, 29], виявлені роль і місце задач в процесі навчання математики, систематизовані прийоми пошуку розв'язку задачі. Проте спеціальним дослідженням проблеми навчання учнів 9 класів розв'язуванню олімпіадних задач з математики та розробкою методики підготовки учнів вони не займались.

Це і визначає **актуальність** теми нашого дослідження. Оскільки розв'язування нестандартних математичних задач дозволяє активізувати навчально-виховний процес, підвищити якість знань школярів, сприяє розвитку логічного мислення, інтелектуальному розвитку та активізації пізнавального інтересу до вивчення предмету та виховує навички дослідницької діяльності.

Мета дослідження: розробити зміст та методику проведення гурткової роботи з розв'язання олімпіадних математичних задач у 9 класах.

Об'єктом дослідження є процес навчання учнів 9 класів розв'язуванню математичних задач.

Предмет дослідження є зміст та методика підготовки учнів 9 класів розв'язуванню нестандартних математичних задач.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувавши науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми дослідження, розкрити поняття «задача» та «нестандартна задача»;

2. Систематизувати нестандартні математичні задачі в 9 класах відповідно до їх видів;

3. Відповідно до цієї систематизації розробити зміст та методику гурткової роботи в 9 класах та експериментально їх перевірити.

В основу дослідження була покладена **гіпотеза**: якщо організувати гурткову роботу по вивченню і розв'язанню нестандартних задач, то це стане успішним засобом підготовки учнів до олімпіад, що підвищить ефективність навчання учнів, рівень математичного розвитку школярів, забезпечить свідоме оволодіння учнями системою знань, умінь і навичок.

Для розв’язання поставлених завдань було використано наступні методи дослідження:

теоретичні: аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури, змісту програм і підручників для розкриття теми дослідження;

емпіричні: вивчення та осмислення вітчизняного і зарубіжного педагогічного досвіду, узагальнення та систематизація власного, аналіз уроків, спостереження, тестування, бесіди з вчителями та учнями.

Наукова новизна дослідження полягає в теоретичному обґрунтуванні методики підготовки учнів до розв’язування олімпіадних задач у 9 класі.

Практичне значення дослідження полягає у систематизації нестандартних задач з математики для учнів 9 класів, і розробці на її основі змісту та методичних рекомендацій проведення гурткових занять.

Обґрунтованість і вірогідність отриманих у ході дослідження результатів обумовлюється аналізом науково-методичної літератури, а також змісту та структури роботи учнів при розв’язуванні олімпіадних математичних задач.

Апробація основних результатів дослідження. Результати роботи були представлені на звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Роль і місце задач у навчанні математики

Математик повинен знати основні галузі математики, розуміти, як вони зв'язані між собою, як одна галузь доповнює другу. Але цього мало. Необхідно знати ті проблеми, які вона розв'язує. А коли тут підійти до вивчення математики, то треба з'ясувати собі, яку роль відіграє математика у вивченні явищ та сил природи, яку роль вона відіграє у розвитку техніки та інше.

Мету викладання математики в загальноосвітній середній школі можна визначити таким чином: шкільний курс математики має забезпечити міцне і свідоме оволодіння системою математичних знань, умінь і навичок, які потрібні для загального розвитку учнів, для їх практичної діяльності в умовах сучасного виробництва, для вивчення на достатньо високому рівні споріднених шкільних предметів (фізики, креслення, хімії та ін.) та для продовження освіти. Із сказаного випливає, що викладання математики в школах повинно відповідати загальноосвітнім, практичним і виховним цілям. Звичайно, ідеал людини майбутнього ми вбачаємо не тільки в її загальній освіті, крім цього, кожна людина повинна досконало знати принаймі одну галузь, бути спеціалістом і мати певні моральні якості. Але вона обов'язково повинна мати і загальну освіту, зокрема – певний мінімум математичних знань [10].

Згідно з теорією виховання навчання за своїм змістом і організацією – основний канал виховання, причому виховна його суть полягає насамперед у тому, щоб, розвиваючи розумові сили й здібності дітей, сформувати в них науковий світогляд як основу практичного ставлення до світу.

Видатний педагог А. С. Макаренко [22] підкреслював, що виховна робота найефективнішою є тоді, коли учні не помічають, що їх виховують.

Задачі відіграють важливу роль у курсі математики середньої школи. Вони, з одного боку, складають специфічний розділ програми, зміст якого учні мають засвоїти, з другого – виступають як дидактичний засіб навчання, виховання і розвитку школярів.

Розв’язуючи задачі, учні навіть не помічають, яке велике значення має задача для виховання особистості.

Рівень математичної культури значною мірою залежить від уміння розв’язувати задачі. Сформувати такі уміння допомагає знання прийомів і методів розв’язування задач, засвоєння яких є найважливішою частиною математичної підготовки учнів, а також усіх, хто цікавиться математикою [20].

Розв’язування задач спрямоване на формування в учнів системи математичних знань, вироблення вмінь і навичок математичного моделювання, обчислення, розвитку прийомів розумової діяльності (планування, пошук раціональних шляхів, критичність мислення тощо). Задачі допомагають розкрити опосередковані зв’язки математики з навколишнім середовищем і практичною діяльністю людей, реалізувати пізнавальні й виховні функції навчання. Процес розв’язування задач сприяє формуванню таких розумових дій як аналіз і синтез, конкретизація і абстрагування, порівняння, узагальнення тощо. Від оволодіння вміннями розв’язувати задачі залежить не лише підготовка школярів з математики на даному етапі навчання, а й осмислене засвоєння систематичних курсів у подальшому.

Задачі у навчанні математики є і об’єктом вивчення, і засобом навчання. Зазвичай розрізняють чотири основні їхні функції:

- навчальна,
- розвивальна,
- виховна,
- контролююча [30].

Жодна із названих функцій не може виступати ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель має виділити провідну функцію і добиватись її реалізації в першу чергу.

Як відомо, будь-яка задача, що розв’язується на тому чи іншому етапі навчання, несе в собі різні функції, причому провідне положення однієї чи декількох функцій задач має динамічний характер. У зв’язку з цим існує можливість посилення однієї чи декількох функцій задач без послаблення інших [23].

Дамо певну характеристику основним функціям задач.

Навчальна функція полягає в формуванні в учнів системи математичних знань, навичок і вмінь на різних етапах навчання. За допомогою системи задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й на етапі мотивації переконуються у потребі здобуття нових знань; у процесі розв’язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи їх розв’язування.

Розвивальна функція задач спрямовується на розвиток мислення школярів, на формування в них розумових дій і прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння математизувати ситуацію тощо.

Виховна функція задач спрямовується на формування в учнів наукового світогляду, вона сприяє екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю, відповідальність за доручену справу та ін.).

Контролююча функція задач полягає у встановленні рівня навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом загалом [30].

Отже, можна стверджувати, що при формуванні системи математичних задач, методистам потрібно чітко визначити функції кожної задачі, які мають бути реалізовані на всіх етапах навчання, встановити зміст, кількість, місце і методику роботи над розв’язуванням задач побудованої системи.

1.2. Математична задача та її структура

Поняття «задача» і «проблемна ситуація» мають багато спільного. Проте в більшості досліджень вони не ототожнюються. Наприклад, Л. М Фрідман вважає поняття проблемної ситуації вихідним. А. М. Леонтьев не зв'язує явно проблемну ситуацію з задачею, однак зазначає, що до виникнення останньої приводить визнання суб'єктом проблемності деякої ситуації і вказівки до її розв'язання. Тобто, задача – це результат визначеного типу діяльності людини. Постановка і формулювання задачі залежить від того, як була проаналізована проблемна ситуація.

За Л. М. Фрідманом [38], відмінності між поняттям «задача» і «проблемна ситуація» пояснюються тим, що остання існує реально, а задача являється абстрактною моделлю реальної ситуації, і тому проблемна ситуація завжди багатша за змістом, ніж задача, яка відображає лише деякі її сторони. Для кожної проблемної ситуації існує одна або декілька задач, які можуть різнитися між собою як сукупністю представлених в них властивостей ситуації. Л. М. Фрідман визначає задачу як «знакову модель проблемної ситуації».

У психолого-педагогічній літературі немає єдиного трактування поняття «задача». Залежно від підходу до зв’язку між суб’єктом і задачею автори тлумачать його по-різному. Кібернетика, дидактика і методика навчання математики розглядають задачу як ситуацію зовнішньої діяльності, що запропонована окремо від суб’єкта діяльності. Тому здебільшого задачу розуміють як будь-яку вимогу обчислити, перетворити, побудувати або довести що-небудь. Психологія розглядає задачу як мету, задану в певних умовах, як особливу характеристику діяльності суб’єкта. Задача тут тлумачиться як суб’єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб’єкта [9].

У шкільній практиці задачами у широкому розумінні вважають не лише текстові, сюжетні задачі, а й різні вправи, приклади.

Процес розв’язування задачі, як розумову діяльність, досліджує психологія й аналізує методика математики. Загалом здійснюються спроби дослідити задачі як такі, а не лише процес їх розв’язування.

Дослідження психологів, дидактів і методистів в останні роки показали, що вміння школярів розв’язувати задачі не знаходиться в прямій залежності від кількості розв’язаних задач. Учень може виконати велику кількість окремих завдань, але якщо у нього не буде сформований загальний підхід до їх аналізу, пошуку плану розв’язання, самостійно розв’язувати задачі він не навчиться. Отже, постановка системи задач значною мірою визначає ефективність навчання математики в сучасних умовах [12].

На думку З. І. Слєпкань, одна із причин несформованості в учнів загальних умінь розв’язувати задачі – “недостатня увага виявлення функцій певних типів задач і кожної окремої задачі, їх місця в навчанні”. Для того, щоб задачі якнайповніше виконували свої методичні і дидактичні функції необхідно, щоб вони розв’язувалися не довільно, а складали б чітко визначену систему. Система задач до кожної теми повинна відповідати конкретній дидактичній меті і завданням. Вона повинна сприяти оволодінню вміннями, які необхідні для засвоєння нових дій, а також забезпечити розвиток пізнавальних інтересів учнів, виховання їх творчої особистості [33, с.34].

Уміння розв'язувати ту чи іншу задачу залежить від багатьох чинників. Але передусім необхідно навчитися розрізняти основні типи задач і уміти розв'язувати найпростіші з них.

Отже, з яких етапів складається процес розв'язування задачі?

Очевидно, отримавши задачу, перше, що треба зробити, це розібратися в тому, що це за задача, яка її умова, в чому заключається її вимога, тобто провести аналіз задачі. Це і складає перший етап процесу розв'язування задачі.

У ряді випадків цей аналіз треба оформити, записати. Для цього використовуються різні схематичні записи задач, побудова яких складає другий етап процесу розв'язування.

Аналіз задачі і побудова її схематичного запису необхідні головним чином для того, щоб знайти спосіб розв'язання даної задачі. Пошук цього способу складає третій етап розв'язування.

Коли спосіб розв'язування задачі знайдений, його необхідно виконати - це буде вже четвертий етап процесу розв'язування.

Після того як розв'язування виконано (письмово чи усно), необхідно впевнитись, що це розв'язування правильне і задовольняє всім вимогам задачі. Для цього проводять перевірку, що складає п'ятий етап процесу розв'язування.

При розв'язуванні багатьох задач, крім перевірки, необхідно ще провести дослідження задачі, а саме: встановити, за яких умов задача має розв'язок і скільки різних розв'язків існує у кожному конкретному випадку; за якої умови задача зовсім не має розв'язку. Все це складає шостий етап процесу розв'язування.

Впевнившись у правильності розв'язування і, якщо потрібно, виконавши дослідження задачі, необхідно чітко сформулювати відповідь – це буде сьомий етап процесу розв'язування.

Нарешті, в навчальних і пізнавальних цілях корисно також провести аналіз виконаного розв'язування, тобто встановити, чи нема іншого, більш раціонального способу розв'язування, чи не можна задачу узагальнити, які висновки можна зробити із цього розв'язування. Все це складає останній восьмий етап розв'язування.

Отже, весь процес розв'язування задачі можна розділити на вісім етапів:

1-й етап - аналіз задачі;

2-й етап - схематичний запис задачі;

3-й етап - пошук способу розв'язування задачі;

4-й етап - виконання розв'язування задачі;

5-й етап - перевірка розв'язку задачі;

6-й етап - дослідження задачі;

7-й етап - формулювання відповіді задачі;

8-й етап - аналіз розв'язування задачі.

Математичні задачі, для розв'язування яких в шкільному курсі математики існують готові правила, або ці правила безпосередньо випливають з означень чи теорем, що визначають програму розв'язування цих задач у вигляді послідовності кроків, називають стандартними. При цьому передбачається, що для виконання окремих кроків розв'язування стандартних задач в курсі математики існують конкретні правила.

Процес розв'язування стандартних задач має деякі особливості.

1. Аналіз задач зводиться до встановлення (розпізнавання) виду задач, до якого вона належить.

2. Пошук розв'язування полягає у складанні на підставі загального правила (формули, тотожності) або загального положення (означення, теореми), програми – послідовності кроків розв'язування задач даного виду. Звичайно, немає необхідності цю програму формулювати в письмовій формі, достатньо її для себе намітити усно [17].

3. Саме розв'язання стандартної задачі полягає у застосуванні цієї загальної програми до умови даної задачі. Якщо деякі кроки програми розв'язування вимагають для свого виконання використання також інших програм, то стосовно них проводяться ті самі операції (розпізнавання виду задачі, складання програми розв'язування і виконання розв'язування на основі цієї програми). Звідси походить, що для того щоб легко розв'язувати стандартні задачі (а вони є основними математичними задачами, оскільки всі інші зрештою зводяться до них), треба:

1) пам'ятати всі вивчені в курсі математики загальні правила (формули, тотожності) і загальні положення (означення, теореми);

2) вміти розгортати згорнуті загальні правила, формули, тотожності, а також означення і теореми у програмі - послідовності кроків розв'язування задач відповідних видів.

У визначенні стандартних задач, як основну ознаку цих задач вважають наявність в курсі математики таких загальних правил чи положень, які однозначно визначають програму розв'язання цих задач і виконання кожного кроку цієї програми.

Звідси зрозуміло, що нестандартні задачі – це такі задачі, для яких в курсі математики немає загальних правил і положень, що визначають точну програму їх розв'язування [14].

Процес розв'язування будь-якої нестандартної задачі складається у послідовному застосуванні двох основних операцій:

1. Зведення (шляхом перетворення або переформулювання) нестандартної задачі до іншої, їй еквівалентної, але уже стандартної задачі;

2. Розбиття нестандартної задачі на декілька стандартних підзадач.

В залежності від характеру нестандартної задачами використовуємо одну із цих операцій або обидві. При розв'язуванні більш складних задач ці операції доводиться застосовувати багаторазово.

До структури системи задач, які реалізують навчальні, розвивальні і виховні функції, повинні входити:

1) задачі із провідною навчальною функцією, до яких віднесено:

- пропедевтичні:
  - на спостереження ознак і властивостей фігур;
  - співставлення дослідних фактів;
- репродуктивні:
  - на підведення фігури під поняття;
  - зображення фігур;
  - виведення наслідків і умов;
  - взаємне розміщення фігур;
- тренувальні:
  - на застосування виведених формул, теорем;
  - знаходження точкових множин;
  - визначення співвідношень між елементами фігур;

2) задачі із провідною розвивальною функцією, до яких віднесено:

- на виділення характерних ознак і властивостей;
- переосмислення фігур;
- аналіз, синтез, узагальнення;
- пошук алгоритму розв’язання;
- з не сформульованою умовою і вимогою;
- із суперечливою умовою і вимогою;
- з кількома розв’язками;
- з недоступними елементами;
- з обмеженнями;
- на відновлення фігур;

3) задачі із провідною виховною функцією містять в собі такі:

- на формування пізнавального інтересу;
- на політехнічне, естетичне, економічне, трудове виховання;
- на формування навичок раціональної навчальної праці;
- на виховання спостережливості, самостійності.

Звичайно, такий поділ має швидше логічний характер: конкретну задачу далеко не завжди можна віднести до того чи іншого виду. Скоріше навпаки – в досить змістовній задачі реалізуються всі її цілі, від чого вона, звичайно, тільки виграє. Дійсно, вимогу задачі завжди можна сформулювати так, що при тому самому змісті, функція задачі зміниться.

1.3. Навчання учнів евристичній діяльності в процесі розв’язування задач

У наш час особливо актуальною є об’єктивна потреба в активному розвиткові інтелектуально-творчого потенціалу кожної особи, нації, суспільства в цілому. У реалізації цього завдання провідна роль належить освіті, навчанню. Проте практика свідчить, що процес навчання творчості ще не став нормою в освітніх закладах. Це означає, що людинознавчому аспектові навчання не завжди відводиться належне місце.

Розв'язання зазначеної проблеми потребує пошуку, розробки та впровадження адекватних дидактичних технологій, методів та форм організації навчального процесу, які містять достатній потенціал для створення ситуацій творчого розвитку учнів.

Цілями навчання математики у загальноосвітньому навчальному закладі є формування в учнів: умінь здійснювати прикладну діяльність; знань, які б задовольняли їх пізнавальні та практичні потреби; навичок, які б прискорювали дію основних фактів. Це в свою чергу означає, що найосновнішим завданням вчителя: добитися, під час навчального процесу, засвоєння способів дій, на яких засновується подальше навчання, як математики, так і інших предметів. Під час навчання також формуються необхідні умови для їх особистого повноцінного життя в сучасному суспільстві [4].

Одним з найбільш ефективних видів діяльності та стимулювання творчого саморозвитку учнів сучасна психолого-педагогічна наука визначає евристичне навчання, під час якої відбувається формування та розвиток відповідних знань і вмінь. Досвід такої діяльності, набутий в процесі навчання математики, сприятиме проходженню кожної особистісті всіх етапів розв'язання практичних проблем – від початкової постановки задачі до аналізу отриманого розв'язку. Реалізуються евристичні вміння, які набуті при вивченні дисципліни, на кожному з етапів винаходу інноваційних життєвих рішень. Це становить міцну базу для реалізації зазначених цілей та продовження навчання. Таким чином формування евристичної діяльності учнів під час виконання практичних завдань з математики є одним зі шляхів досягнення поставлених цілей [34].

Проаналізуємо поняття евристики, евристичного навчання у філософському, психологічному та педагогічному аспектах.

Розглянемо характеристику евристики, як спеціальної системи знань.

1. Евристики – це прийоми розв'язання певних класів задач, що не піддаються чіткій алгоритмізації.

2. Евристики – це прийоми міркувань правдоподібного характеру.

3. Евристики – це специфічні розумові прийоми, що складають пошукові стратегії і тактики.

У методичній і психологічній літературі евристичними методами називають будь-які методи, що спрямовані на скорочення перебору розв’язків.

Упровадження методичної системи організації і управління евристичною діяльністю учнів в класах при вивчені стереометрії забезпечує високі результати навчання і створює сприятливі умови для формування прийомів евристичної діяльності школярів [12].

Для успішного засвоєння учнями математики рекомендується використовувати евристичні прийоми, що покращують рівень навчальних досягнень учнів при розв’язуванні математичних задач.

Усі прийоми евристичної діяльності поділяються на загальні і спеціальні. До загальних прийомів евристичної діяльності відносяться:

1. Порівняння і аналогія.
2. Узагальнення і конкретизація.
3. Аналіз і синтез.

Розглянемо зміст загальних прийомів евристичної діяльності та їх операційний склад.

Порівняння і аналогія

Порівняння і аналогія – загальні прийоми евристичної діяльності, що використовуються як в наукових дослідженнях з математики, так і в навчанні математики. За допомогою порівняння виявляються схожість і відмінність математичних об’єктів, що порівнюються, тобто наявність у них спільних і відмінних властивостей. Порівняння готує підставу для застосування аналогії, при якій відбувається перенесення інформації про ознаки і відношення з одного математичного об’єкта на інший на основі певного зв’язку між ними.

Висновок за аналогією тільки правдоподібний, але не завжди вірний, і тому підлягає ще доведенню. Не варто уникати виникнення хибних висловлень за аналогією. В цьому випадку слід вважати їх гіпотезами. Оскільки найчастіше пошук, дослідження ведуться способом “спроб і помилок”, то помилки, які при цьому допускаються, цілком правомірні. В евристичній діяльності помилки неминучі. Важливо, щоб учні самостійно могли знаходити помилковість “припущень, які виникають у пошуку правильних відповідей”.

Узагальнення і конкретизація

Узагальнення – це мислене виділення, фіксування яких-небудь загальних істотних властивостей, які належать певному класу об’єктів або відношень. Під узагальненням розуміють також перехід від одиничного до загального, від менш загального до більш загального.

Під конкретизацією розуміють зворотний перехід – від більш загального до менш загального, від загального до одиничного.

Навчити учнів узагальнювати задачі можна, якщо вони постійно будуть практикуватися у виконанні завдань на застосування різних прийомів, узагальнених після засвоєння схеми узагальнення. Тому після розв’язання конкретної стереометричної задачі доцільно пропонувати учням завдання на її узагальнення.

Прийом узагальнення через відкидання обмежень широко використовується при вивченні стереометрії, використовуючи аналогію з планіметрією.

Аналіз і синтез

У математиці під аналізом розуміють міркування від невідомого, від того, що треба знайти чи довести, до відомого, до того, що вже знайдено або дано, а під синтезом – міркування від того, що дано, до того, що треба знайти чи довести [3,9].

Аналіз є засобом пошуку розв'язання, доведення, хоча сам по собі у більшості випадків не є розв'язанням, доведенням. Синтез дає розв'язання задачі або доведення теореми.

Розглянемо форми організації та види діяльності вчителя та учня під час проведення практичних занять. Практика показує, що формуванню евристичної діяльності школяра сприятиме дотримання вчителем під час організації практичних занять таких методичних вимог:

1) практичні завдання, тренувальні вправи, повинні відповідати загальним ідеям та спрямованості теоретичного курсу викладу теми, відповідати логічній послідовності змістових ліній діяльності в темі;

2) під час виконання практичних завдань учні повинні постійно відчувати зростання їх рівня складності (від алгоритмічних задач до евристичних);

3) учнів слід залучати до систематичної зайнятості: включати у вид діяльності учня пошукову роботу з розв'язання деякої проблеми, під час якої учні мали би можливість виявити свою творчість, активність, самостійність, реалізувати евристичні уміння;

4) повторення матеріалу повинно бути варіантним, з врахуванням нової точки зору вивченої теми. Тобто актуалізація знань учнів не повинна відбуватися як нудне повторення у вигляді декларування теоретичних фактів з конспекту чи підручника, а опиратися на діяльність учнів у просуванні до вивчення нової теми;

5) стимулюванню творчості, ініціативи учня сприяє супроводжуюча, а не пригнічуюча позиція вчителя, який повинен виступати в ролі консультанта лише для тих, кому потрібна допомога;

6) використання вчителем різних методів, форм та засобів навчання, які роблять навчання цікавим;

7) врахування індивідуальних особливостей, інтересів кожного учня, профільних інтересів тощо.

Під час виконання практичних математичних завдань розв’язуються такі педагогічні задачі: розвиток творчого мислення; формування пізнавальної мотивації; практичне використання знань у навчальних умовах; оволодіння математичною мовою, формування навичок оперування поняттями, означеннями, формулюваннями; оволодіння евристичними прийомами ставити проблему; аналізувати явища, факти, порівнювати, узагальнювати, систематизувати набуті знання. Звідси випливає головне завдання курсу математики в цілому для основної школи – озброїти учнів методами і способами розв’язування задач і вправ, навчити самостійно відшуковувати їх розв’язки [35].

Отже, кожне практичне завдання повинно мати конкретну мету, учень має чітко знати алгоритм його розв’язання та способи практичної реалізації алгоритму на практиці, рівень складності роботи на занятті повинен відповідати навчальним можливостям учня.

Метою практичних занять є опанування, а, отже, і застосування теоретичних знань, розвиток пізнавальних здібностей учнів, прояв ініціативи учня у прийнятті конкретного рішення, творчого мислення особистості. Тому підбираючи завдання, вчителю треба звести до мінімуму їх шаблонне виконання біля дошки, а по максимуму навчити учня свідомо відноситись до навчання [9].

Зміст роботи на уроці, форми організації навчання на ньому, повинні викликати інтерес та бажання в учнів виконати завдання до кінця. Практичні заняття проводяться для того, щоб сформувати навички і звичку до праці. Проте слід зауважити, що зловживання практичною роботою на занятті може бути шкідливим, так само як і її недооцінка.

Отже, головним для вчителя математики на сьогодні стає завдання: навчити учня вчитися, а не просто регідними тренуваннями його насичувати знаннями, які він через день, два забуде.

1.4. Самостійна робота як засіб актуалізації пізнавальної діяльності учнів.

Однією з проблем, яка потребує негайного вирішення є проблема формування в процесі навчання активного, самостійного, творчого мислення школярів. Учням потрібно допомогти позбутися шаблонного, стереотипного мислення, стандартних установок, які вбивалися в їхні голови ще з дитинства. Сучасна школа повинна виховувати у школярів здатність до самостійної навчальної діяльності, самостійного здобуття знань. Проявляти такі якості мислення як самостійність, активність, гнучкість, швидкість і інші [43].

Одні вчені твердили, що самостійність визначається тільки мислительною діяльністю учнів, другі – тільки мотивами її діяльності, її добровільністю, треті – тільки рисами характеру, поведінки тощо. Але не треба забувати, що діяльність людини багатогранна і тому треба формувати самостійність людини вцілому, у всіх її проявах.

В навчанні математики слід розрізняти:

1) самостійність мислення проявляється при розгляді суті явищ (подій, процесів) і веде до формування переконань; з нею тісно пов’язана і самостійність в використовуванні навичок і вмінь, прийомів розумової праці, методу пізнання;

2) самостійність характеру, поведінка особистості, яка виражається в умінні поступати у відповідності зі своїми поглядами, в тому чи іншому відношенні до оточуючого;

3) самостійність поштовху до діяльності, її мотивів; для неї важливі прояви інтересу, ініціативи, творчості;

4) самостійність в практичній діяльності.

Не треба забувати, що існує принципова різниця між пізнавальною діяльністю:

а) при передачі готових знань;

б) при формуванні знань на основі самостійної мислительної діяльності учнів.

Головним видом пізнавальної діяльності учнів за способом передачі готових знань є запам'ятовування, при слабкому прояві мислительної активності і самостійності. Учень без сторонньої прямої допомоги повинен розібратися в явищах суспільного життя, розкрити їх суть. Пізнання рухається від явища до суті, а від суті знову до явища, але тепер це явище усвідомлюється повніше, глибше. Самостійне розкриття суті явищ органічно пов'язане з використанням знань, умінь, життєвого досвіду учнів.

Аналіз результатів експерименту показав, що для організації самостійної навчальної діяльності необхідно забезпечити її посильність, доступність і різноманітність, враховуючи при цьому вікові та індивідуальні особливості учнів дотримуючись дидактичних вимог.

Серед методів, які спрямовані на активізацію пізнавальної діяльності учнів, важлива роль належить самостійній роботі.

Самостійна робота на уроках математики має велике навчальне й виховне значення. Вона може дати бажані наслідки лише тоді, копи вчитель застосовує її у певній системі та послідовності; правильно керує нею; працює в тісному контакті з учителями інших предметів [4].

Розвиток самостійності в процесі навчальної діяльності включає в себе такі сторони:

- відношення вчителя до проявів самостійності;
- уміння учнів самостійно планувати свою навчальну роботу;
- уміння виділяти головне і другорядне;
- оцінку учнем труднощів у вивченні матеріалу;
- наявність або відсутність в учня інтересу до матеріалу, який вивчається;
- самостійне застосування засвоєних знань;
- оцінка учнем своєї роботи і її результатів.

У термін «самостійна робота» ми вкладаємо значно ширший зміст, відноситимемо сюди і самостійне вивчення теорії за підручником, і самостійне доведення теорем, і самостійне розв'язування задач, виконання різних завдань: тестів, математичних диктантів, лабораторних робіт, практикумів, семінарів, розгадування вікторин, участь в КВК, математичних олімпіадах, конкурсах, турнірах, круглих столах, дискусіях, проектах, малій академії наук, зовнішньому незалежному оцінюванні і державній підсумковій атестацій. Самостійну роботу учнів слід розглядати як метод навчання, як освітню технологію [7].

Навчатись можна не тільки з слів учителя, не тільки під час колективного розв'язування задач і вправ, а й самостійно. В умовах звичайної загальноосвітньої школи корисно час від часу пропонувати учням різні види самостійної роботи.

Працюючи самостійно, учні, як правило, глибше вдумуються в зміст опрацьованого матеріалу, краще зосереджують свою увагу, ніж це звичайно буває при поясненнях учителя або розповідях учнів. Тому знання, уміння і навички, набуті учнями в результаті добре організованої самостійної роботи, бувають міцнішими і ґрунтовнішими. Крім того, у процесі самостійної роботи в учнів виховується наполегливість, увага, витримка та інші корисні якості.

Самостійне вивчення теорії за підручником

Одним з видів самостійної роботи учнів з математики в класі є самостійне вивчення теорії за підручником.

Основна мета таких завдань – навчити учнів читати математичний текст, інакше кажучи, навчити їх учитися [42].

У процесі самостійної роботи учнів з підручником часто відбувається процес злиття навчання з вивченням.

Відшукання учнем своїх доведень і способів розв’язання

Добре, коли учень уміє самостійно читати математичну книгу, розв'язувати задачі відомих типів. Але ще краще, коли він намагається знаходити свої доведення, свої способи розв'язування задач, пропонує свої формулювання означень, теорем і т. д. Завдання вчителя – заохочувати і підтримувати такі прагнення. Це один з видів самостійної роботи; можна навіть сказати, що це найвища форма самостійної роботи учнів. Спостереження показують, що такі учні, які намагаються давати свої доведення і розв'язання задач, є в кожному класі, і тільки від учителя залежить, як культивується в класі така форма самостійної роботи [18].

Позакласне читання з математики

Великим резервом розширення математичних знань учнів, навичок роботи з книгою і, що не менш важливо, вироблення навичок самоосвіти, може стати бібліотека науково – популярної літератури з математики і її позакласне читання.

Робота з книгою – це справжня праця розуму, розвиток уявлення, фантазії, пам'яті. Учням доцільно пропонувати і підготувати проект, доповідь, анотацію статті, ознайомитись з новим методом розв'язування задачі .

Форми проведення позакласної самостійної роботи

Проектна технологія

Проектна робота – вид роботи (переважно в групах), метою якої є підготовка кінцевого продукту. Мета цього виду роботи – дати учню можливість виконати незалежну(самостійну роботу) роботу, побудовану на знанні матеріалу та уміннях і навичках, здобутих упродовж певного періоду вивчення теми. Проектні роботи ідеальні для різнорівневих груп, оскільки кожне завдання може бути виконане учнями, що мають різний рівень підготовки. У процесі проектної діяльності учні реально спілкуються між собою і з навколишнім світом. Метод проекту – це метод пошуку, тобто така організація навчання, при якій учні набувають знань в процесі планування та виконання практичних завдань – проектів. Проект дає можливість тісно поєднати теорію з практикою [42].

Метод проектів дозволяє вчителю надати пріоритет різним видам самостійної діяльності учнів.

Участь школярів в МАН

Підготовка науково-дослідницьких робіт учнів, членів та кандидатів у члени МАН України має на меті якісне оновлення змісту позашкільної освіти учнів, створення системи пошуку і підтримки обдарованої молоді для формування наукової еліти.

Написання і подальший захист науково - дослідницьких робіт спрямовані на реалізацію внутрішніх потреб дітей і підлітків у професійному самовизначенні, задоволення їхніх запитів у розкритті здібностей та інтересів.

Математичні олімпіади

Метою популяризації математичних ідей та підтримки талановитих школярів, розвиток їх інтелектуальних здібностей є проведення математичних олімпіад, конкурсів „Кенгуру", турнірів на яких проявляються творчі здібності школярів і які вимагають від учня самостійного розв'язання різних завдань, тестів, і т.д. Для учнів олімпіада є способом перевірки і утвердження свого покликання і одним з видів самостійної роботи [17].

Домашня робота

Домашня робота – це теж самостійна робота учня. У домашній (самостійній) роботі учень має навчитись виконувати всі операції, які він спочатку виконував під керівництвом учителя, а тепер має повторити їх стосовно себе (ставити мету, планувати, контролювати, оцінювати).

Виконання домашніх завдань сприяє закріпленню і поглибленню поданого на уроці нового матеріалу, допомагає виробити навички, дисциплінує учнів, привчає їх працювати систематично і самостійно, функція домашньої роботи – навчити дітей вчитися.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ У 9 КЛАСАХ

Методична система навчання будь-якого предмета являє собою сукупність п'яти компонентів: цілі, зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання.

Перевага методичних систем полягає у тому, що відкривається можливість спростити процедуру вибору конкретних методів і зробити її більш цілісною та ефективною. Слід зауважити, що методична система у процесі профільного навчання математики, ґрунтуються на реальному врахуванні психолого-педагогічних особливостей школярів (вдосконалення змісту навчання через розробку спецкурсів для учнів, що враховують принципи профільної і рівневої диференціації) вимагає від школярів неабиякого характеру та прикладної спрямованості; розвиток інтелекту, математичної інтуїції, пам'яті, уваги. Дані елементи є необхідними для математичного розвитку особистості, для формування її світоглядної позиції, усвідомлення ролі математики у пізнанні дійсності.

2.1. Методика гурткової роботи при підготовці учнів до розв'язування олімпіадних задач

Кожний учитель прагне, зацікавити учнів предметом, який він викладає, адже це є запорукою успішного навчання.

«Зацікавити розум дитини – ось що є одним з основних положень нашої доктрини, і ми нічим не нехтуємо, щоб прищепити учневі смак, ми сказали б навіть пристрасть до навчання»,– писав видатний український, математик М. В. Остроградський.

Одним із засобів зацікавлення учнів математикою є добре продумана позакласна робота. Вона є однією з форм організації пізнавальної діяльності учнів різного віку, але разом з тим вимагає конкретних знань, ерудованості, широкої обізнаності з математичних дисциплін [36].

Математичні гуртки є основною формою позакласної роботи з математики. Заняття в них доповнюють роботу на уроках і дають можливість задовольнити інтереси та бажання учнів, що виходять за межі навчальної програми. Тематика занять гуртка повинна відповідати тим знанням, яких набувають учні в процесі навчання, і тому вона пов'язана з програмним матеріалом. У процесі гурткової роботи учні вчаться розв'язувати математичні проблеми, працювати з математичною літературою тощо [13].

Ініціатором і організатором гурткової роботи з математики повинен бути вчитель. Він складає план роботи гуртка і координує його діяльність, враховуючи інтереси та вікові особливості учнів.

Плануючи роботу гуртків, слід передбачити розширення практичних навичок і вмінь, якими учні оволодівають у процесі навчання на уроці. Для цього на заняттях учням можна пропонувати практичні роботи з програмних тем геометрії та алгебри, ознайомлювати з роботою мікрокалькуляторів і комп'ютерів тощо. Учитель також повинен залучати учнів до самостійної творчої праці [27].

На засіданнях математичних гуртків можна також готувати учнів до участі в математичних олімпіадах різних рівнів (шкільних, районних, міських, обласних та республіканських).

Слід зауважити, що ефективність роботи гуртка підвищується, якщо основний його склад буде постійним [43].

Організувавши математичний гурток, слід особливу увагу приділяти тим формам гурткових занять, що дають можливість більшості учнів виявити свою ініціативність і розраховані на активну роботу всіх членів гуртка.

План роботи математичного гуртка.

I. Організаційна робота

1. Запис бажаючих відвідувати математичний гурток.

2. Складання плану роботи гуртка на навчальний рік.

3. Загальні збори членів математичного гуртка:

• затвердження плану роботи;

• вибори ради гуртка;

• вибори редколегій математичного бюлетеня та математичної газети.

4. Загальні збори членів гуртка:

• виготовлення наочних посібників для математичного кабінету школи.

• проведення математичного вечора для учнів 9-х класів.

5. Загальні збори членів гуртка, на яких заслухати звіт редколегій про проведену роботу.

6. Загальні збори членів гуртка:

• підсумки роботи гуртка за рік;

• огляд наочних посібників, виготовлених для математичного кабінету школи;

• заключне слово керівника.

II. Навчальна робота

(Теми занять пропонуються в «Програмі роботи математичного гуртка»)

III. Практична робота членів гуртка

1.Виготовлення стенду «Видатні математики» (М. В. Остроградський, П. Л. Чебишов, А. А. Марков, С. В. Ковалевська, М. І. Лобачевський, О. М. Ляпунов, І. М. Виноградов, М. М. Лузін, Л. С. Понтрягін, А. М. Колмогоров, О. Д. Александров, В. І. Крилов, В. І. Смирнов, С. Л. Соболєв, М. М. Боголюбов) з біографічними даними та інформацією про значення їхньої наукової діяльності для розвитку світової науки.

2. Випуск математичних газети.

3. Проведення математичних вечорів.

4. Проведення екскурсій.

5.Організація роботи щодо конструювання та виготовлення наочних посібників для кабінету математики.

Формування в учнів навичок самостійної пізнавальної і дослідницької діяльності і невіддільного від них стійкого інтересу до навчання є одним із найважливіших завдань сучасної школи.

Основними завданнями математичного гуртка є:

1. Формування і розвиток розумових операцій: аналізу і синтезу, порівнянь, аналогій, класифікацій, узагальнень.

2. Розвиток та тренінг мислення взагалі й творчого зокрема.

3. Підтримання інтересу до предмета (унікальність красивих та цікавих задач слугує мотивом до навчальної діяльності).

4. Розвиток таких якостей творчої особистості, як пізнавальна активність, посидючість, завзятість у досягненні мети, самостійна творчість.

5. Підготовка учнів до творчої діяльності, математичних досліджень. Тут потрібно сприяти творчому засвоєнню знань, способів дій, розвивати уміння переносити знання і способи дій у незнайому ситуацію і бачити нові функції об'єкта [43].

2.2. Програма математичного гуртка

Гурток створюється за принципом добровільності. При наборі дітей до гуртка треба враховувати їхні нахили, можливості та інтереси. Не обов'язково, щоб членами гуртка були лише здібні і підготовлені учні. Треба прагнути викликати зацікавленість до гурткової роботи і з боку середніх та слабких учнів. Стимулом до організації математичного гуртка може стати спеціально проведена коротка бесіда вчителя про те, чим діти будуть займатись у цьому гуртку.

Заняття математичного гуртка доцільно проводити не частіше двох разів на місяць, оскільки кожне заняття вимагає детальної підготовки як з боку вчителя, так і учнів.

№ з/п	**Зміст навчального матеріалу**	**Кількість годин**	**Примітка**
1.	Метод математичної індукції.	1	
2.	Методи доведення нерівностей.	1	

3.	Векторно-координатний метод.	1	
4.	Планіметричні задачі.	1	
5.	Планіметричні задачі.	1	
6.	Послідовності.	1	
7.	Нестандартні рівняння і системи рівнянь.	1	
8.	Розв’язування олімпіадних задач.	1	
9.	Подільність та остачі, алгоритм Евкліда.	1	
10.	Подільність та остачі, алгоритм Евкліда.	1	

Заняття №1

Тема. Метод математичної індукції.

Мета. Домогтися засвоєння учнями поняття математична індукція, та сформувати вміння застосовувати метод математичної індукції для доведення нерівностей. Готувати учнів до олімпіади, розвивати логічне мислення та виховувати математичну цікавість.

Хід заняття

Теоретичні відомості.

Для широкого класу задач на доведення нерівностей, які належать від натурального числа n досить часто застосовується метод математичної індукції, в основі якого лежить принцип повної математичної індукції, згідно з яким твердження A(n) справедливе для довільного $n \in N$, якщо:

1. воно справджується для $n = 1$;
2. з припущення його справедливості для деякого довільного випливає справедливість твердження $n = k + 1$.

Розглянемо особливості використання методу математичної індукції на прикладах.

Приклад 1.

Довести, що при довільному $n \in N$ справедлива нерівність: $\lg(n+1) \geq \geq \frac{\lg 1+\lg 2+\cdots+\lg n}{n}$.

Розв'язання.

Перевіримо справедливість нерівності при $n=1$;

$\lg(n+1) \geq \frac{\lg 1}{1} \leftrightarrow \lg 2 > 0$.

Припустимо, що нерівність виконується для n=k, тобто $\lg(k+1) \geq \geq \frac{\lg 1+\lg 2+\cdots+\lg k}{k}$.

Доведемо нерівність для n=k+1, тобто що

$$\lg(k+2) \geq \frac{\lg 1+\lg 2+\cdots+\lg(k+1)}{k+1}.$$

Додавши до обох частин нерівності lg(k+1)$\geq \frac{\lg 1+\lg 2+\cdots+\lg k}{k}$ по $\frac{\lg(k+1)}{k}$,

одержимо

$$\lg(k+1) + \frac{\lg(k+1)}{k} > \frac{\lg 1+\lg 2+\cdots+\lg k+\lg(k+1)}{k} \leftrightarrow$$

$$\frac{k+1}{k}\lg(k+1) > \frac{\lg 1+\lg 2+\cdots+\lg k+\lg(k+1)}{k} \leftrightarrow$$

В ньому розкрито питання щодо джерел небезпеки у кабінетах інформатики, інженерний захист приміщень ЗОШ розміщених у нетипових приміщеннях, ризики учнів 9-го класу, які навчаються в позаурочний час.

В ньому розкрито питання щодо джерел небезпеки у кабінетах інформатики, інженерний захист приміщень ЗОШ розміщених у нетипових приміщеннях, ризики учнів 9-го класу, які навчаються в позаурочний час.

$$\lg(k+1) > \frac{\lg 1+\lg 2+\cdots+\lg k+\lg(k+1)}{k}.$$

Але lg(k+2)> lg(k+1), тому

$$\lg(k+2) \geq \frac{\lg 1+\lg 2+\cdots+\lg k+\lg(k+1)}{k+1},$$

що й треба було довести.

Отже, з принципом математичної індукції маємо справедливість вихідної нерівності.

Приклад 2.

Довести, що при довільному $n \in N$ число $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9.

Розв'язання.

При n=1 маємо очевидне твердження T_1: число 4+15−1=18 ділиться на 9.

Покажемо, що з твердження T_n(твердження задачі) випливає твердження T_{n+1} : $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ ділиться на 9^n. Маємо

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 =$$

$$= (4^n + 15n - 1) + 3 \cdot 4^n + 15 =$$

$$= (4^n + 15n - 1) + 3 \cdot (4^n + 5).$$

Тому з урахуванням істинності твердження T_n для істинності твердження T_{n+1} достатньо, щоб при довільному $n \in N$ число $(4^n + 5)$ ділилося на 3. Це твердження можна доводити так само методом математичної індукції , але є простіший шлях: $4^n = (3+1)^n$, тому при діленні на 3 дає остачу 1, звідки (4^n+5) ділиться на 3.

За принципом математичної індукції , твердження задачі правильне для довільного $n \in N$.

Приклад 3.

Для довільного $n \in N$ довести нерівність:

$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Розв'язання.

При n=1 маємо $\frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Покажемо, що з істинності нерівності (твердження T_n) випливає істинність твердження T_{n+1}, тобто нерівність

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Оцінимо ліву частину цієї нерівності, використовуючи оцінку

$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Маємо

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}.$$

Очевидно, що для істинності твердження T_{n+1} достатньо щоб справджувалась нерівність $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, яка рівносильна при

$n \in N$ очевидній нерівності $(2n + 1)(2n + 3) \le (2n + 2)^2$.

За принципом математичної індукції нерівність $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n} \le \le$

$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

правильна для довільного $n \in N$.

Приклад 4.

Довести, що для довільного $n \in N$ та довільних чисел $a, b \in R$ виконується рівність

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n+1)b)(a+nb)}=\frac{n}{a(a+nb)}\ .$$

Розв'язання.

При n=1 твердження очевидне.

Покажемо, що з істинності рівності(твердження T_n) випливає істинність твердження T_{n+1} , тобто що

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n+1)b)(a+nb)}+\frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)}=$$

$$=\frac{n+1}{a(a+(n+1)b)}\ .$$

Перевіримо ліву частину твердження T_{n+1} , використовуючи твердження T_n:

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n+1)b)(a+nb)}+\frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)}=$$

$$=\frac{n}{a(a+nb)}+\frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)}=\frac{na+n(n+1)b+a}{a(a+nb)(a+(n+1)b}==$$

$$\frac{(n+1)a+n(n+1)b}{a(a+(n+1)b)(a+nb)}=\frac{n+1}{a(a+(n+1)b)}\ .$$

За принципом математичної індукції рівність правильна для довільного $n \in N$.

Задачі для самостійного розв'язування.

Задача1.

Довести що число, записане 243 одиницями, ділеться на 243.

Задача 2.

Довести, що при довільному натуральному n число $A_n = 5^n + 2\cdot 3^{n-1} +1$ ділиться на 8.

Задача 3.

Довести нерівність $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Заняття №2

Тема. Методи доведення нерівностей.

Мета. Сформувати знання учнів про методи доведення нерівностей та вміння їх правильно застосовувати. Готувати учнів до математичної олімпіади та виховувати математичну культуру.

Хід заняття

Теоретичні відомості.

Без задач, в яких вимагається довести певну нерівність, не обходиться жодна олімпіада. Алгебраїчні нерівності доводяться різноманітними методами, що ґрунтуються на рівносильних перетвореннях та властивостях числових нерівностей:

1) якщо $a \geq b$, $b \geq c$, то $a \geq c$;

2) якщо $a \geq b$, то для довільного m виконується $a+m \geq b+m$;

3) якщо $a_1 \geq b_1$, $a_2 \geq b_2$,…, $a_n \geq b_n$, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$;

4) якщо $a \geq b$, $c \geq d$ то $a - d \geq b - c$;

5) якщо $a > b$, $m > 0$ то $am > bm$, $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$;

6) якщо $a > b$, $m < 0$, то $am < bm$, $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$;

7) якщо $a_1 > b_1 \geq 0$, $a_2 > b_2 \geq 0$,…, $a_n > b_n \geq 0$ то $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n \geq b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

Ось деякі відомі (опорні) нерівності, що часто використовуються при доведенні інших нерівностей:

1) $a^2 \geq 0$;

2) $ax^2 + bx + c > 0$, якщо $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$;

3) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ якщо $x > 0$, та $x + \frac{1}{x} \leq -2$, якщо $x < 0$;

4) $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;

5) якщо $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

6) якщо a > b > 0, x > 0, то $a^x > b^x$ (зокрема, якщо $n \in N$, $n \geq 2$ то $a^n > b^n$, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$);

7) якщо a > b > 0, x < 0, то $a^x < b^x$.

Розглянемо деякі найбільш «популярні» методи доведення нерівностей.

Приклад 1.

Довести нерівність $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \geq 0$.

Розв'язання.

Маємо

$x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 = x^8 - 2x^4 + 1 + x^6 - 2x^4 + x^2 = (x^4 - 1)^2 + x^2 (x^2 - 1)^2 \geq$

≥ 0,

оскільки обидва доданки невід'ємні.

Це типовий приклад використання найпростішого методу, який називається ***«виділенням квадратів»***.

Приклад 2.

Довести нерівність

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}.$$

Розвязання.

Після множення нерівності на n та тотожних перетворень маємо такі рівносильні нерівності:

$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$,

$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \ldots + 2a_{n-1}a_n) \geq 0$,

$(n - 1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - (2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \ldots + 2a_{n1}a_n) \geq 0$.

Після перегрупування доданків маємо очевидну нерівність, рівносильну даній:

$(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \ldots + (a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_2 - a_n)^2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)^2 \geq 0$.

Приклад 3 (Нерівність Чебишова).

Довести, що якщо $a_1,a_2,\ldots,a_n$, та $b_1,b_2,\ldots,b_n$ дві неспадні(або дві не зростаючі) послідовності чисел, то

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\le\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}.$$

Розв'язання.

Після перегрупування доданків в рівносильній нерівності

$$n\ (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\ge 0$$

маємо очевидну нерівність

$(a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_1-a_3)(b_1-b_3)+\ldots+(a_1-a_n)(b_1-b_n)+(a_2-a_3)(b_2-b_3)+\ldots+(a_2-a_n)(b_2-b_n)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)(b_{n-1}-b_n)\ge 0$, оскільки кожен добуток

$(a_i-a_k)(b_i-b_k)\ge 0$.

Часто при доведенні нерівностей використовується метод ***«послідовних оцінок».***

Приклад 4.

Довести, що при довільному натуральному n справджується нерівність

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le\frac{2n-1}{n}.$$

Розв'язання.

Оцінимо ліву частину нерівності

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le 1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}=1+(1-\frac{1}{2})+$$
$$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\le 2-\frac{1}{n}.$$

Приклад 5.

Довести, що при довільному натуральному n справджується нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

Розв'язання.

Дана нерівність при натуральному n рівносильна таким:

$$1<\sqrt{(n+1)n}-\sqrt{n(n-1)},\quad \sqrt{n(n-1)}+1<\sqrt{(n+1)n},$$

$$n\,(n-1)+2\sqrt{n(n-1)}+1<n\,(n+1),$$

$$2\sqrt{n(n-1)} < 2n - 1;$$

$4n(n-1) < 4n^2 - 4n + 1$, $0<1$, що доводить її правильність.

Часто використовується **нерівність Коші-Буняковського**

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2},$$

яка є аналогом векторної нерівності $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Рівність у ній досягається, якщо $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$ або якщо існує таке число $k \geq 0$ що $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2, \ldots, a_n = kb_n$, та це вивчається у старших класах.

Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1.

Довести нерівність $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.

Задача 2.

Довести, що при всіх $x \geq 1$ справджується нерівність

$$2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x-1}.$$

Задача 3.

Довести, що коли $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ та $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$, то справджуються нерівності

$$-1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq 1.$$

Задача 4.

Довести, що коли в арифметичній та геометричній прогресіях ($d \neq 0$) усі члени додатні, число членів однакове, перші та останні члени відповідно рівні між собою, то сума членів арифметичної прогресії більша за суму членів геометричної прогресії.

Задача 5.

Відомо, що $a + b + c = 0$. Довести, що $ab + bc + ac \leq 0$.

Задача 6.

Довести, що коли добуток довільних додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дорівнює 1, то справджується нерівність

$$(1 + 9a_1)(1 + 9a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + 9a_n) \geq 6^n.$$

Заняття №3

Тема. Векторно-координатний метод.

Мета. Формувати уміння та навички учнів розв’язувати задачі векторно-координатним методом.

Хід заняття

Теоретичні відомості.

Застосування векторів, їхніх координат, операцій над векторами до розв’язування геометричних задач називається ***векторно-координатним методом.***

При встановленні різних векторних співвідношень часто використовуються такі твердження:

Теорема 1. Якщо точка M лежить на відрізку AB та AM : MB = λ : μ, то для довільної точки O справедлива векторна рівність

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OB}.$$

Теорема 2. Якщо M – точка перетину медіан трикутника ABC, то для довільної точки O справедлива векторна рівність

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Крім операцій додавання, віднімання векторів, множення вектора на число доцільно використовувати скалярний добуток векторів.

Якщо $\vec{a}(a_1;\ a_2)$, $\vec{b}(b_1;\ b_2)$, то їхній скалярний добуток $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ (якщо $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$).

Справедлива формула $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}; \vec{b})$. Формулу $\cos\varphi = = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ зручно використовувати для знаходження кутів між векторами(чи прямими).

Для знаходження довжини вектора зручною є формула $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2}$.

Ефективним засобом для розв'язування задач є теореми про єдність розкладу довільного вектора(на площині) за даними двома неколінеарними векторами та про єдність розкладу довільного вектора (в просторі) за дними трьома некомпланарними векторами.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються колінеарними, якщо існує дійсне k таке, що $\vec{a} = k\vec{b}$ чи $\vec{b} = k\vec{a}$.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектори на площині(чи паралельні деякій площині).

Теорема 3. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то для довільного вектора $\vec{c}$ існує єдина пара дійсних чисел x, y таких, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються компланарними, якщо рівні їм вектори зі спільним початком лежать в одній площині.

Теорема 4.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ є компланарними тоді і тільки тоді, коли існує трійка дійсних чисел x, y, z, таких, що $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ та $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$.

Задача №1

Всередині трикутника АВС взято точку О. На променях ОА, ОВ, ОС, побудовано вектори з початком у точці О, довжина кожного з яких дорівнює 1. Довести, що сума цих векторів має довжину, меншу за 1.

Розв'язання.

Нехай на променнях ОА, ОВ, ОС побудовано відповідно вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ такі, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Позначимо $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = \gamma$, $\angle(\vec{b};\vec{c}) = \alpha$, $\angle(\vec{a};\vec{c}) = \beta$. Очевидно, що $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$.

Тоді отримуємо

$$|\vec{d}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + b^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}} =$$

$$= \sqrt{3 + 2(cos\alpha + cos\beta + cos\gamma)} = \sqrt{3 + 2(cos\alpha + cos\beta) + 2\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \sqrt{3 + 4cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 4cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 2} =$$

$$= \sqrt{1 + 4cos\frac{\alpha+\beta}{2}(\ cos\frac{\alpha-\beta}{2} + cos\frac{\alpha+\beta}{2})} =$$

$$= \sqrt{1 + 8\cos\,(180^0 - \frac{\gamma}{2})cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}} =$$

$$\sqrt{1 - 8cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}\ cos\frac{\gamma}{2}} \quad < 1,$$

Оскільки кути $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ – гострі.

Задача №2

Всередині трикутника ABC взято точку H. Відомо,що $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$. Довести, що точка H – ортоцентр трикутника ABC.

Розв'язання.

Рівність $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2$ запишемо у векторному вигляді

$\overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{AC}^2$. З неї послідовно отримуємо

$$\overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 0,$$

$$(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BH})\,(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC})\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}) = 0,$$

$$\overrightarrow{AB}\,(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) + \overrightarrow{BA}\,(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}) = 0,$$

$$\overrightarrow{AB}\,(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = 0,$$

$$\overrightarrow{AB}\,(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}) = 0,$$

Тобто $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$. Отже, $AB \perp CH$.

Аналогічно показуємо, що $BC \perp AH$, $AC \perp BH$.

Задача № 3

Довести, що геометричне місце точок M, відношення відстаней від яких до фіксованих точок A і B, дорівнює сталому числу , є коло(коло Аполлонія).

Розв'язання.

Нехай відстань AB = 2c. Введемо прямокутну систему координат так, щоб A(-c;0), B(c;0). Знайдемо співвідношення , яке повинні задовольняти координати точки M(x;y) такої, що $AM = \lambda \cdot BM$.

Використавши формулу відстані між двома точками, отримуємо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \lambda\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

або, після тотожних перетворень,

$$x^2 - 2xc\,\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} + y^2 + c^2 = 0,$$

або

$$\left(x - c\,\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4\lambda^2c^2}{(\lambda^2-1)^2}\ .$$

Отже, AM = λ·BM, тоді і тільки тоді коли точка M належить колу радіуса $R = \frac{2\lambda c}{|\lambda^2-1|}$ з центром у точці $O(c\,\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}; 0)$.

Задачі для самостійного розв’язування.

Задача 1.

Довести, що для довільного паралелограма ABCD має місце рівність $4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AC^2 - BD^2$.

Задача 2.

Нехай ABCD – довільний прямокутник. Довести, що для довільної точки M простору виконуються рівності

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD},$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2.$$

Задача 3.

В основі піраміди лежить багатокутник з непарним числом сторін. Чи можна вздовж кожного її ребра, спрямувати вектор, поставивши стрілку в певному напрямі, так, щоб сума всіх таких векторів дорівнювала нульовому вектору?

Задача 4.

На сторонах CA і CB трикутника ABC взято відповідні точки M і N, так, що CM : CA = m, CN : CB = n.

Медіана CD трикутника ABC перетинає відрізок MN у точці E. Знайти співвідношення CE: CD.

Заняття №4

Тема. Планіметричні задачі.

Мета. Розвивати уміння та навички учнів розв'язувати планіметричні задачі.

Хід заняття

Теоретичні відомості.

Розв'язування геометричних задач є чудовим полігоном для вироблення логічного і послідовного мислення. Тому жодна математична олімпіада не обходиться без геометричних задач.

Для розв'язування планіметричних задач можуть додатково використовуватися теореми, які традиційно розглядаються на факультативних заняттях з математики.

Теорема1.

Якщо OA – відрізок дотичної (A – точка дотику), а B і C – точки перетину кола і січної OB, то $OA^2 = OB \cdot OC$.

Теорема 2.

Кут між січною та дотичною до кола дорівнює піврізниці величин дуг, розташованих між сторонами кута.

Теорема 3.

Навкол чотирикутника ABCD можна описати коло тоді і тільки тоді, коли суми протилежних кутів у ньому рівні між собою:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D (= 180^0).$$

Теорема 4.

У чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли в ньому рівні суми довжин протилежних сторін:

$$AB + CD = BC + AD.$$

Теорема 5**(Чеви)**.

Нехай точки A_1, B_1, C_1 лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB трикутника ABC(або одна з них лежить на стороні трикутника, а дві інші –

на продовженнях інших сторін). Тоді прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці(або є паралельними) тоді і тільки тоді, коли $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$.

Теорема 6**(Менелая).**

Нехай точки A_1, B_1, C_1 лежать відповідно на продовженнях сторін BC, CA, AB трикутника ABC(або дві з них лежать на відповідних сторонах трикутника, а третя – на продовженні третьої сторони). Тоді точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

Оскільки за умовами теореми (5) та (6) виконується рівність

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1} \cdot \frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1} \cdot \frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1},$$

то у формулюваннях цих теорем відношення $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1}$ можна замінити на $\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1} \cdot \frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1} \cdot \frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}$ (отримуємо теореми Чеви та Менелая у тригонометричній формі).

Звичайно, вміння розв’язувати задачі передбачає правильний вибір способу та засобів розв’язання. Необхідність якісного виконання рисунків при розв’язуванні задач показує така відома задача – парадокс.

Задача №1.

Нехай M – точка перетину бісектриси кута C і серединного перпендикуляра до сторони AB прямокутного трикутника ABC. L, K, N – основи перпендикулярів, опущених із M на сторони трикутника. Тоді трикутники AMK і BMK рівні за двома катетами, і тому AM = MB. Трикутники CLM і CNM рівні за гіпотенузою і двома кутами, тому LM = MN, CL = CN.

Тоді трикутники ALM і MNB рівні за гіпотенузою і катетом, тому FL = BN. Тому AC = AL + LC = BN + NC = BC, тобто у прямокутному трикутнику катет і гіпотенуза рівні.?

Розв’язання.

У цьому парадоксі немає жодної логічної помилки, є неправильно виконаний рисунок.

Продовжимо бісектрису CM до перетину зі стороною AB в точці C_1 .

За властивостями бісектриси, $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}$. Оскільки AC > CB, то $\frac{AC_1}{C_1B} > 1$, тобто $AC_1 > C_1B$ і точка C_1 лежить між точками K і B, тобто серединний перпендикуляр до сторони AB і бісектриси кута C перетинаються зовні трикутника ABC.

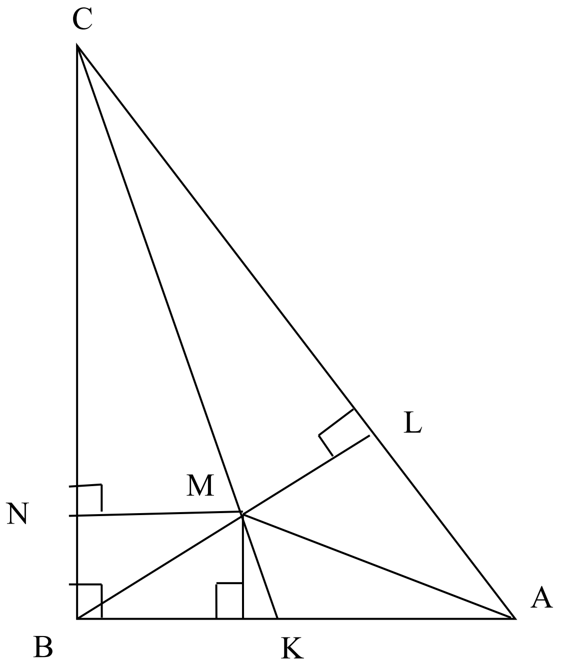

Рис.1

Задача №2

Нехай ABCD – рівнобедрена трапеція з меншою основою BC. Точки M і N – середини сторін AB і AD відповідно, а відрізок BP – висота трапеції ABCD. Позначимо через Q точку перетину відрізків DM і BN . Довести, що точки Q, P і C належать одній прямій.

Розв'язання.

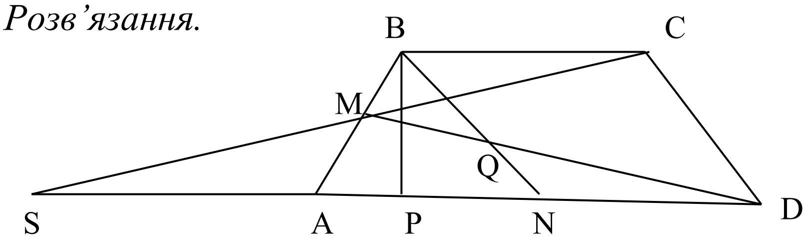

Рис.2

Точка Q є серединою перетину медіан DM і BN трикутника ABD тому, $DQ = \frac{1}{3}$ DM.

Нехай точка S = MC ∩ AD. Тоді AS = BC, SM = MC, SP = PD, тобто DM і CP є медіанами трикутника SCD. За умови $DQ = \frac{1}{3}$ DM випливає, що точка Q також є точкою перетину медіан трикутника SCD, звідки випливає, що точка Q належить прямій CP.

У багатьох задачах отримати ідею розв'язання допомагає підрахунок кутів.

Задача №3

Нехай точка K належить стороні AB трикутника ABC, причому відрізок CK перетинає його бісектрису BF в такій точці Q , що ∠BQC = =2∠BFA і ∠BAF = 2∠CQF. Довести, що KF = FC.

Роз'вязання.

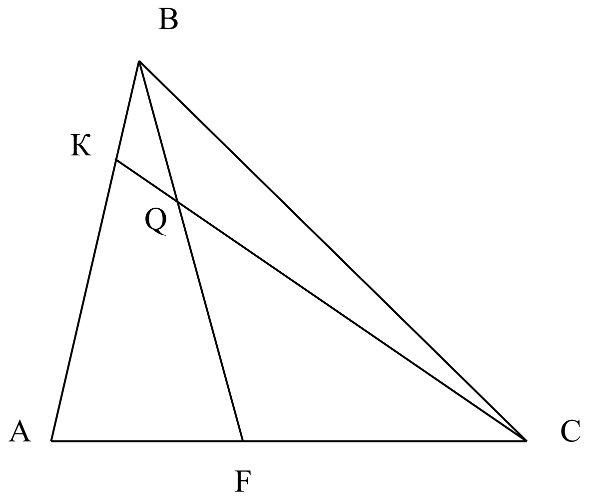

Рис.3

Позначимо ∠BAF = α, ∠ABC = β, ∠BFA = φ. Тоді ∠BQC = 2φ, $\angle CQF = \frac{\alpha}{2}$.

З трикутника ABF маємо $\varphi = 180^0 - \alpha - \frac{\beta}{2}$.Також маємо ∠BQC + ∠FQC $=2\varphi + \frac{\alpha}{2} = 180^0$.

Звідси отримуємо $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

З трикутника BKQ маємо $\angle BKQ = 180^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Також маємо $\angle BFC = 180^0 - \varphi = 180^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$.

Оскільки з точок K і F відрізок BC видно під рівними кутами , то навколо чотирикутника BCFK можна описати коло.

Оскільки BF – бісектриса ∠KBC, то KF = FC як хорди дуг, що відповідають рівним вписаним в це коло кутам.

Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1.

У рівнобедреному трикутнику ABC із середини H основи BC опущено перпендикуляр HE на бічну сторону AC; O – середина HE. Довести, що прямі AO і BE перпендикулярні.

Задача 2.

Основи трапеції мають довжини 3 см і 5 см. Чи може радіус кола, що вписане в трапецію, мати довжину 4 см?

Задача 3.

Навколо кола радіуса 5 см описано рівнобічну трапецію. Відстань між точками дотику її бічних сторін дорівнює 8 см. Знайти площу трапеції.

Задача 4.

У трикутнику медіана та висота, проведені з однієї вершини, ділять кут при даній вершині на три рівні частини.

Довести, що даний трикутник – прямокутний, та знайти його кути.

Задача 5.

Всередині трикутника взяли m точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Їх з'єднали одна з одною і з вершинами трикутника відрізками, що попарно не перетинаються. При цьому даний трикутник розбився на маленькі трикутники. Яка кількість маленьких трикутників могла при цьому отриматися?

Заняття №5

Тема. Планіметричні задачі.

Мета. Формувати вміння та навички учнів розв'язувати планіметричні задачі.

Хід заняття

Розв'язування задач.

Задача №1

Вписане у трикутник ABC коло дотикається прямими BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 відрпвідно. Довести, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

Розв'язання.

Очевидно, що $BA_1 = BC_1$, $AB_1 = AC_1$, $CB_1 = CA_1$.

Тому виконується рівність $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$. За теоремою Чеви, прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

Задача №2

Довести, що в трикутнику ABC бісектрису AA_1 можна знайти за формулою

$$AA_1 = \frac{2b\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

де b = AC, c = AB.

Розв'язання.

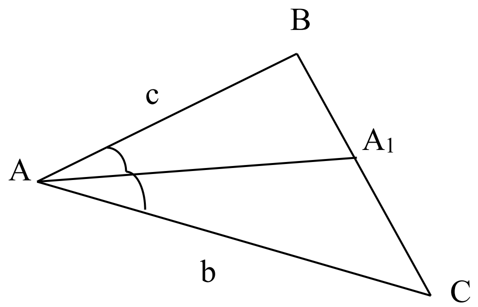

Рис.4

Площа трикутника ABC дорівнює $S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A$. Також його площу можна знайти як суму площ трикутників ABA_1 та ACA_1. Маємо

$$S = \frac{1}{2}c\cdot AA_1\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b\cdot AA_1\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}AA_1\cdot(b+c)\sin\frac{A}{2}.$$

Прирівнявши площі, отримуємо:

$$AA_1 = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{bc\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Задача №3

Всередині трикутника ABC знайдіть точку O, щоб добуток відрізків AB', BC', CA' був найбільшим(A', B', C' – точки перетину чевіан, які проходять через точку O, з сторонами триутника).

Розв'язання.

У трикутнику ABC проведемо медіани AM, BN, CP, які перетинаються в точці G. Якщо врахувати, що середнє геометричне не більше за середнє арифметичне, то

$$\sqrt{AB'\cdot B'C} \le AN, \sqrt{CA'\cdot A'B} \le CM, \sqrt{BC'\cdot C'A} \le BP.$$

Піднесемо обидві частини нерівностей до квадрата і перемножимо:

$$AB'\cdot B'C\cdot CA'\cdot A'B\cdot BC'\cdot C'A \le (AN\cdot CM\cdot BP)^2.$$

За теоремою Чеви маємо, що

$$AB'\cdot CA'\cdot BC' = \cdot B'C\cdot A'B\cdot C'A.$$

Отже,

$$(AB'\cdot CA'\cdot BC')^2 \le (AN\cdot CM\cdot BP)^2.$$

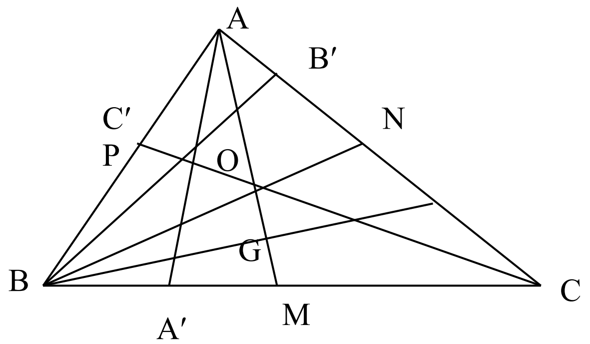

Рис.5

З цієї нерівності видно, що добуток відрізків $AB' \cdot CA' \cdot BC'$ найбільший, якщо нерівність стане рівністю, тобто коли точки A′, B′, C′ збігаються з точками M, N, P, отже, чевіани збігаються з медіанами.

Задача № 4

Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а довжина однієї його сторони у два рази більша від довжини другої. Обчислити довжини сторін трикутника.

Розв'язання.

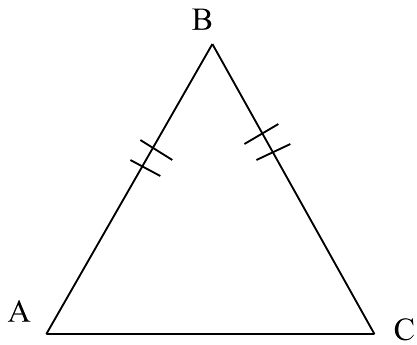

Рис.6

За умовою, AB = BC.

1) Нехай AB > AC у 2 рази, то AC =x см,

а AB = BC = 2x см.

Оскільки $P_{\Delta ABC}$ = AB + BC + AC і $P_{\Delta ABC}$ =

= 60см, то 2x + 2x + x = 60; 5x = 60;

x = 12.

AC = 12 см, AB = BC = 12 · 2 = 24(см).

2) Нехай AC > AB у 2 рази, то AB = BC = x см,

а AC = 2x см.

Тоді x + x + 2x = 60;

4x = 60;

x = 15.

AB = BC = 15 см, AC = 15 · 2 = 30(см).

Маємо:

AB + BC = 15 + 15 = 30(см) і AC = 30(см), тобто AB + BC = AC. За нерівністю трикутника:такого бути не може. Отже, такий трикутник не існує.

Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1.

Діагональ BD трапеції ABCD перпендикулярна до бічної сторони AB, BC = CD, $\angle A = 50^0$. Знайти решту кутів трапеції.

Задача 2.

У прямокутника ABCD проведено діагональ AC. Знайти гострі кути трикутника ABC, якщо один з них на 38^0 менший від іншого.

Задача 3.

На сторонах AB, BC та CD чотирикутника ABCD (або на їхніх продовженнях) взято точки K, L, M відповідно. Прямі KL і AC перетинаються в точці P, прямі LM і BD – у точці Q. Довести, що така точка перетину прямих KQ і MP лежать на прямій AD.

Задача 4.

У трикутнику ABC медіана BE і бісектриса CD перпендикулярні. Відомо, що CD = l, а площа трикутника ABC дорівнює S. Знайти довжину медіани BE.

Задача 5.

Різниця сторін прямокутника дорівнює 4 см, а діагональ – 20 см. Обчислити периметр прямокутника.

Задача 6.

У гострокутному трикутнику ABC висоти AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці H. Довести, що радіус описаного кола

$$R = \frac{AH^2 \cdot A_1H}{2B_1H \cdot C_1H} .$$

Заняття №6

Тема. Послідовності.

Мета. Формувати вміння та навички учнів знаходити арифметичну та геометричну прогресію.

Хід заняття

Теоретичні відомості.

Функцію, визначено на множині натуральних чисел, називають послідовністю, а значення функції f(n) називають членами послідовності і позначають a_n.

Числову послідовність вважають заданою, якщо задано її загальний член a_n. Загальний член послідовності a_n найчастіше задають за допомогою формули загального члена $a_n = f(n)$ або за допомогою рекурентних формул, які виражають загальний член послідовності через попередні члени. Ось деякі відомі послідовності.

1. Арифметична прогресія. Формула загального члена:

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

де a_1 – перший член, d – різниця прогресії. Рекурентна формула:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

2. Геометрична прогресія. Формула загального члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$$

де b_1 – перший член, q – знаменник прогресії. Рекурентна формула:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

3. Послідовність Фібоначчі. Більш відоме її рекурентне задання:

$$a_1 = a_2 = 1, \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Менш відома формула її загального члена (формула Біне):

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Послідовність чисел $\{a_n\}$ називається обмеженою, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх членів послідовності виконується оцінка $|a_n| \leq M$. Послідовність чисел $\{a_n\}$ називається зростаючою, якщо при всіх n = 1, 2, 3,… виконується нерівність $a_{n+1} > a_n$. У разі виконання нерівностей $a_{n+1} < a_n$, $a_{n+1} \geq a_n$, $a_{n+1} \leq a_n$ послідовність чисел $\{a_n\}$ називається відповідно спадною, неспадною, незростаючою.

Послідовність чисел називається періодичною, якщо існує таке натуральне число k (період послідовності), що для всіх n = 1, 2, 3,… справджується рівність $a_{n+k} = a_n$.

На олімпіадах часто зустрічаються задачі, в яких потрібно встановити певні властивості членів послідовності.

Задача №1

Послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n,\ldots$ така, що $a_{a_n} + a_n = 2n$ для всіх натуральних n. Довести, що всі $a_n = n$.

Розв'язання.

Спочатку доведемо, що члени послідовності попарно різні. Якщо $a_m = a_n$, то з рівностей

$a_{a_m} + a_m = 2m$, $a_{a_n} + a_n = 2n$, $a_m = a_n$ отримуємо, що $m = n$.

Доведемо твердження задачі методом математичної індукції.

При $n = 1$ маємо $a_{a_1} + a_1 = 2$. Оскільки $a_1 \geq 1$, $a_{a_1} \geq 1$, то отримуємо $a_1=1$.

Припустимо, що твердження задачі справедливе при всіх $n < k$ і доведемо його для $n = k$.

Якщо $a_k < k$, то отримуємо, що $a_k = m = a_m$, де m – деяке натуральне число, $m<k$. Це суперечить тому, що члени попарно різні.

Якщо $a_k < k$, то $a_{a_k} < k$ (тому що $a_{a_k} + a_k = 2k$).

Тоді $a_{a_k} = m = a_m$, де $m < k$. Однак оскільки члени послідовності попарно різні, то маємо $a_k = m < k$. Це сеперечить тому, що $a_k > k$.

Отже $a_k = k$. За принципом математичної індукції, твердження задачі правильне для довільного натурального n.

Задача №2

Послідовність $\{a_n\}$ не спадає, $a_0 = 0$. Відомо, що послідовність $b_n = a_n - a_{n-1}$ $(n \geq 1)$ не зростає. Довести, що послідовність $c_n = \frac{a_n}{n}$ ($n \geq 1$) також не зростає.

Розв'язання.

Скільки при $n \geq 1$ є правильним $a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, а послідовність b_n не зростає, то

$$a_n \geq n \cdot b_n = n(a_n - a_{n-1}).$$

Звідси отримуємо

$$a_n \geq n \cdot a_n - n \cdot a_{n-1} \geq (n-1)\, a_n .$$

При $n \geq 2$ маємо

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_{n-1}}{n-1} ,$$

тобто $c_n < c_{n-1}$, що й потрібно було довести.

Задача №3

Знайти найбільшу можливу кількість частин площини, на які її розбивають n кіл.

Розв'язання.

Позначимо через a_n найбільшу можливу кількість частин площини, на які її розбивають n кіл. Тоді $a_1 = 2$.

Нехай n кіл розбивають площину на a_n частин. Проведемо ще одне коло. Для того, щоб ці (n+1) кіл розбивали площину на найбільшу можливу кількість частин, потрібно, щоб, (n+1)-ше коло перетинало всі попередні n кіл. Тоді це коло розбивається попередніми n колами на 2n дуг, кожна з яких розбиває одну з попередніх частин площини на дві.

Тому справджується рекурентне співвідношення $a_{n+1} = a_n + 2n$.

Додавши рівності $a_1 = 2$, $a_2 = a_1 + 2$, $a_3 = a_2 + 4, \ldots, a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$, отримуємо $a_n = 2 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n-1)$, або, після прощень, $a_n = n^2 - n + 2$.

Отже, на ($n^2 - n + 2$) частин.

Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1.

Довести, що для будь-якогоm цілого m серед перших ($m^2 - 1$) чисел Фібоначчі знайдеться хочаб одне, яке ділиться на m.

Задача 2.

Нехай a_n – сума перших n простих чисел ($a_1 = 2$, $a_2 = 2 + 3$, $a_3 = 2 + 3 + 5$ і т. д.). Довести, що при довільному n відрізок [a_n , a_{n+1}] містить квадрат натурального числа.

Задача 3.

Послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ будується таким чином: $a_1 = 1997$ та для кожного натурального n виконується $a_{n+1} = 19a_n + 96$. Чи можуть шість послідовних елементів цієї послідовності бути простими числами?

Задача 4.

По кругу вписано не менше трьох різних дійсних чисел. Кожне з цих чисел, дорівнює добутку двох чисел, що стоять по обидва боки від нього. Скільки чисел може бути вписано?

Задача 5.

У послідовності чисел $\{u_n\}$

$u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n^2$ ($n \geq 1$).

Чи ділиться u_{1986} на 7?

Заняття №7

Тема. Нестандартні рівняння та системи рівнянь.

Мета. Формувати знання, уміння та навички розв’язувати нестандартні рівняння та системи рівнянь.

Хід заняття

Основними методами розв’язування рівнянь є розклад лівої частини рівняння на множники та введення нової змінної. При цьому часто варто здійснити певні перетворення рівнянь.

Задача №1

Розв’язати рівняння

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = 0.$$

Розв’язання.

Розкладемо ліву частину цього рівняння на множники. Для цього подамо її у вигляді

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

де a, b, c, d підберемо методом невизначених коефіцієнтів. Маємо

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Один із розв’язків системи

$$\begin{cases} a + c = 8; \\ b + d + ac = 18; \\ ad + bc = 11; \\ bd = 2 \end{cases}$$

Знаходимо методом підбору: $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 1$. Отже,

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = (x^2 + 5x + 2)(x^2 + 3x + 1),$$

а дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 2 = 0; \\ x^2 + 3x + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Рівняння має корені

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2},\ x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Задача №2

Розв'язати рівняння: $x^2 + (\frac{x}{2x-1})^2 = 2$.

Розв'язання.

Перетворимо рівняння:

$$x^2 + 2x\,\frac{x}{2x-1} + (\frac{x}{2x-1})^2 = 2 + \frac{2x^2}{2x-1}\,.$$

$$\left(x + \frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2 + \frac{2x^2}{2x-1}\,,$$

або $\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^2 = 2 + \frac{2x^2}{2x-1}$. Після заміни $t = \frac{2x^2}{2x-1}$ маємо $t^2 - t - 2 = 0$, звідки

$t = -1$ або $t = 2$.

Розв'язавши рівняння $\frac{2x^2}{2x-1} = -1$ та $\frac{2x^2}{2x-1} = 2$, отримуємо відповідь

$x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

При розв'язуванні олімпіадних рівнянь та систем рівнянь часто треба попередньо перетворити їх, щоб отримати рівняння-наслідки, які повинні задовольнятися розв'язками початкового рівняння чи систем рівнянь. При цьому, якщо такі перетворення нерівносильні, обов'язково треба виконати перевірку отриманих розв'язків.

Задача №3

Розв'язати рівняння

$$x + \frac{3x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{35}{4}\,.$$

Розв'язання.

Очевидно, що розв'язки рівняння повинні задовольняти умову $x > 3$. Піднесемо ліву та праву частини рівняння до квадрата. Маємо

$$x^2 + \frac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}} + \frac{9x^2}{x^2-9} = \frac{1225}{16}\,,$$

$$\frac{x^4}{x^2-9}+\frac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}}-\frac{1225}{16}=0.$$

Після заміни $t=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ $(t>0)$ отримуємо

$$t^2+6t-\frac{1225}{16}=0,$$

звідки $t=\frac{25}{4}$. Розв’язавши рівняння

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{25}{4},$$

знаходимо: $x_1=5$, $x_2=\frac{15}{4}$.

Задача №4

Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ xy+yz+zx=5, \\ x^3+\ y^3+z^3=10. \end{cases}$$

Розв’язання.

Дана система є симетричною відносно змінних x, y, z. Позначимо

$x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, $xyz=c$. Тоді маємо

$$x^3+y^3+z^3=a^3-3ab+3c=10,$$

звідки отримуємо $c=2$. Для розв’язання системи

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ xy+yz+zx=5, \\ xyz=2 \end{cases}$$

зручно скористатися теоремою Вієта: числа x, y, z є коренями рівняння $t^3-4t^2+5t-2=0$. Знаходимо $t_1=1$, $t_2=1$, $t_3=2$. Розв’язками системи є всі можливі перестановки цих коренів: (1;1;2), (1;2;1), (2;1;1).

Задача №5

Довести, що при всіх дійсних x, y, z, які задовольняють рівняння $x^2+y^2+z^2=8$ та $xz-xy+yz=4$, змінна x задовольняє нерівність $|x|\le\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання.

Неважко помітити, що умови задачі симетричні відносно змінних x, y. Позначимо x + y = a, xy = b. Тоді маємо

$$\begin{cases} a^2 - 2b + z^2 = 8, \\ az - b = 4. \end{cases}$$

звідси отримуємо $b = az - 4$, $a^2 - 2az + z^2 = 0$, тобто $z = a = x + y$. Тоді змінні x та y задовольняють рівність $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 8$, або, після спрощень,

$$x^2 + xy + x^2 - 4 = 0.$$

Розглядаючи цю рівність як квадратне рівняння відносно змінної y, з умови, що такі числа x, y існують, отримуємо, що дискримінант такого рівняння невід'ємний, тобто

$$D = 16 - 3x^2 \geq 0.$$

З цієї нерівності отримуємо твердження задачі.

Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + x + y = 1, \\ yz + y + z = 5, \\ zx + z + x = 2. \end{cases}$$

Задача 2.

Розв'язати рівняння

$$(x + 5)(x - 3) + 3(x - 3)\sqrt{\frac{x+5}{x-3}} - 18 = 0.$$

Задача 3.

Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases}(x^2 + y^2)x = 6y,\\ (x^2 - y^2)y = x.\end{cases}$$

Задача 4.

Знайти співвідношення між коефіцієнтами a, b, c, при виконанні яких система рівнянь

$$\begin{cases}ax^2 + bx + c = 0,\\ bx^2 + cx + a = 0,\\ cx^2 + ax + b = 0\end{cases}$$

має розв’язки.

Заняття №8

Тема. Розв'язування олімпіадних задач.

Мета. Познайомити учнів з олімпіадними здачами минулих років та розвивати уміння та навички їх розв'язувати.

Хід заняття

Задача №1.

Розв'язати рівняння $1+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{29}{24}$.

Розв'язання.

Спростимо ліву частину

$$1+\frac{1}{\tilde{o}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\tilde{o}}}}=1+\frac{1}{\tilde{o}+\dfrac{\tilde{o}}{\tilde{o}+1}}=1+\frac{1}{\dfrac{\tilde{o}^2+2\tilde{o}}{\tilde{o}+1}}=1+\frac{\tilde{o}+1}{\tilde{o}^2+2\tilde{o}}=\frac{\tilde{o}^2+3\tilde{o}+1}{\tilde{o}^2+2\tilde{o}}.$$

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{x^2+3x+1}{x^2+2x}=\frac{29}{24}.$$

Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 29(x^2+2x)=24(x^2+3x+1), \\ x^2+2x\neq 0. \end{cases}$$

Після спрощення одержимо

$$5x^2-14x-24=0,\ \ x_1=4,\ x_2=-1{,}2.$$

Задача №2 (Задача Безу)

Чоловік купив коня і через деякий час продав його за 24 пістолі. При цьому він втратив стільки відсотків, скільки коштував йому кінь. За скільки пістолів чоловік купив коня?

Розв'язання.

Нехай чоловік купив коня за x пістолів, при продажі він втратив x%, тобто, $0{,}01x^2$ пістолів, продав коня за $(x - 0{,}01x^2)$ пістолів, що за умовою дорівнює 24 пістолі. Маємо рівняння $x - 0{,}01x^2 = 24$.

Звідси, $x^2 - 100x + 2400 = 0$, $x_1 = 40$, $x_2 = 60$.

Задача №3

Числа a і b такі, що $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, $ab = 3$, $a > 0$, $b > 0$. Знайти значення виразу $a + 2b$.

Розв'язання.

Дану задачу можна розв'язати методом квадрата двочлена. Рівності $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$ і $ab=3$ помножимо на 4:

$$a^2 + 4b^2 = 4,$$

$$4ab = 12.$$

Додамо ці дві рівності

$$a^2 + 4ab + 4b^2 = 16,$$

$$(a+2b)^2 = 4^2.$$

Оскільки $a > 0$, $b > 0$, то $a + 2b = 4$.

Задача №4

При якому значенні a сума квадратів рівняння $x^2 + ax + a - 2 = 0$ є найменшою? Чому дорівнює ця сума?

Розв'язання.

Оскільки дискримінант рівняння $D = (a - 2)^2 + 4 > 0$, то воно має два корені при любих дійсних значеннях a. Можемо застосувати теорему Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 x_2 = a - 2, \end{cases}$$

Звідси, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a-2) = a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3.$

Отже, сума квадратів коренів приймає найменше значення 3 при $a = 1$.

Задача №5

На діагоналі AC ромба ABCD взято довільну точку P. Довести, що $AP \cdot PC = AB^2 - PB^2$.

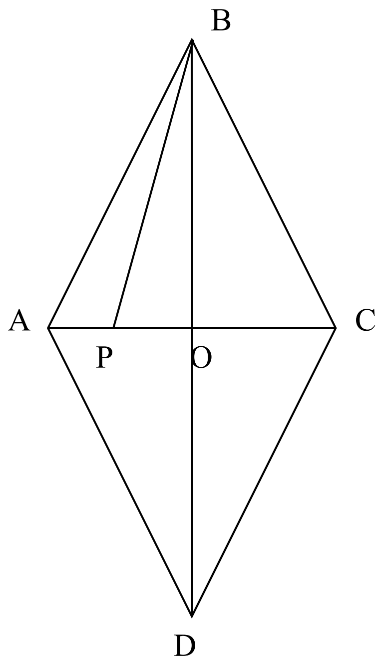

Рис.7

Розв'язання.

У ромба діагоналі AC і BD перпендикулярні, тому трикутники AOB і POB – прямокутні. За теоремою Піфагора

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$PB^2 = PO^2 + OB^2.$$

Почленно віднімемо ці рівності

$AB^2 - PB^2 = AO^2 + OB^2 - PO^2 - OB^2 = AO^2 - PO^2 = (AO - PO)(AO + PO) = AP \cdot PC$.

Задача доведена.

Задачі для самостійного розв’язування.

Задача 1.

Доведіть, що для будь-якого натурального n число $n^3 - 1$ не є степенем числа 2.

Задача 2.

Розв’яжіть рівняння

$$x^3 + |x| = 0.$$

Заняття №9

Тема. Подільність та остачі, алгоритм Евкліда.

Мета. Сформувати знання учнів про подільність та остачі, алгоритм Евкліда а також вміння їх правильно застосовувати. Готувати учнів до математичної олімпіади та виховувати математичну культуру.

Хід заняття

Теоретичні відомості.

Серед олімпіадних завдань дуже часто зустрічаються задачі, пов'язані з подільністю чисел. При їхньому розв'язуванні варто знати такі означення та факти.

Натуральне число $n \neq 1$ називається складеним, якщо воно дорівнює добутку двох менших, відмінних від одиниці, натуральних чисел. У протилежному випадку це число називається простим. Одиниця не є ні простим, ні складеним числом. Два числа називають взаємно простими, якщо вони не мають спільних дільників, відмінних від одиниці.

Теорема 1.(основна теорема арифметики).

Кожне натуральне число, за винятком одиниці, єдиним способом розкладається в добуток простих чисел.

Задача 1.

Довести, що простих чисел нескінченно багато.

Розв'язання. Припустимо супротивне, тобто, що простих чисел скінченна кількість, а саме: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_к$ – всі прості числа. Тоді число A = $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ також просте, бо не ділиться на жодне з чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_к$. Це суперечить припущенню. Отже, простих чисел нескінченно багато.

Проте існують як завгодно великі відрізки натурального ряду, які не містять жодного простого числа. Це можна показати, якщо узагальнити наступну задачу

Задача 2.

Чи існують 1997 послідовних натуральних чисел, серед яких немає жодного простого?

Розв'язання. Число n! ділиться на кожне з чисел 2,3,…n . Тому при таких натуральних k, для яких $2 \leq k \leq n$, число n! + k буде ділитись на k. Отже, при всіх k=2,3,…1998 число 1998!+k ділиться на k, тобто всі ці 1997 чисел є складеними.

Використовуючи розклади натуральних чисел a і b на прості множники, зручно знаходити їхній найбільший спільний дільник НСД(a,b) та найменше спільне кратне НСК(a,b).

Справедливі такі твердження.

Твердження 1. Якщо деяке число ділиться на два взаємно прості числа n і m , то це число ділиться на їхній добуток nm.

Твердження 2. Якщо число pA ділиться на q , де p і q взаємно прості, то й A ділиться на q.

Часто при розв'язуванні задач використовують остачі при діленні. Говорять, що натуральне число n при діленні на натуральне число m дає остачу r ($0 \leq r \leq m-1$), якщо виконується рівність $n = km + r$, де k – деяке натуральне число. Справедливі такі твердження.

Твердження 3. Сума будь – яких натуральних чисел a і b та сума їхніх остач при діленні на натуральне число m мають однакову остачу при діленні на це число m .

Твердження 4. Добуток будь – яких натуральних чисел a і b та добуток їхніх остач при діленні на натуральне число m мають однакову остачу при діленні на це число m.

Задача №1.

Довести, що n^5+4n ділиться на 5 при будь – якому натуральному.

Розв'язання.

Якщо n при діленні на 5 дає остачу 1, то n^5 так само дає остачу 1, 4n дає остачу 4, 1+4=5, тому n^5+4n ділиться на 5.

Якщо n при ділення на 5 дає остачу 2, то n^5 так само дає остачу 2, 4n дає остачу 3, 2+3=5, тому n^2+4n ділиться на 5.

Якщо n при ділення на 5 дає остачу 3, то n^5 так само дає остачу 3, 4n дає остачу 2, 3+2=5, тому n^2+4n ділиться на 5.

Якщо n при ділення на 5 дає остачу 4, то n^5 так само дає остачу 4, 4n дає остачу 1, 4+1=5, тому n^2+4n ділиться на 5.

Якщо ж n ділиться на 5, то твердження задачі очевидне.

Задача № 2.

Показати, що для довільного натурального k існують числа вигляду $7^n -$ -1 , що діляться на 10^k.

Розв'язання.

Число $7^4 -1=2400$ ділиться на 100.

Запишемо очевидну рівність:

$x^{10} - 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 +\ldots+x+1)$.

Якщо число x має останню цифру 1, то число x^n також має останню цифру 1. Тоді число $(x^9 + x^8 +\ldots+x+1)$ має останню цифру 0, тобто ділиться на 10. Отже, якщо число $(x - 1)$ ділиться на 10, то число $(x^{10} - 1)$ ділиться на 10^2 і т. д. Тому число $(7^{4\cdot 10^{k-1}} - 1)$ ділиться на 10^k .

Задача №3

Відомо, що p, p + 10, p + 14 – прості числа. Знайти число p.

Розв'язання.

Число p при діленні на 3 може давати остачі 0, 1, 2. Якщо p = 3k + 1, то p + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5) – складене число.

Якщо p = 3k + 2, то p + 10 = 3k + 12 = 3(k + 4) – складене число. Отже може бути лише p = 3k .

Враховуючи, що p – просте число, отримуємо p=3. У такому разі маємо прості числа 3, 13, 17.

Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1.

Довести, що $n^3 + 2$ не ділиться на 9 при жодному натуральному n.

Задача 2.

Числа a і b – натуральні, причому $a^2 + b^2$ ділиться на 21. Довести, що $a^2 + b^2$ ділиться також на 441.

Задача 3.

Знайти остачу від ділення числа $9^{1999} + 1997 \cdot 1998 \cdot 1999$ на 8.

Вказівки та відповіді до задач.

Задача 1.

Вказівка: розгляньте остачі при діленні на 9.

Задача 2.

Вказівка: перевірте, що дані числа діляться на 3 і 7.

Задача 3.

Розв'язання. Числа 9^{1999} та $1^{1999} = 1$ при діленні на 8 дають одну і ту саму остачу 1. Числа 1997, 1998, 1999 при діленні на 8 дають відповідно остачі 5, 6, 7, тому їхній добуток дає таку ж саму остачу, як і число $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, тобто 2.

Отже, остача дорівнює $1+2 = 3$.

Заняття №10

Тема. Подільність та остачі, алгоритм Евкліда.

Мета. Сформувати знання учнів про подільність та остачі, алгоритм Евкліда а також вміння їх правильно застосовувати. Готувати учнів до олімпіади, розвивати логічне мислення та виховувати математичну цікавість.

Хід заняття

Теоретичні відомості.

При розв'язуванні складних задач варто знати деякі класичні теореми теорії чисел. Більшість таких теорем формулюються в термінах наступних означень.

Якщо число x при діленні на m дає таку саму остачу, як і число a, то говорять, що число x і a ***порівнянні за модулем*** m . Це записують у вигляді рівності

$x \equiv a \pmod{m}$,

яку ще називають ***конгуренцією*** (чи порівнянням).

При розв'язуванні задач на знаходження остачі при діленні двох чисел можна використовувати ***малу теорему Ферма***.

Теорема 1. Нехай p – просте число і $a \in N$. Тоді $a^p \equiv a \pmod{p}$. Якщо при цьому a не ділиться на p, то

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Мала телрема Ферма є частинним випадком ***теореми Ейлера***.

Теорема 2. Якщо натуральні числа a і m $(m > 1)$ взаємно прості, то

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$.

(тут $\varphi(m)$ – кількість натуральних чисел, які не перевищують m і є взаємно прості з m).

При розв'язуванні задач на доведення існування числа, що ділиться на деякі наперед задані числа, іноді зручно користуватися так званою «***китайською теоремою про остачі***».

Теорема 3.

Якщо m_1, m_2,…,m_n – більші за одиницю, попарно взаємно прості числа, то система конгуренцій

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}; \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2}; \\ \quad\quad \ldots\ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n}, \end{cases}$$

при довільних a_1, a_2,…,a_n має розв'язки, які утворюють єдиний клас остач

$$x \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, m_1 m_2 \ldots m_n));$$

де $x_0 = \sum_{i=1}^{n} M_i y_i a_i$, причому числа M_i, y_i визначаються з умов:

$M_i = \frac{m_1 m_2 \ldots m_n}{m_i}$, $M_i\, y_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m_i)$.

Задача №1.

Чи може квадратне рівняння $ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами мати дискримінант рівний 23?

Розв'язання.

Число $b^2 - 4ac$ при діленні на 4 може давати остачу 0 або 1, а число 23 дає остачу 3. Отже, не може.

У задачах, в яких зустрічаються куби цілих чисел, іноді зручно перебрати остачі від ділення на 7 (можливі остачі 0, 1 і 6) та на 9 (можливі остачі 0, 1 і 8).

Задача №2.

Довести, що число $6n^3 + 3$ не може бути шостим степенем цілого числа ні при якому натуральному n.

Розв'язання.

Число $6n^3 + 3$ при діленні на 7 може давати остачі 3, 2 та 4, а шостий степінь при діленні на 7 може давати остачі 0, 1.

Очевидні такі факти.

Твердження 1. Якщо цілі числа a і b діляться на d, то їхня різниця a – b також ділиться на d .

Твердження 2. Якщо ціле число b та різниця a – b діляться на d, то й число a також ділиться на d.

Твердження 3. Якщо цілі числа a і b діляться на d, то при будь – яких цілих x і y число ax + by також ділиться на d.

Ці факти покладені в основу ***алгоритму Евкліда***: найбільший спільний дільник чисел a і b (a < b) дорівнює найбільшому спільному дільнику числа a та остачі від ділення b на a.

Наприклад НСД(368,161) = НСД(161,46) = НСД(46,23) = 23.

Задача №3.

Довести, що при довільному натуральному n дріб

$\frac{12n+1}{30n+2}$ нескоротний.

Розв'язання.

Маємо наступне:

НСД(30n + 2,12n + 1) = НСД(12n + 1, 6n) = НСД(6n,1) = 1.

Звичайно при розв’язуванні багатьох задач можна використовувати добре відомі ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9.

Задача №4.

Довести, що десятковий запис числа 1999^6 містить три однакові цифри.

Розв'язання.

Неважко впевнитись у тому, що десятковий запис числа 1999^6 містить точно 20 цифр. (Для цього, наприклад, достатньо розписати за допомогою бінома Ньютона $1999^6 = (2000 – 1)^6$. Припустимо супротивне, тобто, що трьох однакових цифр нема. Тоді всі цифри 0, 1, 2,…,9 є по два рази, сума цифр десяткового запису числа 1999^6 має дорівнювати 90, що неможливо, оскільки 1999 не ділиться на 3, а тому 1999^6 не ділиться на 9.

Задачі для самостійного розв’язування.

Задача 1.

Знайти всі цілі n , такі, що $n^5 + 3$ ділиться на $n^2 + 1$.

Задача 2.

Натуральні числа a і b такі, що $56a = 65b$. Довести, що $a + b$ – складене число.

Задача 3.

Знайти всі такі натуральні числа $k < 2002$, щоб число $5n^7 + 7n^5 + kn$ ділилося на 35 для всіх натуральних n.

Вказівки та відповіді до задач.

Задача 1.

Вказівка: виділіть цілу частину дробу $\frac{n^5+3}{n^2+1}$. *Відповідь:* $n \in \{1; 3; 5; 9; 21\}$.

Задача 2.

Вказівка: $65(a + b) = 121a$.

Задача 3.

Вказівка: поклавши $n = 1$, отримуємо, що $k = 35m - 12$. Після цього методом математичної індукції доводимо, що $5n^7 + 7n^5 - 12n$ ділиться на 35 для всіх натуральних n.

Відповідь: $k = 35m - 12$, де $m = 1, 2, 3, \dots, 57$.

ВИСНОВКИ

Дослідження теми «Методика підготовки учнів до розв'язання олімпіадних задач у 9 класах» дало змогу переконатися, що проблема методики підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач є однією із актуальних, недостатньо розроблених у методиці проблем. Її вирішення сприятиме удосконаленню процесу навчання математики, підвищенню якості навчання, розвитку і виховання учнів.

Встановлено, що пізнавальна діяльність учнів активізується, якщо виконавчі дії з розв'язування задач передбачають елемент дослідження, застосування інтуїції, образного і уявного мислення.

У процесі проведення дослідження було отримано такі результати:

1.Проаналізувавши наявну науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми дослідження, розкрито поняття «задача» та її місце у навчанні математики;

2. На основі аналізу наявної літератури та завдань олімпіад різних рівнів систематизовано нестандартні математичні задачі у 9 класах.

3. Відповідно до цієї систематизації було розроблено зміст та методику гурткової роботи, методичні рекомендації для підготовки учнів 9 класу до розв'язування олімпіадних задач.

4. Розроблена методика була експериментально перевірена.

Вміння школярів розв'язувати задачі не знаходиться в прямій залежності від кількості розв'язаних задач. Учень може виконати велику кількість окремих завдань, але якщо у нього не буде сформований загальний підхід до їх аналізу, пошуку плану розв'язання, самостійно розв'язувати нестандартні задачі він не навчиться. Отже, постановка системи задач значною мірою визначає ефективність навчання математики в сучасних умовах.

Перший розділ роботи – це науково-теоретичні основи дослідження підготовки учнів до розв'язування олімпіадних математичних задач у 9 класах. У ньому висвітлюється поняття «задача», «нестандартна задача», роль і місце задач у навчанні математики, розвиток евристичної діяльності учнів при розв'язуванні задач.

Другий розділ – методика підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач у 9 класах, в якому зосереджена практична частина роботи, а також розроблена система із десяти гурткових занять:

Заняття №1. Метод математичної індукції.

Заняття №2. Методи доведення нерівностей.

Заняття №3. Векторно-координатний метод.

Заняття №4–5. Планіметричні задачі (2год.)

Заняття №6. Послідовності.

Заняття №7. Нестандартні рівняння і системи рівнянь.

Заняття №8. Розв'язування олімпіадних задач.

Заняття №9–10. Подільність та остачі, алгоритм Евкліда(2 год).

У процесі виконання бакалаврської роботи були розроблені методичні рекомендації для підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач, а також система гурткових занять, які можуть бути використані в роботі вчителів математики загальноосвітніх шкіл.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖКРЕЛ

1. Балл Г. А. О психологическом содержании понятия задача// Вопросы психологии / Г. А. Балл 1970. – №6. – С.75-85.
2. Балл Г. А. Понятия задачи в исследовании и проектировании педагогического процесса// Советская педагогика / Г. А. Балл – 1984. – №11. – С.54-59.
3. Балк Г.Д. О применении эвристических приемов в школьном преподавании математики /Г. Д. Балк. – Математика в школе, 1969, № 5 – с. 21-29.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Підручник для студ. / Г.П.Бевз – К.: Вища школа, 1977. – 367с.
5. Белешко Д.Т. Методика розв’язування нестандартних математичних задач. Частина 1 / Д.Т. Белешко, М.А. Віннічук, О.В. Крайчук. – Х.: Вид. група "Основа", 2017. – 127с.
6. Белешко Д.Т. Методика розв’язування нестандартних математичних задач. Частина 2 / Д.Т. Белешко, М.А. Віннічук, О.В. Крайчук. – Х.: Вид. група "Основа", 2017. – 78с.
7. Бурда М. І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М.І. Бурда – Педагогіка і психологія. – 1996. – № 1. – 40-45с.
8. Вишенський В. А. Гра – не тільки розвага. / В.А. Вишенський – У світі математики.– Вип. 1.,1995 р. – 73-76с.
9. Власенко К. В. Формування прийомів евристичної діяльності на уроках геометрії /К. В. Власенко. – К.: Рідна школа, 2003, №7 – с. 41-43.
10. Волкова Н. П. Педагогіка / Н.П. Волкова – К.: Академія, 2001. –321с.
11. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки: пособие для внекласной работы / С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин – Киров: АСА, 1994. – 272с.
12. Горчакова І.А. Система математичних задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи /І. А. Горчакова. – К., 2002 –

226с.

13. Гурова Л. Л. Психологический анализ решения задач / Л. Л. Гурова – Воронеж: изд. Воронежского университета, 1976. – 327 с.
14. Губа Л. А. Нестандартні уроки математики / Л.А. Губа – Х.: Основа, 2005. – 96 с.
15. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика / Ю. М. Колягин – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
16. Колягин Ю.М. Методические проблемы применения задач в обучении математике // Преподавание алгебры и геометрии в школе / Из опыта работы. Пособие для учителей / Ю. М. Колягин – М.: Просвещение, 1982. – С.116-123.
17. Коба. В. І. Позакласна робота з математики в школі / В.І. Коба, О.О. Хмура – К.: Рад школа, 1987. – 375 с.
18. Козира В. М. Технологія уроку з математики. Посібник для вчителя / В.М. Козира – Тернопіль “Астон”, 2002. – 53с.
19. Конет І. М. Обласні математичні олімпіади / І.М. Конет, В.Г. Паньков – Камянець-Подільський: Абетка, 2000. – 304с.
20. Кушнір І. А. Методи розв’язання задач з геометрії. Кн. Для вчителя / І. А. Кушнір – К.: Абрис, 1994. – 464с.
21. Лейфура В. М. Математичні олімпіади школярів України / В.М. Лейфура, В.А. Ясінський, І.М. Мітельман – К.: Техніка, 2003. – 143с.
22. Макаренко А. С. Книга для батьків. – Лекції про виховання дітей / А. С. Макаренко – К.: Рад. школа, 1972. – 336с.
23. Маланюк М. П. Шукаймо закономірності. Проблемно – пошукові задачі з математики для учнів 5-6 класів / П.М. Маланюк – Тернопіль, 1997. – 88 с.
24. Менчинская Н. А. Применение знаний в учебной практике школьников / Н. А. Менчинская – М., 1962. – 375 с.

25. Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника / Н. А. Менчинская – М.: Педагогика, 1989. – 220 с.
26. Оганесян В. А. Методика преподавания математики в средней школе / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский – М.: Просвещение 1980. – 272 с.
27. Підручна М. Позакласна робота / М. Підручна, Г. Янченко – Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2003. – 188с.
28. Пойа Д. Как решать задачу / Д. Пойа М.: Учпедгиз, 1961. – 207с.
29. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа – М.: Наука, 1975. – 463с.
30. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл / З. І. Слепкань – К.: Вища шк., 2006. – 582с.
31. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підр. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. Закладів / З. І. Слепкань – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512с.
32. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике / З. И. Слепкань – К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.
33. Слепкань З. И. Психолого – педагогические основы обучения матиматике/ З. И. Слепкань – К.: Рад. школа, 1983. – 256 с.
34. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. Навч. посібник / О.А. Сарана – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 400с.
35. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е. И. Скафа – Донецк: Изд-воДонНУ, 2004. – 439с.
36. Тадеєв В. О. Неформальна математика 5-9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається в школі / В.О. Тадеєв – Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2003. – 288с.

37. Тесленко І. Ф. Формування діалектико-матеріалістичного світогляду учнів при вивченні математики: Посібник для вчителів / І. Ф. Тесленко – К.: Радянська школа, 1982. – 160 с.
38. Фридман Л. М. Методы формирования ориентировочной основы умственных действий по решению задач /Л. М. Фридман – Вопросы психологии – 1975. – №4. – С.51-61.
39. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л. М. Фридман – М.: Просвещение, 1983. – 314с.
40. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
41. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи/ Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий – М: Просвещение, 1989.
42. Черкасов Р. С. Методика викладання математики в середній школі / Р.С. Черкасов, А.А. Столяр – Харків: Основа, 1992. – 161с.
43. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В. А. Ясінський – Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2008. – 208с.