ЗМІСТ

ВСТУП

Розв’язування задач посідає в математичній освіті значне місце. Тому навчанню розв’язувати задачі приділяється багато уваги.

У процесі навчання математики задачі відіграють велику й багатопланову роль. Розв'язування їх добре служить досягненню тих цілей, які ставляться перед навчанням математики в середній школі. Досить простий у застосуванні, метод координат є необхідною складовою вирішення завдань різного рівня. Використання даного методу, дозволяє учням значно спростити і скоротити процес вирішення завдань, що допомагає їм при подальшому вивченні, як шкільного курсу, так і при вивченні математики у вищих навчальних закладах.

Метод координат - це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів. Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами.

Актуальність дослідження даної теми зумовлена насамперед тим, що сьогодні, незважаючи на невелику кількість годин, що відводиться в школі для розгляду теми «Декартові координати на площині» значна частина завдань Державної підсумкової атестації з математики в 9 класі присвячена розв’язуванню задач методом координат. Тому необхідна методика вивчення методу координат, що дозволяє учням навчитися вирішувати різноманітні задачі координатним методом, проте не учитель не подає цей метод як основний для вирішення геометричних задач.

Питання навчання учнів розв’язувати геометричні задачі методом координат розглядали в своїх роботах Крайзман М.Л., Філіпповський Г.Б., Кушнір І.А., Гельфанд І.М, Глаголєва О.Г., Кирилов О.О. та інші.

Мета дослідження - усвідомлення сутності методу координат, його можливостей в геометрії; розробити методику вивчення та використання даного методу у шкільному курсі геометрії.

Об'єкт дослідження - процес навчання учнів розв'язувати геометричні задачі.

Предмет дослідження - вивчення методу координат у курсі геометрії основної школи.

Завдання дослідження:

1. Розглянути методичні особливості навчання учнів розв'язувати геометричні задачі.
2. Висвітлити науково-теоретичні основи розв'язування геометричних задач методом координат.
3. Проаналізувати виклад даної теми згідно діючих підручників для 9 класу, а також зміст програми з математики.
4. Описати метод координат і способи його застосування на прикладі конкретних математичних задач.
5. Розробити методику навчання учнів розв'язувати геометричні задачі методом координат у шкільному курсі геометрії.
6. Здійснити аналіз експериментальної перевірки ефективності використання розробленої методики.

Гіпотеза: вивчення методу координат школі буде більш ефективно, якщо:

- застосувати пакет програм GRAN1 та GRAN-2D до розв'язування геометричних задач методом координат;
- в системному курсі планіметрії учні знайомляться зі структурою цього методу;
- використовується продумана система завдань для формування окремих компонентів методу.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що даний матеріал може бути використаний вчителями математики при здійсненні навчально-виховного процесу.

Апробація. Результати роботи доповідалися на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2018 рік.

Об’єм роботи. Робота складається зі вступу, основної частини, яка складається з двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. У вступі розкривається актуальність теми роботи, ставиться мета та завдання. У першому розділі йдеться про методичні особливості навчання учнів розв’язування геометричних задач, виникнення та розвиток методу координат, розв’язування методом координат планіметричних задач, основні положення згідно діючої програми та шкільних підручників щодо вивчення методу координат. У другому розділі розкрита методика навчання учнів розв’язувати найпростіші задачі в координатах, методика навчання учнів використовувати рівняння кола і прямої до розв’язування геометричних задач, особливості розв’язування геометричних задач методом координат, застосування пакету програм GRAN1 та GRAN-2D до вивчення курсу геометрії, проведення та результати педагогічної діагностики.

РОЗДІЛ 1
НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Методичні особливості навчання учнів розв’язування геометричних задач

У системі загальної середньої освіти одне із основних місць займає математика, де закладаються розумові, моральні та емоційно-вольові якості особистості. Курс математики є основою для осмисленого засвоєння системи математичних знань, формування умінь і навичок і отримання математичної освіти в цілому.

Першим і найважливішим етапом розв'язування геометричної задачі являється побудова рисунка. Не можна навчитися розв'язувати досить змістовні геометричні задачі без міцних навичок по зображенню "добрих" рисунків. Потрібна звичка - не починати розв'язувати задачу, поки не зроблений "великий і красивий" рисунок, який задовольняє і математичним потребам, і естетичним критеріям. Звертаємо увагу на те, що мова йде про етап власне розв'язування задачі, а не про оформлення знайденого розв'язку на чистовику.

Розглядаючи кожну задачу разом з її методом розв'язування, слід виділяти так звані елементарні задачі, тобто задачі на одну дію, на застосування відомої теореми чи формули. Під "дією" розуміємо також і розв'язування одного лінійного чи квадратного рівняння. Виділення елементарних задач педагогічно виправдано і корисно, оскільки дуже часто розв'язування більш складних, більш змістовних геометричних задач може бути, як із "цеглинок", складене із задач найпростіших.

Отримали дві складові, які визначають уміння розв'язувати геометричні задачі: рисунок плюс метод. Додамо сюди третю складову: володіння певним об'ємом допоміжних геометричних фактів і теорем, наявність активно використовуваного запасу опорних задач. Справа в тому, що в теоретичну частину шкільного курсу геометрії включені в основному теореми необхідні для подальшого його вивчення. Більшість теорем мають лише теоретичне значення. В зв'язку з цим виникає необхідність у виділенні деякої кількості так званих опорних задач, додаткових до курсу теорем, які ілюструють той чи інший метод або прийом розв'язування задач.

Переважна більшість шкільних задач виконується за певними алгоритмами. Оволодіння учнями цими алгоритмами - важливе завдання навчання математики. Разом з тим потрібно пам'ятати, що розв'язування задач - творчий процес, і його не завжди можна алгоритмізувати. Як показують спостереження, найважливішу роль в даному питанні відіграють практика і навички. Але не правильно було б думати, що все залежить тільки від кількості розв'язаних задач. Велику роль відіграє система запропонованих учням задач і ті зауваження, якими супроводжує їх вчитель, і загальні поради щодо пошуків розв'язань, складання планів, оформлення розв'язань.

Наведемо приклад схеми розв'язування геометричних задач, якою можуть користуватися учні при вивченні геометрії.

Загальна схема розв'язування геометричних задач:

1. Уважно прочитати задачу і записати що в ній дано, і що вимагається.
2. Якщо йдеться про геометричні фігури, то накреслити їх, ввести позначення.
3. Скласти план розв'язування задачі.
4. Якщо такий план розв'язування задачі скласти не можна, то слід прочитати ще раз задачу, сформулювати її своїми словами, розчленувати на частини.
5. Замінити кожне поняття його означенням.
6. З'ясувати як пов'язані дані в задачі величини.
7. Записати висновки, які випливають з умови, розв'язати частину задачі.
8. Спробувати розв'язати задачу з "кінця".
9. Після розв'язування переглянути зроблене. Чи не має в міркуваннях зайвого? Чи не можна їх спростити? [13, с.5].

Отже, розв’язування задач – це одна з активних форм навчання, у процесі якої учні ознайомлюються з новими математичними закономірностями, намагаються дещо по-іншому подивитися на вже відомі їм теоретичні факти, вчаться самостійно здобувати знання, розвивають логічне мислення.

1.2. Виникнення та розвитку методу координат

Розвиток систем координат в історії людства пов'язаний як з математичними задачами, так і з практичними проблемами мистецтва навігації, що спиралася на картографіюта астрономію. Найвідомішу систему координат, прямокутну, запропонував Рене Декарт у 1637 році. Поняття про полярну систему координат у європейській математиці склалося приблизно в ці ж часи, але перші у'являння про неї існували ще в Стародавній Греції, у середньовічних арабських математиків, які розробляли методи обрахунку напрямку на Каабу.

Основоположниками методу координат вважаються П. Ферма і Р. Декарт. Метод Ферма (1629, опублікований у 1679) ґрунтувався на взаємно однозначній відповідності між точками площини і парами чисел (x; y). Його система координат складалася з однієї прямої (сучасна вісь абсцис) і початкової точки N (тепер початок координат). Положення, наприклад, точки P на деякій кривій визначалося відстанями A (сучасна абсциса x точки P) і E (сучасна ордината y точки P) (рис. 1.1.).

Ферма розглядав лише додатні значення x і y, а тому його система координат складалася фактично з одного першого квадранта (будь-яка з чотирьох частин площини, на які її ділять дві взаємно перпендикулярні прямі).

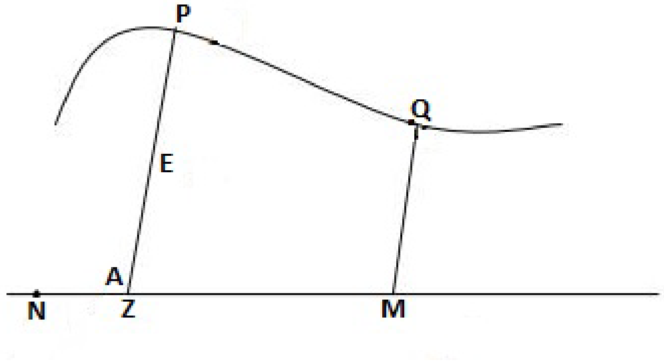


Рис. 1.1.

Прямі PZ і QM – паралельні, але не обов’язково перпендикулярні прямій NM. За допомогою такого підходу встановлювалася відповідність між кривими та їх рівняннями $f(x,y) = 0$. Ферма встановив, що рівняння першого степеня описують прямі, а рівняння другого степеня – конічні перерізи.

У Декарта система координат також складалася з однієї фіксованої вісі (абсцис), але, на відміну від Ферма, він розглядав точки з додатними і від'ємними ординатами. За допомогою методу координат Декарта подавалася геометрична інтерпретація від'ємних чисел. У такий спосіб значення від'ємних і додатних чисел зрівнювалися.

Листування Ферма з відомими математиками засвідчує, що свій метод координат Ферма розробив раніше Декарта, але останній першим опублікував свої результати.

В червні 1637 року в місті Лейден (Нідерланди) вийшов в світ твір Декарта «Міркування про метод». Одна з частин цієї роботи називалась «Геометрія». Вона здійснила великий переворот в математиці. В «Геометрії» Рене Декарт запропонував універсальний метод розв'язання математичних задач – метод координат. Згідно цього методу алгебраїчні задачі розв'язуються засобами геометрії. В той же час при розв'язуванні геометричних задач використовують теорію алгебраїчних рівнянь [22, с.22].

«Геометрія» Декарта виявилася важкою для читання і розуміння. Її неодноразово коментували і доповнювали (Ф.Дебон, Ф.Скоотен, Дж.Валліс, Й.Бернуллі та інші). Дж.Валліс, зокрема, розглядав не тільки від'ємні ординати, але й від'ємні абсциси.

У 1692 році Й.Бернуллі ввів термін «декартова геометрія». На цей час робота Ферма про його систему координат не була відома широкому загалу. Тому деякі поняття, що стосуються методу координат називають декартовими: «декартові координати», «декартова система координат», «декартове рівняння», «декартова площина».

Термін «аналітична геометрія» з'явився в 1671 р. (як назва книги І.Ньютона). Терміни «абсциса», «ордината» мають грецьке походження і використовувалися в теорії про конічні перерізи. В сучасному розумінні їх почав використовувати Г. Лейбніц. У кінці 17 століття він також увів термін «координати», щоб підкреслити рівноправність «абсциси» і «ординати». Але загальновживаними ці терміни стали лише з середини 18 століття. Термін «вісь абсцис» увів І. Барроу (1670), а термін «вісь ординат» – значно пізніше Г. Крамер (1750). Початок координат спочатку називали початком абсцис, а в 1679 р. Ф. де Лагір використав окремий термін «початок». Р. Декарт увів традицію невідомі величини позначати останніми буквами алфавіту, а відомі – першими.

У роботі Г. Крамера «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» (1750) систематизовано, узагальнено і доповнено багато з результатів попередників. Тут, зокрема, Г. Крамер першим використовував систему координат, яка мала дві рівноправні вісі [12, с.103].

Отже, у 1637 році побачила світ головна математична праця Рене Декарта «Міркування про метод». У цій книзі викладалася аналітична геометрія, створення якої дало змогу перевести дослідження геометричних властивостей кривих і тіл на алгебраїчну мову, тобто аналізувати рівняння кривої в деякій системі координат. Координатний метод став справжнім переворотом у геометрії та математиці в цілому. Завдяки координатам учені отримали універсальний спосіб поставити у відповідність геометричним об'єктам алгебраїчні вирази і співвідношення. Відкриття Декарта дало науці можливість створити своєрідний словник для перекладу геометричних задач мовою алгебри з подальшою можливістю використовувати рівняння і тотожні перетворення виразів для розв'язування суто геометричних проблем [11, с.82].

1.3. Розв'язування методом координат планіметричних задач

Активізація Творчої особистості учнів в процесі оволодіння математикою найефективніше здійснюється через розв'язування задач. Тому задачі з планіметрії мают розвивати в учнів конструктивний підхід до осмислення всього комплексу геометричних знань, а не лише формувати конструктівні навички розв'язування задач.

Суть методу координат як методу розв'язання задач полягає в тому, що задаючи фігури рівняннями і виражаючи в координатах різні геометричні співвідношення, ми можемо розв'язати геометричну задачу засобами алгебри. Та навпаки, користуючись координатами, можна тлумачити алгебраїчні і аналітичні співвідношення та факти геометрично, таким чином застосовувати геометрію до вирішення алгебраїчних задач.

Метод координат - це універсальний метод. Він забезпечує тісний зв'язок між алгеброю і геометрією, об'єднуючись, вони дають «багаті плоди», які не могли б дати, залишаючись розділеними [1, с.32].

Що стосується шкільного курсу геометрії можна сказати, що в деяких випадках метод координат дає можливість будувати докази і вирішувати багато задач більш раціонально, красивіше, ніж суто геометричними способами. Метод координат пов'язаний, правда, з однією геометричною складністю. Одна і та ж задача отримує різне аналітичне подання в залежності від того чи іншого вибору системи координат. І лише достатній досвід дозволяє вибирати систему координат найбільш доцільно.

Зв'язуючою ланкою між фігурами і числами (система координат, яка дозволяє встановити взаємнооднозначну відповідність між точками прямої (площини) і дійсними числами (парами дійсних чисел), тобто дати імена безіменним точкам. Звичайно, вибір системи координат нічим не регламентується, але, як правило, вибирають прямокутну декартову систему координат, розміщуючи її найзручніше. Після цього геометричну фігуру вважають заданою, якщо задано рівняння або нерівність, або їх система яким задовольняють координати будь-якої точки, фігури і не задовольняють координати точок, які не належать фігурі.

Суть координатного методу розв'язування геометричної задачі полягає у виборі системи координат, складанні за заданими геометричними властивостями рівнянь, нерівностей або їх систем, в проведенні алгебраїчного аналізу і в з'ясуванні геометричного змісту кінцевого результату.

Порівнюючи цей метод з алгебраїчним, можна помітити, що він істотно спрощує міркування і дозволяє розв'язувати задачі за певним алгоритмом. Проте обсяг викладу може бути значним, а інколи, що саме головне з методичної точки зору, втрачається геометрична суть задачі [13, с.17].

Методом координат розв’язують такі дві задачі:

1) знаючи деякі геометричні властивості фігури, знаходять її рівняння і досліджують інші властивості;

2) знаючи рівняння фігури, знаходять її властивості.

На практиці нерідко виникає потреба розв’язати обидві задачі разом – спочатку за деякими властивостями фігури скласти її рівняння, а потім, дослідивши отримане рівняння, встановити нові властивості даної фігури. Розглянемо приклад.

Задача 1.1. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, вписаного в коло радіуса 5 см, якщо центр цього кола віддалений від основи трикутника на 3 см.

Розв’язання

Нехай ABC – даний рівнобедрений трикутник з основою AC (рис. 1.2.), точка O – центр описаного кола. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок лежав у центрі кола, вісь OY містила висоту, проведену до основи AC трикутника, а вісь OX проходила паралельно цій основі (рис.1.3.).

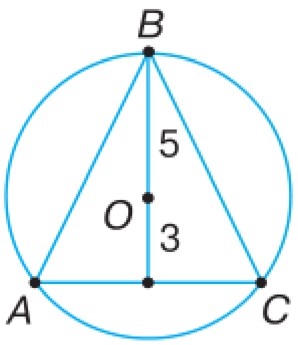


Рис. 1.2.

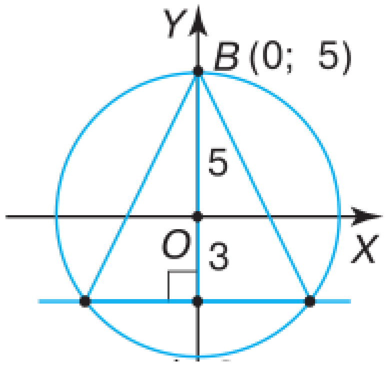


Рис. 1.3.

Тоді дане коло задається рівнянням $x^2 + y^2 = 25$, а вершини трикутника мають координати: A $(-x_0; -3)$, B $(0;\ 5)$, C $(x_0; -3)$, де $x_0 > 0$. Точка С лежить на даному колі, тому її координати задовольняють його рівняння: ${x_0}^2 + (-3)^2 = 25$.

Звідси дістанемо: $x_0 = 4$, A (– 4; – 3), C (4; – 3).

За координатами вершин трикутника знайдемо довжини його сторін: $\text{AB} = \text{BC} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$ (см), $\text{AC} = 8$ см.

Щоб застосувати метод координат:

1) накресліть задану фігуру та введіть прямокутну декартову систему координат (для цього вкажіть розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно даної фігури);

2) визначте координати точок даної фігури;

3) скористайтеся відомими формулами [4, с.105].

Отже, розв’язуючи задачу методом координат, розглядувані фігури розміщують на координатній площині. Приписавши окремим точкам фігур координати, а лініям рівняння, далі обчислюють координати інших точок, виводять рівняння інших ліній. Зіставивши ті й ті координати точок і рівняння, приходять до відповіді [5, с.112].

1.4. Основні положення згідно діючої програми та шкільних підручників вивчення методу координат

У школі вивчення методу координат і навчання застосувати його для розв’язування різних математичних задач відбувається в кілька етапів. На першому етапі вводиться основний понятійний апарат, який добре відпрацьовується в 5-6 класах і систематизується в курсі геометрії [2, с.305].

Підготовча робота до введення координатної площини починається вже в 5 класі, де розглядають поняття «числовий промінь» і показують, як зобразити на ньому натуральні числа. У 6 класі для зображення додатних і від'ємних чисел вводиться координатна пряма. Учні мають усвідомити, що положення точки А на прямій цілком визначається одним числом, яке називають координатою точки і позначають $A(3)$, $B(7{,}8)$, $M(x)$.

У 6 класі поняття про координати точки на прямій і на площині вводять описово на прикладах. Тут ще не ставлять за мету застосовувати означення абсциси й ординати. Важливо, щоб учні усвідомили, що координата точки на прямій - це число, модуль якого дорівнює відстані точки прямої від початку відліку - точки О. Модулі першої та другої координат точки М на координатній площині задають відстані цієї точки від осі х і осі у.

Уся система вправ на цьому етапі має бути спрямована на формування вміння розв'язувати пряму й обернену задачі на визначення положення точки на координатній прямій і площині [20, с.306].

На другому етапі учні знайомляться з рівняннями прямої та кола. Дані поняття вивчаються як в алгебрі, так і в геометрії з різною змістовною метою, тому учні часто не бачать зв'язку між ними, а, значить, і погано засвоюють суть методу.

У курсі алгебри 7 - 9 класів здобуті знання і вміння застосовуються до побудови графіків функцій, графічного розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Передбачено вивчення декартових координат, застосування методу координат до дослідження властивостей геометричних фігур і означення тригонометричних функцій кута від 0° до 180°, вивчення функцій. [2, с.308].

Вивчення у 9 класі теми «Координати на площині» слід починати з повторення і систематизації тих знань і умінь, які учні вже мають із попередніх класів. Це можна зробити за такою схемою запитань і завдань.

1. Що таке вісь координат?

2. Чим визначається положення точки на осі координат?

3. Як називають число, за допомогою якого визначається положення точки на осі координат?

4. Як записати точку, задану на прямій координатою? Як знайти її положення на осі координат?

5. Позначити на осі координат точки $\mathrm{M}(3)$, $N(-2), \mathrm{P}(2;5)$.

6. Записати точки, позначені на осі координат, за допомогою їх координати.

7. Що таке координатна площина?

8. Чим визначається положення точки на координатній площині?

9. Як називають координати точки на координатній площині?

10. Як символічно записати точку, задану на площині координатами?

11. Позначити на координатній площині точки $\mathrm{M}(2;5)$, $\mathrm{K}(-1;2)$, $\mathrm{P}(-3;-2)$.

12. Записати точки за їх координатами, які позначені на координатній площині.

13. Навести приклади застосування координат.

На відміну від 6 класу в курсі геометрії 9 класу тему «Декартові координати на площині» вивчають на вищому теоретичному рівні та в ширшому застосуванні. Зокрема, вводять означення абсциси х і ординати у точки А [20, с.307].

Навчання застосування самого методу координат для вирішення завдань відбувається в курсі геометрії 9 класу. Для цього спочатку розкриваються основні етапи застосування методу, а потім на прикладі низки завдань показується безпосереднє застосування методу координат.

Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії, 9 клас

Декартові координати на площині (9 год)

- Прямокутна система координат на площині - 1 урок
- Координати середини відрізка - 1 урок
- Відстань між двома точками із заданими координатами - 2 уроки
- Рівняння кола - 2 урок
- Рівняння прямої - 2 уроки
- Контрольна робота[21].

Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учня з теми: Метод координат на площині

Учень/учениця:

- ✓ наводить приклади співвідношень, указаних у змісті;
- ✓ пояснює, як можна задати на координатній площині пряму, коло;
- ✓ формулює теореми про відстань між двома точками, координати середини відрізка;
- ✓ записує та пояснює формули координат середини відрізка;
- ✓ записує та пояснює відстані між двома точками;
- ✓ записує та пояснює рівняння кола, прямої;
- ✓ зображує та знаходить на малюнках геометричну фігуру (пряму, коло) за її рівнянням у заданій системі координат;
- ✓ обчислює координати середини відрізка;
- ✓ обчислює відстань між двома точками, заданих своїми координатами;
- ✓ доводить теорему про відстань між двома точками;
- ✓ доводить теорему про координати середини відрізка;
- ✓ застосовує вивчені формули й рівняння фігур до розв’язування задач.[19].

Отже, основною метою вивчення декартових координат в школі є формування поняття про координати точки на прямій і площині, вміння знаходити точку за її координатами і розв'язувати обернену задачу, знаходити відстань між двома точками і координати середини відрізка, застосовувати метод координат до розв'язування найпростіших задач і в подальшому вивченні курсу математики та суміжних предметів [20, с.306].

Особливості викладання даної теми згідно діючих шкільних підручників

Шкільні підручники рекомендовані Міністерством освіти і науки України (наказ МОН України № 804 від 07.06.17 р.)

1) Істер О. С. Геометрія: Підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / О.С.Істер.— К. «Генеза», 2017. — 243 с.: іл.

Розділ «Метод координат на площині» є першим із п’яти поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 5 пунктів.

Кожний параграф розділу складається з четвертої частини, прикладів застосування зазначеного теоретичного матеріалу для розв'язування задач, контрольних запитань для самоперевірки засвоєння теоретичного матеріалу та завдань для виконання в класі і самостійного розв'язування, підготовка до нової теми, повторення вивченого матеріалу. Для забезпечення безперервності вивчення матеріалу розділу завершується рубрикою «Завдання для перевірки знань», яка містить певну кількість завдань відповідного змісту.

Слід відзначити велику кількість завдань, структурованих з методичної точки зору. Виконано розподіл вправ на ті, що рекомендуються для виконання в класі, і вправи для домашнього завдання. Окремо позначено завдання, які можуть бути розв'язані усно. Кожному завданню приписано його рівень складності відповідно до класифікації, яка застосовується для позначення рівнів навчальних досягнень учнів: початковий і середній рівні навчальних досягнень, достатній рівень, високий рівень.

Параграф містить початкові відомості з аналітичної геометрії. Тут передбачено знаходження відстані між точками на площині, вивчення рівнянь прямої і кола на площині та використання відповідного математичного апарату для розв'язування задач.

Учні мають засвоїти поняття про рівняння фігури, усвідомити зв'язок між геометричним образом на координатній площині і його аналітичним заданням, тобто засвоїти «мову рівнянь» у геометрії. Вивчення цієї теми має на меті розуміння і засвоєння методу координат. Учні мають засвоїти відмінність між фігурою, яка є графіком функціональної залежності $y = f(x)$, і фігурою, яка не може бути графіком функціональної залежності і для аналітичного задання якої використовується рівняння виду $f(x, y) = 0$, зокрема, на прикладі вертикальної прямої і кола.

2) Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.— Х.: Гімназія, 2017. — 308 с.: іл.

Параграф «Декартові координати на площині» є четвертим із семи поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 5 пунктів. Метод координат розглядається в окремому пункті.

Додатковим матеріалом порівняно з загальноосвітніми класами є рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки; умови паралельності і перпендикулярності двох прямих; формула відстані від точки до прямої; формули координат точки, яка ділить відрізок у даному відношенні; а також подана формула Лейбніца. Параграф завершується рубрикою «Коли зроблено уроки», який містить додатковий матеріал та певну кількість завдань відповідного змісту.

3) Бурда М.І. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. - К. : УОВЦ, 2017. – 224 с.

Розділ «Метод координат» є першим із п'яти поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 6 пунктів.

Кожний пункт параграфу містить теоретичну частину, рубрику «Дізнайся більше», рубрику «Згадайте головне», завдання для виконання різної складності та рубрику «Застосуйте на практиці». Задачі підручника мають чотири рівні складності — початковий, середній, достатній і високий.

Науковість змісту підручника забезпечена, насамперед, логічно послідовним розміщенням навчального матеріалу, коректним формулюванням означень понять і теорем, достатнім рівнем строгості доведень. Доведення теорем підручника не лише строгі, лаконічні, але й посильні, зрозумілі учням. До кожної теореми дається скорочений запис, а доведення поділені на смислові блоки, що покращує усвідомлення їх учнями.

Доступність учням навчальних текстів, можливість самостійно їх опрацювати — одна з особливостей підручника. Навчальний матеріал спирається на наочність і геометричну інтуїцію учнів, на їх життєвий досвід, що робить його доступним. Самостійно оволодіти навчальним матеріалом допоможе і підкріплення його малюнками, які виконують не лише ілюстративну, а й евристичну роль — на малюнках кольором виділяються дані і шукані величини, допоміжні будови тощо.

Матеріал параграфу ґрунтується на понятті геометричного місця точок. Це поняття лежить і в основі принципу задання координат точок на площині. Адже координати a і b точки A є координатами точки перетину геометричних місць $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ і $\mathrm{y} = \mathrm{b}$.

Основна увага під час вивчення матеріалу розділу звертається на вироблення вмінь учнів розв'язувати задачі двох видів: 1) знаходити рівняння геометричної фігури за даними її властивостями; 2) знаходити властивості геометричної фігури за даним її рівнянням. Алгебраїчним апаратом, який застосовується під час складання рівнянь геометричних фігур і вивчення властивостей фігур за їх рівняннями, є формули для обчислення координат середини відрізка і відстані між точками. У процесі виведення рівнянь кола і прямої, як і при знаходженні геометричних місць точок, обґрунтовується справедливість двох взаємнообернених тверджень: координати будь-якої точки фігури задовольняють її рівняння і будь-які два числа, що задовольняють рівняння фігури, є координатами деякої точки фігури.

Наприкінці вивчення розділу учні узагальнюють уміння виражати геометричні співвідношення в розміщенні точок через алгебраїчні співвідношення між їх координатами і знайомляться з новим методом розв'язування геометричних задач - методом координат.

4) Єршова А.П. Геометрія. 9 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / А.П.Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф.Крижановський, С.В.Єршов. - Х.: Ранок, 2017. – 256 с.: іл.

Розділ «Координати на площині» є другим із п’яти поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 3 пункти. Метод координат розглядається в окремому пункті.

Кожний пункт параграфу складається з теоретичної частини, прикладів застосування зазначеного теоретичного матеріалу для розв'язування задач, усних вправ, графічних вправ, письмових вправ, вправ для повторення, задач для підготовки до контрольної роботи та підсумків у вигляді таблиць. Письмові вправи поділяються на три рівні складності.

У порівнянні з традиційними підходами до розгляду відповідного навчального матеріалу запропоновано декілька важливих інновацій. Значно збільшено кількість практичних вправ та задач, урізноманітнено задачі на готових кресленнях. Найбільш складні з точки зору обґрунтування теореми супроводжуються в основному тексті зрозумілими для пересічного учня загальними схемами міркувань, а відповідні строгі доведення подаються в Додатках.

Ілюстративний матеріал підручника забезпечує реалізацію науково-методичної концепції через унаочнення базових геометричних конфігурацій. До всіх рисунків, що супроводжують теоретичний матеріал, подаються підписи зі стислим переказом змісту геометричної конфігурації.

Наприкінці кожного розділу міститься підсумковий огляд його змісту у вигляді таблиць, які наочно ілюструють змістовно-логічні та структурно-функціональні зв'язки між елементами навчального матеріалу. Крім того, наприкінці розділу пропонуються контрольні запитання і типові задачі для підготовки до контрольних робіт[8].

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ КООРДИНАТ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

2.1. Методика навчання учнів розв'язувати найпростіші задачі в координатах

Система координат — це площина або простір, в якому визначений початок координат та осі, що є необхідними передумовами для обчислення координат точки. Кількість чисел, необхідних для однозначного визначення будь-якої точки простору, визначає його вимірність. Обов'язковим елементом системи координат є початок координат — точка, від якої ведеться відлік відстаней. Іншим обов'язковим елементом є одиниця довжини, яка дозволяє відраховувати відстані.

Існують різні системи координат:

1. Декартова система координат. Найпоширенішою системою координат у математиці є декартова система координат (рис. 2.1.), названа так на честь Рене Декарта. Декартова система координат задається початком координат і двома векторами, які визначають напрям координатних осей. Кожна точка простору задається числами, які дорівнюють віддалі від даної точки до координатних площин. Координати декартової системи на площині заведено позначати $(x; y)$.

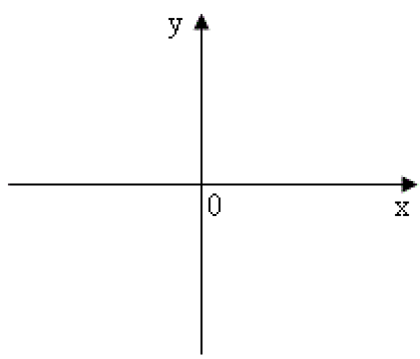


Рис. 2.1.

2. <u>Криволінійна або косокутна система координат.</u> Виходячи з декартової системи координат, можна визначити криволінійну систему координат, в якої координатні осі не перпендикулярні.

На рис. 2.2. зображена декартова косокутна система координат.

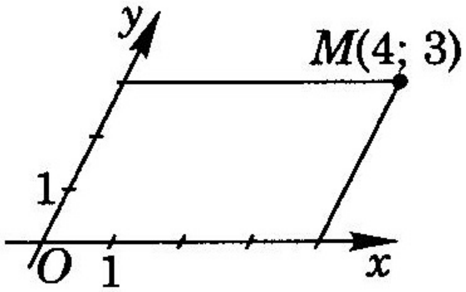


Рис. 2.2.

Як визначаються координати точки в такій системі, зрозуміло з рисунка. У деяких випадках буває зручно змінювати не тільки кут між осями, а й брати по осях різні одиниці масштабу.

Точки і лінії в декартовій системі координат зручно будувати на папері в клітинку, де є координатна «сітка».

На рис. 2.3. і рис. 2.4. зображені для порівняння координатні сітки для звичайної прямокутної системи координат і для косокутної. У другому випадку замість квадратів маємо паралелограми.

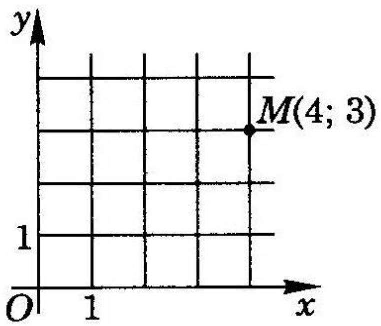


Рис. 2.3.

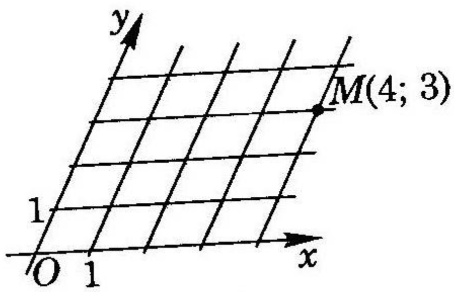


Рис. 2.4.

Цікаво, що багато формул, виведених для прямокутної декартової системи координат, залишаються істинними і для косокутної.

3. <u>Полярна система координат.</u> Є координати, які більш істотно відрізняються від декартових. Прикладом такої системи координат на площині є полярна система координат, в якій положення точки задається двома числами: відстанню ρ між точкою та початком координат, і кутом φ між променем, який сполучає початок координат із точкою та обраною віссю (рис. 2.5.)

Декартові та полярні координати точки зв'язані між собою формулами: $\begin{cases} x = \rho \sin \varphi\,; \\ y = \rho \cos \varphi. \end{cases}$

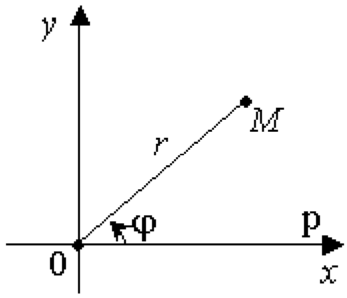


Рис. 2.5.

Полярні координати точки визначаються у такий спосіб.

На площині береться числова вісь *Ox*. Початок координат цієї осі (точка О*)* називається полюсом, а сама вісь *Ox* — полярною віссю.

Для визначення положення точки *M* у полярній системі координат вказують відстань від полюса до цієї точки і напрямок, у якому вона знаходиться (рис. 2.6.).

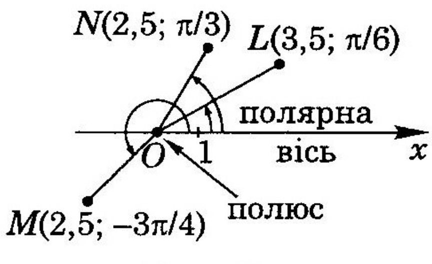


Рис. 2.6.

Відстань від точки до полюса називається полярним радіусом точки і позначається грецькою літерою ρ (читається «ро»). Напрямок задається кутом повороту (проти годинникової стрілки) від променя *Ox* до променя *OM*. Цей кут називається полярним кутом точки і позначається грецькою літерою φ («фі»). Полярні кути прийнято виражати у радіанній мірі.

На рис. 4 полярний радіус ρ точки *M* дорівнює 2,5, а полярнии кут φ дорівнює — $\frac{-3\pi}{4}$.

Такий спосіб указування місця є дуже простим і часто застосовується. Наприклад, аби вказати дорогу людині, яка заблукала в лісі, їй кажуть: «Від горілої сосни (полюс) зверніть на схід (напрям), пройдете кілометрів зо два (відстань), і буде сторожка (точка)». Хто займався у туристичних секціях, легко зрозуміє, що ходьба по азимуту ґрунтується на тому самому принципі, що й полярні координати.

Таким чином, у полярній системі координат положення точки на площині визначають два числа (точніше, упорядкована пара чисел) $(\rho;\varphi)$, які й називаються полярними координатами точки [6, с.89].

Прямокутна система координат на площині, координати точки

Найпоширенішою системою координат у математиці є декартова система координат, названа так на честь Рене Декарта. Розглянемо її детальніше.

Координатною прямою називається пряма, на якій вибрано напрям, початок координат, одиницю вимірювань (масштаб).

Координатою точки на координатній прямій називається число, яке дорівнює відстані від цієї точки до початку координат, якщо точка знаходиться на додатній півосі, і протилежне до нього у іншому випадку.

Виберемо на площині дві взаємно перпендикулярні прямі x і y, вони називаються осями координат (рис. 2.7.). Вісь x (як правило, вона горизонтальна) називають вісь абсцис, а вісь y - вісь ординат. Точку O перетину осей координат називають початком координат. Вона розбиває кожну з осей координат на дві півосі. На кожній з осей вибираємо одиницю вимірювання відрізків. Таким чином на площині задано прямокутну систему координат [14, с.79].

Прямокутна система координат на площині вважається заданою, якщо на площині вказано:

а) дві взаємно перпендикулярні прямі, на кожній із яких вибрано додатній напрям - осі ординат (вісь абсцис і вісь ординат). Точка О перетину цих координат називається початком координат;

б) одиничний відрізок.

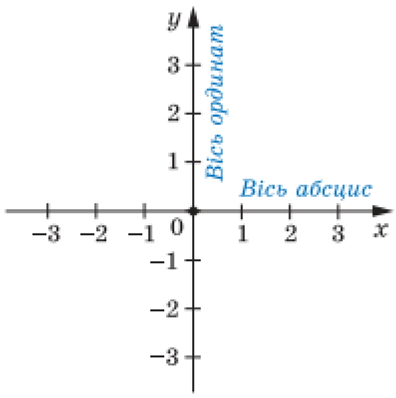


Рис. 2.7.

Кожній точці А площини поставимо у відповідність пару чисел - координати точки. Для цього проведемо через точку А пряму, паралельну осі у, вона перетинає вісь х в деякій точці A_x (рис. 2.8.). Абсцисою точки А називають число х, модуль якого дорівнює відстані відточки О до точки A_x. Причому, якщо A_x належить додатній півосі, то $x > 0$, а якщо A_x належить від'ємній півосі, то $x < 0$. якщо ж точка А належить осі у, то її абсциса дорівнює нулю.

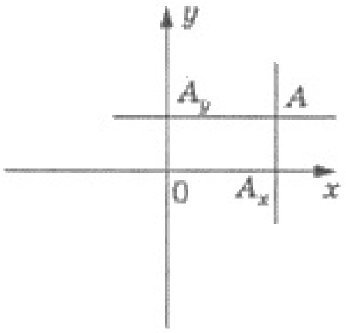


Рис. 2.8.

Проведемо через точку А пряму, паралельну осі x, вона перетне вісь y в деякій точці A_y (рис. 2.8.). Ординатою точки А називають число y, модуль якого дорівнює відстані від точки О до точки A_y. Причому, якщо A_y належить додатній півосі, то $y > 0$, а якщо A_y належить від'ємній півосі, то $y < 0$. Якщо ж точка А належить осі x, то її ордината дорівнює нулю.

Координати точки записуються у дужках поряд з її буквеним позначенням $A(x; y)$. На першому місці пишуть абсцису точки, а на другому - її ординату. Абсцису точки А можна позначити так: x_A, а її ординату y_A. Ці позначення зручно використовувати при розв'язанні задач, коли кожну з координат точки знаходять окремо. Якщо, наприклад, $A(-4; 1)$, то $x_A = -4;\ y = 1$.

Отже, **прямокутними координатами точки площини** називаються координати ортогональних проекцій цієї точки на координатні осі, записані у певному порядку.

Проекція на першу вісь (вісь абсцис) позначається, звичайно, через x, а на другу (вісь ординат) – через y. Вибір системи координат на площині будемо позначати (О; x; y)

Введення координат на площині дозволяє орієнтуватися на ній за допомогою чисел.

Осі координат розбивають площину на чотири частини, які називають координатними чвертями (рис. 2.9).

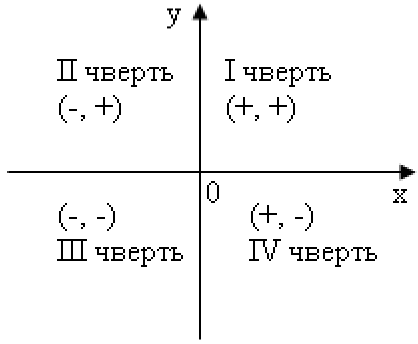


Рис. 2.9.

Інколи координатні чверті називають ще координатними кутами. В межах однієї координатної чверті знаки обох координат зберігаються. Ці знаки показано на рисунку 2.9.

Отже, **прямокутна система координат на площині** складається з двох перпендикулярних координатних прямих (осей координат) із спільним початком координат і однаковими одиницями масштабу.

Відстань між точками

Задача 2.1. Дано три точки: A(4; 0), B(1; –3), C(–1; 3). Чи існує трикутник з вершинами у даних точках?

Розв'язання

Задамо прямокутну декартову систему координат і побудуємо у ній дані точки за їхніми координатами (рис. 2.10.). Очевидно, що точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тому трикутник ABC існує.

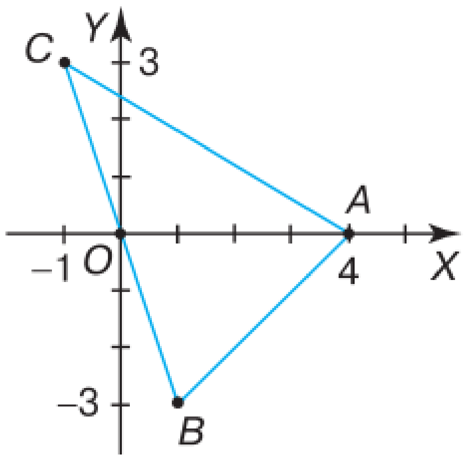


Рис. 2.10.

Чи можна строго обґрунтувати висновок, який отримали у задачі? Так. Наприклад, скориставшись нерівністю трикутника. Але для цього треба знати, як знаходити відстань між двома точками за їх координатами.

Теорема 2.1 *(про відстань між двома точками із заданими координатами)*

Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.

Дано: XOY – прямокутна декартова система координат (рис. 2.11.), A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$.

Довести: $A\text{B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

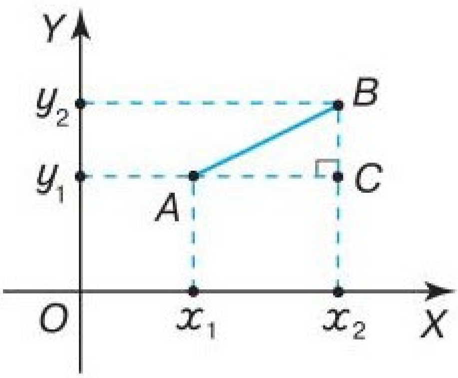


Рис.2.11.

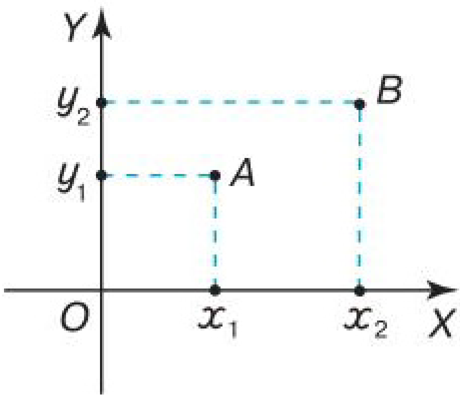


Рис.2.12.

Доведення. Нехай точки A і B містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 < y_2$ (рис. 2.11.). З'єднаємо точки A і B відрізком та проведемо через них прямі, паралельні осям координат (рис. 2.12.).

Нехай C – точка перетину цих прямих. Утворився прямокутний трикутник ABC, у якого ∠C прямий, катет $\text{AC} = x_2 - x_1$, катет $\text{BC} = y_2 - y_1$, довжина гіпотенузи AB є шуканою відстанню.

За теоремою Піфагора,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Звідси $A\text{B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ [4, с.90].

Приклад 2.1.

Вершини чотирикутника ABCD мають координати A(-2; 1), B(0; 4), C(4; 1), D(2; -2). Доведіть, що ABCD — паралелограм.

Розв'язання (1-й спосіб)

Як відомо, за ознакою паралелограма чотирикутник, протилежні сторони якого попарно рівні, є паралелограмом. Знайдемо довжини сторін чотирикутника ABCD:

$$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-\ 4)^2} = \sqrt{13},$$

$$BC = \sqrt{(0-4)^2 + (4-\ 1)^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{13},$$

$$AD = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5,$$

Отже, $AB = CD, BC = AD,$ тобто чотирикутник $ABCD$ — паралелограм за ознакою.

Інший спосіб розв'язування цієї задачі розглянемо далі [11, с.86].

Приклад 2.2.

Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A\,(-1;7)$, $B\ (1;3)$ і $C\ (5;5)$ є рівнобедреним прямокутним.

Розв'язання

Знайдемо довжини сторін даного трикутника:

$$AB = \sqrt{(1-(-1))^2 + (3-\ 7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20},$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-\ 3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20},$$

$$AD = \sqrt{(5-(-1))^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Отже, $AB = BC$, тобто ΔABC – рівнобедрений.

Оскільки $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, то ΔABC – прямокутний [14, с.81].

Отже, відстань між двома точками $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, обчислюється за формулою:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координати середини відрізка

Знаючи координати кінців відрізка, можна знаходити не тільки його довжину, а й координати його середини.

Теорема 2.2 *(про координати середини відрізка).*

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.

Дано: XOY – прямокутна декартова система координат (рис. 2.13.), $A\ (x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$, точка M $(x; y)$ – середина відрізка AB.

Довести: $x = \frac{x_1+x_2}{2}, y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

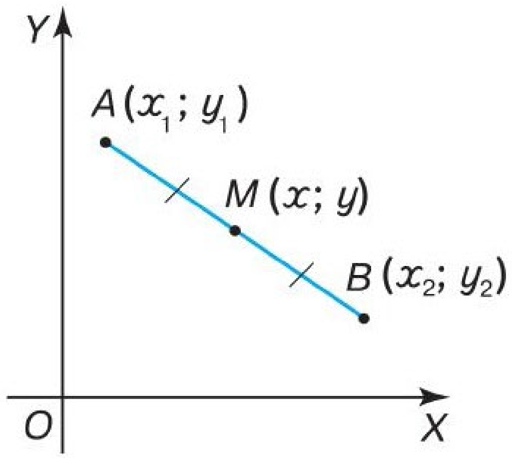


Рис. 2.13.

Доведення. Нехай кінці відрізка містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (рис. 2.13.). Через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OX (рис. 2.14.). Точки їх перетину з віссю OY позначимо відповідно A_1, B_1 і M_1. Чотирикутник AA_1B_1B – трапеція з основами $AA_1 = x_1$, $BB_1 = x_2$. За побудовою, $MM_1 = x$. Оскільки AM = MB (за умовою) і $MM_1 \| AA_1 \| BB_1$ (за побудовою), то MM_1 – середня лінія трапеції AA_1B_1B.

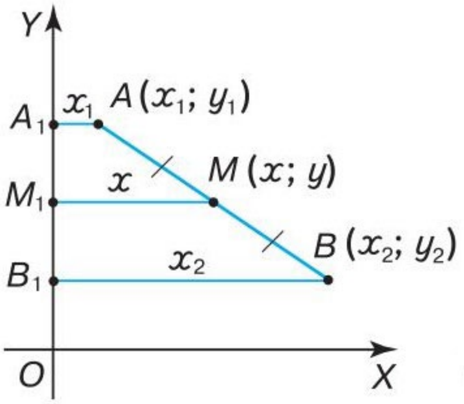


Рис. 2.14.

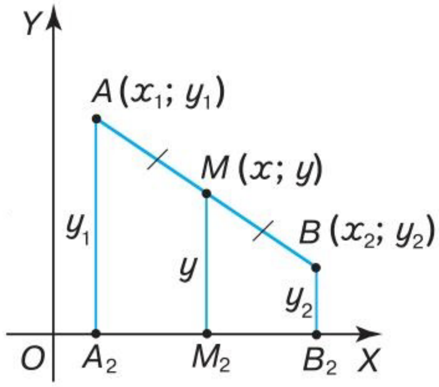


Рис. 2.15.

Тому $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Аналогічно доводимо, що $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Для цього через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OY (рис. 2.15.). Точки їх перетину з віссю OX позначимо відповідно A_2, B_2 і M_2. Чотирикутник AA_2B_2B – трапеція з основами $AA_2 = y_1$, $BB_2 = y_2$. За побудовою, $MM_2 = y$. Оскільки AM = MB (за умовою) і $MM_2 \| AA_2 \| BB_2$ (за побудовою), то MM_2 – середня лінія трапеції AA_2B_2B.

Тому $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Чи залежать формули координат середини відрізка від розміщення його кінців у системі координат? Не залежать.

Задача 2.2. Знайдіть довжину медіани AM трикутника з вершинами у точках: A (–1; –1), B (1; 4), C (3; 2).

Розв'язання

Точка M є серединою сторони BC (рис. 2.16.), тому вона має координати: $x = \frac{1+3}{2} = 2,\ y = \frac{4+2}{2} = 3$.

Довжина медіани AM дорівнює відстані між точками A і M.

Отже, $AM = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

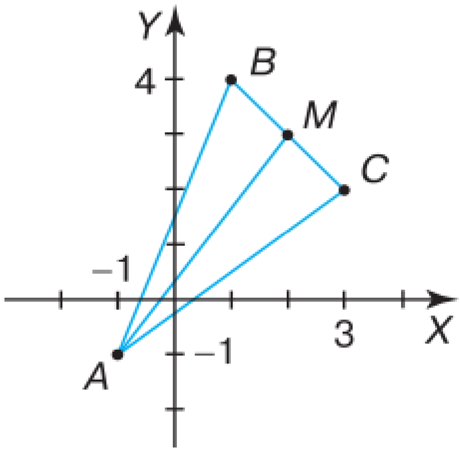


Рис. 2.16.

Щоб знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин, визначте координати основи медіани та знайдіть відстань від цієї точки до протилежної вершини трикутника [4, с.90].

Приклад 2.3.

Точка $M(2;-5)$ – середина відрізка AB, $A(-1;3)$. Знайдіть координати точки B.

Розв'язання

Позначимо $(x_B;\ y_B)$ - координати точки B, $(x_A;\ y_A)$ - координати точки A, $(x_M;\ y_M)$ - координати точки M.

Оскільки $\frac{x_A+x_B}{2} = x_M$, то маємо $\frac{-1+x_B}{2} = 2; -1 + x_B = 4; x_B = 5.$

Аналогічно $\frac{y_A+y_B}{2} = y_M$, то маємо $\frac{3+y}{2} = -5;\ y_B = -13.$

Відповідь: $B(5;-13)$ [14, с.81].

Приклад 2.4.

Вершини чотирикутника ABCD мають координати A(-2;1), B(0;4), C(4;1), D(2;-2). Доведіть, що ABCD — паралелограм.

Розв'язання (2-й спосіб)

Як відомо, за ознакою паралелограма чотирикутник, діагоналі якого точкою перетину діляться навпіл, є паралелограмом.

Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD даного чотирикутника ABCD.

Середина відрізка AC має координати $x = \frac{-2+4}{2} = 1,\ y = \frac{1+1}{2} = 1.$

Середина відрізка BD має координати $x = \frac{0+2}{2} = 1,\ y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$

Таким чином, відрізки AC і BD мають спільну середину (1;1), тобто чотирикутник ABCD — паралелограм за ознакою [11, с.85].

Отже, поділ відрізка M_1M_2 в даному відношені λ точкою $M(x, y)$, де

$$\mathrm{M_1M} = \lambda \mathrm{MM_2}$$

координати якої знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2 по полам, то $\lambda = 1.$

Приклад 2.5.

Знайти безліч точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина постійна. Позначимо дані точки через A і B. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox збігалася з прямою AB, а початком координат служила точка A. (Вміння оптимально вибирати систему координат). Припустимо AB = a, тоді у вибраній системі координат A (0,0), B (a, 0). (Вміння знаходити координати заданих точок) Точка M (x, y) належить шуканого безлічі тоді тільки тоді, коли AM^2- $-MB^2 = b^2$ де b - постійна величина (Вміння переводити геометричний мову на аналітичний, складати рівняння фігур). Використовуючи формулу відстаней між двома точками, отримуємо:

$$AM^2 = x^2 + y^2, MB^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$AM^2 - MB^2 = 2ax - a^2 = b$$

(Вміння обчислювати відстань між точками, заданими координатами), або $x = \frac{b+a^2}{2a}$. Дане рівняння є рівнянням прямої, паралельної осі Оу і віддаленої від точки А на відстань $d = \frac{|b+a^2|}{2a}$. (Вміння бачити за рівнянням конкретний геометричний образ) Неважко бачити, що і для вирішення цього завдання необхідно оволодіння перерахованими вище уміннями. Крім того, для вирішення наведеної задачі, а також і інших завдань важливо вміння «бачити за рівнянням» конкретний геометричний образ, яке є зворотним до вміння складати рівняння конкретних фігур. Виділені вміння є основою при вирішенні і більш складних завдань.

2.2. Методика навчання учнів використовувати рівняння кола і прямої до розв'язування геометричних задач

Рівняння фігури на площині.

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними x і y, якщо виконуються умови:

1) координати будь-якої точки задовольняють рівняння;

2) будь-яка пара чисел виразу (x; y), що задовольняє це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

Так, наприклад, з курсу алгебри знайомо, що $y = \frac{6}{x}$ рівняння гіперболи, а $y = x^2 - 4$ - рівняння параболи.

Рівняння кола

Коло - це множина всіх точок площини, які лежать на даній додатній відстані (радіус) від даної точки площини, яка зветься центром.

Теорема 3.1 *(про рівняння кола).*

Коло з центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R задається рівнянням:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Дано: XOY – прямокутна декартова система координат (рис. 2.17.), коло з центром $C(x_0\,; y_0)$ і радіусом R .

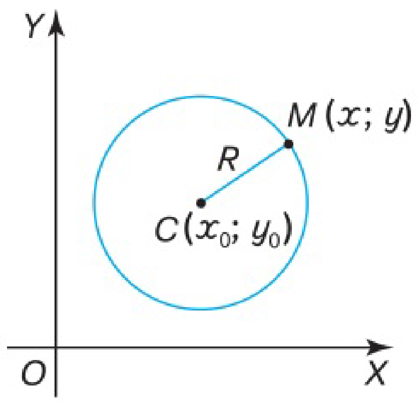


Рис. 2.17.

Довести: дане коло задається рівнянням

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Доведення. Візьмемо довільну точку М(x; у) на колі.

За означенням кола, СМ = R або $CM^2 = R^2$. Виразивши відстань СМ через координати точок С і М, дістанемо:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2 \quad (2.1)$$

Оскільки точка М – довільна точка кола, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки кола задовольняють рівняння (2.1).

Навпаки, нехай координати деякої точки $M_1(x_1; y_1)$ задовольняють рівняння (2.1). Тоді справджується рівність $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$ або $R = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Остання рівність показує, що точка $M_1(x_1; y_1)$ віддалена від центра кола – точки $C(x_0; y_0)$ на відстань R, тобто точка $M_1(x_1; y_1)$ належить цьому колу.

Наслідок. Якщо центр кола міститься у початку координат, то рівняння кола має вигляд: ${x_1}^2 + {y_1}^2 = R^2$.

Справді, початок координат О має координати $(0; 0)$, тому $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ і рівняння (2.1) набуває вигляду: $x^2 + y^2 = R^2$ [4, с.95].

Приклад 2.6.

Визначте центр та радіус кола, заданого рівнянням

$$(x + 3)^2 + (у - 2)^2 = 36.$$

Розв'язання

Маємо

$$(x - (-3))^2 + (у - 2)^2 = 6^2.$$

Отже, центром кола є точка $O(-3; 2)$, а радіус кола $R = 6$.

*Приклад 2.*7.

Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 6х + 4у - 12 = 0$ є рівнянням кола. Знайдіть координати центра кола та його радіус.

Розв'язання

Виділимо квадрати лінійних двочленів змінних х і у:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 12 - 9 - 4 = 0;$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25;$$
$$(x-3)^2+(y-(-2))^2=5^2.$$

Отже, задане рівняння є рівняння кола з центром у точці $O(3;-2)$, а радіус кола $R=5$.

Приклад 2.8.

Складіть рівняння кола з діаметром AB, якщо A$(-6;8)$, B$(4;12)$.

Розв'язання

1) Нехай точка O - центр кола. Тоді O - середина AB. Маємо:

$$x_O=\frac{-6+4}{2}=-1;\ \ y_O=\frac{8+12}{2}=10.$$

Отже, $O(-1;10)$.

2) Радіусом кола буде відрізок

$$OA=\sqrt{(-1-(-6))^2+(10-8)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}.$$

Отже, $R=\sqrt{29}$.

3) Рівняння шуканого кола таке:

$$(x-(-1))^2+(y-10)^2=(\sqrt{29})^2;$$
$$(x+1)^2+(y-10)^2=29.$$

Отже, рівнянням $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ запасується коло радіуса R з центром у точці $(a;b)$.

Рівняння прямої

Пряма, що проходить через початок координат (рис. 2.18.), задається рівнянням $y=kx$. Коефіцієнт k у цьому рівнянні називається кутовим коефіцієнтом прямої. Він дорівнює тангенсу кута між даною прямою і додатною піввіссю OX. На рисунку 2.18. ви бачите, що пряма a нахилена до додатної півосі OX під кутом α.

З прямокутного трикутника OM_1M ($\angle M_1 = 90°$) дістаємо:

$$tg\alpha=\frac{MM_1}{OM_1}=\frac{kx}{x}=k.$$

Як задати пряму, що не проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт k ? Дослідимо це.

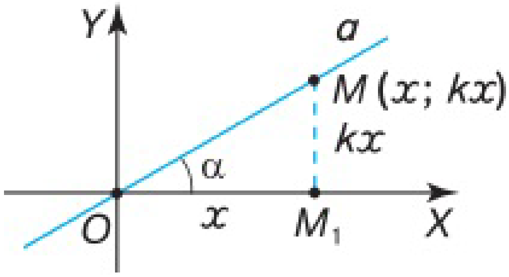


Рис. 2.18.

Нехай пряма b (рис. 2.19.) перетинає вісь OY у точці B(0;b) і має кутовий коефіцієнт k. Візьмемо на прямій b довільну точку N з абсцисою x та визначимо її ординату y. Для цього через початок координат проведемо пряму a||b. Вона має той самий кутовий коефіцієнт k, тому задається рівнянням $\mathrm{y} = k\mathrm{x}$. Нехай пряма, що проходить через точку N паралельно осі OY, перетинає пряму a в точці M, а вісь OX – у точці M_1. Тоді одержимо: $\mathrm{MM}_1 = k\mathrm{x}$ (бо $\mathrm{M} \in \mathrm{a}$), $\mathrm{NM} = \mathrm{OB} = b$ (бо чотирикутник NMOB – паралелограм за означенням), $\mathrm{NM}_1 = k\mathrm{x} + b$. Отже, ордината точки N виражається через її абсцису так: $\mathrm{y} = k\mathrm{x} + b$. Оскільки точка N – довільна точка прямої b, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння $\mathrm{y} = k\mathrm{x} + b$.

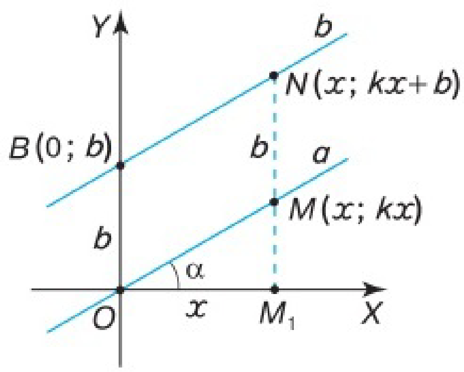


Рис. 2.19.

Рівняння $y = kx + b$ називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

Якщо $k > 0$, то пряма утворює гострий кут з додатнім напрямом осі OX, а якщо $k < 0$ - то тупий.

Звідки отримаємо важливу умову паралельності прямих:

прямі, що задані рівнянням $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$, паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$.

Як задати пряму, що проходить через дві точки? Дослідимо це.

Нехай точки A і B містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (рис. 2.20.). Через ці точки проведемо пряму a і позначимо на ній довільну точку $M(x; y)$. Через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OX, через точку A – пряму, паралельну осі OY. Точки їх перетину позначимо C і D. Отримали два подібних трикутники ACM і ADB (у них кут A спільний і CM||DB). З подібності трикутників випливає:

$$\frac{CM}{DB} = \frac{CA}{DA}.$$

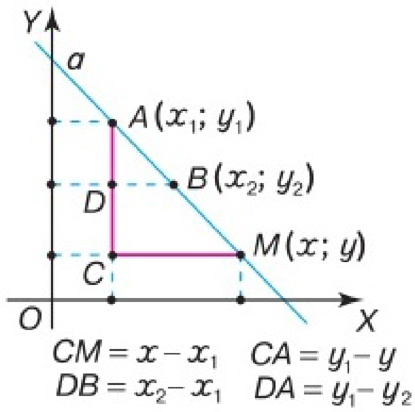


Рис. 2.20.

Виразимо довжини цих відрізків:

$$CM = x - x_1, \quad DB = x_2 - x_1, \quad CA = y_1 - y, \quad DA = y_1 - y_2.$$

Підставивши їх у пропорцію, отримаємо рівність:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}$$

Або

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Оскільки точка М – довільна точка прямої a, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

називають рівнянням прямої, що проходить через дві точки.

Отримане рівняння можна звести до вигляду:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0.$$

Позначивши $y_2 - y_1 = a,\ x_1 - x_2 = b, y_1x_2 - x_1y_2 = c,$ одержимо загальне рівняння прямої: $ax + by + \text{c} = 0,$ де a, b, c - числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю [4, с.100].

Приклад 2.9.

Знайдіть точки перетину прямої $2\text{x} - 7\text{y} - 14 = 0$ з осями координат.

Розв'язання

1) Нехай точка $\text{A}(\text{x}; 0)$ - точка перетину прямої з віссю абсцис. Тоді $2\text{x} - 7 \cdot 0 - 14 = 0;\ x = 7.$

Отже, A(7;0) – точка перетину прямої з віссю абсцис.

2) Нехай B(0;y) - точка перетину прямої з віссю ординат. Тоді $3 \cdot 0 — 7y — 14 = 0;\ \text{y} = -2.$

Отже, B(0;-2) - точка перетину прямої з віссю ординат.

Приклад 2.10.

Чи паралельні прямі $2\text{x} - 3\text{y} + 7 = 0$ і $4\text{x} - 6\text{y} - 9 = 0$?

Розв'язання

З рівняння $2\text{x} - 3\text{y} + 7 = 0$ маємо $3\text{y} = 2\text{x} + 7;\ y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$

З рівняння $4\text{x} - 6\text{y} - 9 = 0$ маємо $6\text{y} = 4\text{x} - 9;\ y = \frac{2}{3}x + \frac{9}{6}.$

Обидва рівняння мають однаковий кутовий коефіцієнт, тому прямі паралельні.

Рівняння прямої, що має кутовий коефіцієнт k і проходить через точку $\mathrm{A}(\mathrm{x}_0;\ y_0)$, має вигляд $\mathrm{y} - \mathrm{y}_0 = k(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$.

Приклад 2.11.

Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $\mathrm{A}(-2;\ 1)$ і утворює з додатнім напрямом осі абсцис кут 135°.

Розв'язання

1) $k = tg\ \alpha;\ k = tg\ 135° = -1.$

2) Маємо рівняння $\mathrm{y} - 1 = -1(\mathrm{x} - 2)$;

$\mathrm{y} - 1 = -\mathrm{x} - 2;\ \mathrm{x} + \mathrm{y} + 1 = 0$ - шукане рівняння.

Для того, щоб знайти координати точок перетину прямих $a_1x + b_1x + c_1 = 0, a_2x + b_2x + c_2 = 0$ необхідно розв'язати систему, рівняннями якої є рівняння, які задають дані прямі.

Отже, нехай $\mathrm{M}_1(x_1; y_1), \mathrm{M}_2(x_2; y_2)$ - дві різні точки. Тоді рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2 має наступний вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k яке проходить через точку $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$.

Для прямих, заданих рівняннями $\mathrm{y} = \mathrm{k}_1\mathrm{x} + \mathrm{b}_1$, $\mathrm{y} = \mathrm{k}_2\mathrm{x} + \mathrm{b}_2$.

Умова паралельності: $\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2$.

Умова перпендикулярності: $\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2 = -1$.

В додатках запропоновані самостійні роботи, які можна провести після вивчення розглянутого матеріалу в підрозділах 2.1 та 2.2 (див. Додаток А).

Застосування координат до розв'язування задач на відшукання геометричних місць точок

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ [14, с.104].

Розв'язування задач на відшукання ГМТ за допомогою методу координат передбачає два основні етапи:

1) складання рівняння з двома невідомими x і y, які задовольняють координати будь-якої точки шуканого ГМТ. На цьому етапі обґрунтовується пряме твердження: якщо точка $M(x; y)$ — довільна точка шуканого ГМТ, то її координати задовольняють знайдене рівняння;

2) доведення оберненого твердження: будь-яка точка, координати якої задовольняють знайдене рівняння, належить шуканому ГМТ.

Задача 2.3. Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок площини, для яких різниця $MA^2 - MB^2$ стала.

Розв'язання

Виберемо систему координат так, щоб точки A і B лежали на осі абсцис, а середина відрізка AB збігалася з початком координат (рис. 2.21.1). Нехай $AB = a$, тоді дані точки матимуть координати $A(-\frac{a}{2}; 0)$ і $B\left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

Для довільної точки $M(x; y)$ за умовою задачі $MA^2 - MB^2 = k$.

Записавши цю умову в координатах, маємо:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 = k.$$

Спрощуючи цей вираз, дістанемо $2ax = k$, тоді $x = \frac{k}{2a}$.

Отже, кожна точка шуканого ГМТ належить прямій $x = \frac{k}{2a}$, яка паралельна осі ординат (тобто перпендикулярна до прямої AB) і проходить через точку $\left(\frac{k}{2a}; 0\right)$. І навпаки: якщо точка M(x; y) лежить на прямій $x = \frac{k}{2a}$, то її координати задовольняють рівняння $MA^2 - MB^2 = k$.

Отже, точка M належить шуканому ГМТ [11, с.102].

Задача 2.4. Знайти геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до вершин *A* і *B* трикутника *ABC* дорівнює квадрату відстані до третьої його вершини — точки *C*.

Розв'язання

У задачах на метод координат важливо вдало, а точніше, вигідно обрати систему координат. У нашій задачі зручно взяти середину відрізка *AB* — точку O — як початок відліку і «покласти» відрізок AB на вісь абсцис (рис. 2.21.2). Виберемо одиничний відрізок так, щоб $\mathrm{A}(-1;0)$ і $\mathrm{B}(1;0)$. Нехай координати точки $\mathrm{C}(a;b)$, а точка $\mathrm{M}(x;y)$ належить шуканому ГМТ. Тоді $MA^2+MB^2=MC^2$. Причому останнє можна вважати необхідною і достатньою умовою належності точки *M* шуканому ГМТ. Маємо:

$$(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

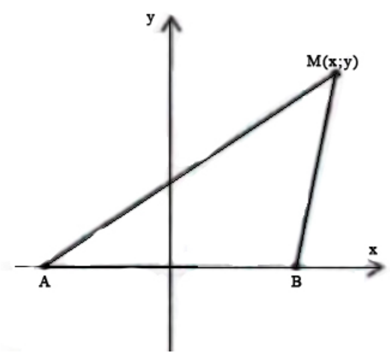


Рис. 2.21.1

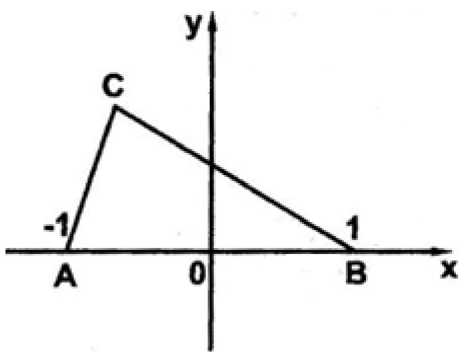


Рис. 2.21.2

Після відповідних перетворень дістанемо:

$$(x+a)^2+(y+b)^2=2(a^2+b^2-1).$$

Тепер зрозуміло: якщо $a^2+b^2<1$, то шукане ГМТ — порожня множина.

Якщо $a^2+b^2=1$, то $(x+a)^2+(y+b)^2=0$, і ГМТ складається з однієї точки $\mathrm{D}(-\mathrm{a};-\mathrm{b})$, симетричної точці *C* відносно початку координат.

Якщо $a^2+b^2>1$, то маємо коло з центром у точці $\mathrm{D}(-\mathrm{a};-\mathrm{b})$, і радіусом $\sqrt{2a^2+2b^2-2}$ [17, с.148].

В додатках запропоновані тестові завдання, які можна провести перед уроком повторення, узагальнення та систематизація знань учнів з теми «Декартові координати на площині» (див. додаток Б).

2.3. Особливості розв'язування геометричних задач методом координат

В даний час вже дуже велика кількість фахівців з різних галузей науки мають уявлення про прямокутних декартових координатах на площині, так як ці координати дають можливість наочно за допомогою графіка зобразити залежність однієї величини від іншої. [13, с.19].

Розв'язуючи задачу координатним методом, слід виконати такі дії:

1) сформулювати задачу мовою координат;
2) визначити координати деяких точок даної фігури;
3) використати відомі співвідношення і формули;
4) перекласти отримані результати мовою геометрії.

Розв'язуючи задачу методом координат, потрібно раціонально вибрати систему координат: дану фігуру слід розмістити відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювало нулю, а також одному і тому ж числу. Наприклад, координати вершин прямокутника *ABCD* можна вибрати так, як на рисунку 2.22 [18, с.39].

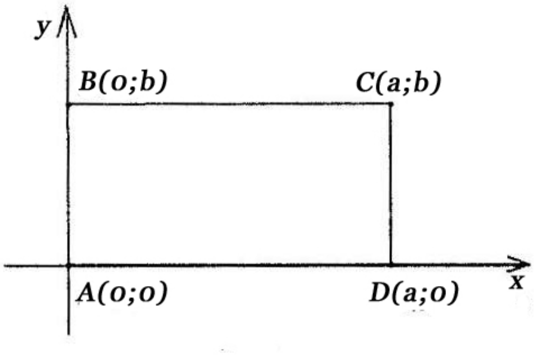


Рис. 2.22.

Етапи розв'язування задач методом координат

Задача 2.5. Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

Розв'язання

Сформулюємо дану задачу в координатах. Для цього розмістимо дану трапецію ABCD у системі координат так, щоб її вершини мали координати A(0; 0), B(a; b), C(c; b), D(d; 0) (рис. 2.23.).

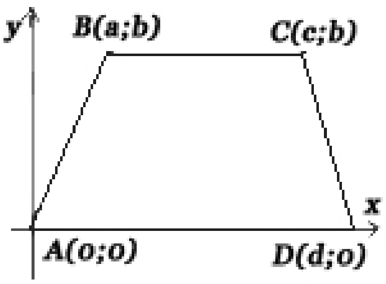


Рис. 2.23.

Виразимо суму квадратів діагоналей трапеції через координати її вершин:

$$\mathrm{AC}^2 + BD^2 = \mathrm{c}^2 + b^2 + (\mathrm{a} - d)^2 + b^2 = \mathrm{a}^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2ad.$$

Обчислимо довжини основ трапеції:

$$AD = d, \mathrm{BC} = \mathrm{c} - \mathrm{a}.$$

Виразимо в координатах суму квадратів бічних сторін:

$$\mathrm{A}B^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + (c - d)^2 + b^2 = \mathrm{a}^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2cd.$$

Додаючи до цього виразу подвоєний добуток основ, маємо:

$$\mathrm{A}B^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC = \mathrm{a}^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2cd - 2cd - 2ad =$$

$= \mathrm{a}^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2ad$, що й треба було довести [11, с.99].

Отже, щоб розв’язати задачу методом координат необхідно виконати 3 кроки:

1) сформулювати дану задачу мовою координат;

2) перетворити алгебраїчні вирази, користуючись відомими співвідношеннями та формулами;

3) перекласти отриманий результат мовою геометрії [3, с.31].

Для прикладу розглянемо алгебраїчну та геометричну задачу і проілюструємо виконання даних 3 кроків.

Приклад 2.12.

Скільки розв’язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$.

Розв’язання

1 крок: на геометричній мові в даній задачі потрібно знайти, скільки точок перетину мають фігури, задані даними рівняннями. Перше з них є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом, рівним 1, а друге - рівнянням параболи.

2 крок: побудова кола і параболи; знаходження точок їх перетину.

3 крок: кількість точок перетину кола і параболи є відповіддю на поставлене питання.

Приклад 2.13.

Знайдіть множину точок, для кожної з яких відстані від двох даних точок рівна.

Розв'язання

Позначимо дані точки через A і B. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox збігалася з прямою AB, а початком координат служила точка A Припустимо далі, що $\mathrm{AB} = \mathrm{a}$, тоді у вибраній системі координат $\mathrm{A}(0;0)$ і $\mathrm{B}(\mathrm{a};0)$. Точка $\mathrm{M}(x;y)$ належить шуканій множині тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$, або, що те ж саме, $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{MB}^2$. Використовуючи формулу відстані від однієї точки координатної площини до іншої, отримуємо

$\mathrm{AM}^2 = x^2 + y^2, MB^2 = (x-a)^2 + y^2$.

Тоді $x^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2$.

Рівність $x^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2$ і є алгебраїчною моделлю ситуації, даної в задачі. На цьому закінчується перший етап її рішення (переклад умови задачі на координатну мову).

На другому етапі здійснюється перетворення отриманого виразу, в результаті якого отримуємо співвідношення $x = \frac{a}{2}$.

На третьому етапі здійснюється переклад мови рівняння на геометричну мову. Отримане рівняння є рівнянням прямої, яка є паралельною осі Oy і віддалена від точки A на відстань $d = \frac{a}{2}$, Тобто серединний перпендикуляр до відрізка AB.

Розв'язуючи задачу методом координат, дану фігуру слід розміщувати відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювали нулю, а також одному і тому самому числу. Наприклад, координати вершин прямокутника ABCD доцільно взяти такі: $A(0;0), B(0;b), C(a;b), D(a;0)$ (рис. 2.24).

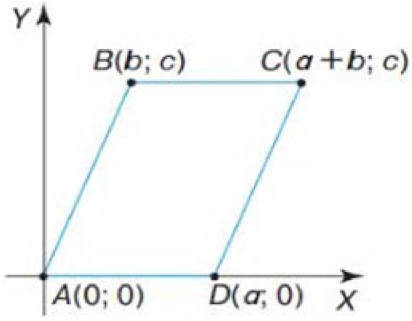


Рис. 2.24.

Задача 2.6. Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він – прямокутник.

Розв'язання

Перший крок. Записуємо задачу мовою координат. Розміщуємо систему координат відносно паралелограма так, щоб його вершини мали координати: $A(0;0), B(b;c), C(a+b;c), D(a;0)$.

За умовою $AC = BD$. Подаємо відстані між точками A і C, B і D через їх координати:

$$\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2},$$

$$(a+b)^2+c^2 = (a-b)^2+c^2$$

Другий крок. Перетворюємо одержану рівність:

$$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2$$

$$4ab = 0.$$

Третій крок. З останньої рівності випливає: оскільки $a > 0$, то $b = 0$.

Це означає, що точка $B(b;c)$ лежить на осі ОУ. Тому кут BAD прямий, а звідси паралелограм ABCD – паралелограм.

Застосування методу координат дозволяє спростити доведення властивостей фігури. Розглянемо приклад.

Задача 2.7. Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.

Розв'язання

Нехай ABC – даний прямокутний трикутник з прямим кутом C (рис. 2.25.). Позначимо довжини його катетів малими літерами a і b, а середину гіпотенузи – M. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок містився у вершині C трикутника, а його катети лежали на осях координат (рис. 2.26.). Тоді вершини трикутника матимуть координати: $\mathrm{C}\,(0;0), \mathrm{B}\,(a;0), \mathrm{A}\,(0;b)$. Точка M є серединою гіпотенузи AB, тому вона має координати: $M(2a;2b)$. Знайдемо довжини відрізків MC, MA і MB:

$$MC = \sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}\,,$$

$$MA = \sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}\,,$$

$$MB = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}\,,$$

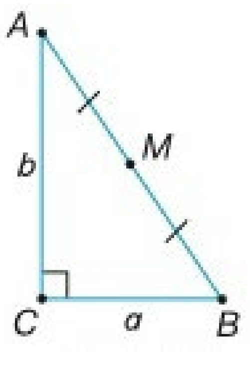


Рис. 2.25.

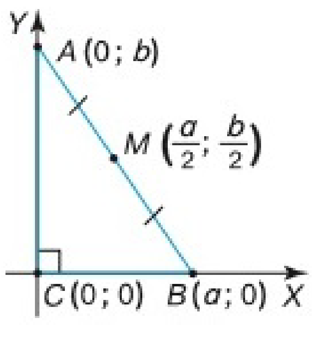


Рис. 2.26.

З отриманих рівностей випливає, що MC = MA = MB. Отже, точка M – рівновіддалена від вершин ΔABC [4, с.105].

Уміння необхідні для застосування методу координат

Для розробки методики формування вмінь, що необхідні для застосування методу координат, важливим є з’ясувати, як мислить учень і які логічні структури він створює у себе в голові. Метод координат передбачає наявність в учнів умінь і навичок, що сприяють застосуванню його на практиці. Проаналізуємо розв’язання декількох задач. У процесі цього аналізу виділимо вміння, які є основними для застосування методу координат до розв’язання задач.

Задача 2.8. У трикутнику ABC: $AC = b, AB = c$, $BC = a$, BD - медіана.

Доведіть, що $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

Виберемо систему координат так, щоб точка A служила початком координат, а віссю Ox - пряма AC (рис. 2.27.).

(Вміння оптимально вибирати систему координат, тобто так, щоб найбільш просто знаходити координати даних точок).

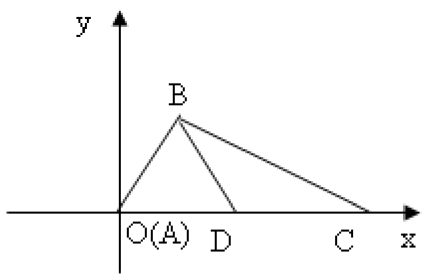


Рис. 2.27.

У вибраній системі координат точки A, C і D мають наступні координати: $A(0; 0), D(\frac{b}{2}; 0)$ і $C(b; 0)$.

(Вміння знаходити координати заданих точок).

Позначимо координати точки B через x і y. Тоді використовуючи формулу для знаходження відстані між двома точками, заданими своїми координатами, отримуємо:

$$x^2 + y^2 = c^2,\ (x - b)^2 + y^2 = a^2. \tag{2.2}$$

(Вміння знаходити відстань між двома точками, заданими координатами)

За тією ж формулою

$$BD^2 = (x - \tfrac{b}{2})^2 + y^2. \tag{2.3}$$

Використовуючи формули (2.2) знаходимо x та y. Вони рівні:

$$x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b};\quad y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}}$$

Далі, підставляючи x та y в формулу (2.3), знаходимо

$$BD^2 = (\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} - \frac{b}{2})^2 + c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}.$$

$$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

(Вміння виконувати перетворення алгебраїчних виразів)

Задача 2.9. Знайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є стала величина. Позначимо дані точки через A і B. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox збігалася з прямою AB, а початком координат служила точка A.

(Вміння оптимально вибирати систему координат).

Припустимо $\mathrm{AB} = a$, тоді у вибраній системі координат $\mathrm{A}(0{,}0), \mathrm{B}(a, 0)$.

(Вміння знаходити координати заданих точок)

Точка $\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ належить шуканій множині, тоді і тільки тоді, коли $AM^2 - MB^2 = b^2$, де b - стала величина

(Вміння переводити мову геометрії на аналітичну мову, складати рівняння фігур).

Використовуючи формулу відстаней між двома точками, отримуємо:

$$AM^2 = x^2 + y^2,\ MB^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

$$AM^2 - MB^2 = 2ax - a^2 = b.$$

(Вміння обчислювати відстань між точками, заданими координатами), або $x = \frac{b+a^2}{2a}$. Дане рівняння є рівнянням прямої, паралельної осі Оу і віддаленої від точки А на відстань $= \frac{|b+a^2|}{2a}$.

(Вміння бачити за рівнянням фігури, конкретний геометричний образ)

Очевидно, що і для вирішення цього завдання необхідно оволодіти перерахованими вище вміннями. Крім того, для розв'язання наведеної задачі, а також і інших задач важливо «бачити за рівнянням» конкретний геометричний образ, що є зворотною процедурою до складання рівняння конкретних фігур.

Виділені вміння є основою при розв'язанні і більш складних завдань.

Задача 2.10. У трапеції менша діагональ перпендикулярна основам. Знайти більшу діагональ, якщо сума протилежних кутів дорівнює $\frac{\pi}{2}$, а основи рівні a і b.

Направимо осі координат по меншій діагоналі і одній з основ (рис. 2.28.).

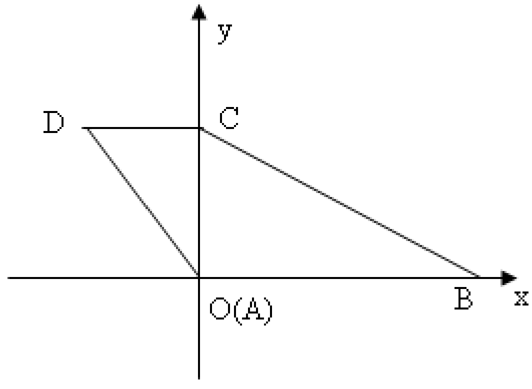


Рис. 2.28.

(Вміння оптимально вибирати систему координат). Тоді отримаємо точки точка $A(0;0)$, $\mathrm{B}(a;0)$, $\mathrm{C}(0;c), D(b;c)$.

(Вміння знаходити координати заданих точок)

Нехай $\alpha = \angle ABC$ і $\beta = \angle ADC$ гострі кути в трапеції ABCD, тоді їх сума дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Для обчислення довжини більшої діагоналі BD треба знайти значення c. Його можна обчислити 2 способами.

Перший - з прямокутного трикутника ABC за формулою $tg\alpha = \frac{CO}{AB}$ знаходимо $c = atg\alpha$.

Другий спосіб з прямокутного трикутника ACD: $c = -btg\beta$.

Звідси маємо, що

$$c = atg\alpha = -btg\beta. \tag{2.4}$$

З рівності (2.4) знаходимо відношення $\frac{b}{a}$. Яке дорівнює $(tg\alpha)^2$, так як $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Виразимо $tg\alpha$. Це дорівнює $\sqrt{-\frac{b}{a}}$. Виходячи з цього, користуючись залежністю (2.4), отримуємо $c = \sqrt{-ab}$.

(Уміння виражати невідомі координати через вже відомі величини)

Далі скориставшись координатної формулою відстані між двома точками, знайдемо довжину BD.

(Вміння обчислювати відстань між точками, заданими координатами)

Вона дорівнює $\sqrt{a^2 + b^2 - 3ab}$.

Отже, щоб застосовувати метод координат у конкретних випадках потрібно необхідно володіти такими вміннями та навичками:

1. Переводити мову геометрії на аналітичну для одного типу завдань та з аналітичної на геометричну для іншого;

2. Будувати точку за заданими координатами;

3. Знаходити координати заданих точок;

4. Обчислювати відстань між точками;

5. Оптимально вибирати систему координат;

6. Складати рівняння заданих фігур;

7. Бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;

8. Виконувати перетворення алгебраїчних співвідношень.

Дані вміння можна відпрацювати на прикладі таких завдань, що формують метод координат:

1) Задачі на побудову точки за її координатами;

2) Задачі на знаходження координат заданих точок;

3) Задачі на обчислення відстані між точками, заданими координатами;

4) Задачі на оптимальний вибір системи координат;

5) Задачі на складання рівняння фігури за її властивостями;

6) Задачі на визначення фігури за її рівнянням;

7) Задачі на перетворення алгебраїчних рівнянь.

2.4. Застосування пакету програм GRAN1 та GRAN-2D до вивчення курсу геометрії

Найбільш зручним для підтримки вивчення курсу математики в школах є пакет програм GRAN (GRAN1, Gran-2D, Gran-3D). Названі програмні засоби прості у використанні, мають досить зручним застосування. Від користувача не вимагається особливих вмінь з інформатики за винятком найпростіших понять, цілком доступних для учнів середніх класів.

При цьому вчителю не нав'язується ніяка методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання, співвідношення між самостійною роботою учнів і роботою разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи та ін. Усе це вчитель повинен визначити сам з урахуванням своїх власних позицій і уподобань, специфіки умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальних особливостей окремих учнів і класного колективу.

Вивчення математики за допомогою програм GRAN1, GRAN-2D дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються за їх допомогою, відбувається розвиток образного мислення учнів, їх просторової уяви. Програми GRAN1, GRAN-2D дозволяють досить глибоко проникнути в сутність досліджуваних явищ, неформально розв'язувати задачі. Основною проблемою при використанні програм GRAN1, GRAN-2D виступає відшукання чи розробка методу розв'язування задачі, побудова її математичної моделі, а виконання і подання обчислювальних і графічних операцій, всіх технічних операцій щодо опрацювання результатів, покладається на комп'ютер.

Програма GRAN1 призначена для графічного аналізу функцій, звідки і походить її назва (GRaphic ANalysis).

Програма GRAN-2D призначена для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині.

Розв'яжемо приклад 2.6. з використання програми GRAN1.

Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ є рівнянням кола. Знайдіть координати центра кола та його радіус.

Задамо рівняння неявно заданої функції, яке нам дано в умові задачі. Бачимо, що графіком цієї функції буде коло (рис. 2.29).

Побудувавши коло з центром у точці (3;-2) і радіусом R = 5 бачимо, що воно співпаде з отриманим колом вище.

В обох випадках отримали однаковий результат. Отже, задача розв'язана правильно.

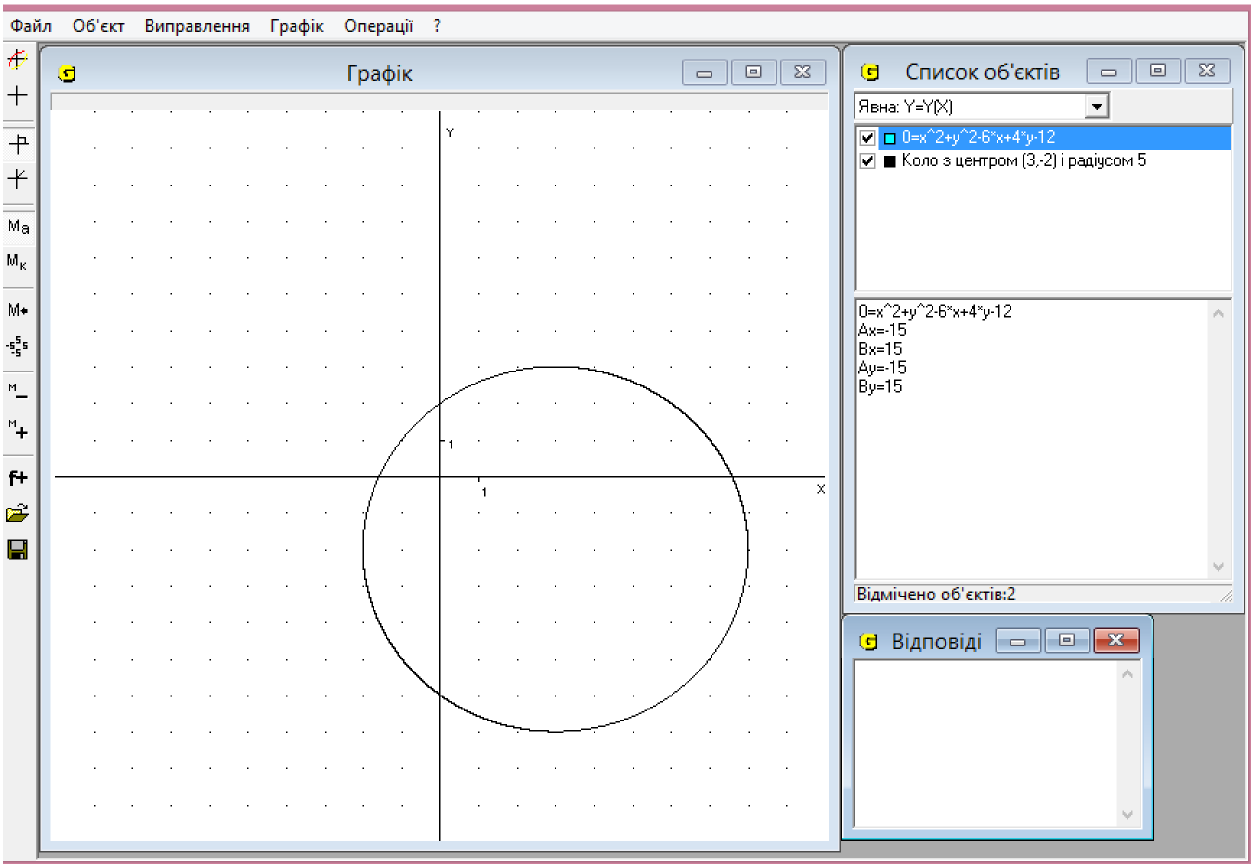


Рис. 2.29.

Розв'яжемо приклад 2.8. з використання програми GRAN1.

Знайдіть точки перетину прямої $2x - 7y - 14 = 0$ з осями координат.

Задамо рівняння неявно заданої функції, яке нам дано в умові задачі. Бачимо, що графіком цієї функції дійсно буде пряма (рис. 2.30).

Навівши курсор мишки на точки перетину прямої з осями координат, отримаємо, що точка з координатами (7;0) – точка перетину прямої з віссю абсцис та (0;-2) – точка перетину прямої з віссю ординат.

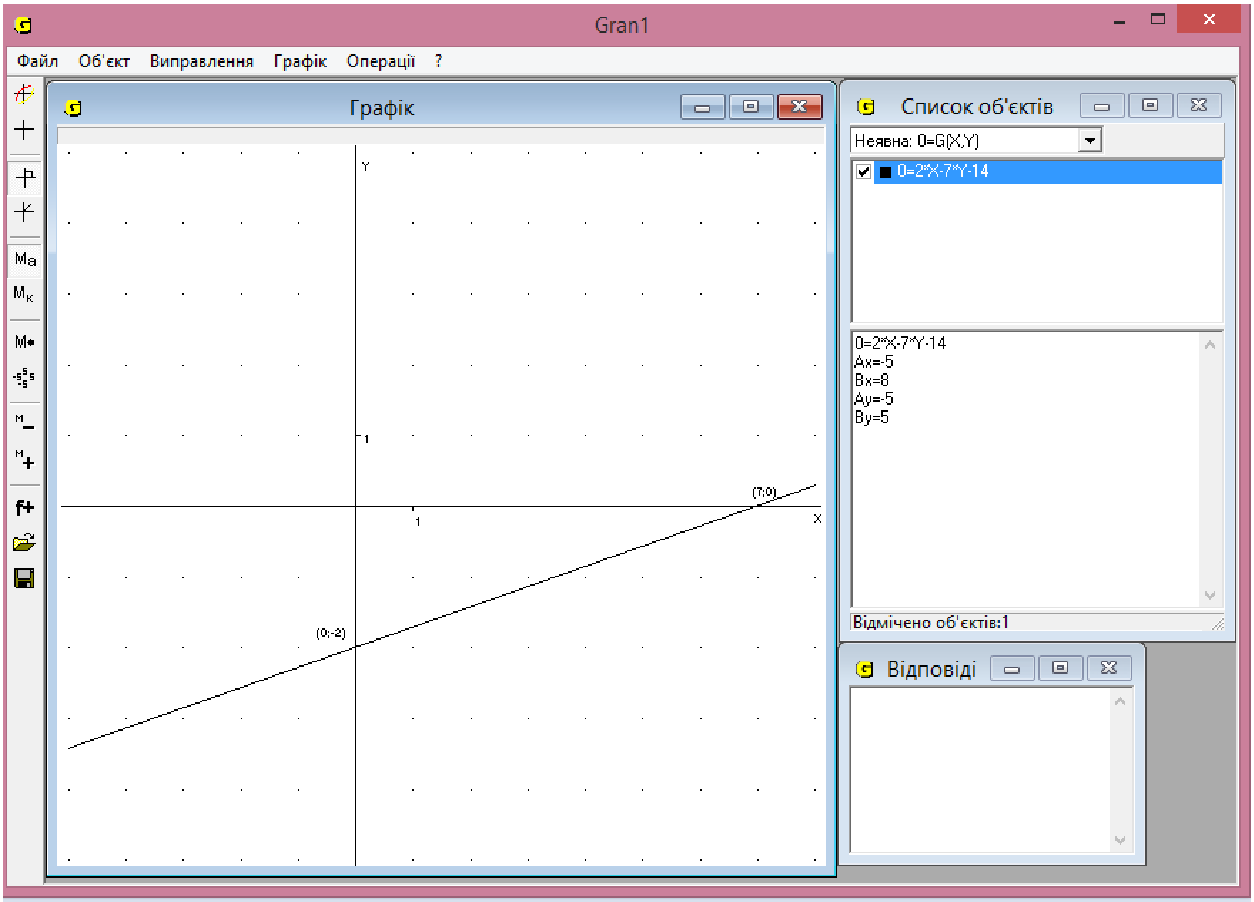


Рис. 2.30.

Розв'яжемо приклад 2.2. з використання програми GRAN-2D.

Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A(-1;7)$, $B(1;3)$ і $C(5;5)$ є рівнобедреним прямокутним.

Побудуємо точки A, B та C, сполучивши їх отримаємо трикутник. За допомогою лінійки виміряємо довжини всіх сторін, бачимо, що $AB = BC$. Виміряємо величину кута між цими сторонами, отримаємо, що $\angle ABC = 90°$. Отже, ΔABC є рівнобедреним прямокутним (рис. 2.31).

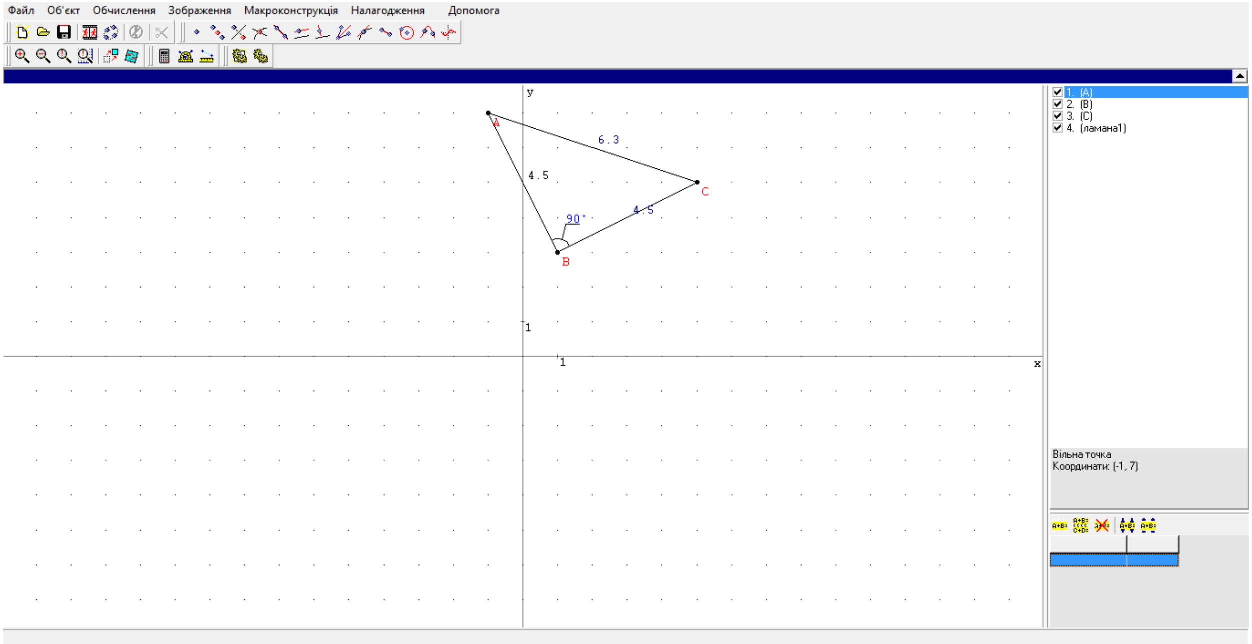


Рис. 2.31.

Розв’яжемо приклад 2.4. з використання програми GRAN-2D.

Вершини чотирикутника ABCD мають координати A(-2;1), B(0;4), C(4;1), D(2;-2). Доведіть, що ABCD — паралелограм.

Побудуємо точки A, B, C та D, сполучивши їх за допомогою ламаної отримаємо чотирикутник. Побудуємо діагоналі AC та BD, їхніми серединами відповідно будуть точки O та O1, які збігаються.

Отже, ABCD – паралелограм (рис. 2.32).

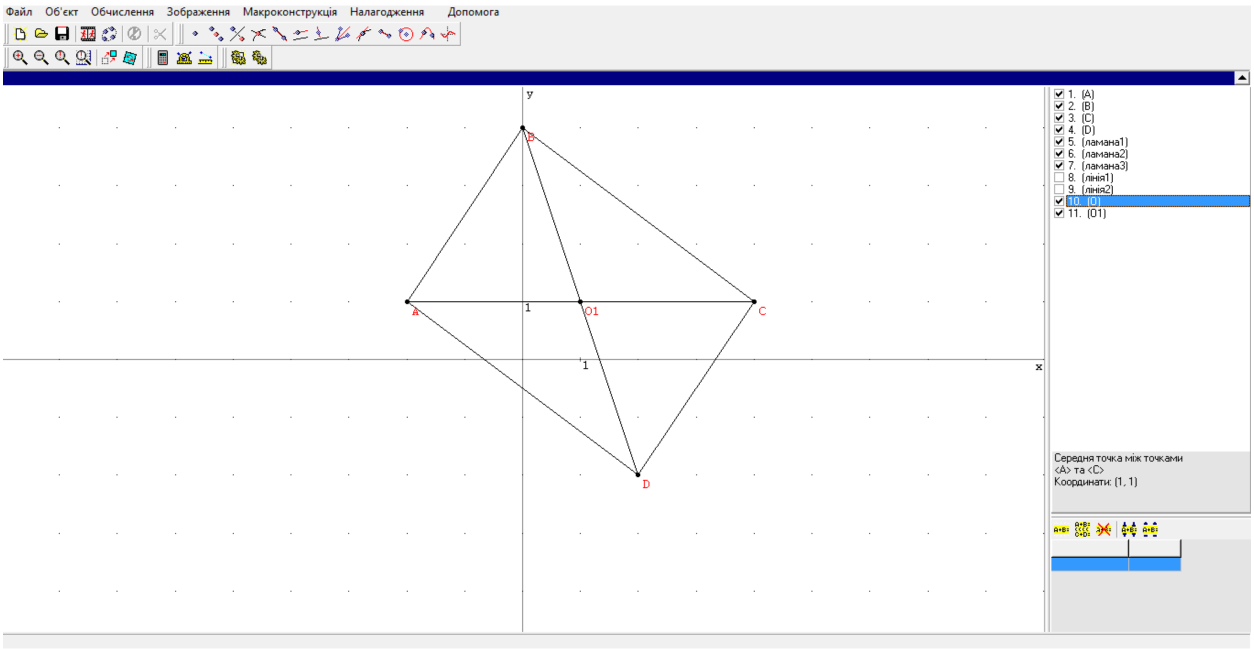


Рис. 2.32.

2.5. Проведення та результати педагогічної діагностики

Педагогічна діагностика була проведена для того, щоб визначити ефективність вивчення матеріалу за допомогою пакету програм GRAN1 та GRAN-2D.

Педагогічне діагностування — це вид діяльності, мета якої полягає у встановленні і вивченні ознак, що характеризують стан і результати процесу навчання, і дає змогу на цій основі прогнозувати можливі відхилення, визначати шляхи їх попередження, а також корегувати процес навчання з метою підвищення якості його результату.

Сутність педагогічної діагностики визначає її предмет: кого виховувати у відповідності з поставленими цілями і завданнями виховання за яких умов, хто і що при цьому повинен робити, якими засобами, шляхами, методами впливати на вихователів і вихованців.

Діагностика проводилася в Будівській ЗОШ I-II ступенів Рокитнівського району. Для цього було обрано 9 клас. Для учнів було підібрано ряд урокі з теми «Декартові координати на площині» з використанням пакету програм GRAN-1 та GRAN-2D. Задуми, які потрібно було організувати, було обговорено з учителями математики та інформатики.

Після проведення розроблених уроків учні виконали тестові завдання, які дали змогу оцінити рівень їхніх знань. Результати перевірки знань показали, що поданий матеріал швидше засвоюється, під час уроків учні виявляли інтерес до матеріалу, намагались самостійно розв’язувати і досліджувати задачі, звертались з додатковими запитаннями.

Застосування пакету програм GRAN1 та GRAN-2D на уроках геометрії дає можливість зробити уроки більш різноманітними, та заощадити час для повторення теоретичних питань та розв’язування задач.

В ході діагностики учні виявили інтерес до предмету, намагались розв’язували задачі. Після уроку узагальнення та систематизації знань (див. Додаток В), було проведено контрольну роботу (див. Додаток Г), її результати виявились наступними:

Рівень знань учнів	Процентний показник рівня знань учнів до початку діагностики	Процентний показник рівня знань учнів після проведення контрольної роботи
Низький	16%	15%
Середній	36%	34%
Достатній	37%	39%
Високий	11%	12%

З результатів видно, що показники рівнів засвоєння знань є вищими, ніж до початку використання уроків розроблених для діагностичного дослідження, в навчанні яких застосувались програми GRAN1 та GRAN-2D до розв’язування геометричних задач методом координат. Отже, можна зробити висновок, що застосування поданого в бакалаврській роботі матеріалу є ефективним і сприяє досягненню поставленої вчителем мети.

ВИСНОВКИ

Досить простий в застосуванні, метод координат є необхідною складовою розв'язування завдань різного рівня. Використання даного методу, дозволяє учням значно спростити і скоротити процес розв'язування завдань, що допомагає їм при подальшому вивченні, як шкільного курсу математики, так і при вивченні математики у вищих навчальних закладах.

В даній бакалаврській роботі було розглянуто:

1) методичні особливості навчання розв'язування геометричних задач. Розв'язування задач – це одна з активних форм навчання, у процесі якої учні знайомляться з новими математичними закономірностями, намагаються дещо по-іншому подивитися на вже відомі їм теоретичні факти, вчаться самостійно здобувати знання, розвивають логічне мислення;

2) історію виникнення та розвитку методу координат;

3) суть методу координат, яка полягає в тому, що кожній точці на площині за певним правилом ставляться у відповідність числа, які і називають координатами точки. Це дає можливість за допомогою чисел засобами алгебри робити дослідження властивостей фігур;

4) описаний сам метод координат, види і етапи розв'язування задач методом координат;

5) теоретичний матеріал, що лежить в основі розв'язування геометричних задач методом координат і способи його застосування на прикладі конкретних математичних задач.

Метод координат на площині знаходить широке застосування у розв'язанні задач з планіметрії. Це досить потужний засіб, оволодіння яким дає змогу набагато легше розв'язувати планіметричні задачі без використання різних теорем (теорема синусів, косинусів та ін.).

6) проаналізовано кілька діючих шкільних підручників щодо теми «Метод координат»;

7) різні підходи до введення систем координат на площині. Як приклад наведено геометричні задачі та прийоми вибору адекватного методу

їх розв’язання. Розроблено самостійні та контрольні роботи, тестові завдання пов’язані з темою дослідження.

Застосування пакету програм GRAN1 та GRAN2D допоможе підвищити якість знань з геометрії, сформувати в учнів уміння перевіряти свої знання самостійно. Даний матеріал може бути використаний вчителями математики при здійсненні навчально-виховного процесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Істер О. С. Геометрія : підручник для 9 кл.загальноос. нав. закладів / О. С. Істер. – К. : Генеза, 2017. – 240 с.: іл.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посіб. / Г.П.Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
3. Белешко Д.Т. Практикум по решению геометрических задач. Часть I. / Д.Т.Белешко – Ровно: Ровенский обласной институт усовершенствования учителей, 1986. – 30-39 с.
4. Бурда М.І. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. - К. : УОВЦ «Оріон», 2017. – 224 с.: іл.
5. Великий довідник школяра з тестовими завданнями / [авт. тексту Г.П.Бевз]. – К.: Махаон-Україна, 2007. – 864 с.
6. Гельфанд І.М. Метод координат: навч. посіб. / І.М.Гельфанд, О.Г.Глаголєва, О.О.Кирилов. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 216 с.
7. Глейзер Г.И. История математики в школе / Герш Исаакович Глейзер. – М.: Просвещение, 1964. — 376 с.
8. Готуємося до нового навчального року [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – http://www.library.ukma.edu.ua.
9. Дерев’яненко Н. Декартові координати на площині // Математика. – 2011. - № 45. – С. 5-8.
10. Дерев’яненко Н. Декартові координати на площині // Математика. – 2011. - № 46-47. – С. 45-47.
11. Бевз Г.П. Геометрія. 9 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова. - К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.: іл.
12. История математики: в 3-х т. / под. ред. А.П.Юшкевича - М.: Наука, 1970. – Т.2: Математика XVII столетия. – 301 с.

13. Маркевич І.О. Навчання учнів методам розв'язування планіметричних задач: методичний посібник. / І.О.Маркевич, Г.Я.Клекоць, Д.Т.Белешко. – Рівне, 2013. – 35 с.

14. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.— Х.: Гімназія, 2017. — 240 с.: іл.

15. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.— Х.: Гімназія, 2017. — 304 с.: іл.

16. Педагогічний експеримент : навч.-метод. посіб. / [укладач О. Е. Жосан]. – Кіровоград : Видавництво КОІППО імені Василя Сухомлинського, 2008. – 72 с.

17. Полонський В.Б. Вчимось розв'язувати задачі з геометрії: навч.-метод. посібник / В.Б.Полонський, Ю.М.Рабінович, М.С.Якір. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. – 240 с.

18. Присяжнюк М.М. Загальні методи розв'язування геометричних задач на доведення: посібник для студентів спеціальності «математика» / М.М.Присяжнюк, О.В.Ткачук. – Рівне, 2013. – 102 с.

19. Навчальна програма для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з математики // Міністерство освіти і науки України. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – http://www.mon.gov.ua.

20. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. / З.І.Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с: іл.

21. Склярова І.О. Календарне планування на 2017-2018 рр.. Математика. 5-11 класи / І.О. Склярова. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – http://matematikazp.blogspot.com/p/2017-2018.html .

22. Филипповский Г.Б. Рене Декарт. Декартова система координат // Математика в школах України. – 2011. - № 35-36. – С. 22-27.

23. Шевчук Л.В. Декартові координати на площині // Математика в школах України. – 2011. - № 35-36. – С. 30-32.

Додаток А

Самостійна робота №1

Координати середини відрізка. Відстань між двома точками

Варіант 1

1. Знайдіть координати точки Р - середини відрізка ХУ, якщо Х(1; 6), У(7; 8).

2. Точка О — середина відрізка CD. Знайти координати точки С, якщо O(0; -1), D(6;-7).

3. Знайдіть відстань між точками М (5; 2) і N (7; 8).

4. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках А(- 3; 0), В (3; 3), С (0; - 3) рівнобедрений з основою АС.

Відповідь.

1. Р(4; 7). 2. С(-6; 5). 3. $\sqrt{40}$.

4. Вказівка. Знайти середини основ трикутника та визначити довжини медіан.

Варіант 2

1. Знайдіть координати точки Р - середини відрізка СВ, якщо С(5; 7) , В(3;7).

2. Точка О — середина відрізка МК. Знайти координати точки М, якщо О(1; -3), К(-4;-5).

3. Знайдіть відстань між точками М(- 4; 6) і N(5; 6).

4. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках А (- 1; 4), В(1; 4), С (0; -5) рівнобедрений з основою АВ.

Відповідь.

1. Р(4;7). 2. М(6;-1). 3. 9.

4. Вказівка. Знайти середини основ трикутника та визначити довжини медіан.

Самостійна робота №2. Рівняння кола

Варіант 1

1.Знайдіть координати центра кола, заданого рівнянням $(x - 3)^2 + (y + +2)^2 = 16$. Вкажіть радіус цього кола.

2. Знайдіть координати центра кола, його радіус та запишіть рівняння цього кола, якщо кінцями діаметра даного кола є точки A(1; 5) і B(1; 1).

3. Знайдіть координати точок перетину кола $(x–2)^2 + (y - 4)^2 = 2$ з прямою $y= 5$.

Відповідь.

1.R=4; O(3;-2).

2.O(1;3); r=2; $(x–1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

3.M(3;5); K(1;5).

Варіант 2

1.Знайдіть координати центра кола, заданого рівнянням $(x + 5)^2 + (y - –4)^2 = 9$. Вкажіть радіус цього кола.

2. Знайдіть координати центра кола, його радіус та запишіть рівняння цього кола, якщо кінцями діаметра даного кола є точки A(0; 4) і B(0; 0).

3. Знайдіть координати точок перетину кола $x^2 + y^2 = 20$ з прямою $y= x- -2$.

Відповідь.

1.O(-5;4); r=3.

2.O(0;2); r=2; $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

3. M(4;2); K(-2;4).

Самостійна робота №3. Рівняння прямої

Варіант 1

1. Дано відрізок, координати кінців якого точки A(2; -6), B(-4; 8). Знайти координати середини відрізка.

2. Вкажіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $10x$ -$2y$ +8 = 0.

3. Знайдіть відстань між точками M(- 4; 6) і N(5; 6).

4. Коло задане рівнянням $(x-2)^2+(y+4)^2=7$. Знайти координати його центра і радіус.

5. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки (4;- 6) і (-3; 2).

Відповідь.

1. (-1;1). 2. k=5 3. MN = 9.

4. (2;-4), R=$\sqrt{7}$. 5. $y=-\frac{8}{7}x-\frac{10}{7}$.

Варіант 2

1.Дано відрізок, координати кінців якого точки A(5; -9), B(-1; 5). Знайти координати середини відрізка.

2. Вкажіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $12x + 3y - 6 = 0$.

3. Знайдіть відстань між точками M (5; 2) і N (7; 8).

4. Коло задане рівнянням $(x-5)^2+(y+4)^2=8$. Знайти координати його центра і радіус.

5. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки (5; -2) і (-3; 1).

Відповідь.

1. (2;-2). 2. k=4. 3. MN = $\sqrt{40}$.

4. (5;-4), R=2$\sqrt{2}$. 5. $y=-0.375x-0.125$.

Додаток Б

Тестові завдання

1. Середина відрізка з кінцями К(-6;8) і М(2;-2) має координати: А)(-2;3); Б)(-4;6); В(-8;10); Г(-4;5).
2. Відстань між точками Р(5;3) і С(2;-1) дорівнює... А)53; Б) √53; В)5; Г) √13.
3. Рівняння кола з центром у точці В(2;-1) і радіусом 3 має вигляд...

А)$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

Б)$(x-2)^2+(y+1)^2=3$

В)$(x+2)^2+(y-1)^2=3$

Г)$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

4. Основа перпендикуляра, опущеного з точки А(-5;4) та вісь Ох, має координати...

А)(0;-5); Б)(0;4); В)(-5;0); Г)(4;0)

5. Довжина медіани ВМ трикутника АВС з вершинами А(-3;3), В(4;1) і С(3;5)дорівнює...

А)5; Б) √65; В)65; Г)25.

6. Точка К, яка належить осі абсцис і рівновіддалена від точок А(-1;4) і В(5;2) має координати...

А) (-5;2); Б) (-10;4); В) (-4;10); Г) (-2;5).

7. Середина відрізка з кінцями N(-8;6) і F(-2;2) має координати... А) (-10;8); Б)(-3;2); В)(-5;4); Г)(-4;5).

8.Відстань між точками К(11;-1) і В(10;1) дорівнює... А) 1; Б) √21; В) 21; Г) √5.

9.Рівняння кола з центром у точці В(-3;1) і радіусом 4 має вигляд... А)$(x+3)^2+(y-1)^2=16$;

Б)$(x-3)^2+(y-1)^2=4$;

В)$(x-3)^2+(y+1)^2=16$;

Г) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

10.Основа перпендикуляра, опущеного з точки А(4;-5) на вісь Оу, має координати...

А)(0;-5); Б)(0;4); В)(-5;0); Г(4;0).

11.Довжина медіани AF трикутника ABC з вершинами A(0;-1), B(2;1) і C(-2;3)дорівнює...

А) 9; Б)5; В)25; Г)3.

12.Точка А, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок M(-1;2) і N(5;4),має координати...

А)(9;0);Б)(2;3); В)(0;9); Г)(4;2)

Відповідь.

Завдання	Правильна відповідь
1	А
2	В
3	Г
4	В
5	А
6	А
7	В
8	Г
9	А
10	А
11	Г
12	В

Додаток В

Конспект уроку

Тема уроку. Відстань між двома точками площини із заданими координатами.

Мета уроку: повторити, узагальнити та систематизувати знання з теми «Прямокутна система координат»; узагальнити і систематизувати вміння будувати точки із заданими координатами на координатній площині та знаходити координати точок за їх зображенням. Працювати над засвоєнням учнями змісту теореми, що виражає формулу відстані між двома точками в прямокутній системі координат, а також способу її доведення, формувати в учнів уявлення про сферу застосування формули відстані між двома точками, вміння відтворювати вивчену формулу, записувати її відповідно до умови задачі, а також використовувати для розв'язування задач на обчислення.

Розвивальна: розвивати творчі пізнавальні здібності та навички учнів; прищеплювати вміння спілкуватися для здійснення спільної діяльності; аналізувати, робити висновки; розвивати уяву.

Виховна: сприяти вихованню відповідальності учнів за результати виконання завдань, сприяти розвитку комунікативних умінь, взаємоповаги, взаємодопомоги, почуття колективізму, культуру поведінки, виховувати повагу до пам'яті видатних діячів в області математики.

Форми роботи на уроці: індивідуальна, групова, робота в парах.

Міжпредметні зв'язки: історія, інформатика.

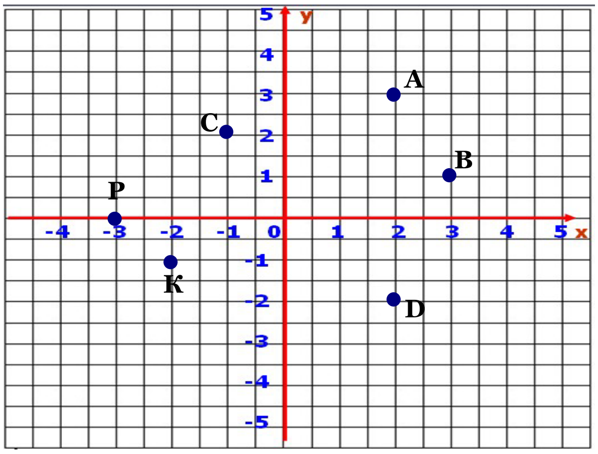
Хід уроку

1.Повідомлення теми уроку і епіграфа.

2. Планування очікуваних результатів.

3.Актуалізація опорних знань і умінь учнів

У якої з точок неправильно позначені координати(**за комп'ютером):**



А (2;3); В (3;1); С (-1;2); D (-2;2); Р (0;-3); К (-2;-1)

(Це точки D та Р)

Встанови відповідність за допомогою стрілок:

А (-145; 200)	ІІІ чверть
D (- 139;- 247)	ІІ чверть
С (218; 203)	ІV чверть
В (358; - 422)	І чверть

Побудувати точки

А(3;-1), В(4;2), С(-3;-2), К(-2;0), Д(-1;-4).

Продовжи речення.

- Осі координат розташовані одна відносно іншої…(перпендикулярно)
- Горизонтальна вісь називається…(вісь абсцис)
- Вертикальна вісь називається…(вісь ординат)
- Точка перетину осей – це..(початок координат)
- Координати точки – це…(абсциса, ордината)
- Координатних чвертей є (4)
- Прямокутну систему координат по іншому називають…(Декартовою)

Історична довідка.

Завдання. В якому році було введено поняття прямокутної системи координат? (1637)

Скільки років тому було введено це поняття?(378)

Рене Декарт народився у Франції 31 березня 1596 року. Він отримав від батька невеликий спадок, який дозволив йому присвятити своє життя науці та мандрівкам. З 1604 по 1612 роки Декарт навчався в єзуїтському коледжі, де отримав добру гуманітарну та математичну освіту. Він проявляв великі здібності до філософії, фізики та психології. Через слабке здоров'я директор коледжу звільнив Декарта від відвідування ранкових богослужінь і дозволив йому залишатися у ліжку до полудня — звичка, яка збереглася у Декарта на все життя. Після коледжу Декарт навчався в університеті Пуатьє, отримавши в 1616 диплом бакалавра і ліцензію правника, виконуючи волю батька, який бажав, щоб син став юристом. Коли йому виповнився 21 рік, він кілька років служив добровольцем в арміях Голландії, Баварії та Угорщини.. У 1629 році переїхав до Нідерландів. Декарт надавав великого значення практичному використанню наукових знань. Так, його цікавило, яким чином можна зберегти волосся від посивіння. Він проводив також досліди з кріслом-гойдалкою. Для продовження занять математикою Декарт повернувся до Парижа.

У 1637 році написав математичний трактат « Геометрія», в якому були закладені основи аналітичної геометрії. Він показав, як завдяки системі координат можна переходити від точок до числа, від ліній до рівнянь, від геометрії до алгебри. Систему координат, якою ми сьогодні користуємося, називають Декартовою. Це пов’язано з тим, що Рене Декарт у своїй роботі “ Міркування про метод» винайшов нову зручну буквену символіку, а саме: ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x,y,z, а коефіцієнти – першими а,в.с.

- А яких українських математиків ви знаєте? (Михайло Остроградський, Георгій Вороний, Михайло Кравчук, Володимир Левицький, Віктор Глушков,Мирон Зарицький**).**

4. Пояснення нового матеріалу. Перед нами стоїть завдання: дослідити можливість визначення відстані між двома точками через їхні координати в прямокутній системі координат.

Дано: А (x_1; y_1) В (x_2; y_2) **Знайти: АВ** (виразимо відстань між точками через координати цих точок)

Розв'язання

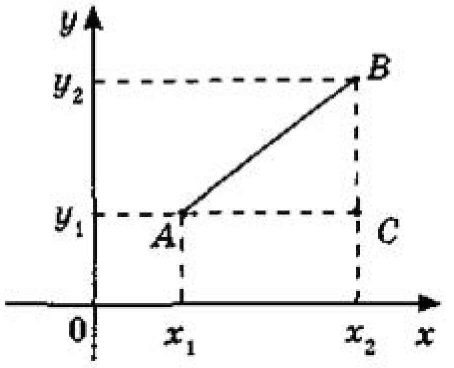


Рис. 137

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$.

Проведемо через точки А і В прямі, паралельні осям координат і позначимо через точку С точку їх перетину.

- Яка фігура утворилася?

- Який трикутник?

- Як називаються сторони трикутника?

- Як знайти гіпотенузу?

Відстань між точками С і А дорівнює $Ix_2 - x_1I$, а відстань між точками В і С дорівнює $Iy_2 - y_1I$

За т. Піфагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$ $AC = | x_2 – x_1 |$, $BC = | y_2 – y_1 |$. За теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ або $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$,

$AB = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Отже, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Читання формули. Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.

Хоча формула для відстані між точками виведена у припущенні $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$, вона залишається правильною і для інших випадків. Справді, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, то відстань між точками дорівнює $Iy_1 - y_2I$. Такий самий результат дістанемо і за формулою. Аналогічно розглядається випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 = y_2$. Якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, то точки А і В збігаються і за формулою відстань між ними дорівнює 0.

Іноді відстань між точками позначають $\mathbf{d^2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

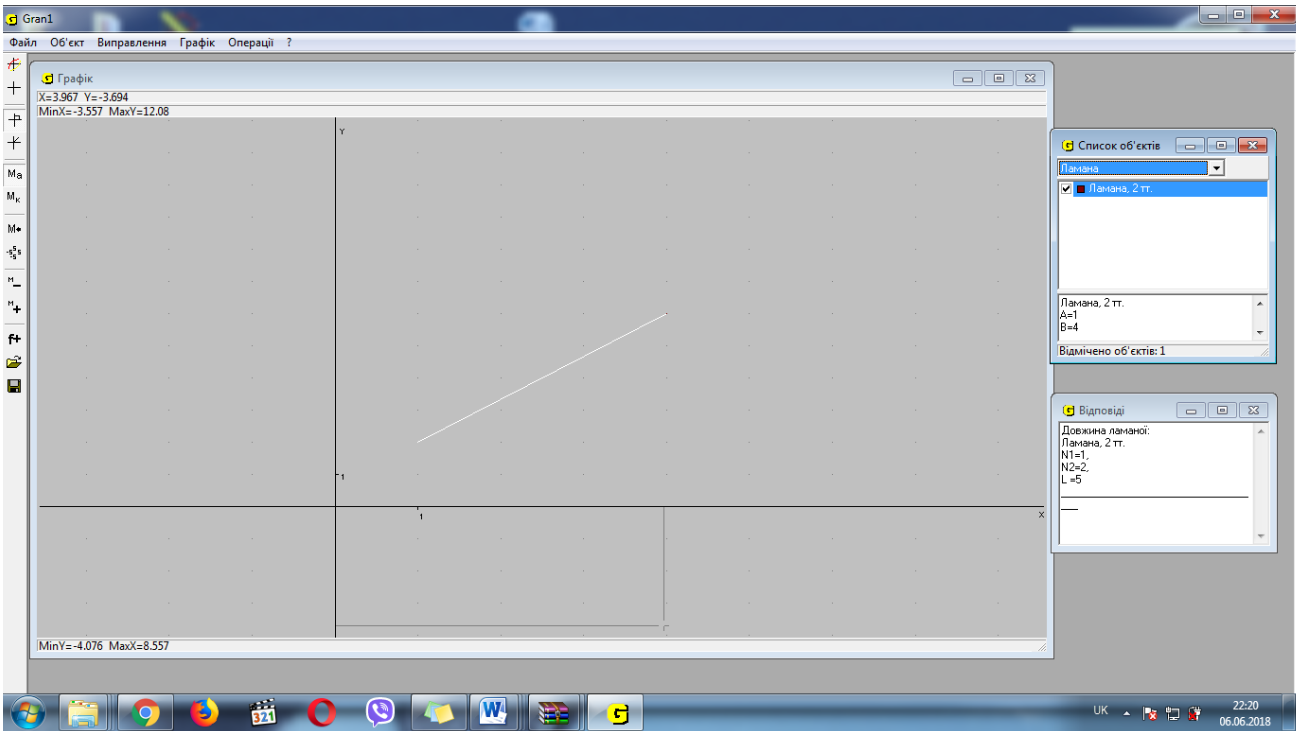
5.Засвоєння нових знань і вмінь.

Усно

Знайти відстань між точками: А(1)і В(5); А(-5)і В(-1); А(-3)і В(5); А(а)і В(в)

Знайти відстань між двома точками.

А(1;2) і В(4;6)



Робота в парах

1. Знайти відстань А(1;7) і В(-5;-1).

$$\sqrt{(-5-1)^2+(1-7)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = \\ = 6\sqrt{2};$$

2. Знайти відстань А(-1;3) і В(3;0).

$$\sqrt{(3+1)^2+(0-3)^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5;$$

3.Знайти відстань від точки А(2;4), до початку координат. Порівняти, яка відстань є більшою.

$$\sqrt{(0-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

4.Знайдіть відстань від точки А(-5; 12) до початку координат.

$$\sqrt{(0+5)^2+(0-12)^2}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

Колективна робота

Запитання:

-Який трикутник називається рівнобедреним? (У якого рівні дві сторони)

- Як називаються рівні сторони?

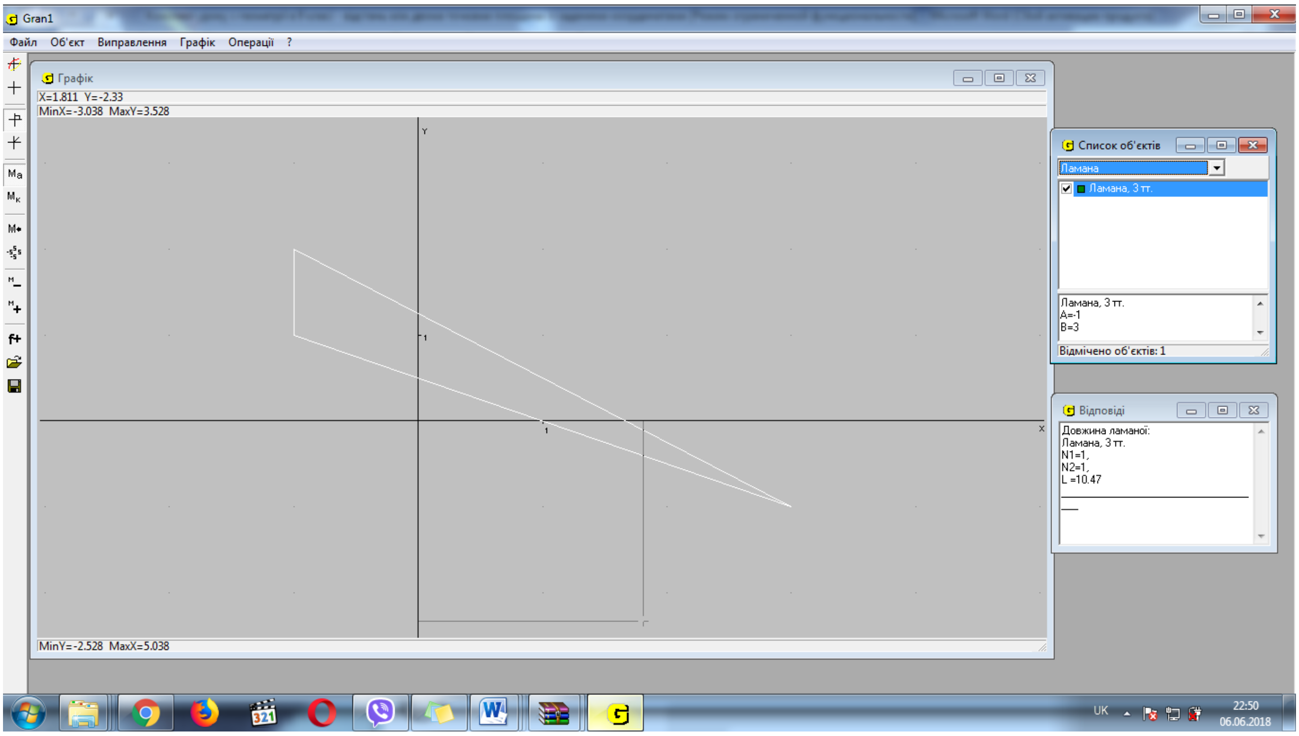
- Як називається третя сторона?

- Що ми знаємо ще про рівнобедрений трикутник?

Робота в групах (з використанням програми GRAN-1).

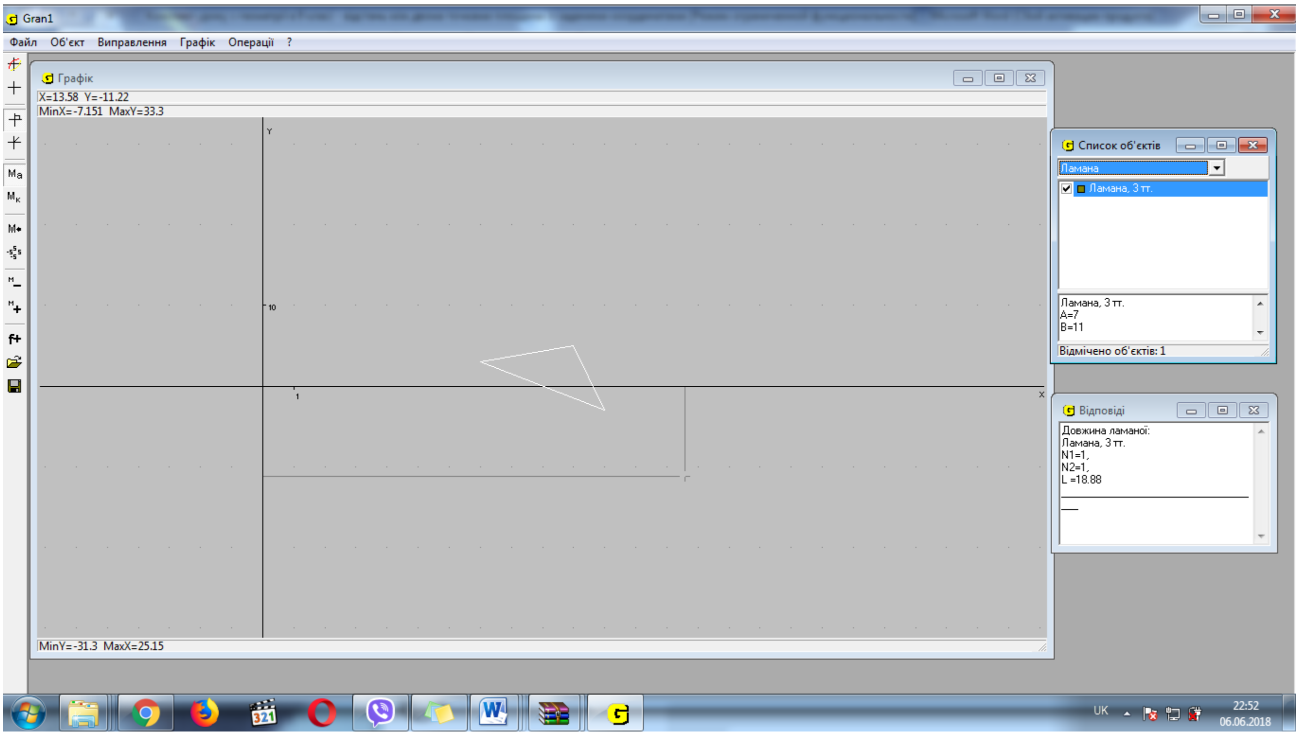
1 група.

1.Побудуйте і знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є точки А(-1;2), В(3;-1), С(-1;-1).



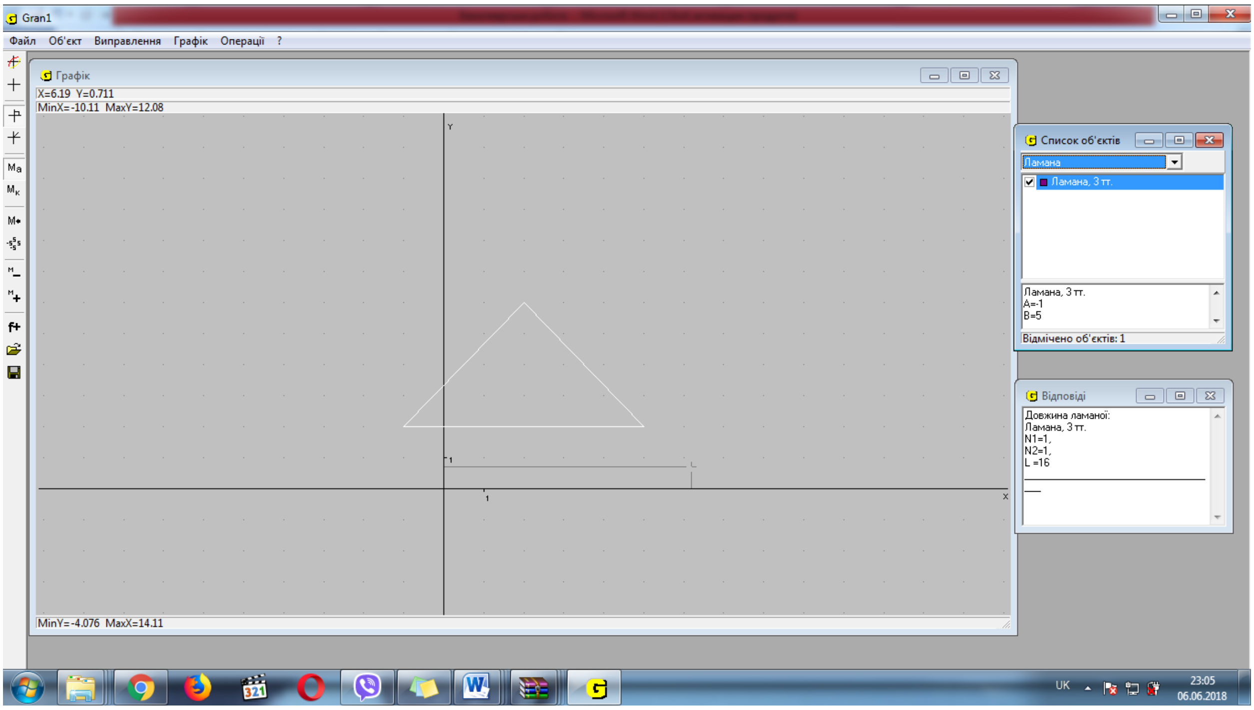
2 група.

1. Побудуйте і знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є точки A(5;-4), B(-1;4), C(5;4).



3 група.

1. Побудуйте і знайдіть периметр ламаної ABC, вершинами якої є точки A(-1;2), B(2;6), C(5;2).



6. Підсумок уроку.

Гра « Так чи ні». Яке з наведених тверджень є правильним?

- Зазвичай на координатній площині зображають двоє осей.
- Вісь ОХ називають віссю ординат.
- Вісь ОУ називають віссю абсцис.
- Друга координата точки називається ординатою.
- Якщо точка А лежить на осі ординат, то її абсциса дорівнює 0.
- Якщо точка А збігається з початком координат, то її обидві координати дорівнюють 0.

-Точки осі абсцис мають ординати, що дорівнюють 0.

- Точка В(-2;-2) належить 2 чверті.
- Точка з координатами (5;0) віддалена від початку координат на відстань 5 одиниць.

Рефлексія

-Чи справдилися ваші очікування?

- Я дізнався про…
- Я повторив…
- Мені було важко…
- Я можу пояснити…
- Мені сподобалося…

7. Домашнє завдання

1. Вивчити формулу для знаходження відстані між двома точками, які задано координатами.
2. Розв'язати задачі.
   1) Знайдіть радіус кола, центром якого є точка *M*(-4; 3), а точка *A*(-4; 2) лежить на колі.

$$\sqrt{(-4+4)^2+(2-3)^2}=\sqrt{0^2+(-1)^2}=\sqrt{0+1}=1$$

   2) Знайдіть периметр трикутника *ABC,* якщо *A*(-1; 3), *B*(3; 5), *C*(3; 2).

$$\sqrt{(3+1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20};$$

$$\sqrt{(3-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{0+9}=3;$$

$$\sqrt{(-1-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17};$$

$$P=\sqrt{20}+3+\sqrt{17}.$$

Висловлювання Декарта

- Бог може все, що я вважаю можливим
- Прагни перемагати швидше самого себе, ніж долю, і змінювати своє бажання, ніж - порядок у світі.
- Здоровий глузд — найбільш розповсюджена річ у цьому світі, оскільки кожен думає, що він наділений ним повною мірою.
- Прагнення відмінностей при нестачі характеру згинає одну людину перед іншою.
- Ми можемо давати собі звіт щодо стану нашого здоров'я, але щодо стану розуму — ніколи.
- Я мислю — отже існую.
- Правильно визначайте слова, і ви позбавите світ від половини непорозумінь.
- Всі науки настільки пов'язані між собою, що легше вивчати їх всі відразу, ніж якусь одну із них окремо від інших.
- Мало мати хороший розум, головне — правильно його використовувати.
- Розпач — це страх без надії.

Додаток Г

Контрольна робота

Декартовові координати на площині

Тематична контрольна робота соадається з трьох рівнів. Завдання 1-3 тестові і оцінюються по 1 балу; завдання 4-6 — оцінюється 2 балами; завдання 7— 3 бали, всього — 12 балів.

Варіант 1

І рівень.

1. Знайдіть координати точки В - середини відрізка АС, якщо С (0; 4), А (2; 8).

2. Записати кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $y = 3x+5$.

3. Вказати координати центра і радіус кола, заданого рівнянням

$(x – 3)^2 + (y – 4)^2 = 4$.

ІІ рівень.

4. Знайдіть відстань між точками Р (-3; 5) і Q (1; 2).

5. Складіть рівняння кола з центром в точці О (2; - 4) і $R=\sqrt{5}$.

6. Вкажіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $2x – 4y – 7 = 0$.

ІІІ рівень.

7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки (0; - 3) і (- 2; 1).

Варіант 2

I рівень.

1. Знайдіть координати точки К - середини відрізка АВ, якщо А (1; 0), В (5; 14).

2. Записати кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $y = 2x - 3$.

3. Вказати координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$.

II рівень.

4. Знайдіть відстань між точками F (3; 0) і E (-2;12).

5. Складіть рівняння кола з центром в точці O (-1; 9) і $R = \sqrt{7}$.

6. Вкажіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $3x + 4y - 9 = 0$

III рівень.

7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки (2; 3) і (4; 1).

Відповідь.

Завдання	1	2	3	4	5	6	7
Варіант 1	B(1;6)	k=3	r=2; O(3;4)	5	$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$	-2	y=-2x-3
Варіант 2	K(3;7)	k=-2	r=3; O(2;5)	13	$(x+1)^2 + (y-9)^2 = 7$	1	y=-x+5