Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота
магістра
на тему

Методичні особливості навчання геометрії в профільній школі(академічний рівень)

Виконав: студент 2 курсу магістратури,
групи М-М-61
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Тіяра Микола Русланович

Керівник: к.п.н., доц., кафедри математики з МВ
Белешко Дмитро Тимофійович

____

Рецензенти: докт. техніч. наук, проф.
Турбал Юрій Васильович

____

кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор
кафедри вищої математики
Петрівський Борис Петрович

____

Рівне – 2018 року

Зміст

Вступ

Актуальність.

Теоретичним дослідженням наукової роботи студентів різних спеціальностей присвячені праці М. Братко, О. Колесников, А. Конверський, В. Круглик, В. Марцин, І. Рассохи, Г. Цехмістрової. Питаннями наукової фахової підготовки майбутніх учителів математики в різні часи займалися відомі науковці та методисти: В. Бевз, Ю. Колягін, О. Мордкович, З. Слєпкань, М. Шкіль, Н. Шунда. На сучасному етапі окремі аспекти професіоналізації підготовки майбутніх учителів математики в Україні досліджують такі математики-методисти: М. Бурда, Л. Білоусова, С. Семенець, О. Скафа, Н. Тарасенкова, О. Чашечникова, В. Шарко та інші.

Система загальної середньої освіти України – в процесі впровадження профільного навчання в старшій школі. Профілізація навчання старшокласників є надзвичайно важливим кроком у реформуванні освіти, зокрема й математики.

В сучасному світі математика займає провідне положення у житті суспільства. Процес математизації знань йде безперервно. Причина в цьому в величезних можливостях її використання.

Геометрія, як невід'ємна частина математики, має навчати учнів правильного сприймання навколишнього світу. Це основне положення, яким має керуватися вчитель при проектуванні навчальної діяльності. Ще вагомішим є це положення для навчання стереометрії у профільних класах природничо-математичного спрямування.

Одне з найважливіших завдань навчання стереометрії – формування вмінь розв'язувати задачі. Ця діяльність і є засобом засвоєння понять і фактів, і кінцевою метою навчання стереометрії. Тому методика формування вмінь набувати стереометричних знань і застосовувати їх є важливою складовою методики навчання стереометрії.

Геометричні задачі мають значні відмінності від алгебраїчних, які суттєво ускладнюють формування вмінь їх розв'язувати. Стереометричні задачі мають свої специфічні особливості порівняно з планіметричними, чим і зумовлені труднощі їх розв'язуванні і, відповідно, при навчанні їх розв'язування.

Перша і найголовніша з них пов'язана з побудовою рисунка до задачі. Це один з найважливіших і найскладніших видів моделювання у стереометрії. Рисунок до задачі – графічна модель геометричної конструкції, з якою пов'язана задача і яка будується для пошуку розв'язання задачі і його обґрунтування. Якість цієї моделі визначає і якість розв'язання. Неправильна модель може привести і до неправильного розв'язання, неповна або не наочна модель не полегшує його пошук. Зображення просторових фігур у стереометрії часто виконується умовно. Формування вмінь будувати правильний рисунок до задачі має постійно бути у полі зору вчителя.

Характер традиційного фонду задач потребує суттєвого перегляду. Треба уникати штучних і надскладних конструкцій. Сам процес розв'язування задачі має виховувати якості дослідника, конструктора та винахідника. У цьому плані дуже виграшними є сюжетні задачі, в яких всебічно вивчається певна конструкція чи фігура, зокрема перерізи, симетрії, питання оптимізації і в яких діяльнісний підхід відіграє вирішальну роль.

Ще одним важливим завданням навчання стереометрії, а можливо, і найважливішим є формування в учнів узагальнених прийомів діяльності – методів дослідження, доведення, розв'язування задач.

Навчання стереометрії може суттєво впливати на формування загальних методів пізнання, таких як: спостереження, моделювання, порівняння, аналіз і синтез, узагальнення і спеціалізація, абстрагування і конкретизація та ін. Також, воно має величезний потенціал у розвиванні вмінь користуватися методами логічного виведення, наприклад, методом від супротивного, методом побудови ланцюжка еквівалентних тверджень, а також загально математичних тверджень (векторно-координатний метод, метод геометричних перетворень, тощо).

При вивченні стереометрії постійно доводиться спиратися на зв'язок між планіметричними і стереометричними поняттями та фактами. Необхідно максимально використовувати аналогію, а поряд з тим потрібно попередити бездумне перенесення результатів, що стосуються площини, у простір.

Однією із найголовніших умов профільного навчання є профільна орієнтованість навчально-методичних засобів навчання. Вона реалізується у змісті підручника, рівні викладу матеріалу, характері прикладів та ілюстрацій, диференційованості дидактичних матеріалів. Загальноосвітнє значення стереометрії переважає особливості профільної спрямованості, яка може бути забезпечена додатковими відомостями, задачами, рівнем засвоєння видів діяльності. Також, хочеться зазначити, що важливим етапом навчального процесу , особливо при профільному навчанні, є підготовка до навчання стереометрії і організація повторення планіметрії – найважливіша складова цього етапу. При вивченні геометричних тіл значна увага приділяється найважливішим видам конструювання тіл, дослідження їхніх властивостей, а це в свою чергу сприяє розв'язанню усіх трьох правил навчання геометрії – розвитку логічного мислення, забезпеченню практичної спрямованості навчання, формування просторового мислення.

Зважаючи на практичну необхідність, недостатню наукову розробленість та соціальну значимість було обрано тему роботи: «Зміст і методика проведення курсу за вибором «Методичні особливості навчання геометрії в профільній школі(академічний рівень)»» .

Об'єкт дослідження. Процес навчання учнів профільної школи розв'язувати геометричні задачі.

Предмет дослідження. Удосконалення змісту та методики курсу за вибором «Методичні особливості навчання геометрії в профільній школі(академічний рівень)»

Мета дослідження. Полягає у тому, щоб теоретично обґрунтувати і експериментально перевірити зміст і методику проведення курсу за вибором «Методи розв'язування геометричних задач в профільній школі».

Гіпотеза дослідження. Навчання учнів профільної школи розв’язуванню стереометричних задач досягне більш високого рівня в порівнянні зі спостережуваним в досвіді переважної більшості, якщо:

а) зміст курсу буде будуватися за проблемно-тематичним принципом у вигляді цільової навчальної системи задач;

б) форми і методи навчання учнів профільної школи розв’язувати геометричні задачі будуть будуватись на основі технологій рівневої диференціації в особисто-орієнтованому навчанні.

Відповідно до предмета, мети й гіпотези дослідження визначено такі **завдання:**

- вивчити науково-методичну літературу з предмету дослідження;
- обґрунтувати загальні засади профільної освіти;
- проаналізувати роль і місце задач у навчанні математики;
- розглянути класифікацію стереометричних задач;
- проаналізувати методи та способи розв’язування стереометричних задач;
- розробити, теоретично обґрунтувати і експериментально перевірити систему вправ до курсу за вибором.

Наукова новизна. Обґрунтувати зміст та методику проведення курсу за вибором «Методи розв’язування геометричних задач в профільній школі».

Методи дослідження. Теоретичні – системний аналіз психолого-педагогічної і навчально-методичної літератури з проблеми дослідження, моделювання педагогічних процесів.

Емпіричні – спостереження, бесіди з вчителями і викладачами, вивчення і узагальнення досвіду загальноосвітніх закладів щодо реалізації профільного навчання з математики.

Теоретичне значення роботи полягає в обґрунтуванні та розробці курсу за вибором «Методичні особливості навчання геометрії в профільній школі(академічний рівень)».

Практична цінність. Робота може бути використана вчителями математики для проведення занять з математики у профільних класах, для вивчення та застосування методів до розв’язання стереометричних задач, а також для реалізації проекту зі створення і апробації методичного комплексу для вчителів математики у профільних групах учнів.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, додатку та списку використаних джерел.

Перший розділ роботи, який називається „Профільне навчання в загальноосвітніх навчальних закладах”, починається зі сторінок історії, згадуються світові тенденції диференціації навчання, обґрунтовуються загальні засади профільної освіти.

У другому розділі під назвою „Зміст та структура задачі. Класифікація стереометричних задач та методи їх розв’язування» розглядається зміст та структура задачі, розглядається поняття «задача» в психології та дидактиках різних науковців. Також в цьому розділі розглядається класифікація стереометричних задач.

У третьому розділі роботи – «Зміст і методика курсу за вибором «Методичні особливості навчання геометрії в профільній школі(академічний рівень)»» – розроблена авторська програма курсу за вибором, рівневої особистісно-орієнтованої розглядаються методичні рекомендації учням щодо розв’язування стереометричних задач, а також рекомендації вчителям щодо формування вмінь в учнів розв’язувати задачі. Крім того розроблено систему вправ з планіметрії, як актуалізації знань зі стереометрії, систему вправ з стереометрії, а також систему усних вправ до даної теми.

РОЗДІЛ І. ПРОФІЛЬНЕ НАВЧАННЯ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

1.1. З історії профілізації вітчизняної старшої школи

Система загальної середньої освіти України сьогодні на порозі нових суттєвих змін - впровадження профільності навчання у старшій школі. Профілізація навчання старшокласників є надзвичайно вагомим кроком у реформуванні освіти в цілому. Перехід до профільного навчання розпочнеться у 2007 році, але 2004 н.р. розпочався підготовчий період переходу до профільної старшої школи.

На території нашої держави відбувається вже десята спроба профілізації шкільної освіти. Першу спробу можна віднести до 1864 року, коли за ініціативою тодішнього міністра освіти Російської імперії О.В.Головніна було створено три типи середніх загальноосвітніх навчальних закладів: класичні з двома древніми мовами; класичні з латинською мовою; реальні училища. Вихованців двох перших готували до продовження навчання у вищих закладах освіти, а третіх - до вступу у спеціалізовані навчальні заклади.

Наступники О.В.Головніна кілька разів намагалися внести зміни до цієї моделі середньої школи Російської імперії, складовою якої була більша частина сучасної України, аж до того часу, поки у 1902 року після реформ, що проводилися Г.Е.Зенгером, утвердилися три основні типи середніх загальноосвітніх навчальних закладів - гімназії, реальні та комерційні училища. Ще одна спроба профілізації школи була здійснена в 1914 р. міністром народної освіти П.М. Ігнатьєвим, який запропонував створити єдину середню школу із 7-річним терміном навчання. Після 4 класу школи учні визначали один із трьох напрямків продовження навчання: старогуманітарний (посилене вивчення древніх мов); новогуманітарний (вивчення словесності, історії, мов); реальний (вивчення математики, природничих наук).

У 1917 - 1918 роках українські освітянські діячі також висловлювали думки щодо створення профільної школи. Ще на II Всеукраїнському учительському з'їзді у грудні 1917 році було прийнято резолюцію про те, що загальноосвітньою школа може бути лише впродовж семи років навчання, а потім „курс останніх трьох років потрібно приладнати до вищих шкіл”. Ця ідея знайшла відображення в Проекті єдиної школи, що був затверджений уже еміграційним урядом України в Тарнові 17 червня 1921 року.

Після третього встановлення радянської влади на початку 20-х років XX ст. тодішній уряд України відмовився від російського шляху створення єдиної школи, який передбачав три напрями навчання для старших класів: гуманітарний, природничо-математичний і технічний. Натомість створювалася семирічна школа соціального виховання, випускники якої мали обов'язково закінчити дво- або трирічну професійну школу.

Після доби НЕПу семирічні школи в містах стали набирати так званого індустріального ухилу, перетворюючись на „фабрично-заводські семирічки”, а в селах - на агрономізовані семирічні школи (сільськогосподарський ухил). У 1929 році така профілізація була оголошена „ударною справою” і в 1931 році успішно „здійснена”. Підготовка до майбутньої трудової діяльності здійснювалась професійними школами різних типів, де навчались учні після закінчення семирічної трудової школи. Найпоширенішими були індустріально-технічні, сільськогосподарські, соціально-економічні, медичні, мистецькі, ремісничо-промислові, будівельні, транспортні школи [1; 7].

У другій половині 30-х років система освіти уніфікується, і профшколи реорганізують у середні спеціальні навчальні заклади. Відкриваються профільні школи - фабрично-заводського учнівства (ФЗУ) та школи сільської молоді (ШСМ) для підлітків. Пізніше, намагаючись максимально уніфікувати школу, більшовицька партія прийняла рішення про запровадження єдиних для всієї країни навчальних планів та програм. Про „профілі” в старшій школі не говорили аж до середини 50-х років, коли АПН РСФСР запропонували в старших класах загальноосвітніх шкіл три напрями навчання: фізико-математичний і технічний; біолого-агрономічний; соціально-економічний і гуманітарний.

У 1960 - 1980-х роках існували спеціалізовані загальноосвітні школи, класи та факультативи с поглибленим вивченням окремих предметів. Факультативні заняття організовувалися „за вибором учнів для поглиблення їхніх знань з основ наук та розвитку інтересів і здібностей”. Для факультативних занять розроблялися програми двох типів: „додаткові матеріали до систематичних курсів, які мають вивчатися паралельно із заняттями за основним навчальним планом” і „спеціальні курси, що розширюють і доповнюють систематичні курси основ наук, предмети естетичного виховання, трудові й політехнічні практикуми”. Ця діяльність із партійною наполегливістю була розгорнута в школах УРСР. Лише в Київській області в 1968/1969 навчальному році працювало близько 2 тисяч факультативних груп. Окрім цього, в тому ж навчальному році в Україні діяла 51 школа з поглибленим вивченням окремих предметів.

У той же період особлива увага приділялась діяльності навчально-виробничих комбінатів (НВК), які стали центрами трудового і професійного навчання. У 1985 році був розроблений і затверджений Тимчасовий перелік професій, за якими проводиться підготовка учнів у міжшкільних НВК. З 1987 року у школах для учнів 7-8 класів було введено навчальний предмет „Основи виробництва. Вибір професії”. Метою цього курсу була допомога учням у виборі профілю професійної підготовки. Наприкінці 80-х - початку 90-х років в Україні з'являються нові типи освітніх закладів (гімназії, ліцеї, коледжі), які зосереджують зусилля учнів на поглибленому вивченні окремих предметів, котрі потрібні їм для подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

Освітою через профільне навчання у загальноосвітніх навчальних закладах у 2001/2002 навчальному році було охоплено 401286 учнів (6,3 відсотка від загальної кількості учнів), у 2003 році - 430569 учнів (відповідно - 6,9 відсотка). Найвищій показник вибору учнями профілю навчання в

2002/2003 навчальному році простежується на користь суспільно-гуманітарного, інформатики та обчислювальної техніки, філологічного. Поступово створюються сприятливі умови для поглибленого вивчення предметів у сільських школах [39; 12].

1.2. Зарубіжний досвід організації профільного навчання у старшій школі

Розвиток світового і, зокрема, європейського освітнього простору об'єктивно потребує від української школи відповідної реакції на процеси реформування загальної середньої школи, що відбуваються у провідних країнах світу. Загальною тенденцією розвитку старшої профільної школи є її орієнтація на широку диференціацію, варіативність, багатопрофільність, інтеграцію загальної і допрофесійної освіти.

Диференціація - одна з ключових проблем організації сучасної школи. Вона є об'єктом гострої полеміки серед педагогів у багатьох країнах світу. Різні погляди на ідею диференційованого навчання відображають дві протилежні тенденції у розвитку сучасної освіти. Одна з них - інтеграція, яка зумовлена взаємозв'язком різних наукових дисциплін, що потребує від кваліфікованого працівника широкої загальної культури й обізнаності у багатьох суміжних галузях.

Водночас існує й інша тенденція. Важливою умовою досягнення успіху у будь-якій діяльності вважається спеціалізація працівника. Послідовники цієї тенденції справедливо вважають, що спеціалізація не тільки сприяє розвитку науки, культури, а й відповідає різноманітності задатків і здібностей людини, її індивідуальним нахилам до того чи іншого виду діяльності.

Більшість педагогів світу є прихильниками саме цієї тенденції, про що свідчить той факт, що диференціація навчання є одним із основних організаційних принципів середньої загальноосвітньої школи зарубіжжя впродовж багатьох десятиліть. У Франції вона існує півтора століття, нагромаджено величезний досвід впровадження її у шкільну практику [39, с. 19].

Аналізуючи систему освіти у Франції, хочеться підкреслити, що шкільне навчання здійснюється за схемою 6+4+3, в трьох різних навчальних закладах: початкова школа, коледж та ліцей. Старша (профільна) школа представлена спеціальним типом закладу – ліцеєм. Право на навчання в ліцеї має право кожен громадянин, що закінчив школу, в Україні аналогом навчання в коледжі є базова загальна освіта. Навчання в ліцеї поділяється на три види, проте нас цікавить два особливі види: загальне та технологічне, де реалізуються ідей профільного навчання. На відміну від Української профілізації шкіл, у Франції профілі поділяються за п'ятьма основними профілями:

- загального типу;
- політехнічного з орієнтацією на третинний сектор економіки;
- політехнічний з орієнтацією на промисловий сектор;
- технологічний з орієнтацією на третинний сектор економіки;
- технологічний з орієнтацією на промисловий сектор економіки;

Проте, незважаючи на різні напрямки профілізації, кожен випускник повинен здати бакалавратський екзамен спрямований на конкретний сектор економіки або галузь науки, наприклад, в галузі лабораторних технологій, в галузі медично-соціальних наук, тощо.

Для визначення профілю навчання кожного учня складається спеціальна комісія, проте під час навчання в коледжі учням викладаються загальні науки, під час вивчення яких учні можуть зорієнтуватись, який напрямок їм подобається.[71]

В США профільна освіта відрізняється від системи освіти у Франції та Україні. Структура школи: 6+3+3 або 8+4 (в залежності від штату в котрій знаходиться школа). Профільна освіта здійснюється на останніх двох або трьох роках навчання. За три роки до закінчення школи учні діляться на три профілі: академічний, загальний та технологічний і їх співвідношення 40:30:25.

Академічний – веде до вступу у ВНЗ; загальний - дає неакадемічну освіту і учні можуть працювати.

В старшій школі декілька обов'язкових предметів: англійська мова, всесвітня історія, математика, загальне природознавство та фізкультура. Існує велика кількість дисциплін, згрупованих в блоки, із яких учні повинні вибрати оди або два курси. Кожен курс оцінюється в 1 кредитну одиницю. Для отримання повної середньої освіти необхідно набрати від 16 до 25 кредитних одиниць.

Також можуть запропоновані блоки, що об'єднують економіку, право, соціологію та інші загальні науки. В останні роки великий інтерес викликають в учнів такі предмети як інформатика, інформаційні та комунікаційні технології. Для кожного учня складається навчальний план, потім, учні поділяються на групи (профілі): філологічний, суспільний, математичний, природничонауковому, інформаційному.

Учні неакадемічного профілю вивчають обов'язкові предмети, а також практичні курси – робота на комп'ютері (набір тексту), стенографія, тощо.

Окрім предметів, обов'язкових для вибору, також є ряд факультативів.

У Англії система освіти схожа до освітньої системи США. Проте, як і в кожній країні, є свої особливості. Структура школи: 6+5+2. Останні два роки неповної середньої школи формуються два профілі: «академічний» та «неакадемічний».

Повні середні школи (2 роки навчання) по суті готовлять учнів до вступу у ВНЗ. Навчання в них має спеціалізований характер. Учні навчаються за індивідуальними планами. В багатьох школах Англії в перший рік навчання є один обов'язковий для всіх предмет: загальногуманітарний курс, що включає елементи суспільствознавства, історії релігії, економіки, соціології. Як правило, школярі вивчають три предмети за профілем майбутнього ВНЗ. Це можуть бути: математика, фізика, хімія; фізика, біологія, екологія, тощо. Проте, це сприяє вузькій спеціалізації учнів і недостатньому загальному їх розвитку. Тому зараз можна вивчати не лише три профільні предмети, а й вибирати 1-2 додаткові предмети на вивчення.

Що стосується академічного профілю, то кількість основних дисциплін залежить від величини школи. Основні дисципліни представлені у вигляді окремих курсів. Таким чином, кожен учень складає свій набір курсів з допомогою тьютора. Отже, в повній середній школі Англії ведеться тільки академічне навчання, що спрямоване на вступ до ВНЗ. Як такі, профільні напрями відсутні через індивідуальність навчальних планів кожного учня.

Система освіти Німеччини представляє собою класичну структуру, що складається з початкової, середньої і вищої школи. На всіх рівнях цієї структури представлені як державні, так і приватні навчальні заклади, хоча кількість останніх незначна. Держава гарантує усім громадянам отримання обов’язкової середньої освіти, тому навчання у державних початкових і середніх школах є безкоштовним. У більшості випадків безкоштовним є і навчання у державних університетах. Середня профільна школа, що завершує повний курс середньої освіти є, одночасно, і підготовчим етапом до університету. У Німеччині існують також профільні школи, які дозволяють отримати закінчену професійну освіту (аналог нашого поняття "середня спеціальна освіта") і влаштуватись на роботу за спеціальністю. Загальна тривалість повного курсу середньої освіти у Німеччині (початкова і профільна школи включно) складає 13 років. Починаючи зі стадії, власне, середньої школи, вводиться багатоваріантність освіти: учні, окрім вивчення базових предметів, мають право самостійно обирати додаткові навчальні дисципліни.

Середні школи ФРН поділяються на п’ять основних типів: гімназія, реальна школа, головна школа, професіональна школа і загальна школа. Найбільш престижним типом середньої школи є гімназія, диплом якої дозволяє без вступних іспитів вступити на більшість факультетів університету. Як правило, гімназії спеціалізуються на гуманітарній освіті.

Реальна школа також володіє достатньо високим статусом і дає професійну освіту у галузі обслуговування, торгівлі і державної служби. Високий бал, отриманий за результатами навчання у реальній школі, дозволяє вступити до старшого класу гімназії, а потім - до університету. Головна школа призначена, в основному, для учнів, які не передбачають продовження своєї освіти в університеті. Професійна школа також орієнтована переважно на учнів, які прагнуть оволодіти тією чи іншою робочою професією і не планують отримувати вищу освіту. Загальна школа поєднує різні особливості гімназій і реальних шкіл, що дозволяє отримувати одночасно гуманітарну і технічну освіту. Учні загальних шкіл, які склали іспити за програмою гімназії, отримують можливість вступити до університету. [12]

Російська школа накопичила чималий досвід диференційованого навчання учнів. Перша спроба здійснення диференціації навчання у школі відноситься до 1864 р. Відповідний указ передбачав організацію семикласних гімназій двох типів: класична (мета - підготовка до університету) й реальна (мета - підготовка до практичної діяльності та до вступу у спеціалізовані навчальні заклади). Новий імпульс ідея профільного навчання одержала у процесі підготовки в 1915-16-х роках реформи освіти, що здійснювалась під керівництвом міністра освіти П. Ігнатьєва. За запропонованою структурою 4-7-і класи гімназії розділялись на три галузі: ново-гуманітарну, гуманітарно-класичну, реальну. У 1918 р. відбувся перший Всеросійський з'їзд працівників освіти й було розроблене Положення про єдину трудову школу, що передбачає профілізацію змісту навчання на старшій сходині школи. У старших класах середньої школи виділялись три напрями: гуманітарний, математичний і технічний. У 1934 р. ЦК ВКП(б) та Рада Народних комісарів СРСР приймають постанову «Про структуру початкової та середньої школи в СРСР», що передбачає єдиний навчальний план та єдині навчальні програми. Однак уведення на всій території СРСР єдиної школи згодом висвітило серйозну проблему: відсутність наступності між єдиною середньою школою та глибоко спеціалізованими вищими навчальними закладами, що змусило вчених-педагогів у який раз звернутись до проблеми профільної диференціації на старших ступенях навчання. Академія педагогічних наук у 1957 р. виступила ініціатором проведення експерименту, в якому передбачалось провести диференціацію у трьох напрямах: фізико-математичному й технічному; біолого-агрономічному; соціально-економічному й гуманітарному. З метою подальшого покращення роботи середньої загальноосвітньої школи в 1966 р. були введені дві форми диференціації змісту освіти за інтересами школярів: факультативні заняття у 8-10-х класах і школи (класи) з поглибленим вивченням предметів, що, постійно розвиваючись, збереглись аж до сьогодні.

Наприкінці 80-х - початку 90-х років у країні з'явились нові види загальноосвітніх установ (ліцеї, гімназії), орієнтовані на поглиблене навчання школярів за освітніми галузями, що вибираються ними, з метою подальшого навчання у ВНЗ. Також багато років успішно існували й розвивалися спеціалізовані (у певній мірі профільні) художні, спортивні, музичні й ін. школи. Цьому процесу сприяв закон Російської Федерації 1992 року «Про освіту», що закріпив варіативність і різноманіття типів і видів освітніх установ та освітніх програм. Таким чином, напрям розвитку профільного навчання в російській школі в основному відповідає світовим тенденціям розвитку освіти. Разом із тим мережа загальноосвітніх установ із поглибленим вивченням предметів (гімназії, ліцеї й ін.) поки розвинена недостатньо. Для більшості школярів вони малодоступні. Це веде до таких негативних явищ, як масове репетиторство, платні підготовчі курси при ВНЗ тощо. Профілізація навчання у старших класах школи повинна здійснити позитивний внесок у рішення подібних проблем.[63]

Цікавий є досвід профілізації шкіл Норвегії. Норвезька школа в останнє століття потерпіла багато змін. Структура школи подібна до структури шкіл Франції, Голландії, Шотландії, Фінляндії, Англії тощо, вона поділяється на основну та Старшу школу. Нас цікавить саме Старша профільна школа. Реформа 1994 року збільшила термін навчання в основній школі до 10 років, а навчання в Старшій профільній школі стало загальнообов’язковим для всіх без винятку. Основним принципом роботи норвезької Старшої профільної школи полягає в тому, що вона здійснює свою діяльність на єдиному принципі, що забезпечує рівні права для всіх учнів. Рівноправність забезпечує єдиний стандарт освіти на всій території країни, тобто роботу шкіл за єдиним навчальним планом та за єдиною програмою по всіх предметах. Наступною важливою особливістю норвезької Старшої школи є те, що всі вони є профільними і пропонують учням вибір курсу навчання – академічний або професійний. Навчання за академічним напрямом проводиться 3 роки, а професійному 4 роки, з практикою на підприємстві.

Кожна Старша профільна школа пропонує широкий спектр загальноосвітніх профілів (фізико-математичний, природничий, філологічний, суспільний) і 4-5 професійних профілів із 14 існуючих. Кожен учень має право вибрати той профіль навчання в Старшій школі, який подобається і після здачі відповідних вступних екзаменів навчається.

1-й рік навчання: базовий курс, що включає тільки загальні предмети;

2-й та 3-й рік навчання: профільне навчання, що поєднує в собі ряд загальнообов’язкових предметів і поглиблених курсів за вибором учнів.

В загальному, в норвезьких Старших профільних школах панує атмосфера партнерства, взаємної поваги, співробітництва та відкритості. Учителі та учні відчувають себе учасниками освітнього процесу. [34]

Початковий етап диференціації починається в старших класах неповної середньої школи, де вона має попередній, орієнтовний характер. На старшому ступені середньої школи у більшості країн світу здійснюється профільна диференціація навчання. Учні навчаються у спеціалізованих секціях, відділеннях і серіях, які можна вважати аналогами профілів. Вся їх багатоманітність зводиться до двох напрямів - академічного (загальноосвітнього) та практичного (технологічного, допрофесійного).

Кількість обов'язкових предметів на старшому ступені середньої школи набагато менша, ніж в основній. Профільна диференціація навчання здійснюється за рахунок поглибленого вивчення навчальних дисциплін певного профілю. Учні академічних потоків керуються вимогами вищих навчальних закладів, навчальний план яких складається з традиційних загальноосвітніх дисциплін, що не виключає вибір нових навчальних курсів. Учні, які не орієнтуються на вступ до вищих навчальних закладів, обирають переважно навчальні курси практичного циклу, що в багатьох випадках не обмежує можливості продовження навчання [11].

Організація профільного навчання призводить до певного перевантаження навчального плану школи. Так, у гімназіях Швеції існує 22 відділення (профілі). Спеціалізація навчання здійснюється як за рахунок відмінностей у рівні підготовки з традиційних шкільних дисциплін, так і шляхом введення в навчальний план спеціальних профілюючих предметів, кількість яких загалом сягає близько 80.

Незважаючи на велику кількість навчальних предметів і курсів, кількість основних напрямів профілізації незначна. За наявності стаціонарних відділень та секцій заняття будуються у досить суворій відповідності до навчальних планів і програм профілю навчання і є обов'язковими для всіх учнів. Факультативи й предмети за вибором відіграють допоміжну роль, і їх питома вага у загальному балансі навчального часу відносно незначна.

Прикладом такої системи є трирічний французький загальноосвітній і технологічний ліцей. У десятому класі діє загальний, обов'язковий для всіх учнів навчальний план, який складається з традиційних загальноосвітніх дисциплін. Крім того, кожному учню пропонується 15 курсів для поглибленого вивчення, серед яких він повинен обрати два.

Після закінчення десятого класу диференціація поглиблюється і набуває жорстких організаційних форм. Учні навчаються за двома напрямами: загальним і технологічним. Школярі можуть обрати з десяти серій диплом бакалавра про середню освіту, який дає право вступу на відповідні факультети університетів та інших вищих навчальних закладів. У загальноосвітньому напрямі виділяються три серії: літературна, наукова і соціальні та економічні науки. Технологічний напрям передбачає сім серій: медико-соціальні науки, науки та технології індустрії, експериментальні науки та технології, науки та технології сфери обслуговування, готельного господарства, музики і танцю, прикладного мистецтва. Стаціонарні відділення і секції з особливими навчальними планами і програмами є в старших класах середніх шкіл Німеччини, Італії, Іспанії, Нідерландів, Данії, Аргентини та інших країн.

У деяких країнах профільна диференціація здійснюється за іншим принципом. Учням пропонується широкий спектр елективних предметів, і фактично саме вони відіграють роль у здійсненні спеціалізованого навчання. Така система характерна для старшої школи США, Англії, Шотландії. В американській школі навчання здійснюється за такими трьома основними напрямами профілізації: академічний, загальний та виробничий. У зміст навчання входять як традиційні обов'язкові предмети, так і предмети за вибором, яких у школах США налічується кілька сотень. Останніми роками спостерігається тенденція до зменшення навчального часу на їх вивчення.

В цілому, у старшій зарубіжній школі спостерігається стійка тенденція до скорочення кількості профілів і навчальних курсів за рахунок збільшення в навчальному плані обов'язкових предметів і курсів.

Концепцією профільного навчання у Росії визначено номенклатуру основних напрямів профілізації: природничо-математичний, соціально-економічний, гуманітарний, технологічний, універсальний. При цьому приблизне співвідношення обсягів базових загальноосвітніх, профільних загальноосвітніх предметів і елективних курсів у російській школі визначається пропорцією 50:30:20.

Осмислення продуктивних тенденцій вітчизняного і зарубіжного шляхів профілізації старшої школи свідчить про необхідність широкого врахування як суспільного контексту функціонування школи, так і індивідуальних потреб і здібностей учнів [39].

1.3. Мета, завдання і принципи організації профільного навчання

Проблеми становлення і розвитку української школи як основи національної системи освіти хвилюють сьогодні не лише педагогічну науку, педагогів-практиків, а й широку громадськість України. У нашій країні існує широка мережа навчальних закладів усіх рівнів. У них сьогодні відбуваються складні процеси, йде перебудова методологічних, навчально-методичних і організаційних засад, що складалися впродовж багатьох попередніх років, засвоюються кращі зразки зарубіжного досвіду.

Нині гостро відчувається соціальна потреба у створенні моделі сучасної школи. Видатний педагог Софія Русова влучно висловилась: „Колись мертва, формальна, лицемірна школа мусить впасти, а на її руїнах має утворитися, народитися нова, живуча і життєва, правдива і весела школа праці, школа соціального виховання, збудована на пошані і розумінні громадських обов'язків кожною дитиною, кожним учнем нової школи” [49, с.54]. Школа минулого зорієнтована на уніфікацію навчального процесу, „усереднену” особистість як результат педагогічної дії. „Усереднена” школа не давала дітям усього спектру освітніх послуг і програм, не враховувала їхніх здібностей та інтересів.

Нова школа - це школа культури життєвого самовизначення. Нова школа навчає дитину, як скласти свою життєву програму, як пізнавати себе, як визначити своє життєве кредо, мету життя, самоаналізу, як планувати, як організовувати діяльність для досягнення визначених цілей. У новій школі мають бути створені максимально сприятливі умови для прояву та розвитку здібностей і таланту дитини, її повноцінного життя на кожному з вікових етапів, для її самовизначення. Нова, ненасильницька система виховання має ґрунтуватися на самодіяльності, ініціативі, вільному виборі напрямів.

Школа XXI століття - це школа, в якій повинні реалізовуватись нові ідеї щодо організації освіти. У реформуванні середньої освіти в Україні в даний момент найактуальнішою проблемою є впровадження профільного навчання. Нова школа має функціонувати як профільна. Це створюватиме сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб учнів, для формування у школярів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності. Профільна школа найповніше реалізує принцип особистісно-орієнтованого навчання, що значно розширює можливості учня у створенні власної освітньої програми [49].

Профільне навчання - вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті та структурі організації навчання [39].

Профільне навчання повинне забезпечувати загальноосвітню підготовку учнів, глибоку їх допрофесійну готовність із формуванням стійкої орієнтації на продовження навчання. Професійну ж підготовку отримує невелика кількість випускників шкіл, які навчаються за окремими спеціальностями у міжшкільному навчально - виробничому комбінаті, професійному ліцеї чи окремих школах.

Зміст профільної освіти і методи навчання обумовлені цілями, а цілі - якостями особистості випускника, його моделлю, яка в свою чергу детермінується змінами соціально-економічних умов життя суспільства. Отже, зміст профільної освіти прямо пов'язаний з формуванням стійкої системи соціально значущих якостей особистості [7].

Мета профільного навчання - забезпечення можливостей для рівного доступу учнівської молоді до здобуття загальноосвітньої профільної та початкової допрофесійної підготовки, неперервної освіти впродовж усього життя, виховання особистості, здатної до самореалізації, професійного зростання й мобільності в умовах реформування сучасного суспільства. Профільне навчання спрямоване на набуття старшокласниками навичок самостійної науково-практичної, дослідницько-пошукової діяльності, розвиток їхніх інтелектуальних, психічних, творчих, моральних, фізичних, соціальних якостей, прагнення до саморозвитку та самоосвіти [39].

Основними завданнями профільного навчання є:

1) створення умов для врахування й розвитку навчально-пізнавальних і професійних інтересів, нахилів, здібностей і потреб учнів старшої школи в процесі їхньої загальноосвітньої підготовки;

2) виховання в учнів любові до праці, забезпечення умов для їхнього життєвого і професійного самовизначення, формування готовності до свідомого вибору й оволодіння майбутньою професією;

3) формування соціальної, комунікативної, інформаційної, технічної, технологічної компетенції учнів на допрофільному рівні, спрямування підлітків щодо майбутньої професійної діяльності;

4) забезпечення наступно-перспективних зв'язків між загальною середньою і професійною освітою відповідно до обраного профілю [39].

У класах з профільним навчанням учні мають право і можливість обирати різні профілі навчання з урахуванням їх індивідуальних інтересів, нахилів і здібностей. Це дозволяє їм зосереджувати преважну увагу на поглибленому вивченні теоретичних основ обраного профілю у блоці відповідних дисциплін.

Крім того, профілізація освіти передбачає посилення підготовки старшокласників в області прикладних знань за обраним профілем, формування у них первинних елементів професіонально-важливих якостей.

Така форма освіти старшокласників дозволяє їм отримати за обраним профілем більш глибокі, різносторонні теоретичні і прикладні знання, уміння і міцні практичні навички дослідницького характеру, підготувати себе до успішного продовження освіти у середньому (вищому) професіональному навчальному закладі відповідного напряму чи до праці у сфері матеріального виробництва.

Цьому сприяє також і те, що профільна диференціація освіти учнів на старшому етапі являє собою логічне продовження рівневої диференціації освіти учнів, здійснюваної на середньому ступені, у V-IX класах, у формі професійної орієнтації та інших видів допрофільної підготовки [9].

З вищесказаного випливає, що профільна освіта за своїми цілями і змістом займає проміжне положення між загальною середньою та професійною освітою.

Профільне навчання ґрунтується на таких принципах:

1) фуркації (розподіл учнів за рівнем освітньої підготовки, інтересами, потребами, здібностями і нахилами);

2) варіативності й альтернативності (освітніх програм, технологій навчання і навчально-методичного забезпечення);

3) наступності та неперервності (між допрофільною підготовкою і профільним навчанням, професійною підготовкою);

4) гнучкості (змісту і форм організації профільного навчання, у тому числі дистанційного; забезпечення можливості зміни профілю);

5) діагностико-прогностичної реалізованості (виявлення здібностей учнів для їх обґрунтованої орієнтації на профіль навчання) [39; 12].

Здійснення профільного навчання потребує цілеспрямованого формування контингенту учнів, розробки відповідного навчально-методичного забезпечення за кожним напрямом навчання, використання специфічних форм і методів роботи з учнями, що мають підвищену мотивацію до навчання, вимагає відповідної перепідготовки і підвищення кваліфікації вчителя, модернізації матеріально-технічної бази.

1.4. Структура профільного навчання

Профіль навчання - це спосіб організації диференційованого навчання, який передбачає поглиблене і професійно зорієнтоване вивчення циклу споріднених предметів.

Профіль навчання визначається з урахуванням наступних чинників:

- освітніх потреб замовників освіти;

- кадрових, матеріально-технічних, інформаційних ресурсів школи ;
- соціокультурної і виробничої інфраструктури району, регіону;
- перспектив здобуття подальшої освіти і життєвих планів учнівської молоді.

Профільне навчання у 10-12 класах здійснюється за такими основними напрямами: суспільно-гуманітарний, природничо-математичний, технологічний, художньо-естетичний, спортивний.

Їх набір відповідає соціально-диференційованим видам діяльності, що зумовлені суспільним розподілом праці, і містить знання про природу, людину, суспільство, культуру, науку та виробництво. За основними напрямами профілізації визначаються різноманітні навчальні профілі. [39].

Профільність визначається як добором предметів, так і їх змістом.

Засвоєння змісту освіти в загальноосвітніх закладах з профільним навчанням має забезпечувати, по-перше, загальноосвітню підготовку учнів, а по-друге - спеціалізовану поглиблену підготовку до майбутньої професійної діяльності.

Профіль навчання охоплює таку сукупність предметів: базові загальноосвітні, профільні та курси за вибором.

Базові загальноосвітні предмети становлять інваріантну складову змісту середньої освіти і є обов'язковими для всіх профілів. Ці предмети реалізують цілі й завдання середньої загальної освіти. Зміст навчання і вимоги до підготовки старшокласників визначаються державним загальноосвітнім стандартом. Зміст базових навчальних предметів може інтегруватися, скорочуватися на користь профільних предметів, що регулюється типовим навчальним планом.

Профільні загальноосвітні предмети - це цикл предметів, які реалізують цілі, завдання і зміст кожного конкретного профілю. Вони обов'язкові для учнів, які обрали даний профіль навчання. Профільні предмети вивчаються поглиблено. Особливостями вивчення є:
- більш глибоке і повне опанування понять, законів, теорій, передбачених стандартом освіти;

- дотримання системного викладу навчального матеріалу, його логічного впорядкування;
- широке використання знань із споріднених предметів;
- застосування активних методів навчання, організація дослідницької, проектної діяльності учнів.

Поглиблене вивчення саме циклу предметів запобігає вузькій спеціалізації, яка здебільшого не відповідає реальним потребам, інтересам старшокласників, оскільки нерідко їх цікавить не один предмет, а група предметів, не одна професія, а кілька близьких професій. Профільні предмети забезпечують також прикладну спрямованість навчання за рахунок інтеграції знань і методів пізнання та застосування їх у різних сферах діяльності, у тому числі і професійній, яка визначається специфікою профілю навчання.

Зміст профільних предметів реалізується як варіативна складова змісту загальної середньої освіти, а частково - як інваріативна складова.

У профільних загальноосвітніх закладах передбачається опанування змісту базових предметів на різних рівнях за такими програмами:

1) програма загальнокультурної підготовки - обов'язковий мінімум змісту навчального предмета, який не передбачає подальшого її вивчення (наприклад, математика на філологічному профілі; хімія та біологія у профілі інформатика або їх інтегрований варіант у цих профілях);

2) програма загальноосвітньої підготовки - обсяг змісту достатній для подальшого вивчення предмета у вищому навчальному закладі - застосовується, коли навчальний предмет не є профільним, але базовим або близьким до профільного (наприклад, загальноосвітні курси біології, хімії у фізико-технічному профілі або загальноосвітній курс фізики у хіміко-біологічному профілі);

3) програма профільної підготовки - обсяг змісту навчального предмета поглиблений, передбачає орієнтацію на майбутню професію (наприклад, курси фізики і математики у фізико-математичному профілі або курси біології та хімії у хіміко-біологічному профілі).

Профіль навчання може мати кілька модифікацій, залежно від базових предметів, обраних учнем як профільні. Їх має бути не більш як два-три з однієї або споріднених освітніх галузей (наприклад, фізика, інформатика і математика, хімія і технології, біологія і екологія, географія і економіка). Так, у профілях, де профільними обрано природничі предмети біологія і хімія, решта природознавчих предметів (фізика, географія) вивчається за програмою загальноосвітнього рівня. Зміст навчальних предметів природничо-математичної галузі в соціально-гуманітарному, технологічному і художньо-естетичному напрямах може бути інтегрований за програмою-мінімумом в єдиний курс природознавства.

Курси за вибором - це навчальні курси, які входять до складу профілю навчання. Основні їх функції полягають у поглибленні і розширенні змісту профільних предметів або забезпеченні профільної прикладної і початкової професійної спеціалізації навчання. Курси за вибором створюються за рахунок варіативного (шкільного та регіонального) компонента змісту освіти. Усі курси варіативного компонента можна поділити на три групи:

1) поглиблення знань з профілюючих предметів базового компонента;

2) розвиток інтересів та здібностей учнів з урахуванням спеціалізації профільних класів;

3) загальний розвиток учнів (інформатика, політологія, бібліографія, світова культура, історія релігій).

Орієнтовне співвідношення обсягу базових загальноосвітніх, профільних предметів і курсів за вибором визначається пропорцією 60:30:10. Загальне навантаження учнів визначено Законом України „Про загальну середню освіту” [39; 44].

Загальноосвітні школи створюють ті чи інші профілі навчання за рахунок комбінацій базових, профільних предметів і курсів за вибором. Цим самим забезпечується гнучка система профільного навчання, яка дає змогу обрати старшокласнику індивідуальну освітню програму.

1.5. Форми організації профільного навчання

Форми організації профільного навчання регламентують діяльність суб'єктів навчально-виховного процесу в системі профільних загальноосвітніх закладів і забезпечують умови для підготовки учнівської молоді до свідомого життєвого самовизначення, професійного вибору та професійної адаптації. За характером взаємодії суб'єктів профільного навчання виділяють такі форми його організації.

Внутрішньошкільні: профільні класи в загальноосвітніх навчальних закладах; профільні групи в багатопрофільних загальноосвітніх навчальних закладах; профільне навчання за індивідуальними навчальними планами і програмами загальноосвітніх навчальних закладів; динамічні профільні групи, в тому числі різновікові.

Зовнішні: міжшкільні профільні групи району, шкільного округу; профільна школа інтернатного типу; опорна старша школа з пришкільним інтернатом; навчально-виховний комплекс (НВК); міжшкільний навчально-виробничий комбінат (МНВК); загальноосвітні навчальні заклади на базі вищих навчальних закладів [39].

Профільне навчання організується через навчальні заняття (уроки, лекції, семінари тощо), факультативи, дистанційні курси, екстернат.

Профільне навчання може здійснюватися у загальноосвітніх навчальних закладах різного типу: однопрофільних і багатопрофільних школах; профільних школах інтернатного типу; ліцеях; гімназіях; колегіумах; навчально-виховних комплексах; міжшкільних навчально-виробничих комбінатах; опорних старших школах із пришкільним інтернатом, у тому числі в поєднанні з початковою професійною підготовкою; загальноосвітніх навчальних закладах на базі вищих навчальних закладів; профільних загальноосвітніх навчальних закладах із ресурсним центром для використання іншими закладами освіти мікрорайону, регіону, шкільного округу.

Загальноосвітній навчальний заклад може мати один або кілька профілів. В окремих випадках загальноосвітній навчальний заклад (клас) може бути не орієнтований на конкретний профіль навчання. Тоді задоволення освітніх запитів учнів здійснюється за рахунок введення курсів за вибором, які дають змогу поглибити або професійно спрямувати зміст споріднених базових предметів.

Також будуть існувати класи універсального профілю. Після закінчення такого класу випускник повинен індивідуально за рахунок самоосвіти корегувати свою підготовку відповідно до вимог ВНЗ, який він собі обрав, або навчатись дистанційно.

Профільні групи у багатопрофільних загальноосвітніх навчальних закладах передбачають профільну спеціалізацію груп учнів у класах певного напряму профілізації. Наприклад, у класі суспільно-гуманітарного напряму можуть бути організовані групи для навчання за філологічним та історико-правовим профілями. Профільне навчання за індивідуальними навчальними планами і програмами у загальноосвітніх навчальних закладах здійснюється для задоволення індивідуальних запитів обдарованих учнів.

Динамічні профільні групи створюються за бажанням учнів та їхніх батьків у профільних школах, що мають належне матеріально-технічне, професійно-педагогічне забезпечення. Вони можуть функціонувати у паралельних класах старшої школи (за наявності не менш як дванадцяти учнів у групі); у мало комплектних школах можуть організовуватись різновікові динамічні профільні групи. Протягом навчального року учні мають право переходити з однієї профільної групи в іншу. Це забезпечить умови для самостійного вибору учнями профільних навчальних курсів, випробування власних сил, реалізації їхніх освітніх, професійних інтересів [39].

У курсах за вибором (факультативи, практикуми, виробнича практика) учні, поглиблюючи теоретичну профільну підготовку, опановують більш широкі знання практичного і прикладного характеру за профілюючими предметами, підвищують рівень сформованості універсальних загальнонавчальних умінь, закріплюють навики володіння ключовими громадянськими компетенціями.

До навчальних планів профільного навчання недопустимо включати (за рахунок скорочення часу на вивчення профілюючих дисциплін) випадкові елективні міні-курси, що часто містять поверхневу інформацію, далеку від обраного профілю. Це розмиває зміст освіти, понижує якість профільної підготовки учнів [9].

Міжшкільні профільні групи організуються в міжшкільному навчально-виробничому комбінаті (МНВК), навчально-виховному комплексі (НВК), опорній старшій школі з пришкільним інтернатом, профільній школі інтернатного типу за рахунок кооперації ресурсів і коштів закладів освіти, приватних осіб тощо. Старшокласники мають можливість більш змістовно й організовано вивчати спецкурси, які забезпечать професійну підготовку та їх дійову професійну орієнтацію.

Профільна школа інтернатного типу здійснює загальну освіту і має на меті цільову професійну підготовку молоді з числа випускників основної школи (за умови наявності кадрових, фінансових, інформаційних ресурсів, сучасної навчально-матеріальної бази). Опорна старша школа з пришкільним інтернатом створюється переважно в сільських районах, де школи не мають паралельних класів для реалізації профільного навчання, для початкової професійної підготовки за наявності відповідного ресурсного забезпечення в районі і потреб замовників освіти.

Міжшкільний навчально-виробничий комбінат (МНВК) - це навчальний заклад, який здійснює трудову, профільну, початкову професійну, підприємницьку підготовку учнівської молоді від 14 років і забезпечує задоволення освітніх запитів з профільного і професійного навчання на підвищеному рівні та адаптацію молоді в умовах ринкової економіки поряд з отриманням загальноосвітньої підготовки у закладах освіти.

Навчально-виховний комплекс (НВК) - це заклад, в якому організація профільного навчання передбачає об'єднання освітніх, фінансових, інформаційних ресурсів основної та старшої ланки школи, міжшкільного навчально-виробничого комбінату, закладу початкової професійної освіти, позашкільних освітніх закладів. У НВК можуть функціонувати профільні класи і групи, де вивчаються профільно зорієнтовані курси початкової професійної підготовки. У сільській місцевості до організаційної структури НВК можуть входити дитячі дошкільні заклади, школи І-ІІІ ступенів, професійно-технічні училища, міжшкільні виробничі комбінати.

Загальноосвітні навчальні заклади на базі вищих навчальних закладів функціонують переважно на III ступені навчання і забезпечують загальноосвітню підготовку та профільну підготовку, яка відповідає професійній спеціалізації факультетів цих закладів і реалізується в основному його науково-педагогічними працівниками [39; 28].

Отже, можна виділити такі шляхи організації профільного навчання.

1. Оптимізація мережі закладів освіти - це, зокрема, створення гімназій, ліцеїв, колегіумів, спеціалізованих шкіл, шкіл з поглибленим вивченням окремих предметів, ліцеїзація професійно-технічних навчальних закладів. Здійснення профілізації через зміну мережі закладів освіти найбільш оптимальне для міст. У сільській місцевості доцільно створити опорні середні спеціалізовані навчально-виховні комплекси із пришкільними інтернатами для учнів старших класів. Важливо в цих цілях використовувати шкільні автобуси. У НВК поряд із загальноосвітніми класами відкривати класи з поглибленим вивченням предметів (суспільно-гуманітарні, філологічні, хіміко-біологічні, фізико-математичні, технологічні, художньо-естетичні, спортивного спрямування). Профільні класи можуть створюватися за пропозицією ради загальноосвітнього навчального закладу на підставі рішення педагогічної ради, за погодженням із місцевими органами державної виконавчої влади. Умовами для зарахування учнів до профільних класів є: бажання учнів, рекомендації психолога та конкурсної (педагогічної) комісії,

яка створюється в загальноосвітньому навчальному закладі. Головою такої комісії може бути директор або його заступник. Комплектування профільних класів доцільно завершувати до 25 серпня.

2. Без зміни мережі закладів освіти - це використання бази професійно-технічних училищ, позашкільних навчальних закладів, міжшкільних навчально-виробничих комбінатів. Конституційне право громадянина України здобути повну освіту має бути забезпечене кожному. Будь-який старшокласник повинен мати можливість обирати ті предмети, вивчення яких він вважає потрібним для свого майбутнього. Інтелектуальне та соціальне зростання учнів відбуватиметься інтенсивніше, якщо винести його за межі власне шкільного навчального процесу, розширити освітній простір учнів. Це вимагає змін у структурі навчального дня і тижня навчального закладу, бо міжшкільні групи можна організовувати або в позаурочний час, або виділити в усіх школах, що створюють міжшкільні профільні групи, єдиний день для проведення занять з профільного навчання. Оскільки навчальна практика частково або повністю може проводитись під час навчального року, то при шестиденному режимі занять можна використовувати час, відведений для проведення практики. Навчання учня у спортивній, художній чи музичній школі теж вважається профільним [7].

Контроль за роботою профільних класів поєднує в собі і моніторинг якості освіти, і випереджальну організаційно-методичну допомогу, і аналіз результативності роботи.

Управління таким навчанням повинно мати на меті розвиток особистості, створення комфортних умов навчання, перегляд змісту освіти, досягнення високих кінцевих результатів. Для реалізації цих цілей доцільно в управлінській діяльності дотримуватись наступного алгоритму:

- вивчення умов, необхідних для впровадження профільності навчання;
- оцінювання потенційних можливостей педагогічного колективу;
- формування змісту курсів варіативного компонента, які визначають профільність;

- прогнозування кінцевого результату профільного навчання;
- моніторинг стану викладання, результативності курсів варіативного компонента та його впливу на формування і розвиток творчої особистості.

Під час проектування профільної освіти слід враховувати:

1) наскільки пропонована профільна освіта затребувана суспільством та учнями певної статевовікової групи;
2) наскільки зміст профільної освіти може бути засвоєний учнями 10-11 класів з урахуванням рівня їхньої підготовленості, бюджету часу, психологічних та інтелектуальних ресурсів, рівня оптимальних навантажень;
3) наскільки завдання профільної освіти можуть бути реалізовані в умовах середньостатистичної школи, тобто врахування матеріальної бази, педагогічних кадрів, фінансових витрат тощо;
4) наскільки пропонована профільна освіта, з одного боку, є розвивальною й розширює світогляд, з іншого боку, наскільки вона сприяє розширенню вибору в професійному самовизначенні зростаючої особистості [6].

При введенні будь-якого профілю в школі слід усвідомлювати, що він передбачає певні технології навчання, спеціальну методику, що вимагає відповідної підготовки педагога. Мусить бути створена також належна матеріальна база і програмно-методичне забезпечення.

Існує інший підхід до організації профільного навчання, який ґрунтується на врахуванні дванадцятирічного терміну навчання. У концепції 12-річної школи сказано, що старша школа є профільною. Випускники школи мають бути готовими включитися у повноцінне суспільне життя - чи у сферу професійної діяльності, чи продовжити навчання у вищому навчальному закладі [14; 16].

Передбачається, що після закінчення середньої школи випускники можуть обирати один із чотирьох шляхів: трудову діяльність, навчання для отримання професії у спеціалізованій школі або на курсах навчання в 11-12 класах, у „післясередній” школі (доуніверситарії, коледжі) для підготовки до вступу до університету, власне вступ до університету.

1.6. Ефективна профілізація як перспектива розвитку профільного навчання

Профільне навчання - це засіб диференціації та індивідуалізації навчання, що дає змогу шляхом змін у структурі, змісті та організації освітнього процесу забезпечити повніше врахування інтересів, нахилів і здібностей учнів, створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхніх професійних інтересів і намірів щодо продовження освіти, а профільна школа є лише інституційною формою досягнення цієї мети.

Особливість профільної школи полягає у тому, що вона допомагає в учбовій діяльності уявити себе майбутнім професіоналом. Але не професіоналом-всезнайкою в тій чи іншій області, а професіоналом, що знає межі свого незнання, що здатен сформувати запит на свій зміст освіти [61].

Розглянемо детальніше таку модель профільного навчання як мережене профілювання. Йдеться про те, що основними в профілізації в цьому випадку є зміни в мережі закладів освіти, створення так званих профільних закладів або класів у них. Існує думка, що в такий спосіб учня позбавлено можливості обрати профіль, а визначають його і, можна сказати, призначають, враховуючи не думку учня і його бажання, а інші чинники, що часто можуть бути суб'єктивно-вчительськими або суб'єктивно-директорськими. По суті, йдеться про профільну школу, а не про профільну освіту кожного учня. Чи зможемо ми, йдучи таким шляхом, забезпечити для школярів особистісно-орієнтовану освіту, що максимально враховуватиме інтереси, запити, професійні наміри учнів? Напевне, ні.

По-перше, ми не маємо і найближчим часом не матимемо розвинутої освітньої інфраструктури, що могла б задовольнити запити кожної дитини. Навіть якщо у нас кожний четвертий загальноосвітній навчальний заклад буде ліцеєм, гімназією, колегіумом чи спеціалізованою школою, а кожне профтехучилище перетвориться на професійний ліцей, чого досягти неможливо через дефіцит матеріальних, фінансових та кадрових ресурсів, у них не вистачить місця для всіх учнів старших класів, які будуть зобов'язані чи захочуть навчатися у профільній школі. І чи не загрожуватиме цей процес перетворенню інших шкіл, які не втрапили до числа „закладів нового типу”, на своєрідні „відстійники” для тих учнів, які гірше навчаються, чи для тих, до кого вчителі не зуміли знайти підхід?

По-друге, спосіб організації профільного навчання шляхом удосконалення мережі закладів освіти є більш придатним для середніх і великих міст, а не для аграрної периферії. Така профілізація неминуче завдасть удару сільській освіті, сільським дітям, майбутньому села.

По-третє, профілізація мережі закладів освіти не створить умов для максимально повного задоволення освітніх запитів учнів. У цьому разі освіта буде зведена до обов'язкового вивчення всіма учнями профільного класу тих чи інших предметів, що входитимуть до нової інваріантної частини навчального плану. А що буде, коли учень, навчаючись в закладі гуманітарного профілю, захоче додатково поглиблено опанувати хімію чи математику або набути певних технічних навичок?

Перелік таких аргументів можна продовжувати, але мета профілізації - надати можливості кожному учню стати самим собою [1; 40].

Розглянемо далі детальніше механізм запровадження та переваги елективної профілізації. Загалом ця схема може виглядати так. Необхідно кожному учневі дати можливість незалежно від того, де він проживає, працювати в старших класах за навчальним планом, що складатиметься з двох частин: інваріантної та елективної. Інваріантна частина навчальних планів включатиме предмети, вивчення яких є обов'язковим для кожного учня. Ними можуть бути українська мова та література, вітчизняна історія, іноземна мова, математика, фізкультура. Цю частину також можна буде доповнити 2-3 предметами, що належатимуть до так званого шкільного компоненту навчального плану.

Друга частина навчального плану - елективні курси, тобто навчальні предмети, які учень зможе обирати незалежно від того, в якому закладі освіти він навчатиметься. У такому випадку буде спрофілюватися не заклад освіти, а предметна база. Профільною стане кожна школа, а ще правильніше - її старші класи, незалежно від назви, місцезнаходження чи матеріально-технічних умов. Не виключено, що предмети, які обиратимуть учні, будуть досить різні. Організувати таке профільне навчання можна різними шляхами: створити окрему групу (чи кілька) в тій школі, де навчається учень; організувати відвідування учнями профільних занять у сусідньому закладі освіти (професійно-технічному училищі, МНВК, вищому закладі освіти, ліцеї, гімназії, спеціалізованій школі); забезпечити дистанційне навчання, що особливо важливо для сільської школи; організувати міжшкільні профільні групи; запровадити індивідуальну підготовку.

Переваги такого шляху профілізації навчання у старшій школі полягають у тому, що:

1) такий шлях є більш гуманним, особистісно-орієнтованим. Учень обирає предмети сам, а не вимушений пристосовуватися до того, що йому пропонують у закладі освіти, виходячи з профілю школи, обраного директором чи затвердженого відділом освіти. Краще задовольняються ситуативні інтереси старшокласника, в нього формується чітка мотивація навчання;

2) елективний шлях профілізації набагато дешевший, а ніж мережений. Створення нових закладів освіти, реорганізація існуючих, будівництво інтернатів, придбання автобусів тощо в жодному разі не спів мірне із затратами на можливе введення додаткових учительських ставок чи доплат за читання елективних курсів. Ці видатки можна реально забезпечити, зменшивши витрати на вивчення великої кількості предметів інваріантної частини навчального плану;

3) пропонований шлях профілізації старшої школи менш руйнівний для сільських шкіл, адже у переважній більшості останніх елективні курси зможуть викладати як місцеві вчителі, так і ті, які приїжджатимуть до учнів чи до яких їздитимуть школярі. Звичайно, що для цього потрібно буде

відмовитися від традиційних підходів до організації навчального процесу в старшій школі;

4) запровадження елективної профілізації обов'язково вплине на роботу педагога, на усвідомлення ним потреби у підвищенні кваліфікації, активній роботі над собою [48].

Підготовка до запровадження профільного навчання вимагає розв'язання багатьох кадрових, матеріально-технічних, організаційних та інших проблем. Зупинимося на деяких із них.

Чинником, вирішальним для ефективного запровадження профільного навчання, є рівень професіоналізму педагогічних кадрів. На сьогодні педагогів, готових до роботи у профільній школі, обмаль. Ситуація ускладнюється тим, що підготовку таких спеціалістів ще не розпочав жоден педагогічний навчальний заклад. У той же час методи навчання, педагогічні технології в старшій профільній школі будуть суттєво відрізнятися від методик, що використовуються в основній школі.

Не менш важливим для здійснення ефективного профільного навчання є його матеріально-технічне забезпечення: література, періодика, навчально-наочні посібники, комп'ютери, програмні продукти, елементарні умови для організації навчального процесу за допомогою нових, частково „вузівських" педагогічних технологій. З огляду на це мають бути внесені суттєві зміни до чинного порядку визначення видатків на утримання закладів освіти. Видатки на профільне навчання мають обраховуватись за іншими формулами, і оплата праці педагогів, які будуть займатися профільним навчанням, має бути іншою, суттєво вищою.

Не менш важливими є й організаційні питання. За умови широкого запровадження елективних курсів урок перестане виконувати роль основної організаційної форми навчального процесу. На перший план вийдуть самостійна робота, індивідуальні заняття тощо. У зв'язку з тим, що в кожному регіоні з'являться предмети, які визначатиме незначна кількість учнів із різних закладів, доведеться запроваджувати, наприклад, при відділах освіти посади вчителів, які працюватимуть у кількох школах. Також доведеться створювати навчальні групи з учнів кількох закладів освіти, запроваджувати нагромаджу вальну систему оцінювання навчальних досягнень тощо.

Слід врахувати і те, що ефективне запровадження профільного навчання можливе лише за умови створення належної нормативно-правової бази [7].

Однією з проблем можна вважати і те, що у сфері профільного навчання не розвиваються дистанційні технології. Адже тільки вони можуть надати достатню кількість профілів, що реально забезпечать потреби індивідуальних освітніх програм. Старші школярі досить здібні до самостійної освіти з використанням комп'ютерних засобів навчання, але цей аспект профільного навчання майже не враховується [56].

Ідея профільного навчання тісно пов'язана з прогнозуванням ринка праці, з тими реальними потребами виробництва, що з'являться в найближчі 5-7 років. А зараз практично відсутні громадянські інститути діалогу освіти та суспільства на загальному полі професійної діяльності. І ринок, і підприємства, що діють на ньому, усвідомлюють свій кадровий дефіцит, але не можуть ясно і конструктивно пред'явити його освіті. Врешті-решт підприємства не отримують якісно підготовлених спеціалістів.

Перелік чинників, що дадуть можливість ефективно організувати профільне навчання в старшій школі, можна продовжувати. Але суть у тому, що їх не можна не враховувати, запроваджуючи будь-яку модель профільного навчання [61].

РОЗДІЛ ІІ. ЗМІСТ ТА СТРУКТУРА ЗАДАЧІ. КЛАСИФІКАЦІЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ.

2.1.1. Поняття задачі в психології і дидактиках.

Є декілька точок зору, що до поняття «задача». Так, наприклад А.Н. Леонтьев трактує це поняття як «ситуація, що потребує від суб'єкта деякої дії»[13].

Г.С. Костюк під задачею розуміє «ситуацію, що потребує від суб'єкта деякої дії, направленої на знаходження невідомого на основі використання нею зв'язків з відомим»[53, с.10]

А. Ньюелл під задачею розуміє ситуацію, що потребує від суб'єкта «деякої дії , направленої на знаходження невідомого на основі використання його зв'язків з відомими величинами в умовах, коли суб'єкт не володіє способом цієї дії» [46, с.14]

Поняття задачі, в розумінні А.Н. Леонтьєва, є найбільш широким та загальним. Воно охоплює всі ситуації, що вимагають від суб'єкта «деякої дії». Це життєві, учбові, дидактичні, загально педагогічні, психологічні, соціальні, економічні задачі.

Поняття задачі, в розумінні Костюка, охоплює ситуації, з якими доводиться мати справу в учбовій та науковій ситуації, коли необхідно обчислити невідоме на основі його зв'язків з відомими, – незалежно від того, відмий чи не відомий алгоритм розв'язання. Якщо алгоритм розв'язання відомий. То задача розв'язується досить легко. Якщо алгоритм розв'язання виявляється невідомим, розв'язання потребує прояву великої самостійності, творчих пошуків, більшого напруження розумових сил.

Саме поняття задачі за А. Ньюеллом, охоплює такого роду ситуації, коли від суб'єкта вимагають самостійного пошуку способу розв'язання. Ситуація такого роду називається проблемною ситуацією.

Отже, у всіх трьох означеннях задачі центральним поняттям є поняття дії. В кожній дії виділяють ціль, предмет, мотив і спосіб.[13]

Розглянемо трактування цих понять в розуміння В.М. Глушкова:

« – **ціль**, тобто встановлювана вимога до стану деякого об’єкту. На виконання цієї вимоги направляється дія;

– **предмет**, тобто об’єкт, перетворений під час дії. Предмет дії може бути матеріальним або ідеальним…;

– **мотив** – тобто потреба, заради задоволення якої, повинна бути досягнута ціль дії;

– **спосіб**, через який здійснюється дія. Спосіб дії характеризується послідовністю операцій, із яких складається розглянута дія»[74, с.24]

На основі узагальнень психологічних означень, В.М. Глушковим зроблена спроба дати загальнонаукове означення задачі.

«Задача – за Глушковим, – в загальному розумінні – це ситуація, яка визначає дію деякої розв’язуваної системи» [74, с.18]

В даному означенні введено поняття розв’язаної системи, що замінює поняття суб’єкта. Така заміна розширює можливості засобів розв’язання задачі: задачу розв’язує необов’язково людина. При цьому розширюється поняття дії в порівнянні з психологічним її змістом. «Ціль розглядається тут як закодована в розв’язуваній системі вимога до стану предмета дії. Мотив, як його розуміють в психології, в загальному випадку вказати неможна; можна лише говорити про особливості алгоритму функціонування розв’язаної системи, що визначає напрям її дій. Предмет дії, іншими словами, об’єкт чи сукупність об’єктів, разом з вимогами передового стану цього об’єкта, об’єктивної цілі дії, можна розглядати при описі розв’язання задачі, як єдиного цілого, а саме, як деяку систему, котру ми будемо називати системою задачі»[74, с.25]

В кібернетиці під задачею розуміють «задачну систему в її відношенні до існуючих або потенційної розв’язаної системи » [74, с.28]

Дуже довгий час в методичній літературі користувалися терміном задача без її означення. Тому часто плутали поняття «задача» і «вправи». В тлумаченні С.Е. Каменецького та В.П. Орехова «задачею, зазвичай, називають невелику проблему, яка в загальному випадку розв’язується з допомогою логічних роздумів та математичних дій…» [33, с.31]

В методичній та навчальній літературі під задачами розуміють цілеспрямовано підібрані вправи, головне призначення яких полягає у формуванні понять, розвитку математичного мислення учнів і прививати їм вміння застосовувати свої знання на практиці.

Науковці вважають не правомірним розмежування понять задачі в навчальній практиці і в науково-методичній літературі. В теперішній час, практика вчителя представляє собою розвиток, конкретизацію наукових знань загальної і часткових дидактик.

Для того, щоб знайти загальне визначення задачі в дидактиці, розглянемо інтерпретацію поняття «задачі» в інших методиках.

«В кожній задачі вказується, що дано, і висувається вимога, що необхідно виконати. Для можливості розв’язання задачі необхідно, щоб шукані і відомі параметри знаходились в функціональній залежності. Тільки присутність цих функціональних залежностей дає можливість розв’язувати задачу. Таким чином, кожна задача складається із умови, функціональних залежностей і вимог» [70, с.24]

Брадіс В.М. вважає, що «задачею потрібно називати будь-яке математичне запитання, для відповіді якої недостатньо звичайного відтворення одного якого-небудь результату, теореми і визначення вивченого курсу» [21]

Колягін Ю.М. дає більш широке поняття задачі, тобто, це ситуація, в якій потрібно прийняти яке-небудь рішення. [37]

У ВРЕ можна прочитати: Задача – це «1) Поставлена ціль, котру прагнуть досягти. 2) Доручення, завдання. 3) Запитання, що потребує розв’язання на основі певних знань і роздумів, проблема. 4) Один з методів навчання і перевірки знань і практичних навичок учнів… » [29]

В педагогічній енциклопедії [30] виділені основні характеристики задачі: наявність в учнів конкретної цілі, прагнення отримання відповіді на те чи інше запитання, досягнути бажаного результату; врахування умов і вимог задачі для розв'язання задачі; застосування відповідних даних та умов способів і прийомів розв'язання.

Л.М. Фрідман розглядає задачу як певну систему [72]

Д.В. Єльконін учбовою задачею, на відміну від задачі в загальному, називає ситуацію, що дозволяє людині безпосередньо заволодіти деяким процесом, способом, принципом чи «механізмом» виконання будь-яких практично-значимих дій. [24]

В книзі Ю.В. Ходакова [70] здійснено розмежування задач та вправ. З однієї сторони, задачі відрізняються від вправ тим, що в умовах описується якась ситуація, в результаті якої виникло питання теоретичного або практичного значення. При розв'язуванні задач виконуються дії, які можуть входити у вправах, але задача – не проста сума вправ, а якісно відмінне завдання, що потребує від учнів дуже важкої і важливої добавки: на основі аналізу умови задачі з'ясувати, які дії і в якій послідовності потрібно виконувати. З точки зору дидактики, задачі мають ціль розвивати в учнів вміння застосовувати знання з математики в різних умовах практики. Вправи мають в якості основних цілей формування навиків за деякими конкретними операціями, розумових або практичних. Вважається, що до задач не можна відносити завдання, що потребують виконання якого-небудь досвіду з ціллю здобуття нових знань і їх закріплення.

2.1.2. Умови і вимоги у задачі

Задача 1. В прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 5 см і 12 см. Знайти катети трикутника.

Перше, що ми помічаємо при читанні цієї задачі, полягає в наступному: в ній мають місце деякі ствердження та вимоги. В ній стверджується, що в «прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 5 і 12 см». Вимога задачі полягає в тому, що необхідно «знайти катети трикутника».

Часто вимога задачі формулюється у вигляді запитання. Але будь-яке питання спонукає вимогу знайти відповідь на це питання, а тому всяке запитання можна замінити вимогою.

Як ми бачимо, формулювання будь-якої задачі складається з декількох тверджень і вимог. Твердження задачі називається умовою задачі.

Звідси зрозуміло, що перше, що необхідно виконати при розв'язанні задачі, - розкласти формулювання задачі на умову та вимогу. Замітимо, що в задачі, зазвичай, не одна умова, а декілька незалежних елементарних умов; вимог в задачі також може бути декілька. Тому необхідно розкласти всі твердження та вимоги задачі на окремі елементарні умови і вимоги.

В задачі 1 можна виділити такі елементарні умови:

1. трикутник, про який йде мова в задачі, прямокутний;
2. в цей трикутник вписано коло;
3. точка дотику кола з гіпотенузу ділить її на два елементарні;
4. довжина одного з цих відрізків дорівнює 5 см;
5. довжина іншого відрізка рівна 12 см.

Вимогу задачі можна розкласти на два елементарні:

1) знайти довжину одного катета трикутника;
2) знайти довжину другого катета трикутника;

Розкладання формулювання задачі на елементарні умови та вимоги не завжди легко зробити. В деяких випадках необхідно переосмислити задачу, переформулювати її.

2.1.3 Напрямок аналізу задачі

Задача 2. Із всіх циліндрів заданого об'єму знайдіть циліндр з найменшою повною поверхнею.

Умова цієї задачі, можна розуміти так, що розглядається множина циліндрів, об'єм котрих рівний деякому числу V (тут V є параметром).

Вимога задачі полягає в тому, щоб із заданої множини циліндрів знайти такий, повна поверхня якого найменша.

Порівняємо цю вимогу з вказаною умовою. Стає зрозумілим, що повна поверхня розглянутих циліндрів виступає в якості змінної величини. Необхідно знайти мінімум цієї змінної. Для цього, очевидно, цю змінну потрібно представити як функцію від іншої змінної. В якості останньої можна взяти, наприклад, радіус r основи циліндра. Отже, необхідно знайти таке значення r (приданому параметрів V), при якому S(r), де S(r) – це функція поверхні циліндра від радіуса r, приймає найменше значення.

Умови даної задачі такі:

1) Розглядається множина циліндрів, об'єм яких рівна V (V - параметр);
2) Радіус основи цих циліндрів є змінна r;
3) Повна поверхня S цих циліндрів є деяка функція S(r);

Вимоги задачі:

1) знайти функцію S(r);
2) знайти таке значення r, при якому S(r) приймає найменше значення;

Напрямок аналізу задачі на її вимоги полягає в тому, що особливу увагу необхідно приділити виясненню суті вимоги задачі, чіткому визначенні, того що необхідно знайти, зробити в задачі.[73]

Задача 3. Відкритий бак з квадратною основою повинен вміщати V л рідини. При яких розмірах на його виготовлення використають найменшу кількість матеріалу?

Позначимо сторону основи баку – x, висоту паралелепіпеда – y, значить площа повної поверхні відкритого баку визначиться функцією S(x, y). За умовою V – об'єм баку. Отже, проаналізувавши формулювання задачі, робимо висновки.

Умови даної задачі такі:

1) відкритий бак має форму паралелепіпеда;
2) основою паралелепіпеда є квадрат;
3) сторона квадрату – x (змінна);

4) висота паралелепіпеда – у (змінна);
5) об'єм паралелепіпеда V (параметр);
6) S(x, y) є сума бічної поверхні паралелепіпеда і площі його нижньої основи.

Вимога до задачі:

Знайти таке значення x та y як функції V, при яких S(x, y) приймає найменше значення.

2.1.4. Схематичний запис задачі

Результати попереднього аналізу задачі необхідно якось зафіксувати, записати. Необхідно знайти таку зручну, компактну і достатньо наочну форму запису результатів аналізу задач. Такою формою є *схематичний запис задачі.*

Підкреслимо, що не для всякої задачі потрібно робити схематичний запис. Так, наприклад, для задач по розв'язанню рівнянь, нерівностей, перетворень виразів аналіз проводиться зазвичай усно і ніяк не оформляється. Взагалі для задач, котрі записані на символічній мові схематичний запис не потрібний.

Першою особливістю, що відрізняє схематичний запис задач є широке використання різного роду позначень, символів, букв, тощо. Іншою особливістю є те, що в ній чітко виділені всі умови і вимоги задачі, а в записі кожної умови вказані об'єкти і їх характеристики, в схематичному записі для розв'язання задачі; всі інші деталі, при схематичному записі відкидаються.

Для схематичного запису геометричних задач і деяких інших задач корисно використовувати рисунок тієї фігури, яка розглядається в задачі. Вкажемо головні з них.

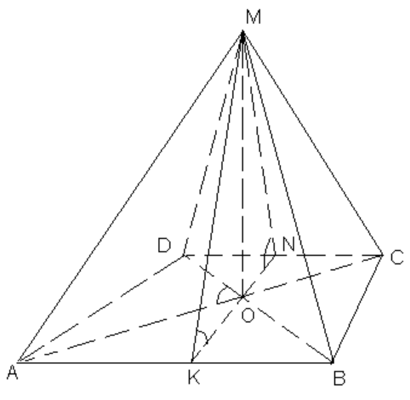
1. Рисунок повинен показувати собою схематичний малюнок основного об'єкту задачі (геометричної фігури) з позначенням за допомогою букв та інших знаків всіх елементів фігури і деяких їх характеристик. Якщо в тексті задачі вказані які-небудь позначення фігури і її елементів, то ці позначення повинні бути і на рисунку.

2. Цей рисунок повинен відповідати задачі. Це означає, що якщо в задачі в якості основного об’єкту названий, наприклад, трикутник і при цьому не вказаний його вид, то необхідно побудувати який-небудь різносторонній трикутник. І якщо в задачі в якості основного об’єкту названа трапеція і не вказаний її вид, то не потрібно будувати рівнобедрену і прямокутну трапецію.

3. При побудові рисунка немає необхідності притримуватись чіткого масштабу. Однак бажано дотримуватись пропорцій і побудови окремих елементів фігури. Наприклад, якщо за умовою задачі сторона АВ трикутника АВС найбільша, то це повинно бути дотримуватись на рисунку. І якщо задана медіана трикутника, то відповідний їй відрізок на рисунку повинен проходити приблизно через середину сторони трикутника.

4. При побудові рисунків просторових фігур необхідно дотримуватись всіх правил побудови таких фігур. Там, де це можливо і доцільно, краще побудувати які-небудь перерізи цих фігур.[73]

Задача 4. Основою піраміди є рівнобедрена трапеція, в якій паралельні сторони рівні 12 см і 8 см, а нерівні відрізки діагоналей утворюють кут $60°$. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Двогранні кути, утворені бічними гранями з основою і прилеглі до паралельних основ трапеції, відносяться як 1:2. Обчислити об’єм піраміди.



мал.1

Основний об’єкт задачі – чотирикутна піраміда. Побудова її рисунка можна виконати, наприклад, так.

Проводимо довільний відрізок АВ (краще горизонтальний) і через середину його – точку К – проводимо приблизно пд. Кутом в $30°$ пряму. Через довільну точку N цієї прямої проведемо іншу пряму, паралельну прямої АВ, і на ній відкладаємо по дві сторони точки N два рівних відрізки NC і ND. З'єднавши С з В і D з А, отримаємо основу піраміди – трапецію ABCD. Проводимо в ній діагоналі і через точку О – точку перетину цих діагоналей проводимо висоту піраміди – вертикальний відрізок ОМ. З'єднавши точку М зі всіма вершинами основи, отримаємо повний рисунок , отримуємо повний рисунок заданої піраміди.

При короткому записі умови можна безпосередньо записати задане відношення двогранних куті, але можна спочатку побудувати на рисунку лінійні кути цих двогранних кутів, записати відношення лінійних кутів. В першому випадку отримуємо схематичний запис задачі.

Дано: 1) $AB \parallel CD$; 2) $AD = BC$;

3) $\angle AOD = 60°$; 4) $OM \perp (ABCD)$;

5) $\angle(MAB; ABCD) : \angle(MCD; ABCD) = 1:2$

Знайти: V_{ABCD}.

У другому випадку умову 5 можна записати так: $\angle OKM : \angle ONM = 1:2$. Тоді в самому розв'язанні необхідно записати побудову лінійних кутів заданих двогранних кутів. Після ствердження, що кути OKM і ONM є лінійними кутами відповідних двогранних кутів, необхідно довести.

2.1.5. Зміст поняття «розв'язання задачі»

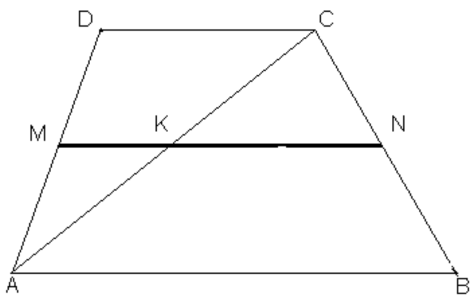
Часто кажуть: розв'язати задачу – це означає знайти її розв'язок. Але чи це так? В якісь мірі це вірно, але як розуміти слово «знайти». Ось, хтось отримав задачу, дізнавшись якимось чином її відповідь, просто каже відповідь. Він, звичайно, знайшов відповідь, але чи можна вважати, що він розв'язав задачу. Очевидно, ні. Значить, розв'язання задачі не просто полягає в тому, щоб знайти відповідь, а в чомусь іншому. Уважно придивимось до процесу розв'язання задачі.

Задача 7. Довжини основ трапеції рівні 4 см і 10 см. Знайти довжини відрізків, на які ділить середню лінію цієї трапеції одна із її діагоналей.

Спочатку побудуємо схему задачі.

Дано: $AB \parallel CD; AM = MD; BN = NC; AB = 10$ см; $CD = 4$ см.

Знайти: MK і NK



мал.2

Як відомо, середня лінія трапеції паралельна її основам. Значить, $MN \parallel AB, MN \parallel CD.$ Діагональ Ас ділить трапецію на два трикутника. Розглянемо кожен із них. В ΔABC відрізок NK є середньою лінією, або NK як частина відрізка NM паралельна АВ, і точка N за умовою є середина сторони ВС. А середня лінія трикутника дорівнює половині основи. Значить, $KN = \frac{1}{2}AB,$ а так як АВ=10 см, то $KN = 5$ см.

Аналогічно, розглядаючи ΔACD, ми переконуємось, що MK є середньою лінією цього трикутника і тому $MK = \frac{1}{2}CD$, але $CD = 4$ см, отже, $MK = 2$ см.

Задача розв'язана.

Отже, розв'язувати математичну задачу – це означає знайти таку послідовність загальних положень математики (означення, аксіоми, теореми, правила, законів, формул), використовуючи які до умов задач і до їх наслідків (проміжних результатів розв'язання), отримуємо те, що необхідно в задачі, - її відповідь.

2.1.6. Структура процесу розв’язання задачі

Очевидно, що, отримавши задачу, перше, що необхідно зробити, - розібратися, яка це задача, які її умови, в чому полягає її вимога, тобто провести її аналіз. Аналіз – *перший етап* процесу розв’язання задачі.

В ряді випадків цей аналіз необхідно якось оформити, записати.
Для цього, використовують різного роду схематичні записи задач, побудова яких складає *другий етап процесу* розв’язання.

Аналіз задачі і побудови її схематичного запису необхідно головним чином для того, щоб знайти спосіб розв’язання даної задачі. Пошук цього способу складає *третій етап* процесу розв’язання.

Коли спосіб розв’язання задачі знайдений, його потрібно здійснити, - це буде вже *четвертий етап* процесу розв’язання – етап здійснення розв’язання.

Після того як розв’язання здійснено і письмово або усно описано, необхідно переконатися, що це розв’язання вірне, що воно задовольняє всі умови задачі. Для цього проводять перевірку розв’язання, що складає *п’ятий етап* процесу розв’язання.

При розв’язанні багатьох задач, крім перевірки, необхідно ще дослідити задачу, а саме встановити , при яких умовах задача має розв’язання і притому скільки різних розв’язань в кожному окремому випадку; при яких умовах задача взагалі не має розв’язків. Все це складає *шостий етап* розв’язання задачі.

Переконавшись у вірності розв’язання і, якщо необхідно, провівши дослідження задачі, необхідно чітко сформулювати відповідь задачі, - це буде *сьомий етап* процесу розв’язання задачі.

В учбових і пізнавальних цілях корисно також провести аналіз виконаного розв’язання, зокрема встановити, чи немає, більш раціонального способу розв’язання, чи можна задачу узагальнити, які висновки можна зробити із цього розв’язання, тощо. Все це складає останній, звичайно не обов’язковий, *восьмий етап* розв’язання.

Отже, весь процес розв’язання здачі можна розділити на вісім етапів:

1) аналіз задачі;
2) схематичний запис задачі;
3) пошук способу розв’язання задачі;
4) здійснення розв’язання;
5) перевірка розв’язання задачі;
6) дослідження задачі;
7) формулювання відповіді задачі;
8) аналіз розв’язання задачі.[73]

Наведемо приклад розв’язання задачі за попередньо-описаною схемою.

Задача 8. В основі піраміди лежить правильний трикутник, сторони якого дорівнюють *a.* Два бічних ребра піраміди утворюють з площиною основи кути, рівні α , а грань, що знаходиться між ними, нахилена до основи під кутом β. Знайти об’єм піраміди.

1. *Аналіз задачі.* Дана задача є геометричною задачею на обчислення з параметрами. Тому необхідно встановити можливі області зміни параметрів. Очевидно, що a – довжина сторони основи піраміди – може бути будь-яким додатнім числом, тобто

$$a>0 \qquad (1)$$

Кути α, як кути нахилу бічних ребер до основи, тобто кути між цими ребрами і їх проекціями на основу, можуть бути лише гострими:

$$0° < \alpha < 90° \qquad (2)$$

Що стосується кута β - двогранного кута між бічною гранню і площиною основи, то цей кут може змінюватися в межах 0º до 180º.

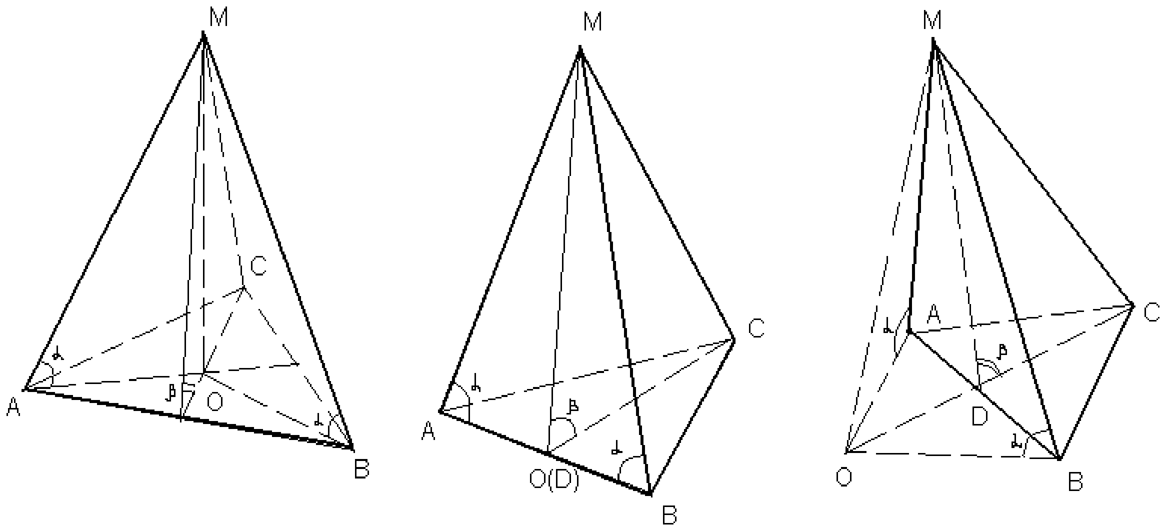
$$0° < \beta < 90° \qquad (3)$$

При цих умовах, можна перейти до розв’язання задачі. Але попередньо необхідно побудувати схематичний запис задачі, а в даному випадку рисунок даної піраміди, або інакше буде важко шукати і виконувати план розв’язання.

2. *Схематичний запис задачі.* Побудуємо задану в задачі піраміду. Але очевидно, що рисунок цієї піраміди суттєво залежить від того, як нахилена

бічна грань до лощини основи, тобто яке значення параметра β. Можливі три випадки: 1) $0° < \beta < 90°$; 2) $\beta = 90°$; 3) $90° < \beta < 180°$;

Цим трьом випадкам відповідають три різні малюнки відповідно:



Мал.3

Для того щоб побудувати кути нахилу ребер АМ і ВМ до площини основи, опустимо із вершини М перпендикуляр МО на площину основи. Тоді очевидно, АО і ВО будуть проекціями ребер АМ і ВМ і, відповідно, $\angle MAO$ і $\angle MBO$ будуть вказаними кутами. Для того щоб побудувати лінійний кут двогранного кута , утвореного гранню АМВ з площиною основи, проводимо $DO \perp AB$. Тоді за відомою теоремою про три перпендикуляри $DM \perp AB$. Так як $\Delta OAM = \Delta OBM$, то АМ=ВМ. Звідси слідує, що висота МD проходить через середину АВ. Враховуючи, що ΔABC правильний, отримуємо, що продовження OD повинне проходити через вершину С. Тоді $\angle CDM$ і є лінійним кутом вказаного двогранного кута.

Виходячи із цього, умову задачі можна записати ще так.

Дано: 1) АВ=ВС=СА= a ; 2) $MO \perp (ABC)$;

3) $OD \perp AB$; 4) $\angle OAM = \angle OBM = \alpha$; 5) $\angle CDM = \beta$

Знайти: V_{nip}

3-5. *Пошук і виконання розв'язання. Дослідження задачі.*

Ці три етапи, в даному випадку, зручно виконувати одночасно. За відомою формулою маємо:

$$V = \frac{1}{3}Sh, \qquad (4)$$

де S – площина ΔABC, а h=MO.

Так як ΔABC правильний зі стороною *a*, то:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \qquad (5)$$

Залишилось знайти h. Найлегше знайти h для другого випадку, коли $\beta = 90°$. Із прямокутного ΔAOM , де AO=$\frac{a}{2}$, знайдемо:

$$h=OM=AO\cdot tg\angle OAM = \frac{a}{2}tg\alpha \qquad (6)$$

Підставивши значення S і h з (5) і (6) в формулу (4), отримаємо, що

$$V = \frac{a^3 tg\alpha\sqrt{3}}{24} \qquad (7)$$

В інших двох випадках можна зробити так. З прямокутного ΔAOM знайдемо:

$$AO=OM: tg\angle OAM = \frac{h}{tg\alpha} \qquad (8)$$

Із прямокутного ΔODM маємо:

$$OD = \frac{OM}{tg\angle ODM} = \frac{h}{tg\angle ODM}$$

Для першого випадку, коли β гострий, отримуємо:

$$OD = \frac{h}{tg\beta} \qquad (9)$$

Для випадку, коли β тупий, отримаємо:

$$OD = \frac{h}{tg(180° - \beta)} = -\frac{h}{tg\beta} \qquad (9')$$

Із прямокутного ΔADO, де AD=$\frac{a}{2}$, маємо:

$$\frac{a^2}{4} = AO^2 - OD^2$$

Підставляючи сюди значення AO і OD з формул (8) і (9) або (9’), отримаємо:

$\frac{a^2}{4} = h^2(\frac{1}{tg^2\alpha} - \frac{1}{tg^2\beta})$. Звідси $h^2 = \frac{a^2 \cdot tg^2\alpha \cdot tg^2\beta}{4(tg^2\beta - tg^2\alpha)}$. Цей вираз має зміст лише тоді, коли $tg^2\beta - tg^2\alpha > 0$ або $\frac{\sin(\beta-\alpha)\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} > 0$.

Звідси слідує, що $\beta > \alpha$ (10) і $\alpha + \beta < 180°$ (11)

Ці умови визначають область зміни параметрів. Після їх виконання знайдемо: $h = \frac{a\,|\,tg\alpha\,|\cdot|\,tg\beta\,|}{2\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}}$. Розглядаючи умови (2) для розглянутих двох випадків, отримаємо:

$$h = \begin{cases} \frac{atg\alpha \cdot tg\beta}{2\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} & (0° < \beta < 90°) \\ -\frac{atg\alpha \cdot tg\beta}{2\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} & (90° < \beta < 180°) \end{cases}$$

Підставляючи в формулу (4), знайдемо остаточно:

$$V = \begin{cases} \frac{a^3\sqrt{3} \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{24\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} & (0° < \beta < 90°) \\ -\frac{a^3\sqrt{3} \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{24\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} & (90° < \beta < 180°) \end{cases}$$

6. Перевірка. В даному випадку перевірка розв’язання зводиться до того, щоб переконатися, що за знайденими формулами дійсно можна знайти V такий, котрий належить області визначення. Очевидно, що повинна дотримуватися лише одна умова: V>0. Розглядаючи отримані формули для V для всіх трьох випадків і враховуючи вказані при цьому умови задачі, легко переконуємось в виконанні вказаної умови.

7. Відповідь: при $\beta > \alpha > 0°,\ \alpha < 90°; \alpha + \beta < 180°, a > 0.$

$$V = \begin{cases} \frac{a^3\sqrt{3} \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{24\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} & (0° < \beta < 90°) \\ \frac{a^3\sqrt{3}tg\alpha}{24} & (\beta = 90°) \\ -\frac{a^3\sqrt{3} \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{24\sqrt{tg^2\beta - tg^2\alpha}} & (90° < \beta < 180°) \end{cases}$$

8. Дослідження розв'язання. Переглядаючи уважно дане розв'язання, помічаємо, по-перше, що при розв'язанні подібних задач важливо попередньо при аналізі задачі встановити області зміни параметрів. Але безпосередньо із умови задачі ці області зміни не завжди можна виявити. В даному випадку, в процесі розв'язання, ми значно деталізували попередньо знайдену область, встановивши додаткові умови (10) і (11).

При розв'язанні подібних задач необхідно аналізувати кожний крок розв'язання з точки зору його виконання при попередньо знайдених або заданих умовах і при необхідності ці умови уточняти, тим самим звужуючи області зміни параметрів.

По-друге, можна було знайти h для випадків гострого та тупого кута по іншому, а саме:

$$h^2 = \frac{a^2 \cdot tg^2\alpha \cdot tg^2\beta}{4(tg^2\alpha - tg^2\beta)} = \frac{a^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}{4\sin(\beta-\alpha)\sin(\alpha+\beta)}.$$

При виконанні умов (10) і (11) отримаємо для обох розглянутих випадків одну загальну формулу:

$$h = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{2\sqrt{\sin(\beta-\alpha)\sin(\alpha+\beta)}}$$

Тоді відповідь задачі отримав би таку форму:

При $\beta > \alpha > 0°,\ \alpha < 90°; \alpha + \beta < 180°, a > 0.$

$$V = \begin{cases} \dfrac{a^3\sqrt{3}tg\alpha}{24} & \beta = 90° \\ \dfrac{a^3\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta}{24\sqrt{\sin(\beta-\alpha)\sin(\alpha+\beta)}} & \beta \neq 90° \end{cases}$$

Отже, структура процесу розв'язання задачі залежить в першу чергу від характеру задачі і, звичайно, від того, якими знаннями і вміннями володіє той хто розв'язує задачу.

З вказаних восьми етапів п'ять є обов'язкові, і вони мають в процесі розв'язання будь-якої задачі. Це аналіз задачі, пошук способу її розв'язання, виконання розв'язання задачі, перевірки і формулювання відповіді.

Схема розв'язання задачі

2.2. Класифікація стереометричних задач

Яку задачу називають стереометричною? Часто вважають, що задача в якій йдеться мова про неплоску фігуру називається стереометричною, проте необхідно уточнити в якому просторі ця фігура знаходиться.

Розглянемо такі задачі:

Задача 1. Один чоловік пройшов спочатку шлях 1 км на північ, потім кілометр на захід, а потім 1 км на південь. Чи міг він повернутися на те місце, звідки починав рухатись?

Здавалося б, намалювавши на аркуші паперу схему руху чоловіка, очевидно, що це неможливо. Проте, використавши модель кулі, відповідь протилежна. Тобто чоловік пройшов 1 км на північ, потім повернувшись на захід пройшов навколо північного коло радіусом 1км, і звернув на південь пройшовши 1 км він опиниться в тому ж місці.

Задача 2. Побудувати трикутник з вершинами A(0;0;0), B(1;-1;3) та C(2;2;2)?

На перший погляд маємо трикутник та точки, тобто плоскі елементи, проте цю задачу необхідно вважати стереометричною тому, що побудова здійснюється в просторі.

Отже, стереометричними задачами називають задачі, в яких йдеться про фігури тривимірного простору. Залежно від вимог, які ставляться в стереометричній задачі, розрізняють задачі на обчислення, на побудову, на доведення і на дослідження.

2.2.1 Задачі на побудову.

До стереометричних задач на побудову відносять задачі, у яких вимагається в тривимірному просторі побудувати фігуру з певними властивостями.[53]

Базою для розв’язування стереометричних задач на побудову є розроблена Н.Ф. Четверухіним теорія довільного паралельного проектування, яка дає можливість довільно швидко і просто одержувати правильні і наочні малюнки.[45]

Існують різні підходи стосовно видів стереометричних задач на побудову і методики їх розв’язування.

Г.П. Бевз дотримується погляду, що до стереометричних задач на побудову належать задачі на уявлювані побудови, задачі на проекційних малюнках і задачі на моделях (ефективні побудови). Під час розв’язування задач першого типу побудови за допомогою інструментів не виконують, а тільки пояснюють спираючись на аксіоми і наслідки з них, що і в якій послідовності “будують”. [13]

Приклад задачі на уявлювану побудову.

Через точку, яку дано поза прямою, проведіть площину перпендикулярну до цієї прямої.

Задачі на ефективні побудови починають розв’язувати лише тоді, коли учні засвоять основні властивості паралельного проектування (припускається, що напрями прямих і відрізків, про які йдеться в цих властивостях, не збігаються з напрямами проектування):

- проекція прямої є пряма;
- проекція відрізка є відрізок;
- паралельні відрізки на проекції зображаються паралельними відрізками або відрізками однієї прямої;
- відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих зберігається;
- проекція спільної точки двох фігур є спільною точкою їх проекцій.

Основні задачі на побудову розбиті на наступні групи.

До першої належить побудова точки перетину прямої з площиною, побудова лінії перетину двох площин і побудова перерізу многогранника площиною.

До другої відносять побудову прямої, що проходить через точку поза даною прямою і паралельна даній:

- побудова прямої, паралельної даній площині;
- побудова площини, паралельної даній;
- побудову площини, яка проходить через одну з даних мимобіжних прямих і паралельна другій з них;
- побудову прямої, яка проходить через дану точку і перетинає дві дані мимобіжні прямі.

До третьої групи належить побудова перпендикуляра до даної площини і побудова площини, перпендикулярної до даної прямої.

Л.М. Лоповок вказує види стереометричних задач на побудову: задачі на побудову зображень просторових фігур, основні задачі на побудову, позиційні задачі на побудову і метричні задачі на побудову. Цього погляду дотримуються Г.М. Литвиненко, М.С. Собко, Г.І. Саранцев, З.В. Рафаловський, Я.М. Жовнір та ін.[66]

Зображенням фігури (прообразу) називається будь-яка фігура (образ), подібна до паралельної проекції даної фігури на площину. Форма зображення залежить від положення зображуваної фігури щодо площини проекцій, а також від вибору напряму проектування.

Задача зображення фігури вважається розв'язаною, якщо одержано будь-яке зображення фігури, яке вдало, правильно і наочно відображає форму геометричної фігури і співвідношення між її елементами. Для цього у процесі виконання малюнків мають бути реалізовані такі вимоги:

- правильність, яка означає, що існує такий спосіб проектування, при якому зображення фігури подібне до його проекції;
- наочність, яка передбачає, що образ фігури створює саме те враження, що і прообраз;
- простота зображення, яка полягає в тому, що для виконання додаткових побудов не треба користуватися складними допоміжними побудовами;
- повнота, суть якої в тому, що за розміщенням усіх елементів геометричної фігури або її частин на малюнку можна говорити про розміщення цих елементів у просторі .

Способи побудови зображення фігур ґрунтуються на властивостях паралельного проектування (мається на увазі загальний випадок, коли проектування здійснюється паралельно прямій, яка не паралельна тим прямим чи відрізкам, що проектуються):

- проекція точки є точка;
- проекцією прямої є пряма;
- зберігається паралельність прямих (відрізків);
- відношення довжин відрізків прямої (яка проектується) дорівнює відношенню довжин їх проекцій;
- відношення довжин проекцій двох паралельних відрізків дорівнює відношенню довжин відрізків, які проектуються.[53]

До основних задач на побудову відносяться: *побудова точки зустрічі прямої з площиною; побудова лінії перетину двох даних площин; побудова перерізу многогранника площиною, яка визначена відповідним способом.*

Розглянемо побудову перерізів в многогранниках. Уміння розв'язувати задачі на побудову перерізів є основою вивчення майже усіх тем курсу стереометрії. Основними діями, які складають метод побудови перерізів, є:

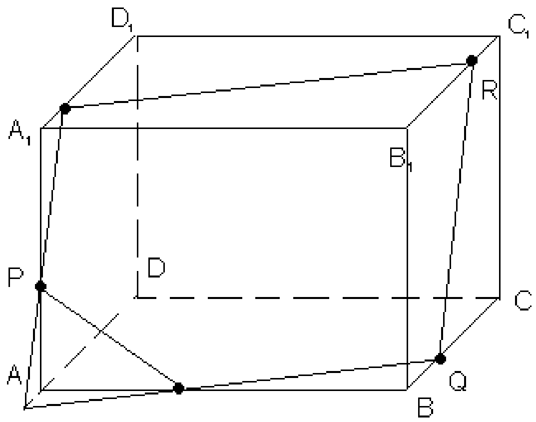
- знаходження точки перетину прямої з площиною;
- побудова лінії перетину двох площин;
- побудова прямої, паралельної до площини;
- побудова прямої перпендикулярної до площини;
- метод внутрішнього проектування;
- комбінований метод.

Для формування вмінь володіти вказаними діями, потрібно мати на увазі, що в сукупності вправ повинні бути передбачені всі ситуації застосування перелічених дій.

Приклад задачі на побудову.

Задача 3.

Дано зображення проекції на деяку площину куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з відміченими точками P, Q, R на ребрах AA_1, BC, C_1D_1. Побудуйте на цьому зображенні переріз куба площиною PQR.



мал.4

Розв'язання. У процесі побудови перерізу можна використати те, що прямі, по яким деяка площина перетинає пару паралельних площин, паралельні. Хід побудови видно на з малюнку. Спочатку через точку P проводимо пряму, паралельну прямій RQ, і знаходимо її точки перетину з прямими AD і A_1D_1. Ці точки з'єднуємо з точками Q та R і отримуємо переріз граней ABCD, $A_1B_1C_1D_1$. На перетині однієї із двох граней, які залишаться, вже побудовані дві точки, і залишається з'єднати їх.[53]

Задача на побудову точок перетину двох фігур чи взаємне розміщення їх, називається позиційною. Для розв'язання позиційної задачі потрібне повне зображення. Позиційні задачі зводяться до таких найпростіших: побудови лінії перетину двох площин, точки перетину прямої з площиною.

2.2.2. Задачі на обчислення

Найпоширенішими задачами стереометрії є задачі на обчислення. Для учнів загальноосвітніх шкіл, вони є найдоступніші і природніші. Зазвичай, вимоги стереометричних задач на обчислення починаються словами «визначте», «обчисліть», «знайдіть» тощо.

Задачі на обчислення можуть бути з параметрами і без них. Розв'язавши задачу з параметрами, отримують вираз або ж функцію від цих параметрів. Якщо серед параметрів задачі є і міри кутів, її майже завжди розв'язують, застосовуючи тригонометричні функції цих кутів. Розв'язавши задачу без параметрів, дістають число або числове значення геометричної величини: довжини, площі, об'єму, міри кута.

Стереометричні задачі поділяються і за складністю розв'язування. Найпростіші або ж нескладні задачі розв'язуються за допомогою однієї формули, відомої учням, в яку потрібно підставити відомі значення. Складні задачі розв'язуються за допомогою кількох формул, теорем чи властивостей, в тому числі і таких що розглядаються в планіметрії, алгебри, математичного аналізу, тригонометрії та інші, тобто весь «арсенал» математичних знань здобутих попередньо.

Задачі на обчислення бувають *абстрактні* й *прикладні.*

Стереометричну задачу вважають *абстрактною,* якщо в ній ідеться про абстрактні геометричні фігури та їх відношення.

Прикладними називають задачі про реальні, матеріальні об'єкти та зв'язки між ними. Ось приклади таких задач.

1. У скільки разів площа поверхні Землі більша від площі поверхні Місяця, якщо діаметр Землі наближено дорівнює 13 тисяч кілометрів, а діаметр Місяця 3,5 тисяч кілометрів?

2. Визначити об'єм води в басейні, якщо відомо, що висота - 3м, довжина - 50м, ширина - 15м?

Учнів часто цікавить не тільки розказане учителем розв'язання важкої задачі або доведення теореми, але питання про те, як можна було б до цього догадатися, тобто їм цікавий сам процес пошуку. Тому формування навичок пошуку розв'язання задач, доведення теорем повинно розглядатися як один з основних аспектів навчально-виховного процесу.

Проблеми пошуку розв'язання задач тривожать багатьох вчених, методистів та вчителів. Ними цікавилися такі відомі вчені-математики, як А. Пуанкаре і Ж. Адамар. Угорський математик Дж. Пойа написав ряд книг на ці питання. [53]

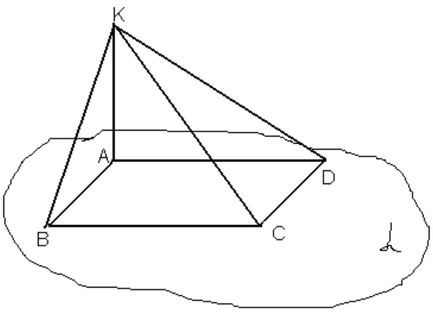
Починаючи розв'язувати задачу учень інтуїтивно шукає зв'язок між шуканим елементом задачі і заданими. Як правило, цей пошук робиться інтуїтивно. Завдання учителя полягає в тому, щоб систематизувати його, привчити учнів до цілеспрямованого аналізу умови.

Приклад задачі на обчислення:

Із вершини А прямокутника ABCD проведений перпендикуляр АК до його площини, відстань від кінця К якого до інших вершин рівні 6 м, 7 м і 9 м. Знайдіть довжину перпендикуляру.

Просторові уяви у багатьох учнів розвинуті ще слабко. Досвід показує, що пошуку розв'язання в цьому випадку допомагає попередній розгляд моделі задачі. Побачивши модель, учні швидше справляються з питанням побудови малюнка до задачі, краще розуміють його особливості.

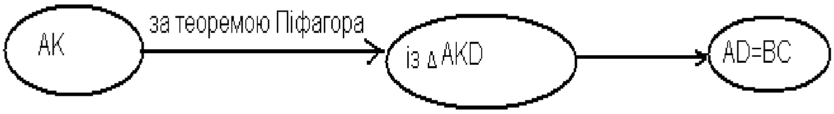
На мал.5 зображений трикутник ABCD, що належить площині α, $AK \perp \alpha$, KB=6 м, KD=7 м, KC=9 м. Знайдіть довжину перпендикуляра АК.



мал.5

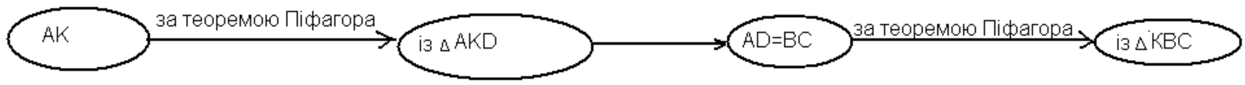
Аналіз того, що необхідно знайти в задачі – перший крок процесу мислення. Позначимо шукану величину символом АК і запишемо це на дошці поряд з малюнком. Очевидно, що перпендикуляр АК до площини α виступає в якості катета трикутника AKD, гіпотенуза KD відома. Отже, довжину шуканого катета можна було б знайти із трикутника AKD, за теоремою Піфагора. З'явився новий об'єкт процесу мислення ΔAKD і зв'язна з ним ланка обох об'єктів теореми Піфагора. Це зручно проілюструвати учням за допомогою схеми:

Далі було б легко із ΔAKD знайти довжину катета AD, яка за умовою задачі не дана. Тому катет AD розуміємо на основі іншого поняття – сторони прямокутника ABCD. Отже, AD=BC. Послідовність роздумів поповнялась новим об'єктом – відрізком ВС і прийняла такий вигляд:

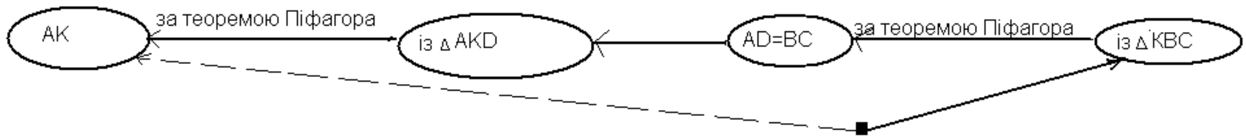


В процесі пошуку розв'язування даної задачі: наприклад, відрізок AD виступає в двох якостях: як катет трикутника KAD і як сторона прямокутника ABCD.

Продовжуючи пошук задачі, перейменовуємо відрізок ВС в якості сторони трикутника КВС, в якому відомі довжини сторін КВ і КС. Якщо б вдалося встановити, що Δ КВС прямокутний, то знайти довжину сторони ВС за теоремою Піфагора було б не важко. Але видно, що Δ КВС справді прямокутний: АВ$\perp$α, і за теоремою про три перпендикуляри КВ$\perp$ВС. В послідовності роздумів з’явився новий об’єкт - Δ КВС. Теорема Піфагора вказує на зв’язок Δ КВС з раніше встановленими.



Тепер учні легко приходять до висновку: для розв’язанні задачі, необхідно міркувати по вказаній послідовності дій в зворотному напрямі. Цей етап вказаний на наступній схемі:



Чорний квадрат вказує на схемі на початкові дані, штрихова лінія вказує на кінцеву ціль, а жирна стрілка вказує на «прояснення» в думках учня. Схема слугує планом для розв’язання задач, мотивує всі подальші дії, цілеспрямовано веде до обчислення довжини відрізка АК. Ідея розв’язання знайдена, учням залишається зобразити цей процес письмово.[77]

Корисною може бути схема на попередньому рисунку, якщо учень, наприклад, забув теорему Піфагора або ще якийсь теоретичний факт і не може розв’язати задачу. Дивлячись на схему, видно його прогалини у вивченні матеріалу, після чого учень може звернутися за консультацією до вчителя або прочитати в книзі.

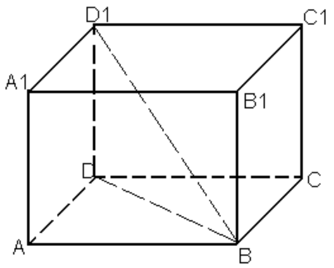
Пошук розв’язання, на початку, майже, неможливий без допомоги вчителя. Але поступово, здобуваючи досвід і навики творчої діяльності, учні самі знаходять шлях розв’язання задач.

В деяких випадках учні, розв’язуючи задачу, відступають від основної лінії розв’язання, попадають в глухий кут. Завдання вчителя полягає в тому, щоб роз’яснити їм, чому так сталося. Це також, неодмінно, важливий момент в процесі навчання: він заставить учнів більш обдумано відноситись до своїх мотивацій.

Більш складними є схеми розв’язання задач на обчислення, особливо з використанням тригонометрії.

Задача

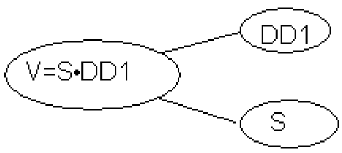
В прямому паралелепіпеді сторони основи $2\sqrt{2}$ і 5 см утворюють кут 45^o. Менша діагональ паралелепіпеда рівна 7 см. Знайти об’єм паралелепіпеда.



мал.6

Ребро DD_1 перпендикулярне площині основи ABC; AB=5 см, AD=$2\sqrt{2}$ см, $\angle BAD$=45^o. Меншою діагоналлю паралелепіпеда буде відрізок BD_1, так як в трикутниках BDD_1 та ACC_1, $DD_1=CC_1$, а BD<AC і відповідно, за теоремою Піфагора $BD_1<AC_1$ BD_1=7 см. Зробивши пояснення до малюнка, приступаємо з учням до пошуку розв’язування задачі. Необхідно знайти об’єм паралелепіпеда. Позначимо його через V.

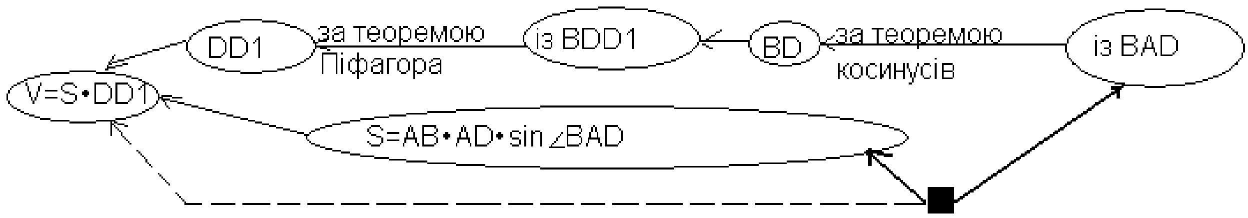
Аналіз того, що питається в задачі – це перший крок наших роздумів. Об’єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту; це дає перший об’єкт нашого ланцюга послідовності.



Утворюються дві вітки. Обчислити площу основи за двома відомими суміжними сторонами a, b і кута α між ними можна за формулою S=a·b·sinα.

Під ребром DD_1 ми розуміємо катет прямокутного трикутника BDD_1, в якому відома довжина гіпотенузи BD_1.[77]

Тепер Δ**BDD_1** – новий об’єкт нашої послідовності. Із ΔBDD_1 катет DD_1 знайдемо за теоремою Піфагора, але для цього необхідно знати BD; **BD** - новий об’єкт нашої послідовності. Катет BD є стороною трикутника BAD, квадрат довжини якої ми можемо обчислити за двома відомими сторонами AB і AD та кута BAD (за теоремою косинусів).



Отже, ΔBAD – останній об’єкт верхньої вітки нашої послідовності, що схематично зображає пошук розв’язання. Схема розв’язання приймає вигляд вказаний вище.

Далі слідує самостійна робота учнів щодо розв’язання задачі. Інколи, створюючи схему для розв’язання задачі, доцільно подивитися на неї в плані простоти і раціональності майбутнього розв’язання , що вносить в діяльність учнів додаткову зацікавленість.

Досвід показує, що спочатку на пошук розв’язання задачі і на складання схеми використовується стільки ж часу, скільки і на саме розв’язання. Але згодом, набуваючи навики розумової діяльності і познайомившись з прийомами такої діяльності (аналіз, синтез, порівняння та інше), учнів в подальшому на багато швидше справляються з пошуком розв’язання. Рекомендується на одну повністю розв’язану задачу розбирати 2-3 задачі на рівні аналізу шляху розв’язку – це значно підвищує кількість розглянутих задач, підвищує активність учнів та рівень знань. В них з’являється постійна зацікавленість до вивчення математики, що є досить важливим фактором процесу навчання.

2.2.3. Задачі на доведення

Одним з видів стереометричних задач є задачі на доведення. Вимога цих задач починається словами «доведіть», «обґрунтуйте», «спростуйте», «покажіть, що» тощо. В таких задачах, оперуючи та використовуючи відомі теореми, аксіоми, властивості та формули, необхідно довести чи спростувати те чи інше твердження.

Задача 1.

Куля вписана в зрізаний конус. Доведіть, що площа поверхні кулі менше площі бокової поверхні конуса.

Задача 2.

Похила утворює рівні кути з трьома попарно непаралельними прямими, які лежать в одній площині. Доведіть, що похила перпендикулярна площині.

Задача 3.

Доведіть, що будь-який випуклий чотирьохгранний кут можна перетнути площиною так, щоб в перерізі отримали паралелограм.

Крім того, деякі математики поділяють задачі на побудову на такі, в яких потрібно довести або зобразити.

Задача 1.

Які правильні многокутники можна отримати при перетині куба площиною?

Задача 2.

Через точку А, що не належить площині, провести перпендикулярну пряму до площини.

2.2.4. Задачі на дослідження

Задачею на дослідження називатимемо кожну задачу, в якій вимагається що-небудь дослідити. Для них характерні вимоги «дослідіть», «порівняйте», «з'ясуйте» або запитання «чи існує?», «за якої умови?», «чи правильно?», «як зміниться?», «чи залежить?» тощо. Ось приклади таких задач.

1. Чи існує призма, що має 200 ребер?

2. У якої правильної чотирикутної піраміди центри вписаної і описаної сфер збігаються?

Одним з видів задач на дослідження є задачі на знаходження геометричних місць точок. Деякі автори їх відносять до задач на побудову, але так робити недоцільно. Тут не треба виконувати побудову (оскільки часто цього не можна зробити відомими учням методами), а тільки описати фігуру, яка є шуканим геометричним місцем точок.

Іноді задачі на знаходження геометричних місць точок вважають задачами на доведення, з чим також не можна погодитись. Адже одним доведенням розв'язування таких задач не вичерпується. Перш ніж довести, що вказана фігура справді є шуканим геометричним місцем точок, треба з'ясувати яка це фігура. В задачах на доведення формулюється те твердження, яке треба довести, а у формулюваннях задач на знаходження геометричних місць ніяких тверджень немає. Розв'язавши задачу на доведення, відповідь не пишуть, а розв'язання задачі на знаходження геометричного місця має закінчуватись відповіддю.

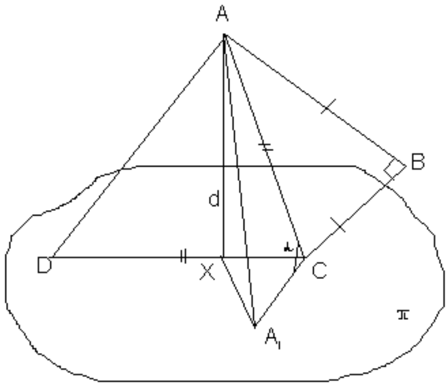
Зрозумілі і доступні учням стереометричні задачі на дослідження великою мірою сприяють розвитку просторової уяви учнів. Систематичне розв'язування таких задач поглиблює знання, виховує інтерес до стереометрії, розвиває дослідницькі здібності учнів.

Приклад задачі на дослідження.

Задача 1.

Через бічну сторону CD трапеції ABCD, в якій AD||BC, $\angle B = 90°$, AB=BC і AC=CD, проведена площина π на відстані d від вершини A; точка A_1 - проекція вершини A на площину π. Знайти на стороні CD точку, із якої відрізок AA_1 видно під найбільшим кутом α, і обчислити площу трапеції.

Розв’язання.



мал.7

З'ясуємо, з якої сторони CD трапеції відрізок AA_1 видно під найбільшим кутом. Неважко довести, що $\angle ACD = 90°$. За теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри, $DC \perp A_1C$, отже, для будь-якої точки X відрізка CD $A_1X > A_1C$. Згідно умові, $\angle A_1CA = \alpha, A_1A = d.$

Обчислимо площу трапеції. $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC}$, де $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC^2, S_{ABC} = \frac{1}{4}AC^2,$

а $AC = \frac{d}{\sin\alpha}.$ Тоді $S_{ABCD} = \frac{3}{4}AC^2 = \frac{3d^2}{4\sin^2\alpha}.$

Відповідь. $S_{ABCD} = \frac{3d^2}{4\sin^2\alpha}.$ [73]

Як відомо, складовою частиною розв'язування задачі на обчислення чи на побудову є дослідження. Тому окремі автори часто і ці задачі вважають задачами на дослідження. Це неправильно, задачі на дослідження – окремий вид. Сказане, зрозуміло, не стосується комбінованих задач, які містять дві або й більше вимог.

Задача. Через дану точку на ребрі тетраедра проведіть переріз, "паралельний двом його мимобіжним ребрам". Доведіть, що цей переріз – паралелограм. За якої умови його площа буде найбільшою?

Ця задача – комбінована: на побудову, доведення і дослідження.

РОЗДІЛ ІІІ. ЗМІТ І МЕТОДИКА КУРСУ ЗА ВИБОРОМ «МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ»

3.1. Програма курсу за вибором для учнів 10-11 класів (академічний рівень).

Методологія – основа розвитку будь-якої науки. Метод – це планомірний шлях встановлення істини, це прийом, спосіб або характер дій.

Програма призначена для організації навчання математики на академічному рівні, якому відповідають біолого-хімічний, біолого-фізичний, біотехнологічний, хіміко-технологічний, фізико-хімічний, агрохімічний профілі природничо-математичного напряму профільного навчання, а також технологічний профіль. Для цих профілів математика є базовим (обов'язковим для вивчення) предметом, близьким до профільних навчальних дисциплін — хімії, фізики, біології, технологій.

Мета навчання математики на академічному рівні полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації і достатньої для вивчення профільних предметів, для успішної майбутньої професійної діяльності в тих сферах, де математика відіграє роль апарату, специфічного засобу для вивчення й аналізу закономірностей, реальних явищ і процесів.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких ***завдань:***

- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої мотивації до навчання;
- оволодіння учнями мовою математики системою математичних знань, навичок і вмінь, потрібних у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервності освіти;
- інтелектуальний розвиток особистості, передусім розвиток в учнів логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції;
- екологічне, естетичне, громадянське виховання та формування позитивних рис особистості;
- формування життєвих і соціально-ціннісних компетентностей учня.

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах. Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- розпізнає проблеми довкілля, які можна розв'язати математичними методами, формулює їх математичною мовою, досліджує та розв'язує ці проблеми, використовуючи математичні знання та методи, інтерпретує отримані результати з урахуванням конкретних умов і цілей дослідження, застосовує математичні моделі при вивченні профільних предметів (інформатики, фізики, хімії, біології, технологій);

- логічно мислить (аналізує, порівнює, узагальнює і систематизує, класифікує математичні об'єкти за певними властивостями, наводить контрприклади); володіє алгоритмами та евристиками;
- користується джерелами математичної інформації, може самостійно її відшукати, проаналізувати та передати інформацію, подану в різних формах (графічній, табличній, знаково-символьній);
- виконує математичні розрахунки (дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, наближені обчислення тощо), раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення;
- виконує тотожні перетворення алгебраїчних, показникових, логарифмічних, тригонометричних виразів;
- аналізує графіки функціональних залежностей, досліджує їхні властивості; використовує властивості елементарних функцій при аналізі та описуванні реальних явищ, процесів, залежностей;
- володіє методами математичного аналізу в обсязі, що дозволяє досліджувати властивості елементарних функцій, будувати їх графіки і розв'язувати нескладні прикладні задачі;
- обчислює ймовірності випадкових подій, оцінює шанси їх настання;
- зображує геометричні фігури, встановлює і обгрунтовує їхні властивості; застосовує властивості фігур при розв'язуванні задач; вимірює геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходить кількісні характеристики фігур (площі, об'єми).

Структура навчальної програми. Програму подано у формі таблиці, що містить дві колонки: зміст навчального матеріалу і навчальні досягнення учнів. У змісті вказано навчальний матеріал, який підлягає вивченню у відповідному класі. Вимоги до навчальних досягнень учнів орієнтують на результати навчання, які є об'єктом контролю й оцінювання.

Зміст навчання математики структуровано за темами двох навчальних курсів «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» із зазначенням послідовності тем та кількості годин на їх вивчення. Такий розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителям і авторам підручників надається право коригувати послідовність вивчення тем та змінювати розподіл годин на вивчення тем залежно від прийнятої методичної концепції та конкретних навчальних ситуацій.

У зв'язку із перенесенням тем «Похідна та її застосування» та «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі» до 10 класу на 2016/2017 навчальний рік укладено окрему таблицю із змістом навчального матеріалу для 11.

За відсутністю можливості забезпечити учнів навчальними матеріалами з тем «Похідна та її застосування» та «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі», ці теми можуть вивчатися в 11 класі (відповідно до таблиць для 2016/2017 навчального року, вивільнені години в 10 класі розподіляються на розсуд вчителя).

Програмою передбачено резерв навчального часу, а також години для повторення, узагальнення й систематизації вивченого матеріалу. Спосіб використання резервного часу вчитель може обрати самостійно: для повторення на початку навчального року матеріалу, який вивчався у попередніх класах, як додаткові години на вивчення окремих тем, якщо вони важко засвоюються учнями, для проведення інтегрованих з профільними предметами уроків тощо.

Особливості організації навчання.

Програма академічного рівня задає дещо ширший зміст і вищі вимоги до його засвоєння порівняно з рівнем стандарту. Вивчення математики на академічному рівні передбачається передусім у тих випадках, коли вона тісно пов'язана з профільними предметами і забезпечує їх ефективне засвоєння. .

У пропонованій програмі, з метою забезпечити для учнів можливість зміни рівня навчання математики, у кожному класі в основному збережено назви і послідовність вивчення тем, передбачених програмою рівня стандарту.

При навчанні математики на академічному рівні основна увага приділяється не лише засвоєнню математичних знань, а й виробленню вмінь застосовувати їх до розв'язування практичних і прикладних задач, оволодінню математичними методами, моделями, що забезпечить успішне вивчення профільних предметів — хімії, фізики, біології, технологій. При цьому зв'язки математики з профільними предметами посилюються за рахунок розв'язання задач прикладного змісту, ілюстрацій застосування математичних понять, методів і моделей у шкільних курсах хімії, біології, фізики, технологій.

Вивчаючи математику, старшокласники мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування будь-яких прикладних задач розподіляється на три етапи: 1) формалізація (перехід від ситуації, описаної в задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, і від неї — до чітко сформульованої математичної задачі); 2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі; 3) інтерпретація одержаного розв'язання задачі та застосування його до вихідної ситуації.

Залежно від профілю може використовуватися варіативна складова навчального плану, що передбачає проведення факультативів, курсів за вибором, орієнтованих на посилення міжпредметних зв'язків математики з профільними предметами. Наприклад, такі курси за вибором: «Математичні методи обробки результатів хімічного експерименту», «Математичне моделювання у біології», «Прийоми графічного зображення властивостей технічних об'єктів і процесів» тощо. їх вивчення не лише посилює міжпредметні зв'язки, а й сприяє успішному засвоєнню учнями профільних предметів.

Оцінювання навчальних досягнень учнів.

До навчальних досягнень учнів з математики, які підлягають оцінюванню, належать ключові та математичні компетентності:

- теоретичні знання, що стосуються математичних понять, тверджень, теорем, властивостей, ознак, методів та ідей математики;
- знання, що стосуються способів діяльності, які можна подати у вигляді системи дій (правила, алгоритми);
- здатність безпосередньо здійснювати вже відомі способи діяльності відповідно до засвоєних правил, алгоритмів (наприклад, виконувати певне тотожне перетворення виразу, розв'язувати рівняння певного виду, виконувати геометричні побудови, досліджувати функцію на монотонність, розв'язувати текстові задачі розглянутих типів тощо);
- здатність застосовувати набуті знання і вміння для розв'язання навчальних і практичних задач, коли шлях, спосіб такого розв'язання потрібно попередньо визначити (знайти) самому.

При оцінюванні навчальних досягнень учнів мають ураховуватися:

- характеристики відповіді учня: правильність, повнота, логічність, обґрунтованість, цілісність;
- якість знань: осмисленість, глибина, узагальненість, системність, гнучкість, дієвість, міцність;
- ступінь сформованості загальнонавчальних та предметних умінь і навичок;
- рівень володіння розумовими операціями: вміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, абстрагувати, класифікувати, узагальнювати, робити висновки тощо;
- досвід творчої діяльності (вміння виявляти проблеми та розв'язувати їх, формулювати гіпотези);
- самостійність оцінних суджень.

Відповідно до ступеня оволодіння зазначеними знаннями і способами діяльності виокремлюються чотири рівні навчальних досягнень школярів з математики: початковий, середній, достатній, високий.

Початковий рівень — учень (учениця) називає математичний об’єкт (вираз, формули, геометричну фігуру, символ), але тільки в тому випадку, коли цей об’єкт (його зображення, опис, характеристика) запропоновано йому (їй) безпосередньо; за допомогою вчителя виконує елементарні завдання.

Середній рівень — учень (учениця) повторює інформацію, операції, дії, засвоєні ним (нею) у процесі навчання, здатний(а) розв’язувати завдання за зразком.

Достатній рівень — учень (учениця) застосовує знання в стандартних ситуаціях, вміє виконувати математичні операції, загальні методи і послідовність (алгоритм) яких йому (їй) знайомі, але зміст та умови виконання змінені.

Високий рівень — учень (учениця) здатний(а) самостійно орієнтуватися в нових для нього (неї) ситуаціях, складати план дій і виконувати його; пропонувати нові, невідомі йому (їй) раніше розв’язання, тобто його (її) діяльність має дослідницький характер.

Оцінювання якості математичної підготовки учнів здійснюється у двох аспектах: рівень оволодіння теоретичними знаннями та якість практичних умінь і навичок, здатність застосовувати вивчений матеріал під час розв’язування задач і вправ. Оцінювання здійснюється в системі поточного, тематичного контролю знань, коли бали виставляються за вивчення окремих тем, розділів та під час державної атестації.

Рівень навчальних досягнень	Бали	Критерії оцінювання навчальних досягнень
I. Початковий	1	Учень (учениця) розпізнає один із кількох запропонованих математичних об’єктів (символів, виразів, геометричних фігур тощо), виділивши його серед інших; читає і записує числа, переписує даний математичний вираз, формулу; зображує найпростіші геометричні фігури (малює ескіз)
	2	Учень (учениця) виконує однокрокові дії з числами, найпростішими математичними виразами; впізнає окремі математичні об’єкти і пояснює свій вибір
	3	Учень (учениця) порівнює дані або словесно описані математичні об’єкти за їх суттєвими властивостями; за допомогою вчителя виконує елементарні завдання
II. Середній	4	Учень (учениця) відтворює означення математичних понять і формулювання тверджень; називає елементи математичних об’єктів; формулює деякі властивості математичних об’єктів; виконує за зразком завдання обов’язкового рівня
	5	Учень (учениця) ілюструє означення математичних понять, формулювання теорем і правил виконання математичних дій прикладами з пояснень вчителя або підручника; розв’язує завдання обов’язкового рівня за відомими алгоритмами з частковим поясненням
	6	Учень (учениця) ілюструє означення математичних понять, формулювання теорем і правил виконання математичних дій власними прикладами; самостійно розв’язує завдання обов’язкового рівня з достатнім поясненням; записує математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки
III. Достатній	7	Учень (учениця) застосовує означення математичних понять та їх властивості для розв’язування завдань у знайомих ситуаціях; знає залежності між елементами математичних об’єктів; самостійно виправляє вказані йому (їй) помилки; розв’язує завдання, передбачені програмою, без достатніх

		пояснень
	8	Учень (учениця) володіє визначеним програмою навчальним матеріалом; розв’язує завдання, передбачені програмою, з частковим поясненням; частково аргументує математичні міркування й розв’язання завдань
	9	Учень (учениця) вільно володіє визначеним програмою навчальним матеріалом; самостійно виконує завдання в знайомих ситуаціях із достатнім поясненням; виправляє допущені помилки; повністю аргументує обґрунтування математичних тверджень; розв’язує завдання з достатнім поясненням
IV. Високий	10	Ключові та математичні компетентності учня (учениці) повністю відповідають вимогам програми, зокрема: учень (учениця) усвідомлює нові для них математичні факти, ідеї, вміє доводити передбачені програмою математичні твердження з достатнім обґрунтуванням; під керівництвом учителя знаходить джерела інформації та самостійно використовує їх; розв’язує завдання з повним поясненням і обґрунтуванням
	11	Учень (учениця) вільно і правильно висловлює відповідні математичні міркування, переконливо аргументує їх; самостійно знаходить джерела інформації та працює з ними; використовує набуті знання і вміння в незнайомих для них ситуаціях; знає передбачені програмою основні методи розв’язування завдання і вміє їх застосовувати з необхідним обґрунтуванням
	12	Учень (учениця) виявляє варіативність мислення і раціональність у виборі способу розв’язування математичної проблеми; вміє узагальнювати й систематизувати набуті знання; здатний(а) розв’язувати нестандартні задачі та вправи

Поточне оцінювання учнів з математики проводиться безпосередньо під час навчальних занять або за результатами виконання домашніх завдань, усних відповідей, письмових робіт тощо.

Рекомендації щодо роботи з програмою. Методика навчання математики на академічному рівні має враховувати цілі та завдання вивчення курсу, особливості його змісту і структури.

Структура і зміст навчального матеріалу зумовлює посилення міжпредметних зв’язків під час його вивчення. Це стосується, зокрема, застосування методів аналізу і алгебри при вивченні геометрії і навпаки. Значна увага приділяється також зв’язкам з профільними навчальними предметами, ознайомленню учнів з деякими важливими математичними поняттями і методами, які широко застосовуються у фізиці, хімії, біології, технологіях.

Методичні підходи до вивчення математики на академічному рівні добираються відповідно до особливостей розумової діяльності учнів і змісту навчального матеріалу.

Порівняно з рівнем стандарту суттєво підвищується теоретичний рівень навчання, зокрема при вивченні рівнянь, нерівностей та їх систем акцентується увага на основних поняттях: корінь, розв’язок, рівносильність, наслідок, можливість втрати та появи сторонніх коренів, перевірка як важлива складова процесу розв’язування.

Програмні вимоги до підготовки учнів зорієнтують вчителя на досягнення мети навчання за кожною темою програми, полегшать планування цілей і завдань уроків, дадуть змогу визначити адекватні технології проведення занять, поточного і тематичного оцінювання.

Навчальні теми, визначені програмою, можуть вивчатися учнями на різних рівнях засвоєння теоретичного матеріалу і формування умінь. За умови мінімальної кількості годин і низького рівня математичної підготовки учнів класу деякі теми на уроках можуть розглядатися без доведень, на простих і доступних прикладах і не виноситися у повному обсязі для тематичного контролю. Зацікавлені учні можуть детальніше опановувати такі теми самостійно за підручником, на курсах за вибором або під час індивідуального навчання в позаурочний час.

Основною формою проведення занять залишається система уроків: вивчення нового матеріалу, формування вмінь розв'язувати задачі, узагальнення та систематизації знань, контролю і корекції знань. Поряд із цим ширше, ніж при вивченні курсу математики на рівні стандарту, використовується шкільна лекція, семінарські та практичні заняття, а також нетрадиційні форми навчання (групові, дидактичні ігри, уроки «однієї задачі», «однієї ідеї», математичні «бої», інтегровані уроки математики з профільним предметом тощо). Методика навчання характеризується інтенсивною самостійною діяльністю учнів, індивідуалізацією навчання, застосуванням проблемно-пошукових методів, таких методичних прийомів і засобів навчання, як математичне моделювання, логічне конструювання, граф-схеми, паралельне вивчення схожих математичних об'єктів, синтетичні та комбіновані вправи тощо.

Широкі можливості для інтенсифікації та оптимізації навчально- виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення учнів надають сучасні інформаційні технології навчання, які задовольняють такі основні вимоги:

- враховують особливості навчальної діяльності, її зміст і структуру; цикли життєдіяльності учня, його здібності, інтереси, нахили, індивідуальні відмінності учнів, форми їх прояву у сфері комунікативних відносин і в пізнавальній діяльності;
- є варіативними, особистісно орієнтованими, коли знання, вміння та навички розглядаються не лише як самоціль, а й засіб розвитку пізнавальних якостей учня; виховують в учня здатність бути суб'єктом свого розвитку, рефлексивного ставлення до самого себе;
- забезпечують цілісне психолого-методичне проектування навчального процесу в умовах рівневої та профільної диференціації навчання.

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, EUREKA, GeoGebra, AGrapher, бібліотек електронних наочностей тощо. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії: побудова графіків функцій, розв'язування систем рівнянь і нерівностей, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об'ємів тіл обертання тощо.

Доцільною також вбачається організація проблемно-пошукової (дослідницької) діяльності учнів на уроках та позакласних і факультативних заняттях з математики.

***

Клас	Номер теми	Назва теми	Кількість годин для вивчення теми
10	1	Вступ до стереометрії	4
	2	Паралельність прямих і площин у просторі	16
	3	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	20
	4	Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі	16
		Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу, розв'язування задач,	14

		резервний час	
		Разом:	70
11	5	Многогранники	16
	6	Тіла обертання	14
	7	Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл	14
		Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу, розв’язування задач, резервний час	26
		Разом:	70

3.2. Рівнева диференціація в особово-орієнтованому навчанні

Під *диференціацією* розуміють таку систему навчання, при якій кожен учень, опановувавши деяким мінімумом загальноосвітньої підготовки, що є загальнозначущою і що забезпечує можливість адаптації в життєвих умовах, які постійно змінюються, отримує право і гарантовану можливість приділяти переважну увагу тим напрямам, які найбільшою мірою відповідають його схильностям.

У навчанні математиці диференціація має особливе значення, що пояснюється специфікою самого учбового предмету. Об'єктивно математика – одна з найскладніших шкільних дисциплін і викликає труднощі у багатьох учнів. В той же час велике їх число має явно виражені здібності до цього предмету. Розрив у можливостях сприйняття курсу учнями досить великий. Орієнтація ж на особистість учня вимагає, щоб диференціація навчання математиці враховувала потреби *всіх* школярів.

Розрізняють два види диференціації.

Рівнева диференціація виражається в тому, що, навчаючись в одному класі, за однією програмою і підручником, діти можуть засвоювати матеріал на *різних* рівнях. Визначним при цьому є рівень обов'язкової підготовки. Його досягнення свідчить про виконання учнем мінімально необхідних вимог до засвоєння змісту. На його основі формуються вищі рівні оволодіння матеріалом.

Профільна диференціація (або диференціація за змістом) припускає навчання різних груп школярів за програмами, що відрізняються глибиною викладу матеріалу, об'ємом відомостей і навіть номенклатурою питань, що розглядаються. Проте високий рівень учбових вимог природним чином обмежує число учнів, охоплених цією формою навчання.

Обидва види диференціації співіснують і взаємно доповнюють один одного на всіх ступенях шкільної математичної освіти, хоч і в різній питомій вазі. У основній школі переважає рівнева диференціація, що не втрачає свого значення і в старших класах. На старшому ступені школи пріоритет віддається різноманітним формам профільного вивчення предметів. Разом з тим диференціація за змістом може виявлятися вже в основній школі, де вона здійснюється через гурткові заняття і факультативи.

Рівнева диференціація

У основі *рівневого диференційованого навчання* лежить планування результатів навчання: виділення рівня обов'язкової підготовки і формування на цій основі підвищених рівнів оволодіння матеріалом. Погодившись з ними і враховуючи свої здібності, інтереси, потреби, учень отримує можливість вибирати об'єм і глибину засвоєння учбового матеріалу, варіювати своє учбове навантаження. Досягнення обов'язкових результатів навчання стає тим об'єктивним критерієм, на основі якого може видозмінюватися найближча мета кожного учня і перебудовуватися зміст його роботи: або його зусилля направляються на оволодіння матеріалом на вищих рівнях, або продовжується робота по формуванню найважливіших опорних знань і умінь.

Завдяки такому підходу диференційована робота одержує міцний фундамент, набуває реального, відчутного і для вчителя і для учня сенсу. Помітно збільшуються можливості для роботи з сильними учнями, оскільки вчитель вже не повинен питати даний на уроці матеріал в повному об'ємі зі всіх школярів. Крім того, відпадає необхідність постійно розвантажувати програму і знижувати загальний рівень вимог, озираючись на слабких школярів.

Перерахуємо ряд важливих умов, виконання яких необхідне для успішного і ефективного здійснення рівневої диференціації.

•Виділені рівні засвоєння матеріалу і обов'язкові результати навчання повинні бути *відкриті для учнів.*

Успіх диференційованого навчання (як і учбового процесу в цілому) в значній мірі залежить від пізнавальної активності школярів, від того, наскільки вони зацікавлені у власній роботі. Ясне знання конкретних цілей за умови їх посильності, можливість виконати вимоги, що пред'являються вчителем, активізують пізнавальну діяльність учнів, причому на різних рівнях.

Якщо цілі відомі і посильні учню, а їх досягнення заохочується, то для підлітка немає нічого природнішого, як прагнути до їх виконання. Тому відвертість рівнів підготовки сприяє формуванню позитивних мотивів навчання, свідомого відношення до навчання, підвищення самооцінки учня.

•Наявність певних «ножиць» між рівнем вимог і рівнем навчання.

Не слід ототожнювати рівень *викладання* матеріалу з обов'язковим рівнем його *засвоєння.* Перший повинен бути в цілому істотно вище, інакше і рівень обов'язкової підготовки не буде досягнутий, а учні, потенційно здатні засвоїти більше, не рухатимуться далі.

Кожен учень повинен в повному об'ємі почути пропонований матеріал зі всіма доведеннями і обґрунтуваннями, ознайомитися із зразками міркувань, на якихось етапах брати участь в розв’язку складніших задач. Іншими словами, даючи всім однаковий об'єм матеріалу, ми встановлюємо різні рівні вимог до його засвоєння.

•В навчанні повинна бути забезпечена *послідовність* в просуванні учня по рівнях.

Не слід пред'являти вищих вимог тим учням, хто не досяг рівня обов'язкової підготовки. Труднощі в учбовій роботі повинні бути для школярів посильними, відповідними індивідуальному темпу оволодіння матеріалом на кожному етапі навчання. В той же час якщо для одних учнів необхідно продовжити етап опрацювання основних, опорних знань і умінь, то інших не слід необґрунтовано затримувати на цьому етапі.

•Добровільність у виборі рівня засвоєння і звітності.

Кожен учень має право добровільно і свідомо вирішувати для себе, на якому рівні йому засвоювати матеріал.

Такий підхід дозволяє формувати у школярів пізнавальну потребу, навики самооцінки, планування і регулювання своєї діяльності.

•Зміст контролю і оцінка повинні відображати прийнятий рівневий підхід.

Контроль повинен передбачати перевірку досягнення всіма учнями обов'язкових результатів навчання, а також доповнюватися перевіркою засвоєння матеріалу на вищих рівнях.

Рівнева диференціація може здійснюватися в різній формі (її вибір багато в чому залежить від методів і прийомів роботи вчителя, особливостей класу, віку учнів і т.д.). Як одна з основних пропонується *формування мобільних груп,* ділення на які відбувається на основі критерію досягнення рівня обов'язкової підготовки.

Групи можуть формуватися для роботи і на звичайних уроках, і на додаткових заняттях. Відзначимо, що в процесі самостійної діяльності учнів не варто обмежуватися лише диференційованим підходом, слід варіювати індивідуальну і фронтальну форми роботи залежно від етапу вивчення теми, від потреби учнів в допомозі вчителя.

Ділення учнів на групи залежно від досягнення ними рівня обов'язкової підготовки носить об'єктивний характер і при правильній організації не дає учням приводів для образ. Важливо, що діти можуть оцінити власні сили і вибрати для себе рівень цілей, відповідний їх здібностям і можливостям в даний момент, а з часом – перейти на вищий рівень.

Профільна диференціація

Математика входить до числа обов'язкових учбових предметів, при цьому в загальноосвітній підготовці школяра вона може мати різну «питому вагу» як за часом, що відводиться на її вивчення так і по глибині і обхвату даного матеріалу.

Математиці належить провідна роль у формуванні алгоритмічного мислення, умінь не тільки діяти по відомих алгоритмах, але і конструювати нові, тобто ті уміння, які необхідні для вільної орієнтації в «комп'ютеризованому» світі. Логічне мислення дитини формується не раніше ніж до 14-15 років, тому невірно було б припинити «підживлення» інтелекту математикою у значної частини учнів на виході з основної школи. Правильне розв'язування питання полягає в диференціації навчання математиці в старшій ланці, у введенні курсів різного об'єму і рівня складності.

Залежно від тієї ролі, яку математика може грати в освіті людини, виділяють два типи таких курсів.

- **Курс загальнокультурної орієнтації** (*обов'язковий рівень*), який розрахований на учнів, що розглядають математику тільки як елемент загальної освіти і що не припускають використовувати її безпосередньо в майбутній професійній діяльності.
- **Курси підвищеного типу**, що забезпечують подальше вивчення математики і її застосування як елемент професійної підготовки. Виділимо два основні курси підвищеного типу.

Академічний рівень призначений для школярів, що вибрали для себе ті області діяльності, де математика грає роль апарату, специфічного засобу для вивчення закономірностей навколишнього світу.

Профільний рівень орієнтований на учнів, для яких власне математика є однією із основних цілей пізнання.

Таким чином, для старшого ступеня школи доцільна наявність трьох основних математичних рівнів: *обов'язковий, академічний та профільний рівень*. Вони покликані надати кожному учню можливість вивчати математику на рівні, відповідному його інтересам, здібностям. Цих курсів в цілому достатньо для викладання математики за профілем будь-якого напряму.

Обов'язковий рівень можуть вибрати учні, яких цікавлять, наприклад, мови, мистецтво, художня творчість, спорт або наочно-практична діяльність. Він повинен мати виражену гуманітарну спрямованість і бути орієнтований на знайомство з математикою як з областю людської діяльності; на розумовий розвиток людини; на формування знань і умінь, необхідних йому для вільної орієнтації в сучасному світі. Обов'язкові вимоги по засвоєнню *обов'язкового рівня* фактично повинні співпадати з базовим рівнем математичної підготовки випускників середньої школи.

Академічний рівень призначений для учнів з науковим стилем мислення, що вибрали для себе профілі природничонаукових і науково-гуманітарних напрямів: хімічний, біологічний, географічний, історичний, соціологічний, економічний і ін. Цей рівень слід вибудовувати з урахуванням того, що для школярів, які його вивчають, математика є хоч і необхідним, але не найважливішим предметом. Він повинен забезпечувати оволодіння конкретними математичними знаннями, що дозволяють, зокрема, виробити уявлення про застосування математики і вибрану науку, і достатніми для вивчення математики у вузі відповідного профілю.

Профільний рівень найбільш строгий і повний курс математики орієнтований на учнів, які вибрали для себе діяльність, безпосередньо пов'язану з математикою, і як наслідок – якийсь профіль з групи «математичного напряму», наприклад фізико-математичний або інформаційно-технологічний.

Програму по кожному з рівнів доцільно будувати за «модульним принципом». У ній повинні бути дві частини:

інваріантна, обов'язкова для вивчення всіма, хто вибрав цей курс;

варіативна, що складається з розділів, з яких вчитель може вибрати матеріал, доповнюючи основну частину курсу.

Про взаємозв'язок диференціації

У диференційованому навчанні математиці гуманна концепція *єдності рівневої і профільної диференціації,* одна без іншої неповноцінна. Позбавити учня можливості повною мірою використовувати той або інший вид диференціації – означає зробити антигуманний акт. Одержувати задоволення від занять математикою школяр зможе тільки тоді, коли диференціація і індивідуалізація (як гранична форма диференціації) будуть доступні йому в тому ступені, в якій він сам побажає. Інакше один учень вчитиметься легко, не напружуючись, а інший – намагатиметься осилити непосильне. Перший не знайде застосування наявним здібностям і не реалізує свій потенціал, другий відчуватиме постійне приниження, відчуватиме на кожному кроці власну неповноцінність і розумову убогість.

Вивчення математики «на високому» рівні не можна здійснити повною мірою, якщо воно не спирається на профільну диференціацію. Не використовувати її як важіль для приведення в дію всіх можливостей рівневої диференціації – означає наперед знизити передбачувану ефективність навчання.

Профільна диференціація направлена на поглиблене вивчення математики, розширення уявлень про її додатки в різних областях людської діяльності. Інакше кажучи, ми маємо справу з якісно іншим рівнем навчання математиці. Тому профільна диференціація є ефективним засобом варіювання рівнів навчання предмету, незалежно від того, в якому класі він викладається: у математичному, гуманітарному, технічному або загальноосвітньому; без профільної диференціації неможлива ефективна рівнева диференціація. Вибір профілю навчання аніскільки не знижує значущості рівневої диференціації, а змінює лише можливості її здійснення.

Виділення двох видів диференціації корисно тільки для того, щоб більш різносторонньо, глибоко, детально і повно вивчити проблему диференційованого навчання.

Підведемо підсумки.

- Учню необхідно надати можливість вибору тієї або іншої диференціації в будь-якому віці, в будь-якому класі, більш того – на кожному уроці. Негуманно заявляти учню, що він запізнився з своїм вибором, що треба було зробити це раніше.

•При виборі форм диференціації перевагу потрібно віддавати не екстенсивним, а інтенсивним формам.

•Диференціацію слід здійснювати за рахунок відмінності в підходах і методах придбання знань.

•Важливо спиратися на прогресивні методи навчання, тобто навчати школярів на найвищому рівні їх пізнавальних можливостей.

Формування груп учнів

У основу роботи закладається вивчення здібностей особистості. У структуру математичних здібностей входять більше десяти груп компонентів[44]. З них виділяють дві основні: швидкість засвоєння і активність мислення.

Швидкість засвоєння характеризується наступними категоріями:

– дослівне повторення тексту;

– часткове повторення;

– відтворення 50% тексту;

– самостійне відтворення тексту раніше вивченого;

– відтворення матеріалу за допомогою вчителя;

– відтворення з помилками (але основна ідея утримується);

– сповільнене, невиразне відтворення тексту;

– розумова відсталість (згасання розвитку).

Активність мислення характеризується такими категоріями:

– плідна робота впродовж всього уроку;

– робота з «спалахами»;

– неповна працездатність;

– швидка стомлюваність;

– ігнорування завдань.

Матеріал для аналізу перерахованих компонентів беруться перш за все із спостережень, за наслідками яких заповнюється наступна *діагностична таблиця.*

Рівень А (учні з хорошими матем. здібностями)	Рівень В (учні з середніми матем. здібностями)	Рівень С учні зі слабкими матем. здібностями
1. 2. 3. …	1. 2. 3. …	1. 2. 3. …

Наведемо приклад вивчення теми згідно диференціації учнів за їх розумовими можливостями.

Роботу над темою "Паралельність площин" потрібно починати з визначення обов'язкового мінімуму змісту матеріалу, планування результатів навчання, при цьому прагнути забезпечити розвиток кожного учня.

Виходячи із програми, матеріалів підручника геометрії, методичних рекомендацій, запропонованих по тій темі, виділяємо мінімально обов'язковий рівень знань й умінь учнів. Насамперед визначаємо конкретно, що треба знати: основні поняття, визначення, теореми; що треба вміти: застосування обов'язкового теоретичного матеріалу в розв’язанні опорних задач, які сприяють формуванню обов'язкових навичок, таких, як стандартні міркування, побудови, обчислення.

Перед початком вивчення теми в класі вивішується. стенд приблизно наступного змісту:

1. Це треба знати (теорія). Див. додаток А.

2. Список задач мінімально обов'язкового рівня (перший рівень). 10 опорних задач із розділів теми: паралельність прямих, паралельність прямій і площині, паралельність площин. Див. додаток Б.

3. Задачі другого рівня (10 задач). Підібрані на основі опорних, але трохи ускладнені. Див. додаток В.

4. Задачі творчого плану (третій рівень). Див. додаток Г.

5. Зразки розв’язання творчих задач. Планування теми.

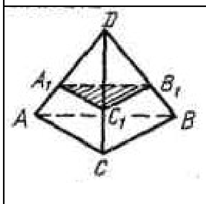
Загальна кількість годин – 5.

На першому уроці вивчається теорія; потім три уроки розв’язуються задачі, поміщені на стенді. Учні розв’язують їх або на самопідготовці, або на заліку й контрольній роботі. Тим самим вони мають можливість познайомитися з рівнями вимог від обов'язкового мінімуму до творчого, визначити для себе обсяг і глибину засвоєння матеріалу, тобто вийти на самооцінку своїх знань. П'ятий урок – рівнева контрольна робота.

Отже, перший урок. Вивчення нового матеріалу проходить у вигляді багатоблочної подачі теорії. За урок треба вивчити 4 теореми: ознака паралельності площин; теорему про існування й єдиність площини, паралельній даній площині, що проходить через точку, яка не належить цій площині; дві теореми про властивості паралельних площин.

Підготовка дошки до уроку (див. схема 1).

Схема 1

<table>
<tr><td colspan="4">Паралельність площин</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Взаємне розташування площин</td><td rowspan="2">3. Ознака паралельності площин</td><td colspan="2">Властивості паралельних площин</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>5.</td></tr>
<tr><td>
</td><td colspan="3">2. Задача: 1. Побудувати переріз, що проходить через середину ребер DA, DB, DC.
2. Довести, що $A_1C_1 \parallel ABC$.
3. Довести, що $A_1B_1C_1 \parallel ABC$.</td></tr>
</table>

Урок починається з ознайомлення із планом вивчення теми пояснення вимог до оцінки знань із обліком рівневого засвоєння матеріалу на заліку й контрольній роботі.

З метою активізації пізнавальної діяльності виділяємо групу учнів, які з першої хвилини уроку самостійно вивчають теорію по підручнику. З усім класом організується евристична бесіда про паралельність прямих, прямій і площині в просторі, потім розглядається проблемне задачі з виходом на необхідність обґрунтування паралельності площин. Всі теореми доводяться з активним залученням учнів, що самостійно вивчили матеріал по підручнику. Учень на дошці робить креслення, усно доводить теорему, а вчитель повторює й записує її доведення.

Метою другого уроку є навчання розв’язанню опорних задач. Форма організації уроку групова. Попередньо проводиться тестування, що виявляє міжособистісні відносини в класі. Учнем задаються наступні питання:

1. З ким з товаришів ти хотів би разом працювати?
2. З ким з товаришів ти хотів би разом відпочивати?
3. Кому б ти довірив свою таємницю?

На кожне питання треба написати 3 прізвища: кого вибираєш у першу чергу, у другу й у третю.

У результаті складаються 4 різнорівневі групи. У кожній групі визначаться по 2 лідера. Один називається теоретиком, інший – практиком.

Зміст диференційованої роботи на цьому уроці – навчити кожного учня розв’язувати опорні задачі (тобто задачі першого рівня). Причому, тому що сильний учень справляється із цими задачами швидше, він повинен забезпечити засвоєння матеріалу слабким учнем.

На перерві вчитель роз'яснює командирам груп їхні обов'язки на це заняття. Урок починається з підготовки теоретиків до доказу теорем. У цей час групам дається завдання продумати розв’язання трьох задач (логічну, конструктивну й обчислювальну) (Див. додаток Д).

Час на розв’язання – 20 хв. Командири-практики повинні забезпечити продуктивну роботу в групах. Після закінчення даного часу кожній групі по жеребу визначається одне із завдань для захисту перед класом. Знову ж по жеребі визначається учень, що буде виступати від даної групи. Четверта група – експерти. Їхнє завдання – оцінити діяльність виступаючих.

У практиків є аркуш обліку роботи кожного члена групи (див. табл. 2). Цей аркуш здається, наприкінці уроку вчителеві.

Таблиця 2

Список учасників групи	I группа		
	Задача №1	Задача №2	Задача №3
1. Кучерук А.	+	+	–
2. Степчук М.	+	+	+
. . .	.	.	.
. . .	.	.	.
. . .	.	.	.
7. Сергієнко Ю.	+	$\pm$	+

Це допомагає побачити реальну картину засвоєння матеріалу кожним учнем.

Командири-теоретики оцінюються вчителем, а експерти оцінюють відповіді своїх товаришів по наступній системі (див. табл. 3).

Таблиця 3

Прізвище	Формулювання теореми (умови задачі)	Креслення, запис умови	Повнота відповіді	Точність відповіді	Оцінка
1.	+	+	+	+	5
2.	$\pm$	+	+	$\pm$	4
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

На цьому етапі навчання розв’язанню опорних задач ми віддаємо перевагу організації групової самостійної роботи, мотивуючи це тим, що зразки елементів розв’язання задач можуть бути знайдені учнями й у підручнику, і на заздалегідь заготовлених кресленнях на дошці. У результаті до кінця уроку на дошці виникають зразки розв’язання всіх задач.

Третій урок – розв’язання задач більш високого рівня. Організація навчальної праці групова.

Групи тепер однорівневі. Як же здійснюється їхнє формування? На перших етапах учитель виділяє групи по наступному принципу:

1. Відокремлює сильних учнів, створюючи групу III рівня.
2. Відокремлює слабких учнів, створюючи групу I рівня.
3. Учні, що залишилися, становлять групу II рівня.

Для групи III рівня забезпечується просування далі в результаті самостійного розв’язання більш складних задач. Їм пропонуються дві задачі другого рівня й одна творча (із задач, поміщених на стенді). Учні цієї групи сидять за круглим столом, і їм створюються умови для колективної роботи. Для контакту із цією групою вчитель затрачає на уроці мінімум свого часу, тому ми пропонуємо методику готового розв’язання, тобто за 10 хв. до кінця уроку показати заздалегідь заготовлені на листочках розв’язання складних задач, які протягом часу, що залишилося, цілком під силу розібрати цим учням.

Ціль роботи зі слабкими учнями – закріплення навичок розв’язання опорних задач. Їм пропонуються дві задачі – першого й другого рівнів. Іде робота біля дошки й у зошитах. Учитель працює із цими учнями повільно, аналізуючи умову, виконуючи креслення, обчислюючи й обґрунтовуючи кожен етап розв’язання задач.

Із групою II рівня організується напівсамостійна робота. Їй пропонуються три задачі: одна першого й дві другого рівня, тобто ті ж задачі, що й для групи I рівня, але в більшому об’ємі, за виконання яких учень може одержати оцінку. Учневі цієї групи надається право вибору: а) якщо матеріал ускладнень не викликає, то він виконує роботу самостійно, коректуючи своє розв’язання з розв’язанням на дошці; б) якщо є сумніви у своїх силах, то він може підключитися до роботи групи I рівня.

Надалі можна здійснювати формування більше мобільних груп, забезпечуючи добровільне пересування учнів з однієї групи в іншу з урахуванням досягнення певних результатів навчання.

Задачі на самопідготовку прагнемо також диференціювати. Наприклад, після другого уроку пропонуємо виконати задачі з розділу стенда мінімально обов'язкового рівня. І націлюємо учнів на задачі другого й третього рівнів.

На третьому уроці задаємо дві задачі з розділу другого рівня й націлюємо учнів на творчі задачі.

Цим ми визначаємо обов'язковий об’єм і рівень задач і націлюємо увагу учнів на вибір більш важких задач.

Четвертий урок – урок-залік. Головною метою цього уроку вважаємо продовження формування навичок розв’язання задач. Другою метою – контроль засвоєння матеріалу першого й другого рівнів.

Залік складається із двох частин – теоретичної й практичної. Теоретична частина містить в собі доведення теореми. Щоб прослухати кожного учня, на допомогу приходять консультанти. Це теоретики, які доводили теореми на другому уроці й допомагали вчителеві на першому.

Оцінка за залік формується по баловій системі: доведення теореми – 4 бали й розв’язання кожної задачі – по 4 бали.

Дана кількість балів у кожній задачі визначається числом кроків у її виконанні. Таким чином, знання учнів оцінюються за такою шкалою.(Табл. 4)

Таблиця 4

К-ть балів	Оцінка	К-ть балів	Оцінка
16	12	9-10	7
15	11	7-8	6
14	10	5-6	5
12-13	9	4	4
11	8	1-3	1-3

Зміст задач до заліку див. у додатку 6.

Підбір задач до рівневої контрольної роботи здійснюється в такий спосіб: дві задачі містять у собі задачі обов'язкового мінімуму, одна задача другого рівня й одна задача творча (див. додаток Є).

Оцінки:

виконання задачі першого рівня – оцінка "4-6";

додатково до обов'язкового завдання задача другого рівня – оцінка "7-9";

додатково до обов'язкового завдання задача третього рівня – оцінка "10-12".

Учні позитивно оцінюють рівневу контрольну роботу такої побудови, тому що на них не тисне об’єм завдання. Виконавши обов'язковий рівень, вони вже забезпечують собі позитивну оцінку. Психологічно розкріпачуючись, самі роблять подальший вибір. Така контрольна робота крім контролюючої функції має велике виховне значення й, звичайно, сприяє подальшому розвитку учня. Виникає елемент співробітництва.

Ми прагнемо до того, щоб залік і контрольна робота несли в собі й навчальні функції. Із цією метою по закінченні уроку на дошці вивішуються зразки розв’язання всіх задач.

Аналіз результатів, отриманих після вивчення даної теми, дозволяє зробити висновок про виправданість обраної нами методики.

3.3. Базисні задачі стереометрії.

Ефективний метод навчання учнів розв’язувати геометричні задачі заснований на використанні, при відшуканні плану розв’язання задачі, деяких висновків, отриманих при відшуканні так званих *базисних* задач.

Такий алгоритмічний підхід до відшукання плану розв’язання тою чи іншою мірою конкретної задачі допомагає учням швидше знайти цей план.

Базисними ми називаємо задачі на доведення залежностей, ефективно використаних при розв’язанні багатьох геометричних задач.

Звичайно, що немає повного переліку базисних задач, які повинен знати учень. В кожній задачі об'єм алгоритмічних даних може бути, в тій чи іншій мірі, різною. Але мінімум цих даних учневі повинен бути відомий, так як без знання такого мінімуму, учні, крім розв'язування легких задач, нічого не розв'яжуть.

Для кращого запам'ятовування алгоритмічних даних можна рекомендувати учням записувати їх в окремий загальний зошит, в яку вони записуватимуть такі ж важливі відомості із курсу математики. Щоб навчитись розв'язувати задачі, учні повинні мати деякі знання , із котрих потім вони вибиратимуть ті, котрі необхідні для розв'язання конкретної задачі.

«Під алгоритмічною діяльністю, - пише німецький педагог Б. Чада, - ми розуміємо всі види діяльності, що направлені на розв'язання задач з допомогою правил, алгоритмів, рекомендацій. Вона охоплює не тільки формальне виконання вказаних алгоритмів, але й підбір алгоритму для розв'язання даної конкретної задачі, складені із багатьох вивчених правил конкретної кінцевої послідовності кроків, що приводять до розв'язання задачі, формулювання алгоритму, а також пристосувань відомого вже алгоритму до умови задачі. Таким чином, алгоритмічна діяльність є важливою складовою частиною математичної освіти»[76, с.62]

Приклади базисних задач.

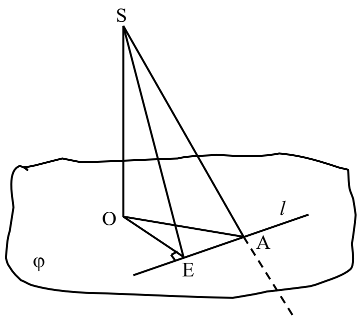
Задача. (формула «трьох косинусів»)

Нехай γ – кут між похилою, проведеною до площини, та прямою, що лежить у цій площині; α – кут між похилою та її проекцією на площину; β – кут між цією проекцією та прямою на площині (формула «трьох косинусів») Довести, що $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta$.

Доведення.

Нехай SA – похила, що проведена з точки S до площини φ. $SO\perp\varphi$, OA – проекція SA на φ.

Проведемо $OE\perp l$.



Мал.8

За теоремою про три перпендикуляри: $\angle SEA = 90°$, $\cos\gamma = \dfrac{EA}{SA}$.

Маємо:

$$\cos\gamma = \frac{EA}{SA} = \frac{EA}{SA}\cdot\frac{OA}{OA} = \frac{OA}{SA}\cdot\frac{EA}{OA} = \cos\alpha\cos\beta .$$

1. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює *α*. Знайти кут нахилу бічного ребра до площини основи.

Відповідь: $\cos\angle SBO = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos 30^0}$

2. У тригранному куті *OABC*: $\angle AOB = 45°$; $\angle AOC = 60°$; $\angle BOC = 45°$. Знайти кут між променем *AO* та площиною *BOC*.

Відповідь: $\sin y = \cos y \Rightarrow y = 45°$.

3. Мимобіжні діагоналі двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда нахилені до площини його основи під кутами α та β. Знайти косинус кута між діагоналями.

Відповідь: $\cos x = \cos\left(90^0 - \alpha\right)\cos\left(90^0 - \beta\right) = \sin\alpha\sin\beta$

4. Дві прямі l_1 та l_2 належать площині π. Вони перетинаються в точці *A* під кутом γ. Третя пряма l_3 проходить через точку l_1 та перетинає прямі l_1 та l_2 під кутами α та β відповідно. Визначити косинус кута між прямою l_3 та площиною π.

Відповідь: $\cos x=\cos\alpha\sqrt{1+\sqrt{\left(\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\gamma}\right)}}$

3.4. Система вправ з планіметрії, як актуалізація вивчення стереометрії

Досвід роботи за підручником О.В. Погорєлова в старших класах показує, що учні мають деякі труднощі при розв'язання задач. Однією з причин вказаної проблеми є складність навиків розв'язання задач по планіметрії. Планіметричні задачі є основою для розв'язання стереометричних задач. Адже при розв'язуванні стереометричної задачі учень послідовно розглядає планіметричні під задачі і поступово підходить до знаходження шуканого елемента. Тому в цьому підрозділі пропонується система планіметричних задач як, так званого, вступу до стереометрії.

Запропонована система вправ спрямована на ліквідацію недоліків у знаннях планіметрії учнів, на формування спеціальних математичних навичок розв'язання планіметричних задач. При цьому із курсу VI-VII класів вибрано тільки ті вміння і навички, які мають широке застосування при розв'язуванні задач в X-XI класах. Фрагменти такої роботи терміном від 5 до 15 хв. можна включати в уроки стереометрії. Місце того чи іншого фрагменту на уроці вчитель визначає сам.

Система вправ розділена на 4 серії. Кожна серія складається з трьох частин:

1) довідкова таблиця;
2) набір вправ для тренування;
3) контрольна робота.

Перерахуємо тематику цих серій.

I. Метричні співвідношення в подібних трикутниках.
II. Відношення між сторонами і кутами прямокутному трикутнику.
III. Площі фігур.

IV. Правильні многокутники.

В кабінеті математики бажано мати постійний стенд для учнів X-XI класів «Повторюємо планіметрію», складений із довідкових таблиць (I-IV) попередньо описаних.

Учні до неї привикають, достатньо легко орієнтуються і швидко знаходять в ньому необхідну інформацію.

Для виконання вправ учням дають готові рисунки або на дошці. Учні записують кожну задачу в зошит і при мінімальних даних розв’язують її. У профільному класі весь набір інформації можна запропонувати для самостійного опрацювання, а потім фронтально або індивідуально опрацювати. При цьому вчитель повинен проявити всю свою майстерність, щоб створити всі учням умови для формування навичок розв’язування задач.

Опишемо методику роботи з кожною таблицею.

Загальна схема: нагадування деякого теоретичного або практичного матеріалу, вказаного в довідковій таблиці (1-3 уроки), вправи для тренування (3-5 уроків) і контрольна робота (1 урок).

Таблиця 1. Подібні трикутники.(Див. додаток Ж)

Фронтально з використанням таблиці з довідковими матеріалами повторюємо першу ознаку рівності трикутників. Далі учням формулюють властивості сторін та кутів подібних трикутників.

На одному з наступних уроків закріплюється один з повторених розділів теорії і дозволяється використати вправу 5.1 із довідкової таблиці 1, що розкриває методику довільної пропорції з даної. Цю задачу можна запропонувати у вигляді прикладу, а задачу 5.2 використати для закріплення отриманих даних (при знаходженні потрібного відношення учень всі вправи виконує лише тоді, коли відповідь не очевидна).

В наступних 2-3 уроках учні під керівництвом учителя виконують вправи для тренування. Форми організації діяльності учнів на цьому рівні, ступінь їх самостійності, форми засвоєння знань вчитель враховує сам. Головне в тому, чом дати можливість учням здобути відповідні навики для розв'язування задач. Якщо на 2-3 уроках учні не будуть готові до виконання контрольної роботи, то вчитель може збільшити кількість «тренувальних» уроків, підготовивши додаткові вправи.

Зазначимо, що налаштовані на ідею подібності, багато учнів при розв'язанні задачі 1 з табл.1, будуть спів ставляти пропорцію. Перевіряючи розв'язання, необхідно звернути їх увагу на можливість довести, що A_1B_1 – середня лінія ΔA_2BO_2, і відповідно, $AB=\frac{1}{2}A_2B_2$.

Таблиця 2. Відношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику.(див. додаток З)

Робота з довідковим матеріалом таблиці розрахована на 3 уроки: на 1-му – повторити теорему Піфагора, на 2-му – означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику і наслідки з них, на 3-му – теорему про середнє пропорційне.

Потім на 3-4 уроці іде тренувальна робота. Кожний набір вправ табл. 2 складається з 5 крокових вправ. Набори вправ 1-4 необхідно використовувати в тому порядку, як вони представлені, тому що в їх побудові є внутрішня логіка, що дозволяє вчителю вести за собою учня. При цьому важливо, щоб перед учнями була чітко сформульована ціль: навчитися користуватися співвідношеннями, що є в прямокутному трикутнику, - і раціонально організована робота для її досягнення.

Сформованість основних навичок перевіряється при проведенні контрольної роботи 2. Особливої уваги потребують до себе задачі №5 із неї. Можливо їх розв'яжуть не всі, однак задача на знаходження висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, зустрічається так часто, що вчитель повинен напрацювати навик її розв'язання у всіх учнів. Тому на лікуючих уроках після контрольної роботи, доцільно розглянути 5 способів розв'язання цієї задачі, запропонувати учням вибрати з них найбільш цікаві їм та запам'ятати їх. Також йде робота над таблицями 2' під назвою

«Знаходження деяких лінійних елементів в прямокутному трикутнику введенням допоміжного кута.» (Див. додаток І)

Таблиця 3. Формули площ.(Див. додаток К)

Стійкі знання формул площ необхідні під час розв’язання задач на обчислення площ поверхонь і об’ємів многогранників та тіл обертання. Коли всі формули, вказані в таблиці 3, будуть повторені, вчитель проводить на наступних 3 уроках тренувальні вправи з табл.3, а потім контрольну роботу.

Таблиця 4. Правильні многокутники.(Див. додаток Л)

Цей матеріал необхідний під час вивчення правильних призм та пірамід. Робота з довідковими таблицями може бути розділена на 3 уроки. На відміну від роботи над іншими таблицями, тут необхідно всі відношення вивести учням, а не пропонувати їх в готовими. Це необхідно для того, щоб дати учням логічну основу для запам’ятовування.

Якщо вчитель вважатиме, що контрольних робіт багато, то їх можна використати в якості тренувальних.

Отже, програма в 10-11 класах, дозволяє вести ціле направлену роботу формування навиків розв’язання планіметричних задач не тільки без шкоди для основного матеріалу, але й з більшою користю, збільшуючи рівень самостійності учнів при розв’язуванні стереометричних задач.

3.5. Методи розв’язування стереометричних задач

Способи розв’язування геометричних задач на обчислення залежать, від того, чи функціональні залежності, які треба встановити для розв’язання задачі, можна подати в явному вигляді, чи цього зробити не можна і деякі функціональні залежності ми змушені спочатку подавати в неявному вигляді за допомогою допоміжних невідомих.

Способи розв’язування і прийоми, що застосовуються при розв’язуванні стереометричних задач на обчислення, досить різноманітні. Усіх їх вказати неможливо, та в цьому немає потреби. Більш того, було б шкідливо, коли б усяку задачу із стереометрії учні намагалися підвести під якийсь шаблон.

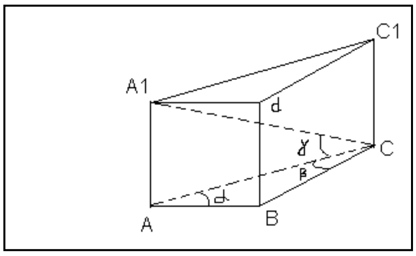
Але ясне й чітке з'ясування учням основних, найбільш уживаних способів і прийомів розв'язування стереометричних задач дуже допомагає їм в опануванні потрібного навчального матеріалу. Набуті знання розширюють кругозір учнів, дають їм можливість легко орієнтуватися у складних задачах і розчленовувати їх на простіші.

Розв'язування геометричної задачі на обчислення з параметричними даними (в середній школі) зводиться до встановлення певної функціональної залежності (звичайно у вигляді якоїсь формули) між даними і шуканими величинами.[5]

3.5.1. Спосіб обчислення невідомих величин

При розв'язуванні стереометричних задач на обчислення цей спосіб найчастіше здійснюється так: знаходять таку фігуру (найчастіше трикутник), в якій є достатня кількість даних для знаходження інших її елементів. Далі, розглядають ряд інших прилеглих до неї фігур (теж найчастіше трикутники) так, щоб в результаті послідовного визначення певних елементів цих фігур можна було знайти шукану величину.

Задача 1. В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β. Діагональ бічної грані, що містять сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює d і утворює з площиною основи кут γ. Визначити об'єм призми.



Мал.9

<u>Роз'яснення.</u> Нехай в основі прямої призми лежить трикутник ABC, у якому $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Тоді заданою є діагональ грані AA_1B_1B: $A_1B= d$. Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі A_1B на цю площину є сторона AB трикутника ABC. Тоді за умовою $\angle A_1BA = \gamma$. Об'єм призми $V=S_{осн}\cdot H$

1. Помітивши, що в прямокутному трикутнику A_1BA (/_A=90) є досить даних для його розв'язання (гіпотенуза і гострий кут), саме з цього почнемо розв'язувати задачу H= AA_1 =d·sin γ; AB=d·sin γ.
2. Бачимо, що в трикутнику ABC достатньо даних (сторона та два прилеглих кута) для його розв'язання за теоремою синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle B}$$

$$AC=\frac{AB\cdot\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{d\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Тоді

$$S_{осн}=\frac{d^3\cdot\cos^2\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

$$V=\frac{d^3\cdot\cos^2\gamma\cdot\sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

Відповідь: $\frac{d^3\cdot\cos^2\gamma\cdot\sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin(\alpha+\beta)}$

3.5.2. Метод доведення від супротивного

У математиці ми нерідко маємо справу з висловленнями, істинність чи хибність яких можна встановити лише на основі міркувань. Згадаємо доведення теорем.

Є різні методи доведення. Прикладом непрямого доведення є відомий читачеві з курсу геометрії VII класу *метод доведення від супротивного.* Наведемо ланцюжок міркувань (алгоритм) за цим методом:

1) припускаємо супротивне тому, що треба довести;

2) доводимо, спираючись на умову даної теореми, зроблене припущення, відомі означення, аксіоми, інші теореми, в результаті чого приходимо до висновку, який суперечить відомим математичним твердженням або умові теореми, яку доводимо, або деякому припущенню;

3)здобута суперечність і доводить теорему;

Для обґрунтування методу доведення від супротивного, як і будь-якого іншого методу міркувань, потрібні певні знання з математичної логіки.

Приклад задачі.

Задача 1.

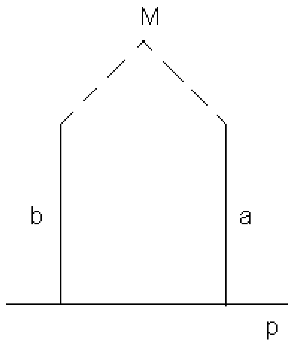
Довести, якщо дві прямі перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої, то ці прямі паралельні.

Дано: $a \perp p, b \perp p, a \neq b$ (А – істинне висловлення (умова теореми)).

Довести: a || b (В – висновок теореми)

Доведення:

Нехай прямі a і b не є паралельними. (Нехай $\overline{B}$ - істинне висловлення)



мал.10

Маємо: $a \perp p, b \perp p, a \neq b$ a і b не паралельні. ($A \wedge \overline{B} = B_1(позначення)$)

З того, що справджується умова А і прямі a і b не паралельні, випливає, що перпендикулярні до прямої p прямі a і b перетинаються, тобто:

$a \perp p, b \perp p, a \neq b, a \cap b = M(B_2)$ ($B_1 \Rightarrow B_2$ - істинне висловлення)

Але тоді через точку M проходять два різні перпендикуляри a і b до прямої p, що суперечить відомій теоремі: (B_2 – хибне висловлення)

Через будь-яку точку площини проходить один і тільки один перпендикуляр до даної прямої.[49]

Доведення цієї задачі традиційно закінчуються такими словами: «Отже, наше припущення неправильне, прямі a і b паралельні»

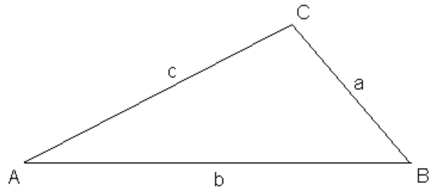
Задача 2.

Якщо в трикутнику ABC, де a, b, c – довжини його сторін, $c^2 = a^2 + b^2, то \angle C = 90°$.

Доведення:

Використаємо спосіб доведення від супротивного.

Припустимо, що в трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) .



мал.11

Тоді можливі два випадки: а) $0° < \angle C < 90°$ б) $90° < \angle C < 180°$. Розглянемо кожний з них:

а) У ΔАВС: $(0° < \angle C < 90°) \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$. Але за умовою $c^2 = a^2 + b^2$. Отже, $c^2 \neq a^2 + b^2$ - хибне висловлення.

Тоді хибним буде і те, що $0° < \angle C < 90°$.

б) У ΔАВС: $(90° < \angle C < 180°) \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$. Але за умовою $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 \neq a^2 + b^2$ - хибне висловлення.

Маємо: $0° < \angle C < 90°$ і $90° < \angle C < 180°$ - хибне висловлення. Тоді $\angle C = 90°$.

Задачу доведено.

Отже, для доведення теорем або задач методом від супротивного треба вміти правильно заперечувати дане висловлення.

3.5.3. Спосіб введення допоміжного відрізка

Введенням допоміжного відрізка користуються і при розв'язуванні задач, в яких задані лінійні величини не входять в один трикутник з заданими кутами.

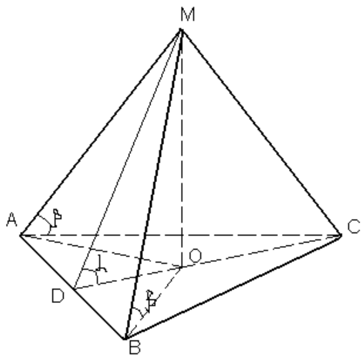
Розв'язання таких задач введенням допоміжного відрізка зводиться до складання рівняння знаходження одного з невідомих відрізків (допоміжних відрізків), величину знаходять за допомогою знайденого відрізка.

При складанні рівнянь слід користуватися прикладами:

1) Слід знайти такий відрізок (або два рівних між собою), які можна виразити двома різними способами через введений відрізок та дані величини і порівняти ці вирази. Таким відрізком може бути і один з двох відрізків.
2) Якщо не вдається першим способом, то слід шукати геометричні зв'язки між елементами фігури (подібність, відрізок, що дорівнюють

сумі або різниці двох даних відрізків, і т.д.) і у співвідношення, що дається цим зв'язком, підставити величини, виражені через ведений відрізок, дані величини.

Задача 3. Основа піраміди – правильний трикутник, сторона якого *а*. Два бічних ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β, а грань між ними нахилена до основи під кутом α. Знайти об'єм піраміди.



мал.12

Розв'язання:

Так як, кут /_MOA=/_MBO маємо, що AO=BO. Отже, основа висоти O – рівновіддалена від кінців відрізка A і B і мають на висоті CD правильний трикутник ABC.

Дані сторони, з жодним з кутів не пов'язані, тому задачу розв'язуємо шляхом введення допоміжного відрізка. З рисунка видно, що висота піраміди входить у прямокутні трикутники, в яких відомі кути, до того ж саме висота потрібна для визначення об'єму, тому висоту ми приймаємо за допоміжний відрізок.

Позначимо MO через *x*.

$AO = x\cdot ctg\,\beta$, $DO = x\cdot ctg\,\alpha$.

Для знаходження x маємо рівняння

$$AO^2 - DO^2 = AD^2$$

$$x^2\cdot ctg^2\beta - x^2\cdot ctg^2\alpha = \frac{a^2}{4}$$

$$x^2\cdot(ctg^2\beta - ctg^2\alpha) = \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{ctg^2\beta - ctg^2\alpha}$$

$V = \frac{1}{3} S_{осн.н.}$, $\quad V = a^3 \sqrt{\frac{3}{24}} \cdot \sqrt{ctg^2\beta - ctg^2\alpha}$

3.5.4. Спосіб введення допоміжного кута

Розв’язуючи геометричні задачі, іноді зручно використовувати так званий метод введення допоміжного кута.

Суть цього методу полягає в тому, що шукані лінійні елементи виражають спочатку через лінійні елементи і тригонометричні функції допоміжного (невідомого) кута, а потім тригонометричні функції допоміжного кута або виключають (наприклад, виражають через тригонометричні функції відомих кутів), або обчислюють їх значення.

Який з невідомих кутів вибрати за допоміжний, можна встановити, розв’язуючи конкретну задачу. Взагалі, в задачах на многогранники за допоміжний можна взяти:

1) кут між бічним ребром і основою многогранника;
2) лінійний кут деякого двогранного кута;
3) плоский кут деякого многогранного кута і т.п.

Щоб показати, як вводити допоміжний кут, розглянемо розв’язування кількох геометричних задач, серед яких будуть задачі на обчислення (із застосуванням тригонометрії). Розв’язавши таку задачу, дістанемо відповідь у вигляді формули, яка виражає шукану величину як функцію даних величин (параметрів). Під дослідженням розв’язку задачі ми будемо розуміти встановлення тих значень параметрів, а також співвідношень між ними, при яких він додатний (числове значення геометричної величини додатне).

Досліджуючи розв’язок, найчастіше використовують такі відомості з курсу геометрії:

1. У опуклому многогранному куті сума всіх плоских кутів менша від 2π.
2. У тригранному куті кожний плоский кут менший від суми двох інших плоских кутів і більший за їх різницю.

3. Кут між похилою і площиною гострий.
4. Властивості внутрішніх кутів і зовнішнього кутів трикутника, а саме:

а) якщо α – кут при вершині рівнобедреного трикутника, то $0< 2\alpha <\pi$. Кут при основі рівнобедреного трикутника – гострий.

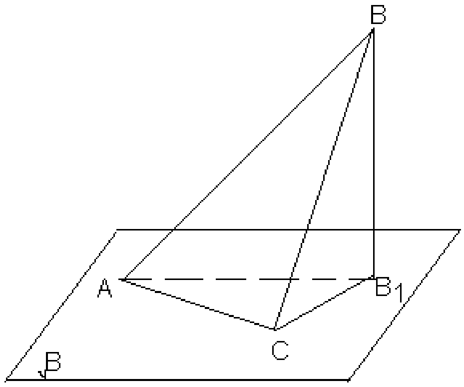
б) Зовнішній кут трикутника більший від кожного внутрішнього, не суміжного з ним.

в) У трикутнику проти більшої сторони лежить і більший кут та ін.

5. Деякі співвідношення між кутами в просторі та їх проекціями на площину, які сформулюємо у вигляді теореми та наслідку з неї.

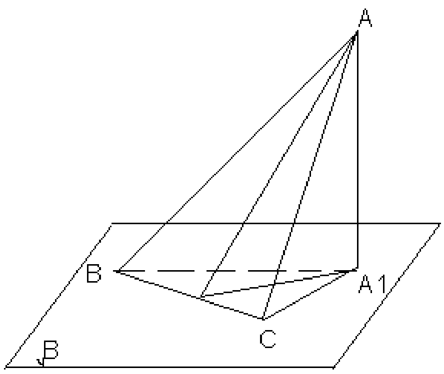
Теорема.

Якщо B_1 – проекція вершини B прямокутного трикутника ABC на площину β, яка проходить через катет AC, то $AB_1C > ABC$ (мал.1)



мал.13

Наслідок. *Якщо з однієї і тієї самої точки A, взятої поза площиною р, проведеної до цієї площини дві рівні похилі AB та AC, то кут між ними менший від кута між їх проекціями на площину β.*

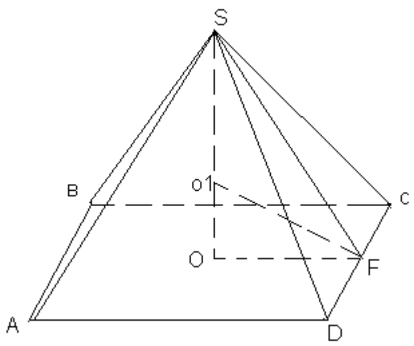


мал.14

Цей наслідок легко довести, провівши висоти AD та A_1D рівнобедрених трикутників ABC та A_1BC.

Розв’яжемо кілька задач введенням допоміжного кута й дослідимо їх розв’язки.

Задача 1. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює *a,* а плоский кут при вершині піраміди α. Визначити радіус кулі, вписаної в дану піраміду.



мал.15

Розв’язання.

Центр O_1 кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду SABCD, є точкою перетину висоти SO піраміди з бісектрисою O_1F лінійного кута двогранного кута, утвореного бічною гранню і основою піраміди.

Невідомий радіус OO_1 вписаної кулі можна визначити з прямокутного трикутника OO_1F, в якому $OF = |\frac{\alpha}{2}|$. Кути трикутника OO_1F невідомі, а тому один з них, наприклад $\angle SOF$, можна взяти за допоміжний і позначити його через φ. Тоді $O_1FO = |\frac{\varphi}{2}|$; з ΔOO_1F маємо $|O_1O| = \frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\varphi}{2}$.

Щоб розв’язати задачу до кінця, треба виразити $tg\frac{\varphi}{2}$ через тригонометричні функції кута *a*.

Відомо, що

$$\sqrt{tg\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{(1-\cos\varphi)\cdot(1+\cos\varphi)}(0° < \varphi < 90°)$$

лишається cosφ виразити через функції кута α; з ΔSOF маємо $\cos\varphi = \frac{|OF|}{|SF|}$

З ΔSCF маємо $tg\frac{\varphi}{2}=\frac{|CF|}{|SF|}$, але |CF|=|OF|, то cos φ= $tg\frac{\varphi}{2}$

Остаточно маємо:

$$|OO_1|=\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\varphi}{2}=\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)}=\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{(1-tg\frac{\varphi}{2})(1+tg\frac{\varphi}{2})}=\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}$$

Отже, в цій задачі за допоміжний доцільно було взяти лінійний кут двогранного кута при основі правильної піраміди.

Дослідимо даний розв'язок.

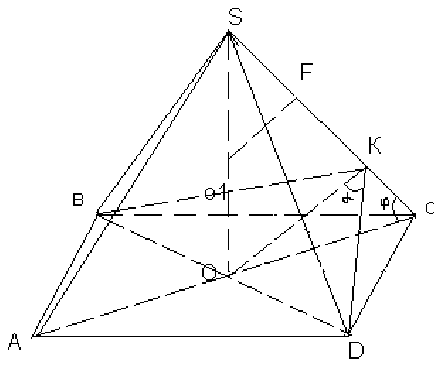
Очевидно, що *а* >0. Крім цього, за властивістю плоских кутів многогранного кута при вершині S даної піраміди:

$0<4\alpha<2\pi$, тому $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$, отже, $tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})>0$.

При *a >0, і 0*< α < $\frac{\alpha}{2}$ радіус OO_1 виражається додатнім числом.

Відповідь. $|OO_1|=\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}$, де $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$.

Задача 2. В кулю радіуса R вписана правильна чотирикутна піраміда, в якої двогранний кут між суміжними бічними гранями дорівнює 2α. Визначити сторону основи піраміди.



мал.16

Розв'язання.

Нехай O_1 – центр кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди SABCD. Відомо, що точка O_1 є точкою перетину висоти SO піраміди і прямої O_1F, яка перпендикулярна до бічного ребра і піраміди і ділить його пополам. Щоб визначити сторону основи піраміди, достатньо визначити |OC|. Введемо допоміжний кут SCO і позначимо його через, оскільки $\angle SO_1F = \angle SCO = \varphi$ з ΔSFO₁, в якому $|SO_1|=R$, знайдемо $|SF|=R\sin\varphi$, а, отже, $|SC|=2R\sin\varphi$.

Нехай $|CD|=x$, тоді $|OC|=\frac{x}{\sqrt{2}}$; з ΔSOC маємо:

$|OC|= \frac{x}{\sqrt{2}} =|SC| \cos\varphi= 2R\sin\varphi \cos\varphi$,

$x=2\sqrt{2}R\sin\varphi \cos\varphi$. (1)

Щоб розв'язати задачу до кінця, треба sinφ і cosφ виразити через тригонометричні функції кута α. Побудувавши кут BKD – лінійний кут двогранного кута між суміжними бічними гранями і сполучивши точки K та O, дістанемо

з ΔOKD: $\frac{|OK|}{|OD|} = ctg\alpha$; з ΔOKC: $\frac{|OK|}{|OC|} = \sin\alpha$; але |OD|=|OC|, тому

$ctg\,\varphi=\sin\varphi$, а $\cos\varphi = \frac{\sqrt{-\cos\varphi}}{\sin\alpha}$.

Підставивши значення sinφ і cosφ в (1), знаходимо:

$x=2\sqrt{2}R\sin\varphi\cos\varphi=2\sqrt{2}R\, ctg\,\alpha\, cosec\,\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$ (2)

Отже, за допоміжний зручно було вибрати кут нахилу бічного ребра піраміди до основи.

Дослідимо знайдений розв'язок.

Очевидно, що R>0. Крім того, [KC] перпендикулярний до площини трикутника BKD, тому відрізки BK і KD є проекціями конгруентних похилих BC і CD на площину трикутника BKD. За наслідком з теореми: $\angle BKD > \angle BCD$, отже, $2\alpha>\frac{\alpha}{2}$. Крім того кут BCD – кут при вершині рівнобедреного ΔBKD, тому $2\alpha<\pi$.

При $\frac{\pi}{2}< 2\alpha < \pi$ маємо: $-\cos\alpha >0$.

$ctg\,\alpha >0$ і $cosec\,\alpha >0$, бо $\frac{\pi}{4}< \alpha <\frac{\pi}{2}$.

Отже, права частина формули (2) додатна.

Відповідь. $x=2\sqrt{2}R\sin\varphi \cos\varphi=2\sqrt{2}R \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{cosec} \alpha\sqrt{-\cos 2 \alpha}$, де $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3.5.5. Метод аналогії

Слово аналогія в перекладі з грецької мови означає подібність. *Аналогія* – дуже ефективний інструмент пізнання. Тому доцільно спеціально навчати школярів застосування методу аналогії.

Застосування аналогії поділяється на такі дії: побудова аналогів різних заданих об’єктів та відношень; знаходження відповідностей елементів в аналогічних виразах; побудова виразів або задач, аналогічних даним; проведення роздумів по аналогії.

Відомо, що аналогія є одним із найбільш розповсюджених методів пізнання, застосування якого є досить результативним у наукових дослідженнях. Підкреслюючи важливість аналогії у науковому пошуку, Д. Пойа писав: «Аналогія, напевно, має частку у всіх відкриттях, але в деяких вона має левову частку».[53]

Аналогія є таким умовиводом, при якому, встановивши схожість будови об’єктів у деяких властивостях, припускають, що вони, можливо, схожі і в інших властивостях.

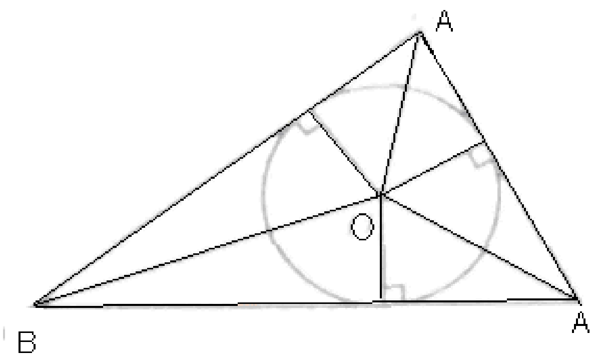
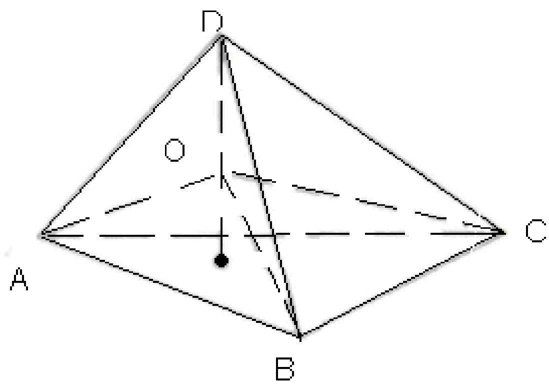
Особливо плідним є використання аналогії під час вивчення стереометрії. Тут чітко можна простежити аналогію між поняттями і твердженнями на площині і в просторі.

Говорячи про дидактичні функції аналогії, слід підкреслити основні з них. По-перше, аналогія сприяє глибшому осмисленню матеріалу, що вивчається; по-друге, під час вивчення нового матеріалу використання аналогії допомагає учням формулювати означення нових для них понять, самостійно знаходити способи розв’язування задачі, робити висновки; по-третє, аналогія використовується для ефективнішої організації повторення, узагальнення та систематизації матеріалу; по-четверте, допомагає привести в єдину систему знання, сприяє усвідомленню ієрархії понять, поглибленню знань.

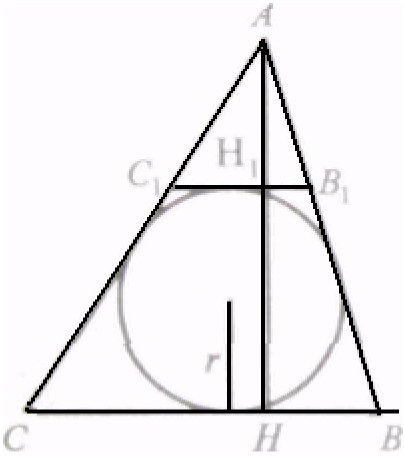
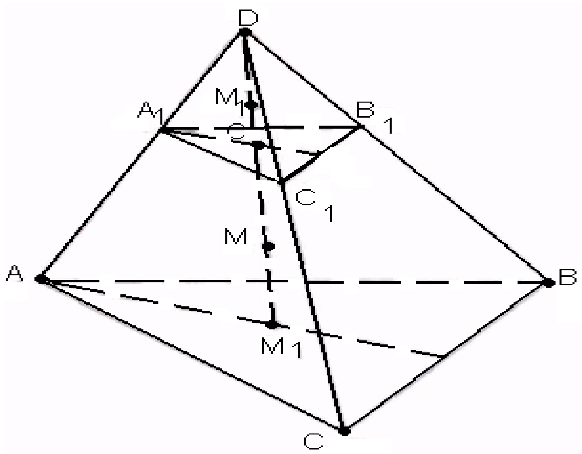
Продуктивна функція аналогії виявляється у створенні проблемних ситуацій, в організації пізнавальної діяльності, в забезпеченні глибокого осмислення учнями матеріалу, який вивчається.

Багато схожого знаходимо в означеннях і властивостях кола і сфери, круга і кулі та їх елементів, вписаного кола і вписаної в тетраедр сфери.[36]

Коло і круг, вписані та описані трикутники	Сфера і куля, вписані та описані тетраедри
ГМТ площини, відстань від яких до даної точки дорівнює даному відрізку, називається *колом*	ГМТ простору, відстань від яких до даної точки дорівнює даному відрізку, називається *сферою*
Дана точка називається *центром* кола, відстань R від центра до точки кола називається його *радіусом*	Дана точка називається *центром* сфери, відстань R від центра до точки кола називається її *радіусом*
Радіусом кола називається також відрізок, що сполучає точку кола з його центром	*Радіусом* сфери називається також відрізок, що сполучає точку сфери з його центром
Відрізок що сполучає дві точки кола, називається *хордою*	Відрізок що сполучає дві точки сфери, називається *хордою*
Точки площини, віддалені від центра кола на відстань, меншу ніж r, називаються *внутрішніми* для кола; точки площини, віддалені від центра на відстань, більшу ніж r, називаються *зовнішніми* для кола	Точки простору, віддалені від центра сфери на відстань, меншу ніж r, називаються *внутрішніми* для сфери; точки площини, віддалені від центра на відстань, більшу ніж r, називаються *зовнішніми* для сфери
Частина площини, обмежена колом, тобто ГМТ, віддалених від центра кола на відстань, не більшу ніж r,	Частина простору, обмежена сферою, тобто ГМТ, віддалених від центра сфери на відстань, не більшу

називається *кругом*	ніж r, називається *кулею*
Центр кола, *вписаного* в трикутник, є точкою перетину бісектрис його кутів (інцентр трикутника)	Центр сфери, *вписаної* в тетраедр, є точкою перетину бісектрис його тригранних кутів (інцентр тетраедра)
Центр кола, *описаного* навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін	Центр сфери, *описаної* навколо тетраедра, є точкою перетину площин симетрії кожної пари суміжних вершин
У всякому трикутнику має місце співвідношення r = S/p, де S – площа трикутника p – півпериметр, r – радіус вписаного кола  Мал.17 **Доведення** Нехай O – центр, r – радіус кола, вписаного в трикутник ABC, BC = a, AC = b, AB= c. Тоді S(ABC)=S(OBC)+S(OAC)+S(OAS), або S=0,5ar+0,5br+0,5cr; S = rp, $r = \frac{R}{p}.$	У всякому тетраедрі має місце співвідношення r = 3V/S, де V – об'єм тетраедра, S – повна поверхня тетраедра, r – радіус вписаної сфери.  Мал.18 **Доведення** Нехай O – центр, r – радіус сфери, вписаної в тетраедр DABC. Тоді V(DABC)=V(OABC)+V(ODBC)+V(ODAS)+ V(ODAS) , або $V = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot S_{DBC}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot S_{DAC}\cdot r +$ +1 $+\frac{1}{3}\cdot S_{DAB}\cdot r$

	V=r$\cdot \frac{S}{r}$; $r=\frac{3V}{S}$
У всякому трикутнику має місце співвідношення $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ де h_a, h_b, h_c – висоти трикутника, r – радіус вписаного кола. **Доведення** Нехай a, b, c – сторони трикутника, S – його площа. $S=\frac{ah_a}{2}, \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S};$ $S=\frac{bh_b}{2}, \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S};$ $S=\frac{ch_c}{2}, \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$ Тоді $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$	У всякому тетраедрі має місце співвідношення $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}$ де h_1, h_2, h_3, h_4– висоти тетраедра, r – радіус вписаної кулі. **Доведення** Нехай V – об'єм тетраедра, S_1, S_2, S_3, S_4– площі його граней. $V=\frac{1}{3}\cdot S_1\cdot h_1, \quad \frac{1}{h_1}=\frac{S_1}{3V};$ $V=\frac{1}{3}\cdot S_2\cdot h_2, \quad \frac{1}{h_2}=\frac{S_2}{3V};$ $V=\frac{1}{3}\cdot S_3\cdot h_3, \quad \frac{1}{h_3}=\frac{S_3}{3V};$ $V=\frac{1}{3}\cdot S_4\cdot h_4, \quad \frac{1}{h_4}=\frac{S_4}{3V};$ Тоді $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_2}=\frac{S_1}{3V}+\frac{S_2}{3V}+\frac{S_3}{3V}+\frac{S_4}{3V}=$ $\frac{S_n}{3V}=\frac{1}{r}$
У всякому трикутнику має місце співвідношення	У всякому тетраедрі має місце співвідношення

$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ де h_a, h_b, h_c – висоти трикутника, r – радіус вписаного кола.	$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}$ де h_1, h_2, h_3, h_4– висоти тетраедра, r – радіус вписаної кулі.
У трикутнику ABC вписано коло радіуса r. Паралельно сторонам трикутника проведено дотичні до кола і в утворені малі трикутники вписано кола радіусів r_1, r_2, r_3. Довести, що $r_1+r_2+r_3 = r$.  Мал.19 **Доведення** Розглянемо один із утворених трикутників – трикутник AB_1C_1. Δ AB_1C_1 подібний Δ ABC, тоді $\frac{r_1}{r}=\frac{h_a-2r}{h_a}$ або $\frac{r_1}{r}=\frac{S-r\cdot a}{S}$, Аналогічно, $\frac{r_2}{r}=\frac{S-r\cdot b}{S}$, $\frac{r_3}{r}=\frac{S-r\cdot c}{S}$.	У тетраедр DABC вписано кулю радіуса r. Площини, які дотикаються до цієї кулі і паралельні граням тетраедра, відтинають від тетраедра DABC чотири тетраедри. Нехай r_1, r_2, r_3, r_4 – радіуси куль, вписаних у ці тетраедри. Довести, що $r_1+r_2+r_3+r_4=2r$.  Мал.20 **Доведення** Розглянемо один із утворених тетраедрів – трикутник $DA_1B_1C_1$ і DABC подібний, тоді $\frac{r_1}{r}=\frac{h-2r}{h}$, або $\frac{r_1}{r}=\frac{3V-2rS_1}{3V}$, $r_1=\frac{r(3V-2rS_1)}{3V}$,

<table>
<tr>
<td>Отже,

$r_1+r_2+r_3 = \frac{3S - r(a+b+c)}{S} = r$</td>
<td>Аналогічно,

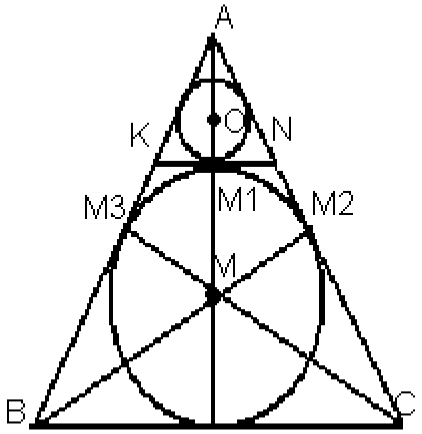
$r_2 = \frac{r(3V - 2rS_2)}{3V}$,

$r_3 = \frac{r(3V - 2rS_3)}{3V}$,

$r_4 = \frac{r(3V - 2rS_4)}{3V}$,

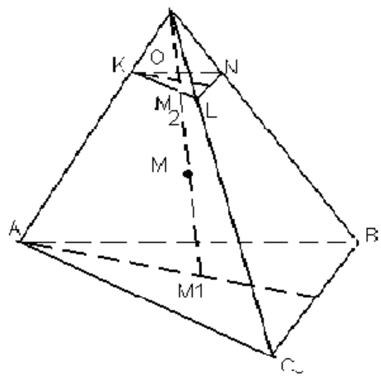
Отже, $r_1+r_2+r_3+r_4 =$

$\frac{r(12V - 2r(S_1 + S_2 + S_3 + S_4))}{3V} = 2r$</td>
</tr>
<tr>
<td>У правильний трикутник вписано коло. До цього кола і сторін трикутника дотикаються три малі кола. Знайти сторону трикутника, якщо радіус малого кола дорівнює r.



Мал.21

Розв’язання
Нехай a – сторона правильного трикутника ABC, M – його центроїд (центр вписаного та описаного кіл), $MM_1 = r_1$.
Тоді $MA = 2r_1$.
Побудуємо KN – спільну дотичну до великого і малих кіл.</td>
<td>У правильний тетраедр вписано сферу. До цієї сфери і граней тетраедра дотикаються три малі сфери. Знайти ребро тетраедра, якщо радіус малої сфери дорівнює r.



Мал.22

Розв’язання
Нехай a – сторона правильного тетраедра DABC, M – центроїд (центр вписаного та описаного сфер), M – центроїд ΔABC, $MM_1 = r_1$, $MD=3r_1$.
Побудуємо плоский переріз KNL, який дотикається до великої і малої</td>
</tr>
</table>

У трикутнику ANK, $OM_1 = r$, $OA = 2r$. Тому $AM_1 = 3r = r_1$, $AM_1 = 3r = 3 \cdot 3r = 9r$. З трикутника ABM_1 ($\angle M_1 = 90^o$) $AB^2 = AM_1{}^2 + BM_1^2$. $a^2=(a/2)^2 + (9r)^2$, $a^2=108\ r^2$, $a=6r\sqrt{3}$	сфери. У тетраедрі DNKL $OM_2 = r$, $OD = 3r$. Тому $DM_2 = 4r = 2r_1$, $r_1 = 2r$. $DM_1 = 4r_1 = 4 \cdot 2r = 8r$. З трикутника ADM_1 ($\angle M_1 = 90^o$, $AM_1=r\sqrt{3}/3$, $AD= a$, $DM_1=8r$) маємо: $a^2=(a\sqrt{3}/3)^2 + (8r)^2$, $a^2=96r^2$, $a=4r\sqrt{6}$

Розкриваючи дидактичні функції аналогії, слід зауважити, що нею можна користуватися в навчальних цілях як засобом, який веде до гіпотез, що потребують інших методів доведення та перевірки на практиці.[36]

Суперечлива природа аналогії в тому, що вона хоч і є засобом «відкриття» нових тверджень, проте не гарантує їх істинності. Але це аж ніяк не означає, що треба повністю відмовлятися від аналогії в навчанні чи звести її до мінімуму.

Широке застосування аналогії в процесі навчання математики є одним із ефективних прийомів, здатних викладати в учнів живий інтерес до предмета, заохотити їх до того виду діяльності який називають дослідницьким [51]

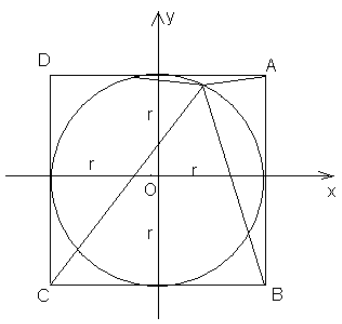
Застосування аналогії в школі є однією з актуальних проблем, розв’язання якої тісно пов’язане з розвитком творчої діяльності учнів. За допомогою аналогії здобуваються нові знання, формулюються гіпотези, вона сприяє актуалізації, узагальненню та систематизації навчального матеріалу, а також укрупненню дидактичних одиниць засвоєння. Аналогія як евристичний метод навчання активізує пізнавальну самостійність учнів, залучає їх до проблемно-пошукової діяльності.

3.5.6. Координатний метод

При вивченні геометрії в просторі методом координат частіше всього розглядають поверхні. Метод координат полягає в тому, що завдяки координатам точок геометричні об’єкти задають аналітично за допомогою чисел, рівнянь, нерівностей та їх систем і тим самим при доведенні теорем або розв’язанні геометричних завдань використовують аналітичні методи. Це суттєво спрощує розмірковування та часто дозволяє доводити теореми або розв’язувати задачі, користуючись певним алгоритмом (виконуючи ті чи інші обчислення), в той час, як синтетичний метод в геометрії в більшості випадків вимагає штучних прийомів. Але для того, щоб користуватися методом координат, необхідно вміти за допомогою чисел, рівнянь, нерівностей та їх систем завдавати геометричні фігури.

Головне при розв’язуванні геометричних задач координатним методом – вдалий вибір системи координат, тобто вибір початку координат і напряму осей. Звичайно за осі координат вибирають прямі, що фігурують в умові задач, або осі симетрії (якщо вони є) фігур, розглядуваних у задачі. Бажано, щоб вибрана система координат природно визначалася умовою задачі.[20]

Задача 1. *У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки до всіх вершин квадрата є величина постійна.*



мал.23

Розв’язання.

Виберемо початок координат у центрі квадрата, а осі проведемо паралельно сторонам квадрата (тобто за осі координат вибираємо осі симетрії квадрата). Позначимо радіус даного кола через r, тоді кожна точка M, що лежить на цьому колі, матиме координати (x,y), які задовольняють рівняння кола: $x^2+y^2=r^2$. Вершини квадрата мають координати: A(r,r), B(r,-r), C(-r,-r), D(-r,r).

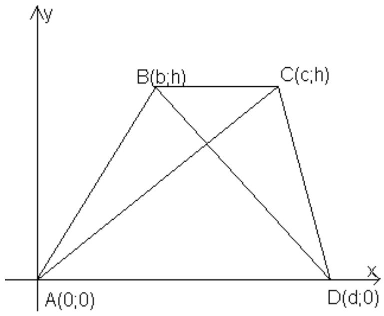
Знайдемо суму квадратів відстаней від довільної точки M(x,y) кола до всіх вершин квадрата.

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=(x-r)^2+(y-r)^2+(x-r)^2+(y+r)^2+(x+r)^2+(y+r)^2+(x+r)^2+(y-r)^2=$

$=4\cdot(x^2+y^2+2r^2)$.

Враховуючи, що для координат точки M виконується рівність $x^2+y^2=r^2$, дістаємо: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4\cdot(r^2+2r^2)=12r^2$ - величина постійна, оскільки радіус даного кола є величина постійна.

Задача 2. *Довести, що трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін плюс подвоєний добуток основ.*



мал.24

Розв'язання.

Якщо ввести систему координат, так як зображено на малюнку то координати точок B і C будуть рівні (оскільки BC||AD), і координати вершин трапеції можна записати в такому вигляді: A(0;0), B(b;h), C(c;h), D(d;0). Запишемо в координатах вирази, про які йдеться в умові задачі:

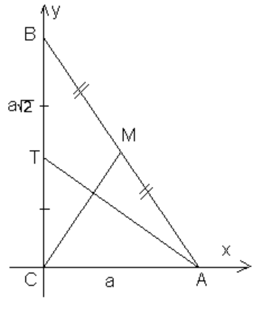
$AC^2+BD^2=c^2+h^2+(d-b)^2+h^2=c^2+2h^2+d^2-2b\cdot d+b^2$.

$AB^2+CD^2+2AB\cdot BC=b^2+h^2+(d-c)^2+h^2+2d(c-b)=b^2+2h^2+d^2+c^2-2db$.

Як бачимо, $AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2AB\cdot BC$, що й треба було довести.

Для більш складних задач зручно спочатку скласти план координатного розв'язування геометричної задачі, а потім вже виконувати конкретні обчислення.

Задача 3. *У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C=90^o$) $AC=a$, $BC=a\sqrt{2}$. Довести, що медіани, проведені з вершини A і C, взаємно перпендикулярні.*



мал.25

Розв'язання. Введемо систему координат так, як зображено на рис.

Нехай AT і CM – медіани заданого трикутника. План координатного розв'язування цієї задачі та його реалізація можуть бути таким.

План розв'язування	Реалізація плану
1. Ввести систему координат і записати координати точок A; C; T; M	$A(a;0)$, $C(0;0)$, $T(0;a/\sqrt{2})$, $M(a/2;a/\sqrt{2})$ (M – середина AB)
2. Знайти кутові коефіцієнти прямих AT і CM	$k_1=k_{AT}=(y_A-y_T)/(x_A-x_T)=-1/\sqrt{2}$ $k_2=k_{CM}=(y_C-y_M)/(x_C-x_M)=\sqrt{2}$
3. Перевірити виконання умов перпендикулярності прямих AT і CM	Оскільки $k_1 \cdot k_2=-\sqrt{2}/\sqrt{2}=-1$, то прямі AT||CM взаємно перпендикулярні.

Оскільки умову перпендикулярності прямих можна записати не тільки в координатній формі, але й у векторній, то цю саму задачу можна розв'язати також і векторно-координатним методом.

3.5.7. Метод векторів

Досить часто при розв'язуванні стереометричних задач використовують метод векторів. Цілі вивчення векторного методу в середній школі:

- дати ефективний метод розв'язання різних геометричних задач і доведення теорем;
- використання векторного методу при розв'язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення і конкретизацію;
- формувати у учнів такі якості мислення, як гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність і ін.

Основні компоненти векторного метода розв'язання задач:

- переклад умови задачі на мову векторів, в тому числі: введення в розгляд векторів, вибір системи координат (якщо це необхідно), вибір базисних векторів, розклад введених векторів по базисним;
- складення системи векторних рівностей (або однієї рівності);
- спрощення векторних рівностей;
- заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв'язання;
- пояснення геометричного смислу одержаного розв'язку цієї системи (або одного рівняння).

Схема розв'язування геометричних задач векторним методом:

1. Перекласти вимогу задачі на векторну мову.

2. Ввести прямокутну систему координат або вибрати два не колінеарні вектори на площині (або три не компланарні вектори у просторі) як базисні.

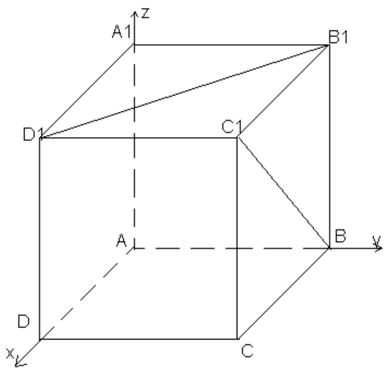
3. Знайти координати векторів, виділених в пункті 1, або виразити ці вектори через базисні.

4. Довести або знайти виділене у пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову.

Інколи вектори можуть бути ефективно використані при розв'язуванні не тільки планіметричних, а й стереометричних задач, наприклад, задач на знаходження кутів між мимобіжними прямими або на обчислення відстаней між точками у просторі.

Приклад розв'язання задачі методом векторів:

Задача 1. *Знайти кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.*



мал.26

Розв'язання. Скористаємось запропонованою вище загальною схемою розв'язування.

Нехай дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Позначимо кут між мимобіжними діагоналями B_1D_1 і BC_1 двох суміжних граней куба через φ ($\angle(B_1D_1, BC_1)=\varphi$).

1.На векторній мові вимога задачі виглядає так: необхідно знайти кут φ із співвідношення

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{B_1D_1}\cdot\overline{BC_1}|}{|\overline{B_1D_1}|\cdot|\overline{BC_1}|}$$

2. Введемо прямокутну систему координат так: початок виберемо в точці A, вісь Ox направимо вздовж AD, Oy – вздовж AB і Oz – вздовж AA_1.

Якщо ребро куба взяти за одиницю, то координати вершин куба: A(0;0;0), B(0;1;0), C(1;1;0), D(1;0;0), A_1(0;0;1), B_1(0;1;1), C_1(1;1;1),D_1(1;0;1).

3. Тоді координати векторів, виділених у пункті 1, будуть:

$\overline{B_1D_1} = \overline{(1;-1;0)}$, $\overline{BC_1} = \overline{(1;0;1)}$

Знайдемо кут φ: cos φ=$\frac{1}{2}$

Оскільки cos φ=$\frac{1}{2}$ і кут φ – гострий (як кут між прямими), то φ=60°.

Відповідь. φ=60°

3.5.8. Спосіб інверсії

Згадки про метод інверсії використовувався ще в Стародавній Греції Аполонієм, проте це були лише згадки. Вперше цей метод інверсією назвав 1830 році німецький математик Л. Магнус. Що ж таке метод інверсії або інверсія? Припустимо, що на площині α задано коло C з радіусом R та центром в точці О. Інверсією площини α відносно цього кола називається відображення , при якому кожній точці А площини α, за виключенням точки О, ставиться відповідність що лежить на промені (ОА) точка А' така, що

$$|OA'| = \frac{R^2}{|OA|}$$

Отже, видно, що при інверсії точки А і А' міняються місцями, відображуючись одна в одну. Центр О кола С, називається центром інверсії, не маючи образу, і ніяка точка при інверсії в нього не попаде.

Інколи інверсію називають симетрією відносно кола, а точки А і А' – симетричні відносно кола. Як і осьова симетрія, інверсія відносно кола С володіє цікавою властивістю: її повторне виконання повертає точки в початкове положення.

Розглянемо деякі властивості інверсії:

1. Точки на вибраному нами колі при інверсії переходять в себе; точки, що лежать всередині кола, переходять у внутрішні точки (окрім точки О – центра кола), а зовнішні точки – у внутрішні.
2. Якщо при інверсії фігура Ф переводить в фігуру Ф', то фігура Ф' переходить в фігуру Ф.
3. При інверсії точки, що лежать на прямій, проходять через центр інверсії, переходять в точки, що лежать на цій ж прямій.

Приклад задачі.

Задача 1.

Коло T радіуса $\frac{R}{2}$ дотикається до прямої l в точці S. Точка N – діаметрально протилежна точці S. Точки B і B' лежать на колі T , причому $|SB| = |NB'|$. Прямі NB' та NB перетинають пряму l в точках A та A' відповідно. Довести , що $|SA'| = \frac{R^2}{|SA|}$.

Задача 2

Знайти радіус кулі, описаного навколо тетраедра, знаючи довжини шести його ребер.

Для розв’язання даної задачі необхідно спочатку зробити деякі позначення. Нехай a=BC, b=AC, c=AB, α=DA, β=DB, γ=DC тетраедра ABCD.

Розглянемо A’, B’, C’, протилежні точки A, B, C приймаючи за полюс інверсії точку D і вибираючи довільно степінь інверсії *к.* Куля, описана навколо тетраедра, буде при таких умовах фігурою, протилежної площини A’B’C’; її діаметр 2R буде рівний $\frac{k}{DH}$, де через DH визначено відстань полюса від даної площини.

Але DH є висотою тетраедра A’B’C’D; відповідно, об’єм цього тетраедра рівний одній третій добутку DH на площу трикутника A’B’C’. З іншої сторони, даний тетраедр і тетраедр DA'B'C' можна розглядати як ті, що мають своїми основами відповідно грані DAB і DA'B'; і висотами будуть відрізки CP і C’P’; відповідно, відношення об’ємів цих тетраедрів рівне відношенню площ їх основ. Якщо позначити через V об’єм даного тетраедра, то будемо мати:

$$\frac{DH \cdot S_{A'B'C'}}{3V} = \frac{DA' \cdot DC' \cdot DB'}{DA \cdot DC \cdot DB} \ (*)$$

Але відрізки, що входять в праву частину цієї рівності, відповідно рівні:

α=DA, β=DB, γ=DC, $DA' = \frac{k}{\alpha}, DB' = \frac{k}{\beta}, DC' = \frac{k}{\gamma}$. З іншої сторони , ми маємо:

$B'C' = \frac{k \cdot BC}{DB \cdot BC} = \frac{k \cdot a}{\beta\gamma} = \frac{k \cdot a \cdot \alpha}{\beta\gamma\alpha}, C'A' = \frac{kb\beta}{\alpha\beta\gamma}, A'B' = \frac{kc\gamma}{\alpha\beta\gamma}$, ці рівняння показують, що трикутник A’B’C’ подібний трикутнику , сторони якого відповідно виміряються $a\alpha, b\beta, c\gamma$ причому коефіцієнт подібності рівний $\frac{k}{\alpha\beta\gamma}$.

Позначивши через Σ площу цього останнього трикутника, будемо мати:

$$S_{A'B'C'} = \frac{k^2\Sigma}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

Якщо в рівнянні (*) замінити DH через $\frac{k}{2R}$ та інші вхідні в нього елементи (крім V) – отриманих для них виразів, то після всіх перетворень отримаємо $6VR = \Sigma$.

Таким чином, добуток радіуса описаної кулі на об’єм тетраедра, рівне одній шостій площі трикутника, сторони якого вимірюється відповідно добутками протилежних ребер тетраедра.[64]

3.5.9. Метод геометричних місць точок

Поняття геометричного місця точок у просторі (ГМТ) має велике методичне і загальноосвітнє значення. Неможливо переоцінити його роль у розвитку просторової уяви.

Розв'язування задач, в яких застосовуються геометричні місця точок як на площині, так і в просторі, активізують творчу думку і фантазію, розвивають логічне мислення, кмітливість, змушують перебирати в пам’яті всі відомі теореми з метою відбору і застосування найбільш придатної з них.

У стереометрії не існує реального інструмента "сферографа", щоб побудувати у просторі сферу або лінію перетину двох сфер, якщо вона існує.

Звичайно, ці побудови можна здійснити на проекційному кресленні, але виконання їх у більшості випадків громіздке, потребує багато часу і неабияких креслярських знань і навичок.

У просторі доводиться обмежуватись "уявним" проведенням прямих, площин, сфер тощо. Можливість таких побудов встановлюється певними аксіомами.

Що ж таке геометричне місце точок у просторі?

На площині ГМТ визначається так:

Геометричним місцем точок називається фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.

Якщо на площині розглядається геометричне місце тільки точок, то у просторі можна розглядати геометричні місця не тільки точок, але й ліній (як прямих, так і кривих), і тому можна дати таке означення ГМТ у просторі:

Геометричним місцем точок у просторі називається деяка фігура, що складається з усіх об'єктів простору, положення яких задовольняє одній або кільком певним умовам.

"об'єкт", бо це більш широке поняття і включає в себе не тільки точки, але й

У цьому формулюванні замість слова "точка" застосовується термін лінії. При цьому часто одну і ту ж геометричну фігуру можна розглядати як геометричне місце точок і як геометричне місце ліній.

Наприклад, площини α_1, α_2, паралельні площині β і віддалені від неї на відстань *a*, є:

- геометричне місце точок простору, віддалених від площини β на відстань *a*;

- геометричне місце прямих простору, паралельних площині β і віддалених від неї на відстань *a*;

- геометричне місце кривих, які лежать у площині, паралельній даній площині і віддаленій від неї на відстань *a*;

- геометричне місце фігур, які лежать у площині, паралельній даній площині і віддаленій від неї на відстань *a.*

Циліндрична поверхня, утворена обертанням прямої навколо паралельної їй прямої АВ і віддаленої від неї на відстань *a,* є:

- геометричне місце точок простору, віддалених на відстань *a* від даної прямої АВ;

- геометричне місце прямих простору, паралельних даній прямій АВ і віддалених від неї на відстань *a*;

- геометричне місце кіл радіуса *a*, центри яких лежать на даній прямій АВ, а їх площини перпендикулярні до АВ;

- геометричне місце рівних еліпсів, центри яких знаходяться на прямій АВ, а їх площини утворюють з прямою АВ один і той же кут α.

Геометричні місця у просторі надзвичайно різноманітні. Деякі з них є природним узагальненням геометричних місць на площині, є ніби їх стереометричними аналогами (наприклад, сфера є стереометричний аналог кола, площина - аналог прямої тощо).

Існують інші розташування прямих у просторі: дві прямі перетинаються, а третя мимобіжна до них; дві прямі паралельні, третя мимобіжна до них; всі три прямі попарно мимобіжні. В цих випадках ГМТ, рівновіддалених від трьох прямих є перетином гіперболічних параболоїдів, утворених парами мимобіжних прямих.

Приклади задач.

Задача 1.

Дано куб. Вершинами випуклого многогранника лежать на його ребрах, причому на кожному ребрі лежить по одній вершині. Найти множину точок, що належать всім таким многогранникам.

Для розв'язання цієї задачі необхідно міркувати так:

Кожний розглянутий многогранник отримується із даного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ шляхом відсічення тетраедрів від кожної із його сторін. Тетраедр, відсічений від вершини A_1 міститься в тетраедрі AA_1BD. Таким чином, якщо від куба відсікти тетраедри, кожний з яких заданий трьома ребрами куба, що виходять із однієї точки, то частина куба, що залишилась, знаходиться в кожному із розглянутих многогранників. Легко перевірити, що частина, що залишилась є октаедром з вершинами в центрах граней куба. Якщо ж точка не належить цьому октаедру, то не важко вказати многогранник, якому вона не належить; в якості такого многогранника можна взяти тетраедр AB_1CD_1 і тетраедр A_1BC_1D.

3.5.10. Метод центральних й паралельних проекцій

Розглянемо один загальний метод розв'язування задач на побудову точок перетину прямої з поверхнею просторової геометричної фігури та перерізів просторових фігур січною площиною, так званий метод проекцій – центральних та паралельних. Цей метод ґрунтується на аксіомах належності.

A_1. *Існує принаймні одна пряма і принаймні одна площина. Кожна пряма і кожна площина є не порожня множина точок, яка не збігається з простором.*

A_2. *Через будь-які дві різні точи проходить одна і тільки одна пряма.*

A_3. *Пряма, що проходить через дві різні точки площини, лежить у цій площині.*

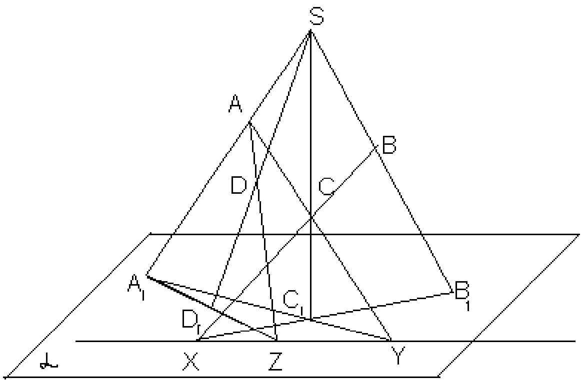
A_4. *Через три точки, які не належать одній прямій, проходить одна і тільки одна площина.*

A_5. *Якщо дві площини мають спільну точку, то їх перерізом є пряма.*

На рівні обов'язкових результатів навчання програмою і підручником передбачено найпростіші випадки побудови перерізів. На гурткових або факультативних заняттях, в класах з поглибленим вивченням математики доцільно ознайомити учнів із загальними методами побудови перерізів тіл, зокрема многогранників. Мається на увазі метод внутрішнього проектування і метод слідів при паралельному та центральному проектуванні. Алгоритми обох методів зручно подати у вигляді таблиці.

Центральне проектування.

I. Метод слідів.



Дано: α - площина,

S – центр проектування,

$A(A_1)$, $B(B_1)$, $C(C_1)$ – точки і їх проекції,

D_1 – проекція невідомої точки D.

Мал.28

Знайти: D.

Алгоритм розв'язання:

1. $X = BC \cap B_1C_1$

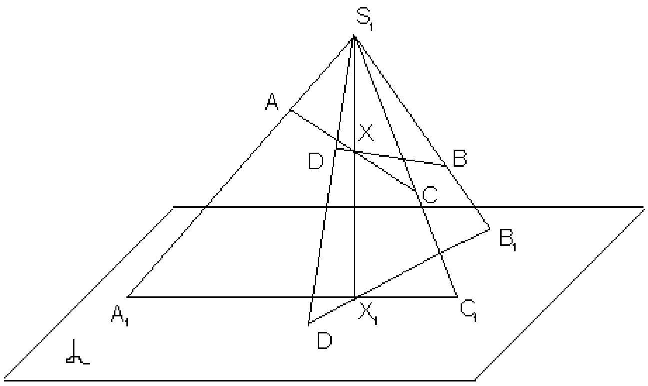
2. $Y = AC \cap A_1C_1$

XY – слід пл.ABC на α

3. $Z = D_1A_1 \cap XY$

4. $D = AZ \cap SD_1$

II. Метод відповідності.



Дано: α - площина,

S – центр проектування,

$A(A_1)$, $B(B_1)$, $C(C_1)$ – точки і їх проекції,

D_1 – проекція невідомої точки D.

Мал.29

Знайти: D.

Алгоритм розв’язання:

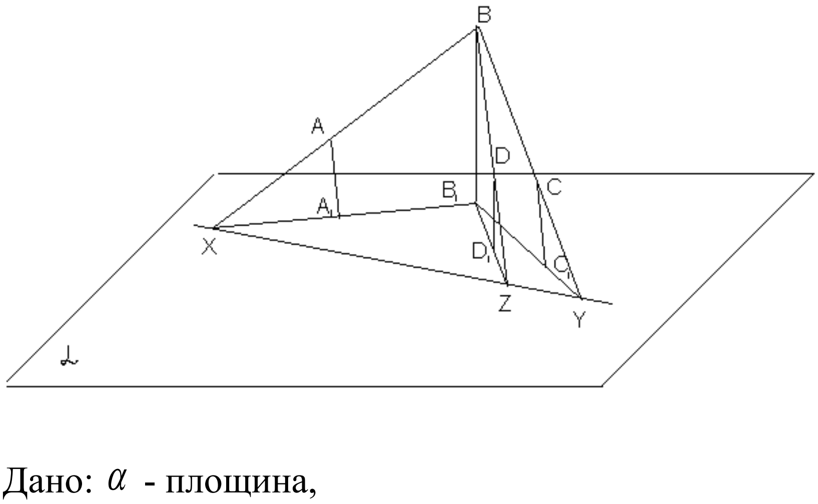
1. $X_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$

2. $X = AC \cap A_1C_1$

3. $D = BX \cap D_1S$

Паралельне проектування

I. Метод слідів



мал.30

Дано: α - площина,

A(A_1), B(B_1), C(C_1) – точки і їх проекції,

D_1 – проекція невідомої точки D.

Знайти: D.

Алгоритм розв'язання:

1. $X = AB \cap A_1B_1$

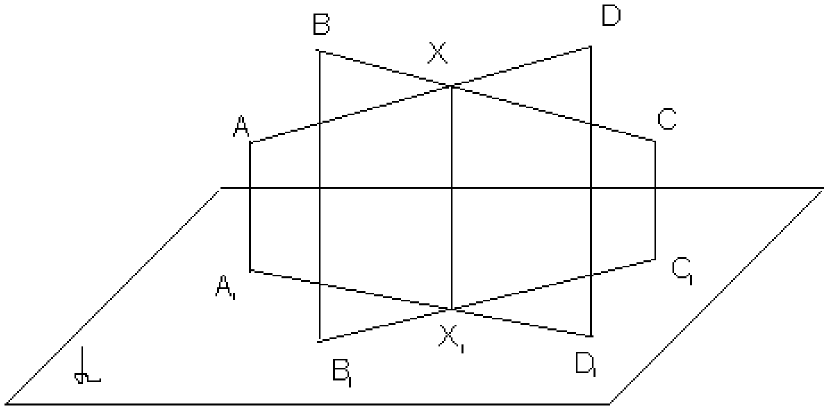
2. $Y = BC \cap B_1C_1$

XY – слід пл.ABC на α

3. $Z = D_1B_1 \cap XY$

4. $D = ZB \cap D_1D$

II. Метод відповідності.



Мал.31

Дано: α - площина,

A(A_1), B(B_1), C(C_1) – точки і їх проекції,

D_1 – проекція невідомої точки D.

Знайти: D.

Алгоритм розв'язання:

1. $X_1 = B_1C_1 \cap A_1D_1$

2. $X = BC \cap XX_1$

3. $D = AX \cap DD_1$

Зіставлення центрального і паралельного проектування легко виявити їхні спільні властивості:

а) Проекцією точки є точка;

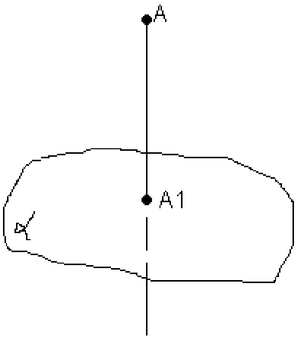
б) Проекцією прямої (загального положення) є пряма;

в) Якщо пряма паралельна напряму s проектування або проходить через центр S проекцій, то її проекцією є точка;

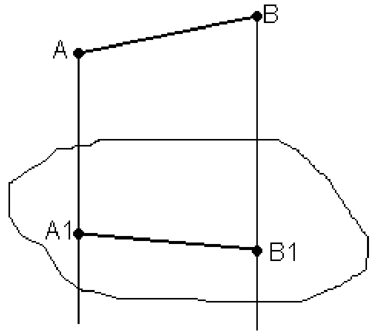
г) Якщо точка належить прямій, то проекція цієї точки належить проекції даної прямої (властивість *інцидентності* або *взаємоналежності*);

д) Зберігається відношення відрізків;

е) проекцією паралельних прямих є паралельні прямі;



мал.32



мал.33

Із властивостей г) і д) випливає досить важливий наслідок: проекція середини будь-якого відрізка-оригіналу є серединою його проекції на площину (тобто середина переходить у середину). Ось тому властивість діагоналей паралелограма – ділиться в точці перетину навпіл, властивість ортоцентра трикутника, властивість основи медіани трикутника – при таких проектуваннях зберігаються.

Щоб свідомо виконувати ті чи інші побудов в курсі стереометрії, треба добре осмислити властивості паралельного проектування. Наведемо лише один поширений приклад того, як нерозуміння аксіоми A_4 і властивості г) призводить до грубих помилок.

Задача 1. Побудувати паралельну проекцію чотирикутника ABCD на площину проекцій α.

Часто базисними точками для побудови чотирикутника помилково вважають чотири вершини, а не три. При цьому міркують так:

1) $(AA_1), (BB_1), (CC_1), (DD_1) \parallel s$.
2) $(AA_1) \cap \alpha = A_1$, $(BB_1) \cap \alpha = B_1$, $(CC_1) \cap \alpha = C_1$, $(DD_1) \cap \alpha = D_1$.
3) $A_1 = пр_\alpha A$, $B_1 = пр_\alpha B$, $C_1 = пр_\alpha C$, $D_1 = пр_\alpha D$.
4) $A_1B_1C_1D_1$ – чотирикутник.

5) $A_1B_1C_1D_1$=прα ABCD

Відповідь. Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ – шуканий.

Насправді чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ може і не бути шуканим, оскільки невідомо, чи лежить точка C_1 у площині, яка визначається трьома не колінеарними точками A_1, B_1,D_1 (умова колінеарності побудови будь-якого многокутника(мал.34)).

Наведемо правильне розв’язання цієї задачі:

1) (AA_1), (BB_1), (CC_1), (DD_1) || s.

2) (AA_1) ∩ α = A_1, (BB_1) ∩ α = B_1, (DD_1) ∩ α = D_1.

3) A_1=прαA, B_1=прαB, D_1=прαD.

4) A_1 < - >B_1< - >D_1;

5) B< - >D, A< - >C; [BD_1]∩ [AC]=M;

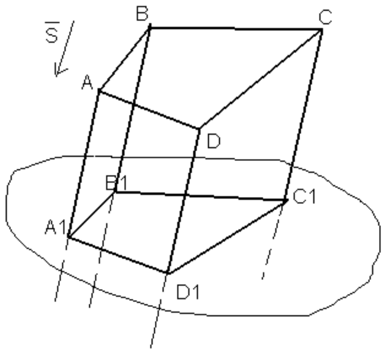
6) За властивістю інцидентності точки прямій маємо:

(MM_1) || s; [MM_1] ∩ [B_1D_1]= M_1; M_1=прαM; B_1D_1=прαB_1D_1; M є [BD] => M_1 є [B_1D_1];

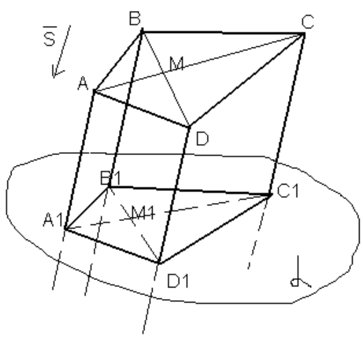
7) проводимо промінь: [A_1D_1) є α; [CC_1) ∩ [A_1M_1) =C_1

Отже, C_1=прαC – шукана точка.

Відповідь. Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ – шуканий. (мал.35)



мал.34



мал.35

3.6.1. Позиційні задачі

Позиційними називаються задачі, в яких визначається взаємне розміщення геометричних фігур одна відносно одної. У них йдеться про розміщення точок, прямих, площин у просторі. Від цього тільки й залежить існування їх розв’язку:

До класу позиційних задач відносять задачі на побудову:

А) точки перетину прямої з площиною;

Б) точки перетину прямої з поверхнею геометричних фігур;

В) перерізів многогранників і фігур обертання;

Г) ліній перетину (переходу) фігур;

Д) тіней (власної і падаючої);

Розглянемо розв'язання позиційних задач:

1) точка, пряма, площина вважаються заданими, якщо задано їх проекції на площину або ці проекції можна легко побудувати. Очевидно, пряма буде визначена двома різними заданими точками, а площина – трьома точками, які не лежать на одній прямій (такі точки називаються не колінеарними);
2) точку перетину прямої з площиною називають *слідом даної прямої на цю площину*;
3) пряму перетину двох площин називають *слідом перетину цих площин;*
4) в позиційних задачах, пов'язаних з призматичними та циліндричними формами, *площина проекцій* – це площина основи фігури, а *напрям проектування* – напрям, паралельним бічним ребрам призми або контурним твірним циліндра;
5) у випадку пірамідальних та конічних форм *площина проекцій* – це площина основи фігури, причому проектування є центральним: одну з вершин піраміди або вершину конуса беруть за центр проекцій.[26]

Отже, в цьому розділі розглянуто деякі методи та способи розв'язання стереометричних задач, що повинно стати невід'ємним «багажем» знань в арсеналі кожного учня старшої профільної школи при вивченні стереометрії.

3.6.2. Афінне перетворення площини (теорема Польке-Шварца та її наслідки)

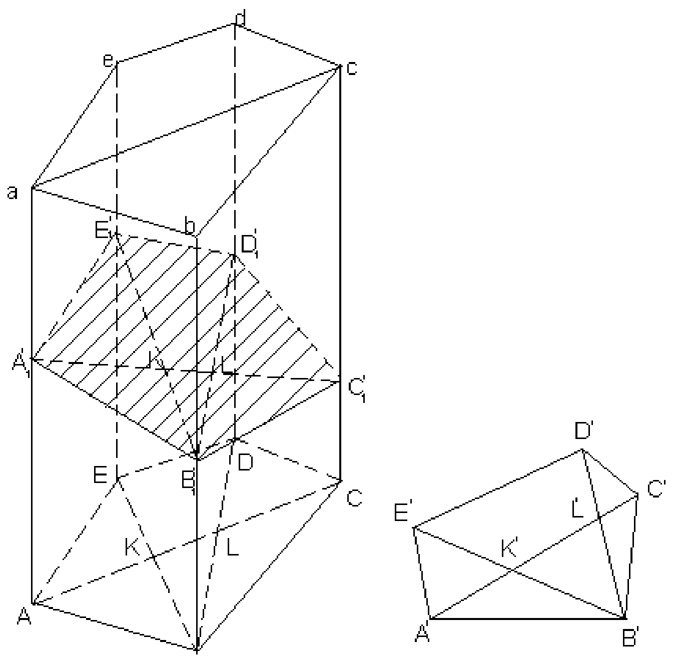
Усякий повний чотирикутник, що не вироджується, можна розглядати як паралельну проекцію тетраедра будь-якої наперед заданої форми.

Доведення теореми Польке-Шварца ґрунтується на такій лемі.

Лема. Усяку призму можна перерізати площиною так, щоб в перерізі вийшов многокутник, подібний будь-якому даному многокутнику, афінному до основи призми.

Доведення.

Нехай многокутник $ABCDE$ є основою призми $ABCDEabcde$ (мал.36). Доведемо, що можна перерізати цю призму площиною так, щоб у перерізі вийшов многокутник, подібний даному многокутнику $A'B'C'D'E'$, афінному до основи призми.

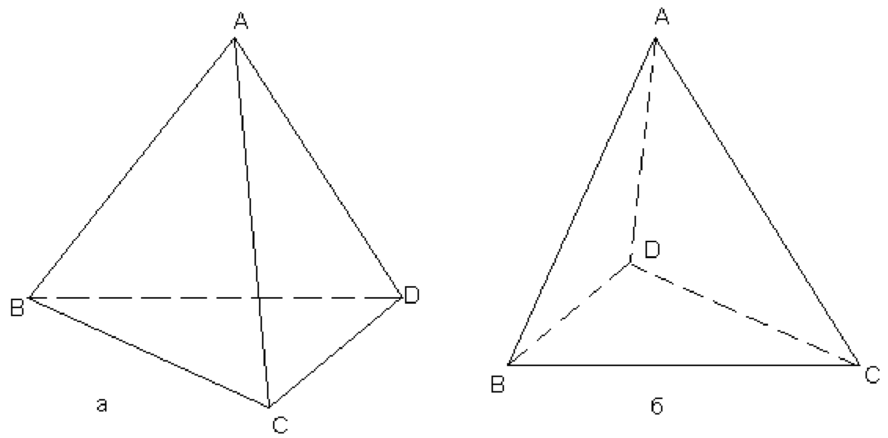


мал.36

Розглянемо трикутну призму $ABCabc$. Цю призму можна перерізати площиною так, що в перерізі дістанемо $\Delta A_1'B_1'C_1'$, подібний даному трикутнику $A'B'C'$. Побудуємо точки K_1' і L_1' так, щоб $(A_1'C_1'K_1') = (ACK)$ і $(A_1'C_1'L_1') = (ACL)$. Інакше, проведемо прямі KK_1' і LL_1', паралельні ребрам призми, до перетину з прямою $A_1'C_1'$ у точках K_1' і L_1'. Далі будуємо прямі $B_1'K_1'$ і $B_1'L_1'$ до перетину з ребрами eE і dD у точках $E_1^{'}$ і $D_1^{'}$. Ми дістали переріз призми $A_1^{'}B_1^{'}C_1^{'}D_1^{'}E_1^{'}$. Неважко переконатись, що він подібний даному многокутнику $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}E^{'}$. Справді, многокутники $A_1^{'}B_1^{'}C_1^{'}D_1^{'}E_1^{'}$ і $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}E^{'}$ афінні, бо кожний з них афінний до многокутника $ABCDE$. З другого боку, $\Delta A_1^{'}B_1^{'}C_1^{'}$ подібний $\Delta\ A^{'}B^{'}C^{'}$. Звідси робимо висновок, що вся фігура $A_1^{'}B_1^{'}C_1^{'}D_1^{'}E_1^{'}$ є результатом подібного перетворення многокутника $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}E^{'}$, бо при такому перетворенні, яке переводить $\Delta\ A^{'}B^{'}C^{'}$ у $\Delta A_1^{'}B_1^{'}C_1^{'}$, точки $K^{'}, L^{'}, E^{'}$ і $D^{'}$ переходять у точки $K_1^{'}, L_1^{'}, E_1^{'}$ і $D_1^{'}$.

Перед доведенням теореми Польке-Шварца зробимо такі зауваження.

1. Чотирикутник, про який ідеться в теоремі, не обов'язково опуклий. На малюнку 37, тетраедр $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ зображено опуклим чотирикутником $ABCD$ з діагоналями AC і BD, на малюнку _ той самий тетраедр зображено не опуклим чотирикутником $ABCD$ з діагоналями AC і BD.

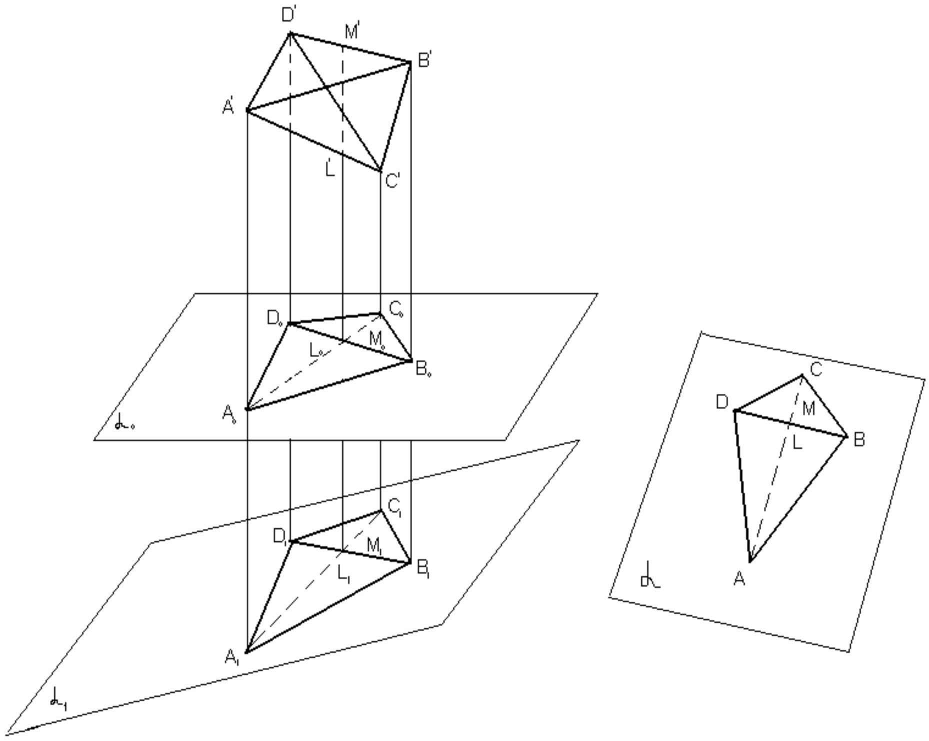


мал.37

2. Не слід вважати, що відрізки, обведені штриховою лінією, це – діагоналі. Штрихова лінія використовується для позначення невидимих ліній (передбачається, що грані тетраедра непрозорі). Як би не були розміщені точки A, B, C, D, у чотирикутнику $ABCD$, відрізки AB, BC, CD, DA вважаються сторонами, а AC і BD - діагоналями.

Доведення теореми Польке-Шварца.

Нехай дано тетраедр $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ і повний чотирикутник $ABCD$. (мал.38)



мал.38

Розглядаючи останній як проекцію деякого тетраедра, ми повинні вважати шість відрізків, що його утворюють, проекціями ребер тетраедра. Тоді точку перетину діагоналей чотирикутника позначимо двома буквами L і M залежно від того, чи вважаємо цю точку проекцією точки, яка лежить на одному або на другому ребрі тетраедра-оригіналу.

Знайдемо точки $L^{'}$ і $M^{'}$ відповідно на ребрах $A^{'}C^{'}$ і $B^{'}D^{'}$ тетраедра з умов $(A_1^{'}C_1^{'}L_1^{'})=(ACL)$ і $(B_1^{'}D_1^{'}M_1^{'})=(BDM)$. Вважатимемо тепер, що напрям проектування тетраедра $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ збігається з напрямом прямої $M'L'$. Проводячи через кожну вершину тетраедра проектуючи пряму, паралельну прямій $M'L'$, дістанемо проектуючи призму. Якщо переріжемо останню довільною площиною α_0, то дістанемо в перерізі повний чотирикутник $A_0B_0C_0D_0$ для якого, очевидно, матимемо: $(A_0C_0L_0)=(A'C'L')$, $(B_0D_0M_0)=(B'D'M')=(BDM)$.

Звідси робимо висновок, що повний чотирикутник $A_0B_0C_0D_0$, який можна вважати основою проектуючої призми, є афінними до чотирикутника $ABCD$. Тоді на підставі леми можна побудуати переріз $A_1B_1C_1D_1$ проектуючої призми площиною α_1, який буде подібний даному чотирикутнику $ABCD$.

Якщо повний чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією даного тетраедра $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$, то подібний йому чотирикутник $ABCD$ є, очевидно, проекцією подібного тетраедра. Цим доведено теорему Польке-Шварца.[26,с.24]

Наслідки з теореми Польке-Шварца.

1. Коли задано проекцію тетраедра на площину α (повний чотирикутник $ABCD$) і форму тетраедра-оригіналу, то можна визначити напрям проектування відносно площини проекції (проектуючий апарат), положення і справжні розміри тетраедра-оригіналу.
2. З доведеної теореми випливає, що довільне креслення тетраедра відповідає в оригіналі тетраедру будь-якої форми. Інакше: теорема Польке-Шварца дає змогу трикутну піраміду будь-якої форми зображати на площині цілком довільно. Але при цьому слід дотримуватись властивості паралельного проектування і забезпечити наочність зображення.
3. Маючи довільне зображення тетраедра, можна доповнити це зображення до призми, піраміди, зберігаючи властивості паралельних проекцій.

   Так, наприклад, зображення правильної чотирикутної піраміди, куба, можна побудувати, спираючись на зображення тетраедра.
4. Зображення призми ґрунтується на зображенні вихідного тетраедра. Такий тетраедр неважко знайти в будь-якій призмі. Дальші побудови призми (після заданого тетраедра) треба виконувати з дотриманням властивостей паралельних проекцій.[26, с.25]

3.7. Складання різнорівневих стереометричних задач

Засвоєння навчального матеріалу шкільного курсу математики і навчальна діяльність учнів щодо розв’язування задач, зокрема зі стереометрії, неоднорідні і мають на I (початковому) рівні рецептивний, на II (середньому) – переважно репродуктивний характер, на III (достатньому) рівні разом з попередніми якості проявляється конструктивне мислення учнів, а на VI (високому) – з'являються елементи творчого і нестандартного підходу. Тому є потреба у достатній кількості задач і вправ різного рівня складності, яку діючі підручники і навчальні посібники задовольняють лише частково. Учителі самі намагаються складати такі задачі. Покажемо, як це можна робити, на прикладі створення різнорівневих задач про циліндр, тематика яких практично вичерпуються обчисленням його елементів, площ бічних поверхонь, а також об'єму.

Розглянемо різнорівневі задачі т способи їх складання.

Перший рівень

На цьому рівні учні мають володіти такими відомостями і формулами про циліндр:

OO_1 – вісь циліндра;

ABCD – осьовий переріз циліндра, прямокутник;

AO=OB=R – радіус основи циліндра;

OO_1=AD=CB=H – висота циліндра;

AD=BC=L – твірні циліндра;

$P_{о.п.} = 2(2R + H)$ – периметр осьового перерізу;

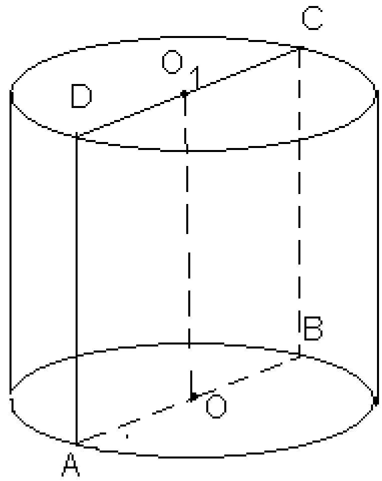
$S_{о.} = \pi R^2$ - площа основи;

$S_б = 2\pi R^2H$ – площа бічної поверхні;

$S_{о.п.} = 2RH$ – площа осьового перерізу;

$S_{пов} = S_б + 2 S_о$ – площа повної поверхні призми;

$V = \pi R^2H$ – об'єм циліндра;



мал.39

Задача 1. Площа основи циліндра дорівнює 36π см², а осьового перерізу – 120 см². Обчислити висоту циліндра.

Розв'язання

$S_{о.} = \pi R^2$; $36\pi = \pi R^2$; $R=6$ см.

$S_{о.п.} = 2RH$, $2RH=120$, $2 \cdot 6H = 120$, $H=10$ см.

Відповідь: 10см

Задача 2. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 120 см², а його твірна – 10 см. Обчислити площу основи циліндра.

Розв'язання

$S_{о.п.} = 2RH$, $H = L = 10$ см, $2R \cdot 10 = 120$, $R=6$ см.

$S_{о.} = \pi R^2$; $S_{о.} = \pi 6^2 = 36\pi$

Відповідь. 36 π (см²)

Задача 3. Довжина основи циліндра дорівнює 10 π см, а його висота – 12 см. Обчислити площу осьового перерізу.

Розв'язання

$C=2\pi R$; $2\pi R=10\pi$; $R=5$ см;

$S_{о.п.} = 2RH$, $S_{о.п} = 2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$ (см²).

Відповідь. 120 (см²).

Задача 4. Площа основи циліндра дорівнює 64 πсм ², а периметр його осьового перерізу – 40 см. Обчислити площу цього перерізу.

Розв'язання

$S_о = \pi R^2$; $\pi R^2 = 64\pi$, $R=8$см.

2(2R + H)= 40, H +2R =40, H=4 см.

Відповідь. 4 см.

Задача 5. Довжина основи і площа осьового перерізу циліндра відповідно дорівнюють 16 π і 192 см ². Обчислити висоту і периметр осьового перерізу циліндра.

Розв’язання

C=2π R; 16 π=2π R, R=8см.

2RH =192, RH=96, 8H =96, H=12 см.

$P_{о.п.}$ = 2(2R + H), $P_{о.п.}$ = 2(16 + 12) =56 (см).

Відповідь. 12 см, 56 см.

Зберігаючи умови задач, ними можна варіювати, змінюючи лише значення параметрів.

№ варіанта	Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4		Задача 5	
	So	$S_{о.п.}$	$S_{о.п.}$	L=H	C	H	$P_{о.п.}$	So	C	$S_{о.п.}$
1	144π	480	480	20	20π	24	80	256	16π	320
2	256π	320	320	10	40π	32	64	144	24π	180
3	81π	360	360	20	50π	24	90	225	30π	600
4	100π	240	240	12	16π	15	200	400	20π	500
5	12π	660	660	30	24π	25	100	576	36π	1080
6	225π	600	600	20	32π	30	180	900	50π	2000
7	169π	520	520	20	36π	20	120	484	32π	1600
8	196π	840	840	30	48π	35	100	1024	48π	2880
9	576π	960	960	20	56π	40	120	625	40π	2000
10	626π	2000	2000	40	50π	36	100	361	60π	3600

Отже, є 10 варіантів, кожен з яких складається з п’яти задач. Вчитель має можливість забезпечити самостійність роботи учнів, пропонуючи кожному окремо завдання.

Аналогічно складають задачі для наступних рівнів, поступово ускладнюючи навчальний матеріал. Так, на другому рівні долучають , наприклад, діагональ осьового перерізу циліндра, на третьому – відстань від центра основи циліндра до паралельного осі перерізу. На четвертому рівні учням пропонуються задачі з параметрами.

Другий рівень

Задача 1. Площа основи циліндра дорівнює 144π см², а діагональ його осьового перерізу 40 см. Обчислити висоту циліндра.

Задача 2. Довжина кола основи циліндра дорівнює $36\ \pi$, а висота – 48 см. Обчислити діагональ осьового перерізу.

Задача 3. Площа основи циліндра дорівнює 81π см², а площа його осьового перерізу – 432 см². Обчислити діагональ осьового перерізу і площу основи циліндра.

Задача 4. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 84 см, а його висота – 6 см. Обчислити діагональ осьового перерізу і площу основи циліндра.

Третій рівень

Задача 1. Площа основи циліндра дорівнює 625π см², а хорда нижньої основи циліндра – 40 см. Відстань від центра верхньої основи циліндра до даної хорди дорівнює 39 см. Обчислити висоту циліндра.

Задача 2. Довжина кола нижньої основи циліндра дорівнює $50\ \pi$ см, хорди – 40 см, а твірна циліндра дорівнює 36 см. Обчислити відстань від центра верхньої основи циліндра до даної хорди.

Задача 3. Твірна циліндра дорівнює 36 см, а хорда його нижньої основи – 40 см. Відстань від центра верхньої основи циліндра до даної хорди дорівнює 39 см. Обчислити площу основи циліндра.

Задача 4. У нижній основі циліндра на відстані 20 см від її центра проведено хорду. Відстані від центра верхньої основи циліндра до цієї хорди і до її кінця відповідно дорівнюють 36 см і 39 см. Обчислити довжину онови циліндра.

Задача 5. У нижній основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу 120°. Хорду видно з центра верхньої основи циліндра під кутом 90°. Обчислити твірну циліндра, якщо хорда дорівнює $12\sqrt{6}$ см.

Четвертий рівень

Задача 1. У нижній основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з серединою хорди, утворює з основою циліндра кут β. Знайти висоту циліндра, якщо радіус його основи дорівнює R.

Задача 2. Хорда нижньої основи циліндра стягує дугу β. Перпендикуляр, проведений з вершини верхньої основи до цієї хорди, утворює з основою циліндра кут α. Знайти висоту і радіус циліндра, якщо хорда дорівнює a.

Задача 3. У нижній основі циліндра на відстані d від її центра проведено хорду, яку видно з центра під кутом α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з серединою хорди, утворює з цією основою кут β. Знайти висоту та радіус циліндра.

Задача 4. Хорда нижньої основи циліндра дорівнює a і стягує дугу β. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з серединою хорди, утворює з цією основою циліндра кут α. Знайти площу осьового перерізу.

Задача 5. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка перетинає його основу по хорді, що стягує дугу α. Діагональ перерізу утворює з основою циліндра кут β. Знайти площу утвореного перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R.

Очевидно, авторам підручників, навчальних посібників і дидактичних матеріалів необхідно удосконалювати їх зміст з урахуванням переходу до рівневого навчання та запровадженням нової концепції оцінювання навчальних досягнень учнів з математики.

3.8. Система елементарних задач з стереометрії

Багато учнів, часто ігнорують етап доведення розв’язання задачі і зводять розв’язання тільки до виконання обчислень. В результаті таких дій навіть деякі неважкі задачі (наприклад, нестандартні задачі з не привичним розташуванням фігури) заводять їх в глухий кут.

При вивченні математики інколи виділяються задачі, які слугують основою (елементами) розв’язання інших задач; в подальшому їх називатимемо елементарними. Так, в багатьох задачах важливим елементом розв’язання задачі є побудова кута між прямою і площиною або побудова лінійного кута даного двогранного кута.

Навчання учнів розв’язання задач може йти двома шляхами. Перший полягає в тому, що способи розв’язання елементарних задач засвоюються поступово процесі розв’язання більш складних задач. Другий шлях відразу зводиться до формування навичок розв’язання елементарних задач, які розглядаються в різноманітних ситуаціях і неодноразово зустрічаються в подальшому, а потім здобуті навики закріплюються в процесі розв’язання більш складних задач.

В багатьох випадках другому шляху надається більша перевага ніж першому. Вчителі не завжди користуються ним тільки тому, що не мають відповідної системи вправ.

Задачі, в даній системі вправ, об’єднанні в групи по подібності методів їх розв’язання. В більшості груп перша задача основна, інші – допоміжні. Число допоміжних задач і число груп може бути збільшене або зменшене на вибір учителя.

1а. Довести, що ребра, які не перетинаються правильної трикутної піраміди, взаємно перпендикулярні.

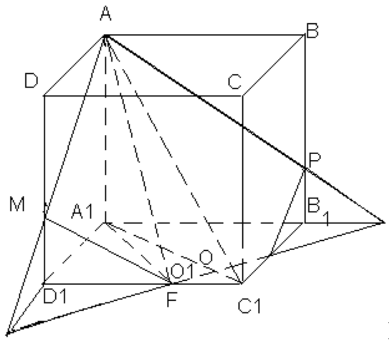
1б. Довести, що діагональ основи правильної чотирикутної піраміди і бічне ребро, що його не перетинає, взаємно перпендикулярні.

1в. Знайти кут між діагоналлю правильної чотирикутної призми і діагоналі призми, що не перетинає її.

2а. Побудувати лінійний кут двогранного кута при стороні основи правильної трикутної піраміди.

2б. Побудувати лінійний кут двогранного кута при стороні основи правильної чотирикутної піраміди.

2в. ABCDA1B1C1D1 – правильна чотирикутна призма. Точки E і K – середини сторін основи, AMEKP – площина перерізу. Вказати лінійний кут двогранного кута AEKA1.



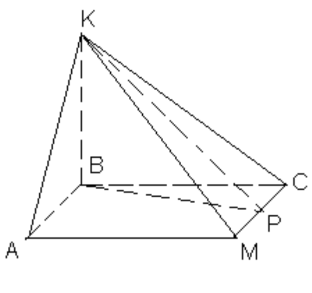
мал.40

2г. Чи зміниться відповідь попередньої задачі, якщо ABCDA1B1C1D1 – прямокутний паралелепіпед?

2д. Зобразити лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди.

2е. Зобразити лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди.

2ж. KABCM – піраміда, KB – її висота, ABCM – прямокутник. Вказати лінійний кут двогранного кута при ребрі MC.

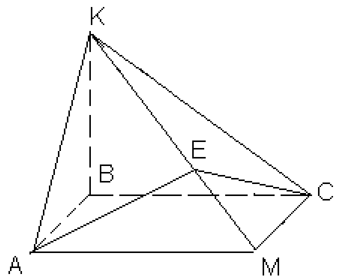


мал.41

2з. В основі піраміди ромб. Висота піраміди проходить через вершину гострого кута ромба. Побудувати лінійні кути двогранних кутів при сторонах основи піраміди.

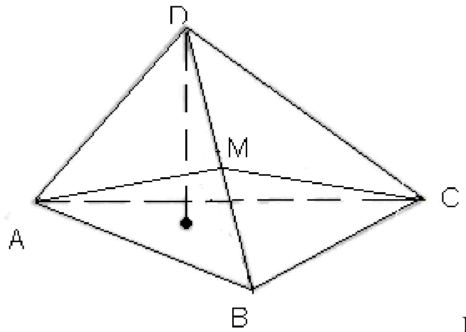
2и.Основа піраміди – паралелограм. Зобразити лінійний кут двогранного кута між протилежними бічними гранями піраміди.

2к. КВ – висота піраміди КАВСМ, АВСМ – прямокутник. Зобразити лінійні кути двогранних кутів при сторонах основи і бокових ребрах піраміди. Чи може кут АЕС, де Е є КМ, бути лінійним кутом двогранного кута з ребром КМ?



мал.42

2л. КАВС – піраміда. Чи може кут АМВ, де М є КС, бути лінійним кутом двогранного кута з ребром КС? При якій умові це можливо?



мал.43

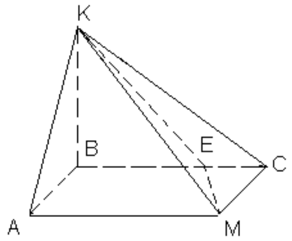
2м. Намалювати лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі неправильної трикутної піраміди.

3а. У правильній чотирикутній призмі побудувати кут між бічною гранню і діагоналлю основи.

3б. В правильній чотирикутній піраміді побудувати кут нахилу бічного ребра до площини діагонального перерізу.

3в. В правильній трикутній піраміді побудувати кут нахилу висоти піраміди до бічної грані.

3г. КВСМ – піраміда. КА – її висота, АВСМ – прямокутник. Побудувати кут нахилу ребра КС до грані КАВ.



мал.44

3д. В правильній чотирикутній призмі побудувати кут нахилу діагоналі бічної грані до іншої бічної грані.

4а. Кожне бічне ребро n-кутної піраміди складають з площиною основи конгруентні кути. Довести що: 1) навколо основи можна описати коло; 2) висота піраміди проходить через центр цього кола.

4б. В піраміді KABC кут ABC – прямий, бічні ребра KA, KB, KC конгруентні між собою. Де розміщено основу висоти піраміди?

5а. Довести, що якщо дві бокові грані піраміди KAB і KBC утворюють з площиною основи конгруентні кути, то висота KO піраміди перетинає бісектрису одного із кутів між прямими BA і BC.

5б. Довести, що якщо всі бічні грані трикутної піраміди утворюють з площиною основи конгруентні кути, то висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в основу, або через центр кола описаного відносно основи.

5в. Довести, що якщо всі бічні грані n-кутної піраміди утворюють з площиною основи конгруентні кути, то при $n>4$ в основу піраміди можна вписати коло, висота піраміди проходить через центр цього кола.

6а. Де розміщений центр кулі: 1) вписаного в конус; 2)описаного навколо конуса?

6б. Де розміщений центр кулі, описаного навколо циліндра?

6в. Де розміщений центр кулі, описаного навколо зрізаного циліндра?

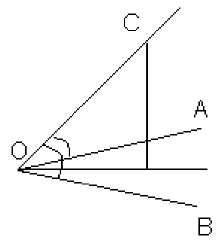
6г. Знайти множину точок простору, однаково віддалених від вершин трикутника ABC?

6д. Де розміщений центр кулі, описаного навколо правильної трикутної піраміди?

6е. Де розміщений центр кулі, описаного навколо правильної чотирикутної піраміди?

6ж. Довести, що центр кулі, вписаної в правильну піраміду, розміщений на її висоті.

7а. Довести, що якщо промінь OC утворює конгруентні кути з променями OA і OB, то він проектується на бісектрису кута BOA і бісектрису кута, вертикального йому.



мал.45

7б. Промінь OA утворює конгруентні гострі кути з променями OC і OB. Промінь OM утворює конгруентні гострі кути з тими ж променями. Довести, що площини OAM і OBC взаємно перпендикулярні.

7в. Довести, що висота правильної піраміди проектується на апофему бічної грані.

7г. Довести, що бічне ребро правильної трикутної піраміди проектується на апофему протилежної бічної грані.

7д. Побудувати кут між висотою конуса і площиною перерізу, що проходить через його вершину.

7е. Всі грані паралелепіпеда – конгруентні ромби. Побудувати висоту паралелепіпеда.

8а. Дано дві прямі, що перетинаються. Довести, що через одну з них можна провести площину, перпендикулярну до іншої лише тоді, коли ці прямі взаємно перпендикулярні.

8б. В трикутній піраміді через сторону основи провести переріз перпендикулярний до протилежного бічного ребра. Чи завжди задача має розв’язок?

8в. В трикутній піраміді одна із сторін основи перпендикулярна протилежному бічному ребру. Довести, що

$$V = \frac{S \cdot l}{3}$$

де S – площа перерізу, проведеного через сторону основи перпендикулярного цьому бічному ребру довжиною l.

Формулу, отриману в задачі 8в, можна використовувати при розв'язанні деяких задач. Наведемо приклади таких задач.

1. В правильній трикутній піраміді відстань між бічним ребром і протилежною йому стороною основи дорівнює d. Двогранний кут при стороні основи α. Знайти об'єм піраміди.
2. В правильній чотирикутній піраміді довжина бічного ребра дорівнює l, двогранний кут при бічному ребрі φ. Знайти об'єм піраміди.

3.9. Методичні рекомендації учням щодо розв'язування задач

Щоб навчитись розв'язувати задачі необхідно засвоїти кілька принципів, правил, дотримавшись яких буде легко розв'язати будь-яку задачу.

По-перше, необхідно навчитися *аналізувати задачу*.

Це означає, що необхідно навчитись розбивати задачу на елементарні умови і вимоги. А в кожній елементарній умові бачити об'єкт і його характеристику; якщо ж об'єктів в умові декілька , то виявити їх відношення. Необхідно також встановити характер кожної вимоги і тим самим визначити тип задачі.

Корисно дотримуватись правила: *доки не проведений повний, глибокий аналіз задачі, не побудована, якщо потрібно, її схематичний запис, не приступаючи до розв'язання.*

По-друге, необхідно добре зрозуміти, що розв'язання будь-якої задачі є послідовне використання знань (математичних) до умов даної задачі, отримані тим самим із цих умов висновків (проміжних розв’язань) до тих пір, доки не отримаємо такі висновки, котрі є відповідями на вимоги задачі.

А для того щоб отримувати такі висновки необхідно знати і пам’ятати всі знання (означення теореми, правила, формули, тощо) із курсу математики. Без цих знань розв’язувати задачі неможливо.

По-третє, необхідно вміти використовувати основні методи розв’язання задач. А їх всього лиш три: розбиття задачі на під задачі, перетворення (моделювання) задачі і метод допоміжних елементів.

Отримавши задачу, проаналізувавши її, побудувавши її схематичний запис, далі необхідно діяти, як правило, в такому порядку:

1. Якщо можна, розбити важку задачу на більш прості під задачі.
2. Якщо задачу не вдається розбити на під задачі, то необхідно, якщо можна, перетворити її в більш простий, більш знайомий вигляд.

Для цього можна використати різні прийоми: тотожні перетворення заданих виразів, замінну змінних, тощо.

3. Якщо ж розбити задачу на під задачі або перетворити її в більш простий вигляд безпосередньо не вдається, то необхідно спробувати ввести які-небудь допоміжні елементи, з метою отримати задачу, котру і можна розбити на під задачі, або ж перетворити в більш простий вигляд.

3.10. Процес формування в учнів вмінь розв’язувати задачі

Поставивши перед собою завдання озброїти учнів вмінням розв’язувати задачу, вчитель повинен дати відповідь на запитання: «Як це зробити?» При цьому виникає необхідність в уточненні умов, за яких повинна розв’язуватися ця проблема. Умови ці такі: озброїти учнів вмінням розв’язувати задачі необхідно за мінімальний проміжок часу. Також необхідно зрозуміти, що учні володіють різною успішністю в навчанні і по різному відносяться до математики, тому розв’язування задач необхідно уніфікувати, необхідно озброювати всіх учнів знанням загальних методів і способів розв'язання задач. Здійснити такий підхід до процесу навчання учнів вмінню розв'язувати задачі можливо, формуючи в них загальний підхід до розв'язання математичних задач.

Здобуття учнями знань загального підходу як до процесу управління потрібно скористатися деякими поняттями і закономірностями кібернетики, зокрема поняттям «управління».

Під управлінням розуміють забезпечення функціонування системи певним чином.

«Управління – це цілеспрямований, примусовий вплив на об'єкт, вибране із множини впливів на основу інформації про стан зовнішнього середовища, об'єкту та програми управління, що здійснюється в цілях забезпечення необхідного йому функціонування і розвитку» [49]

Процес обробки інформації складається з ряду послідовних дій, котрі виконуються через окремі операції. Сукупність операцій може бути представлена алгоритмом. Кожна конкретна дія є елементарною функцією управління.

Тому використання алгоритмів в навчальному процесі в даній роботі розглядається як засіб управління процесом формування в учнів загальних вмінь. Узагальненими вміннями називають вміння, що володіють властивістю широкого переносу. Ці вміння основані на розумінні наукових основ дій, структури дій і раціональної послідовності її виконання. Одним із засобів формування в учнів узагальнених вмінь є побудова і застосування алгоритмів в навчальному процесі. Можливості реалізації алгоритмів в навчальному процесі великі: це алгоритми навчання, управлінням зі сторони вчителя і самоуправління учнями, реалізації конкретного певного методу розв'язання і відкриття методів розв'язання задач, це перетворення репродуктивних і продуктивних методів навчання.

Необхідно використати і реалізувати наукові основи управління, що дозволить більш інтенсивно вести процес навчання учнів загальними вміннями, зокрема вмінню розв'язувати задачі. Використання закономірностей науки про управління в дидактиці – необхідна умова удосконалення навчання.

Діяльність учнів можна назвати певну систему дій. Запропоновані учнями дії не завжди є для них простими діями. В цьому випадку вчитель повинен висунути гіпотезу, що будь-яке складне твердження можна представити як структуру простих дій, котрі учні на даному етапі навчання змогли б виконати без сумніву. Далі висунута гіпотеза реалізується, тобто важка операція розбивається на прості операції. Після цього вчитель проводить спеціальну роботу по вивченню учнями сформульованої системи операцій.

Призначення процесу розв'язання задач в навчанні різнобічне. Вміння розв'язувати задачі в учнів з'являється в результаті оволодіння певною системою знань і навичок. В той же час процес розв'язання задач є засобом формування в учнів системи наукових знань.

Узагальнене вміння розв'язувати задачі не існує саме собою, а виявляється у вмінні розв'язувати задачі. Основне призначення розв'язання математичних задач полягає в оволодінні математичними поняттями, у виробленні вмінь оперувати ними.[70]

Самостійна робота учнів є основою процесу навчання вмінню розв'язувати задачу.

Процес навчання учнів вмінню самостійно розв'язувати задачі повинен носити творчий характер, він не допускає простого копіювання методу, запропонованого вчителем.

Успіх навчання учнів розв'язувати задачі залежить від багатьох факторів. В загальному випадку всі фактори можна розбити на три групи: основні, супутні і суперечливі умови. Сукупність основних і супутніх факторів в теорії управління отримало назву сигналів входу. Основні фактори забезпечують цілеспрямоване формування вміння розв'язувати задачі. Супутні фактори забезпечують перенос вміння розв'язувати задачі, що вироблись під час однієї теми на другу. Суперечливі перешкоди порівняємо з причинами, що заважають успішному формуванню вмінь розв'язувати задачі.

Управління процесом формування в учнів вміння розв'язувати задачі передбачає певний вплив на учня. Структура входу складається із прошарків та частин. Основні частини входу: 1) цілеспрямований вплив; 2) супутній вплив. Відзначимо прошарки цілеспрямованого впливу на учня, в процесі якого формується вміння розв'язувати задачі з математики.

Найближчий прошарок включає наступні елементи: 1) знання, вміння і навики вчителя по формуванню в учнів даного виду діяльності (вміння розв'язувати задачу); 2) Присутність відповідного матеріалу в підручниках з геометрії; 3) наявність спеціальної системи задач у збірниках.

Другий прошарок включає джерела поповнення знань, вмінь і навичок вчителя в управлінні процесом формування в учнів вмінь розв'язувати стереометричні задачі. Наступний прошарок входу складають психологічні і дидактичні теорії навчання.

Таким чином, представлена структура входу дозволяє більш чітко визначити шляхи удосконалення процесу навчання, зокрема, навчання учнів розв'язувати задачі. Основним таким шляхом є постійний розвиток ідей і теорій методики викладання геометрії, зокрема, стереометрії також.

Розв'язання задач – це вид пізнавальної діяльності. Учбову задачу будемо розглядати, як компонент учбової діяльності, тобто, як засіб пізнавання організації пізнавальної діяльності [78]

Змістом діяльності учня є процес оволодіння ним діяльністю розв'язання математичних задач, тобто повинно бути сформовано вміння розв'язувати задачі. До закінчення школи учень повинен оволодіти наступними знаннями, діями та операціями, що забезпечує успішне володіння вмінням розв'язувати математичні задачі.

1. Знання про задачу, як про об'єкт управління

1) Що таке задача?

2) Структура задачі

3) Зміст системи задачі (предмет задачі та що вимагається знайти)

4) Зміст системи розв’язання (методи, способи і засоби розв’язання)

2. Знання про процес розв’язання задачі (основні етапи розв’язання задачі)

1) Ознайомлення з умовою задачі з виділенням заданих характеристик, обмежень і невідомих.

2) Складання плану розв’язання задачі (вибір методу розв’язування і його застосування щодо складання плану).

3) Здійснення розв’язання шляхом перетворення системи задачі по складеному плані з допомогою відібраних способів розв’язання задач.

4) Перевірка і контроль результатів розв’язання задач.

3. Зміст операцій і послідовності їх реалізації в процесі розв’язання задач

1) Прочитати умову задачі.

2) Виділення і аналіз процесів та властивостей тіл описаних в задачі.

3) Короткий запис умови задачі з виконанням малюнка.

4) Вибір методу і способу розв’язання конкретної задачі.

5) Розв’язання задачі.

6) Перевірка триманого результату.

3.11. Методика формування вмінь учнів розв’язувати задачі

Навчання учнів вмінню розв’язувати задачі основане на знанні вчителем способів навчання розв’язувати задачі. Теорія і практика навчання учнів розв’язувати задачі дозволяє виділити три основних етапи.

Перший спосіб – традиційний. Він здійснюється за такою схемою:

1. Пояснення вчителем підходу до розв’язування задач даного виду.

2. Колективне розв’язування задачі, при якому обраний підхід розв’язання обговорюється зі всім класом або один з учнів розв’язує задачу біля дошки, всі інші списують з дошки.

3. Самостійне розв'язування задачі у зв'язку з виконанням домашнього завдання.

4. Самостійне розв'язання задач у зв'язку з виконанням контрольних робіт.

Другий спосіб – включає два нових елемента: напівсамостійне і повністю самостійне. Схема здійснення:

1. Розкриття учителем загального підходу до розв'язання задач даного виду на прикладі розв'язання 1-2 задач.

2. Колективне розв'язання невеликої кількості задач з використанням загального підходу.

3. Напівсамостійне розв'язання задач, що включає колективний аналіз умови задачі, обговорення плану розв'язання і самостійну роботу по реалізації наміченого плану розв'язання або виконання окремих операцій.

4. Повністю самостійне виконання розв'язання задач, до якого входить самостійний аналіз умови, його короткий запис, розробку плану розв'язання, його реалізацію, аналіз відповіді, перевірку вірності розв'язку.

5. Самостійне розв'язування задачі у зв'язку з виконанням домашнього завдання.

6. Самостійне розв'язання задач у зв'язку з виконанням контрольних робіт.

Третій спосіб – алгоритмічний. Він відрізняється від попередніх тим, що учні знайомляться з загальним методом розв'язання задач даного виду. Виконується за такою схемою:

1. Колективне розв'язання 1-2 задач, що належать даному класу задач.

2. Висунення гіпотези відшукання загального методу розв'язання задач даного класу.

3. Відшукання учнями загального методу розв'язання задач даного класу, відшукання алгоритму розв'язування.

4. Засвоєння структури алгоритму і окремих операцій, із яких складається розв'язок, в процесі колективного розв'язання 1-2 задачі.

5. Самостійне розв’язування задач, що включає самостійний аналіз умови, вибір способу короткого запису, застосування даного способу до конкретної задачі, аналіз і перевірка отриманого результату.

6. Самостійне розв’язування задачі у зв’язку з виконанням домашнього завдання.

7. Самостійне розв’язання задач у зв’язку з виконанням контрольних робіт.[73]

Таким чином, третій спосіб включає діяльність учнів під керівництвом учителя, по аналізу розв’язання часткових задач і виділенню на цій основі загального методу розв’язання задач даного класу по конкретній темі.

3.12. Цей цікавий куб

Задача 1. Доведіть, що куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ має наступні властивості:

1.Діагональ куба перпендикулярна непересічній з нею діагоналі будь-якої грані.

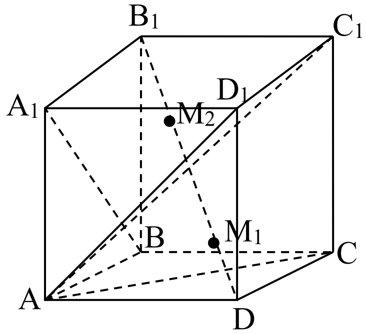
2.Діагональ B_1D перпендикулярна площині ACD_1.

3.Площина ACD_1 паралельна площині A_1BC_1.

4.Діагональ B_1D перетинає площини трикутників ACD_1 і A_1BC_1 в точках M_1, і M_2 перетинів їх медіан.

5.Діагональ B_1D ділиться точками M_1, і M_2 на три рівні частини.

Розв’язок (мал. 47).



Мал. 47

1. Покажемо, наприклад, що $B_1D \perp AC$. Насправді, $B_1B \perp (ABC)$ за визначенням куба; B_1D – похила до площини ABC, а BD_1 – проекція цієї похилої. Діагоналі квадрата перпендикулярні, тобто $AC \perp BD$. Звідси по теоремі про три перпендикуляри робимо висновок, що $AC \perp BD$. Аналогічно $B_1D \perp CD_1$, $B_1D \perp AD_1$ і т.д.

2. У пункті 1 доведено, що $B_1D \perp AC$ і $B_1D \perp AD_1$ тобто діагональ B_1D перпендикулярна двом прямим, що перетинають площину $АСД_1$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини робимо висновок, що $B_1D \perp (АСД)$.

3.З властивості паралельних площин витікає, що $СД_1 \| BA_1$ і $AC \| A_1C_1$. Тоді $(АСД) \| (A_1BC)$.

4.Піраміда $DACD_1$ правильна, так як трикутник ACD правильний і бічні ребра DA, DC і DD_1 рівні. У пункті 2 доведено, що $DB_1 \perp (ACD)$, значить, висота DM_1 піраміди лежить на діагоналі AB_1 куба. Отже $(DB_1) \cap (ACD) = M_1$, де M_1 – центр описаного кола трикутника ACD_1, тобто точка перетину медіан трикутника ACD_1. Аналогічно доведемо, що $(D_1B) \cap (A_1C_1B) = M_2$, де M_2 –точка перетину медіан трикутника A_1BC_1.

Відмітимо попутно, що в класі було б цікаво поставити і вирішити питання про побудову точок M_1 і M_2 на проекційному кресленні.

5. Знайдемо висоту DM_1 піраміди $DACD_1$ прийнявши ребро куба рівним a. З одного боку $V_{DACD_1} = \frac{1}{3} DM_1 \cdot S_{ACD_1} = \frac{1}{3} DM_1 \cdot \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} DM_1 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. З іншого боку $V_{DACD_1} = V_{ACD_1} = \frac{1}{6}a^3$. Прирівнюючи одержані вирази для V_{DACD_1}, знайдемо: $DM_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, тобто DM_1 складає третю частина діагоналі B_1D куба. Із рівності пірамід $DACD_1$ і $B_1A_1C_1B$ витікає, що $B_1M_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Неважко обчислити B_1D: $B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2 = 3a^2$, $B_1D = a\sqrt{3}$. Тепер ясно, що $DM_1 = M_1M_2 = M_2B_1 = \frac{B_1D}{3}$.

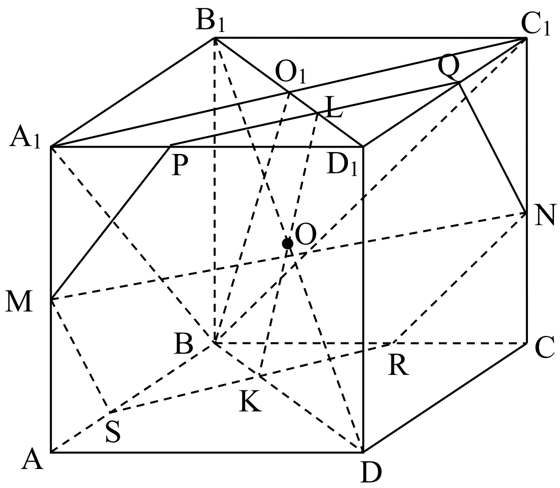
Твердження 4 і 5 одночасно можна довести і векторним методом так, як це зроблено для паралелепіпедів в підручнику «Геометрія 10-11» Л.С.Атанасяна і інших.

Задача 2. Знайдіть ребро куба $ABCDA_1B_1D_1$. якщо відстань між його діагоналями A_1B і AD_1 дорівнює $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

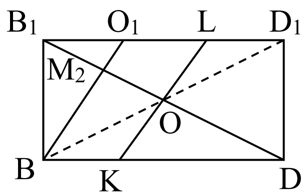
Розв'язок. Проведемо через діагоналі A_1B і AD_1 паралельні перерізи куба A_1BC_1 і $ACД_1$. Відстань ρ між A_1B і $AД_1$ дорівнює відстані між площинами A_1BC_1 і ACD_1. У задачі 1 було фактично доведено, що $\rho(A_1B, AD_1) = \rho((A_1BC_1),(ACD_1)) = \frac{1}{3}B_1D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, де a – ребро куба. Отже $\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Тоді a=5.

Далі розглянемо задачі на проекційному кресленні, що також використовують властивості куба із задачі І.

Задача 3. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середину його діагоналі перпендикулярно цієї діагоналі.



Мал. 48



Мал. 49

Розв'язок. Нехай точка O – середина діагоналі B_1D куба (мал. 48). Шукана площина проходить паралельно площини A_1BC_1 (див. задачу 1). Цей факт підказує на слідуючу побудову:

1) через точку O проводимо $MN||A_1C_1$ (точки M, N – середини ребер AA_1 і CC_1 відповідно);

2) у площині діагонального перерізу BB_1D_1D куба (див. виносний мал. 49) через точку B проведемо $BO_1 \perp B_1D$ ($B_1M_2 = \frac{1}{3}B_1D$ із п. 5 задачі 1).

Через точку O проведемо $KL||BO_1$. Точка L – середина відрізка O_1D_1, оскільки $B_1M_2=2M_1O$ і $B_1O_1:O_1L=B_1M_2:M_2O=2:1$;

3) через точку L (див. мал. 2) проводимо пряму PQ, паралельну A_1C_1; через точку K – пряму SR паралельну MN (або A_1C_1);

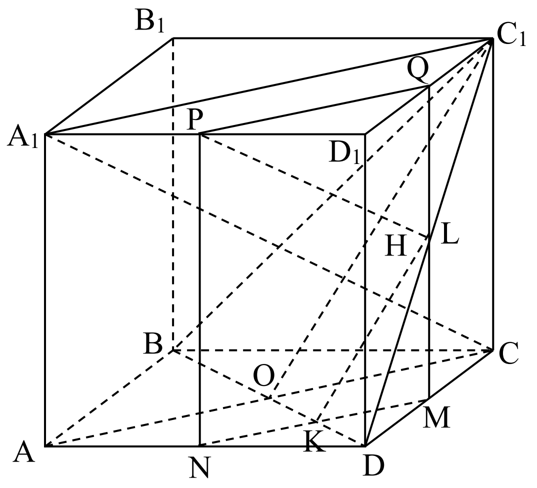
4) переріз $MPQNRS$ – шукане.

Із 1) і 2) витікає, що $B_1D \perp MN$ і $B_1D_1 \perp KL$, отже, $B_1B \perp (MPQNRS)$.

Для самостійного розв'язування або домашнього завдання можна запропонувати учням: довести, що побудований в завданні 3 переріз є правильним шестикутником, знайти його площу при заданому ребрі куба, а також визначити кут, що утворюється перерізом з площиною основи куба.

Задача 4. В кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершини B, C_1 D проведена площина. З точки P, взятій на ребрі A_1D_1, опустіть перпендикуляр на площину BC_1D.

Розв'язок. За допомогою властивості 2), доведеною в задачі 1, відмітимо (мал. 50), що $A_1C_1 \perp BC_1D$. Тепер виконаємо наступні побудови:



Мал. 50

1) через точку P проведемо площину $PQMN$ паралельно площині діагонального перерізу A_1C_1CA (обидві ці площини перпендикулярні площині BC_1D);

2) зобразимо відрізок KL, по якому перетинаються чотирикутник $PQMN$ і трикутник BC_1D, і відмітимо, що $KL\|OC_1$, звідси $KL\perp A_1C$;

3) у площині $PQMN$ проведемо $PH\|A_1C$ $H\in KL$.

Перпендикуляр PH до площини BC_1D лежить в площині $PQMN$ і є також перпендикуляром до прямої KL.

Пропоновані задачі можуть використовуватися на уроках підсумовуючого повторення стереометрії.

3.13.1. Усні вправи на тему «Взаємне розміщення прямих і площин у просторі»

1. Незнайкові дали завдання принести предмет, який містив би сім пар паралельних прямих та три пари паралельних площин. Він довго думав приніс коробку від сірників. Чи правий був Незнайко?

2. На заводі виготовили стіл у вигляд трапеції. Потім провели середню лінію (КМ) та поставили перегородку, яка проходила через неї. Чи буде ця перегородка паралельна до сторін стола (АВ, CD), як основами трапеції? Вважати що кришка стола виготовлена з тоненько пластинки.

3. Знайдіть на трикутній призмі паралельні площини, перпендикулярні площини та площини, які перетинаються.

4. Виготовити чотирикутну призму , використовуючи , покажіть, що дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою. Знайдіть на ній перпендикулярні та мимобіжні прямі.

5. Назвіть предмети вашого щоденного використання, як містять перпендикулярні прямі та площини; паралельні прямі та площини, мимобіжні прямі.

6. Учневі сказали провести через задану точку поза прямою дві прямі a b так, щоб вони були паралельні до прямо c. Чи виконав учень завдання? Чому?

7. Виготовити наочність паралельних площин. Побудуйте довільні паралельні прямі, як перетинають ц площини. Як співвідносяться довжини відрізків цих прямих, що знаходяться між паралельними прямими? Зробіть відповідні висновки накресліть утворену модель в зошит.

8. Зробити з пластиліну пластинку (основу), за допомогою дроту побудуйте дві паралельні прямі (в просторі). Використовуючи картон, побудуйте площину, перпендикулярну до одно з цих прямих. Як буде розміщені друга пряма, дана площина? Які можна зробити висновки? Зобразіть відповідну модель в зошит.

9. Використовуючи елементи моделі з попередньо задач, зробіть наступне: побудуйте пряму, перпендикулярну до пластилінового площини; прикріпіть паперову площину до дано прямо так, щоб ця пряма лежала на даній площині. Під яким кутом розміщена пластилінова та паперова площини? Зробіть відповідні висновки, накресліть утворену модель в зошит.

3.13.2. Усні вправи на тему «Призми. Піраміди.»

1. Щоб запакувати товар у вигляді прямої призми, в основі якої лежить прямокутник, потрібно використати певну кількість паперу. Яка найменша площа паперу потрібна для запакування товару? Відомо, що ширина призми a=6 см, довжина b=8 см, висота h =2 см.

2. Обчисліть об’єм класу, в якому ви вчитеся. Уявіть, що підлога стеля у вигляд правильних п’ятикутників зі стороною 1м. Яким тоді буде об’єм класу.

3. Знайдіть об’єм споруди, накритого чотирикутною пірамідою, в основі якої прямокутник з сторонами b_1=12м, a_1=8м. Висота даху h_1=2м, сам будинок має вигляд прямокутного паралелепіпеда довжиною b_2=11,5м, шириною a_2=7,5м та висотою h_2=2,5м.

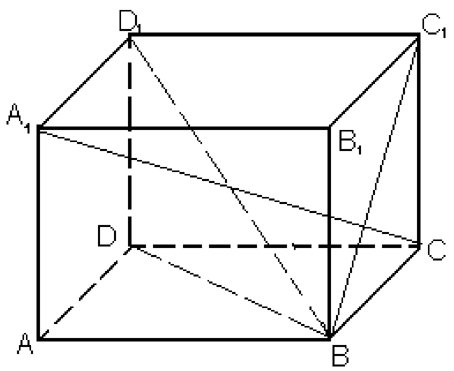
4. Багато тисячоліть тому стародавні єгиптяни ховали царів (фараонів) у кам’яних спорудах. Геометричні форми цих споруд піраміди. Обчислити бічну поверхню шестикутної піраміди, в основі якої лежить правильний шестикутник з стороною 5м. Апофема піраміди h=8м.

5. Побудуйте розгортку куба з стороною 3 см. В одній з граней виріжте отвір діаметром 1см. Яка площа утвореної поверхні?

6. Які лінійні розміри може мати будка для вашої собаки, якщо відомо, що вона має вигляд паралелепіпеда, накритого чотирикутною пірамідою. Висота паралелепіпеда дорівнює 50 см, V дорівнює 2500 см ; висота піраміди 20см, а виступи навколо паралелепіпеда мають по 2см.

7. Знайдіть об’єм фігури, якщо відомо, що це куб з отвором у вигляд піраміди, в основі якої лежить правильний п’ятикутник. Основа піраміди та грань куба – співпадають, а вершина піраміди лежить на відповідній протилежній грані куба. Сторона куба дорівнює а; сторона п’ятикутника дорівнює b.

8. Розгляньте зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



мал.51

а) Які ребра даного куба належать паралельним (мимобіжним) прямим? Які ребра даного куба належать прямим, що перетинаються?

б) Які ребра даного куба перпендикулярні (паралельні) до його граней?

в) Грані $ABCD$ та ABA_1B_1 мають спільну точку. Назвіть лінію їх перетину.

г) Назвіть по зображенню кути, величина яких (90º).

д) Які прямі, зображені на малюнку перетинаються з прямою, якій належить діагональ A_1D_1? Паралельні з нею? Мимобіжні з нею?

е) Яким площинам куба належать точки A, C_1, D, D_1?

ж) З якими площинами куба пряма AC має хоча б одну спільну точку?

з) Вкажіть кут, утворений діагоналлю куба з площиною граней $ADCD, ABA_1B_1, A_1B_1C_1D_1$. Якщо потрібно, виконайте необхідні побудови.

и) Який вид мають трикутники ADB, AD_1C, ACA_1?

к) Діагональ основи куба дорівнює 5 см, а діагональ куба 7 см. Знайдіть його об’єм.

л) Знайдіть V піраміди , якщо ребро куба дорівнює 13 см.

м) Об’єм піраміди ADD_1B - 60 см^3. Знайдіть об’єм куба.

н) Знайдіть центр куба.

3.13.3. Усні вправи на тему «Конус. Циліндр»

1. Обчисліть об’єм вашого олівця. Яка його довжина, діаметр?

2. Обчисліть об’єм циліндра, у якому діагональ осьового перерізу d=10см, а висота h=8см.

3. На заводі виготовляють котли циліндричної форми, які перед продажею фарбують. Фарбу розраховують у відповідності до площ поверхні котла. Яка площа поверхні котла, якщо діаметр основи відповідного циліндра d=0,5м, а твірна l=2м?

4. На карнавалі діти виготовляли шапочки у вигляд конуса. Скільки вони витрачали паперу на одну шапочку, якщо твірна відповідного конуса l=20см, а діаметр основи d=10см.

5. Обчисліть об’єм конуса, висотою h=20м, діаметр основи d=6м.

6. В циліндричну деталі, об’єм якої V=20 дм³, зробили порожнину у вигляді конуса з висотою h=2см, радіусом основи r=0,5см. Який об’єм утвореної деталі?

8. Взяли три сплави об’ємами 45, 60, 100, з них виплавили циліндр. Який об’єм утвореного циліндра?

9. В циліндричну вазу, внутрішній діаметр якої 14 см., опустили металічний конус. При цьому рівень води у вазі піднявся на 3 см. Який об’єм деталі?

10. Знайдіть об’єм циліндра, утвореного в результат повороту прямокутного трикутника ABC навколо катета AB. AB=9 см.; BC=4см.

12. Знайдіть площу поверхні фігури, яка складається з двох циліндрів, лінійні розміри яких такі: r_1=3см.; r_2=6 см.; h_1=4см.; h_2=6см.

13. Об’єми двох бочок відносяться як 4 : 9. Висоти бочок рівні. Як відносяться їхні діаметри?

3.13.4. Усні вправи на тему «Куля»

1. Обчисліть об’єм м’яча, якщо відомо, що його діаметр дорівнює 20 см.

2. Знайдіть об’єм півкулі, радіус якої дорівнює .

3. Знайдіть об’єм тіла, яке має форму кулі з порожниною об’ємом 4 см² . Діаметр кулі дорівнює 4 см.

4. В скільки разів більша площа поверхні кулі радіусом 6 см., від поверхні кулі, радіус якої дорівнює 2 см. 5. Площі поверхонь двох куль відносяться як 4:9. Об’єм одно кулі дорівнює 54 см³. Знайдіть об’єм другої кулі.

6. Півкруг, площею 8 см² повернули навколо основи. Знайдіть об’єм кулі, яка утворилася в результаті цього повороту.

7. Що має більший об’єм, три кульки діаметром 2 см, чи куля діаметром 6 см?

8. Знайдіть площу поверхні фігури у формі півкулі з вирізаним кубом (одна з граней куба співпадає з основою півкулі). Радіус кулі дорівнює 6 см, сторона куба 1 см.

9. Розташуйте дані тіла за такими категоріями : тіла мають однакові об'єми ; тіла мають однакові площі поверхонь. а) циліндр (r=1 см.; h=2см.); б) куля (r=1см.); в) конус (r=1см.; h=4см.)

Педагогічний експеримент

Методи педагогічних досліджень – це шляхи, способи пізнання педагогічної дійсності. За допомогою методів педагогіка здобуває інформацію про те чи інше явище, процес, аналізує і обробляє одержані дані, включає їх в систему відомих знань. Тому темп і рівень розвитку педагогічної теорії залежить від того, які методи дослідження вона використовує.

Особливості процесу виховання вивчити і розкрити нелегко. Педагогічні процеси мають неоднозначний характер. Результати навчання, виховання й освіти залежать від одночасного впливу багатьох причин. Достатньо змінити вплив одного фактора, щоб результати процесу суттєво відрізнялись один від одного. Для педагогічних процесів характерна неповторимість. Якщо дослідник природничих наук (у хімії, фізиці) може кількаразово повторити експеримент, використовуючи ті самі матеріали, створюючи незмінні умови, то педагог-дослідник такої змоги не має: повторне дослідження пропонує вже інші умови праці, і як наслідок – інші результати. Ось чому «чистий» експеримент у педагогіці неможливий. Зважаючи на цю обставину, педагоги роблять свої висновки обережно і коректно, розуміючи відносність умов, в яких вони були отримані. Кількаразове повторення спостережень дає змогу в узагальненій формі формулювати висновки, визначати найхарактернішу тенденцію.

Важливим завданням педагогічного дослідження є виявлення порядку в процесі, що вивчається, тобто встановлення закономірності. Закономірність – це факт наявності постійного й необхідного взаємозв'язку між реальними феноменами процесу.

На основі емпіричних закономірностей процесу виховання розкриваються теоретичні закони. Закон – строго зафіксована закономірність. Сучасна наука визначає його як необхідну, властиву природі явищ тенденцію зміни, руху, розвитку, яка характеризує загальні етапи і форми становлення явищ, процесів, систем, що розвиваються. Закони існують незалежно від того, як повно вони розкриті наукою. Пізнання закону дозволяє зрозуміти його дію і правильно використати в інтересах виховання.

Кінцевою метою педагогічного дослідження є виявлення закономірностей і законів.

У даний час педагогічні дослідження здійснюються за допомогою цілої системи різноманітних методів. До них належить і педагогічний експеримент.

Педагогічний експеримент (лат. experimentum – проба, дослід). Суть експерименту як методу дослідження полягає у спеціальній організації педагогічної діяльності учителів і учнів, вихователів і вихованців з метою перевірки й обґрунтування наперед розроблених теоретичних припущень, або гіпотез. Якщо гіпотеза знаходить своє підтвердження в педагогічній практиці, дослідник робить відповідні теоретичні узагальнення і висновки.

Педагогічні експерименти класифікують за різними ознаками: спрямованістю, об'єктами дослідження, місцем і часом проведення та ін. Залежно від поставленої експериментом мети розрізняють:

а) констатуючий експеримент, що проводиться на початку дослідження і своїм завданням має вияснення стану справ у шкільній практиці з тієї чи іншої проблеми;

б) творчо-перетворюючий, коли вчений розробляє гіпотезу, теоретичні основи, здійснює конкретні практичні заходи щодо вирішення досліджуваної проблеми;

в) контрольний, суть якого полягає в застосуванні апробованої методики в роботі інших педагогів та шкіл.

Повернемось до педагогічного експерименту, який проводився в 11-му профільному класі з математичним спрямуванням.

Метою експерименту було перевірити знання учнів методів розв'язання стереометричних задач, знання учнів про визначення планіметричних фігур (довільний трикутник, квадрат, рівнобедрений трикутник, тощо) та рівень зацікавленості до геометрії, до проведення курсу за вибором і після його проведення.

Експеримент проводився у вигляді анонімного анкетування. (Зразок анкети див. у додатку М)

Як показав експеримент, перед проведення курсу за вибором «Методи розв'язування стереометричних задач» рівень знань учнів методів розв'язування стереометричних задач був досить низьким, загалом учні з високим рівнем успішності знали 6-7 методів, а учні з меншим рівнем успішності – взагалі 2-3 методи, також в учнів були невеликі знання про те, скількома елементами однозначно можна визначити такі фігури як: прямокутний трикутник, рівнобедрений та рівносторонній трикутник, тощо. Учні під час вивчення математики обмежувались лише поясненнями вчителя та вивчали шкільний підручник, а для високого рівня знань математики недостатньо цих джерел.

Цей вид анкети був запропонований учням після проведення даного курсу. Результати показали, що учні з високим рівнем успішності оперували 12-15 методами розв'язування стереометричних задач, учні з менш успішним рівнем знань досягли результату 6-7 методів. Успішність такого результату пояснюється тим, що збільшився рівень зацікавленості учнів до геометрії, також робота під час вивчення нових, для учнів, методів сприяла тому, що учні працювали з додатковою літературою, а отже мали можливість познайомитись і з методами, які не подані в даному курсі.

Підсумовуючи результати педагогічного експерименту, можна сказати, що даний курс дає позитивні результати і може застосовуватись при вивченні геометрії в профільних класах.

ВИСНОВКИ

В дипломній роботі було перевірено та обґрунтовано гіпотезу дослідження і, підсумовуючи, можна сказати, що при застосуванні поданих у роботі методичних рекомендацій, при навчанні учнів профільної школи розв’язувати стереометричні задачі, і з врахуванням диференційованого підходу до навчання та особистісно-орієнтованого навчання, рівень знань учнів помітно покращиться.

Усі завдання дипломної роботи були успішно виконані. Аналіз результатів проведеного теоретичного та експериментального дослідження дає можливість зробити такі висновки:

- профільне навчання потребує цілеспрямованого формування учнівського колективу, розробки відповідного навчально-методичного забезпечення за кожним напрямом навчання, використання специфічних форм і методів роботи з учнями, що мають підвищену мотивацію до навчання, вимагає відповідної перепідготовки і підвищення кваліфікації вчителя, модернізації матеріально-технічної бази;

- було з’ясовано, що математичні задачі є найбільш яскравою характеристикою стану математичного мислення учнів, рівня їхньої математичної освіти, задача навчає учнів орієнтуватися в різних проблемних ситуаціях, збагачувати їх знання й досвід, вчити їх математичної діяльності;
- розроблені системи усних вправ для геометричних тіл покращать знання учнів геометрії і істотно розвинуть просторову уяву і просторове мислення;
- запропонована і використана в дослідженні методика проведення курсу за вибором відіграє істотну роль у формуванні високого рівня математичних знань, умінь і навичок учнів.
- методи та способи розв’язування геометричних задач повинні підвищити рівень знань учнів з математики, зокрема з геометрії;

- правильний підхід до процесу розв'язування геометричних задач повинне сприяти формуванню математичної культури та привити інтерес до математики, а також зробити цей процес цікавим.

На закінчення хочеться відзначити, що дана тема є актуальною і корисною.

Матеріал, який подано у роботі, може бути використаний вчителями математики та студентами для проведення занять з математики у профільних класах, а також для дослідження особливостей вивчення математики у профільних класах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Для 10-11 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. - М.: Просвещение, 1992.

2. Бевз Г. П. та ін. Геометрія: Підруч. для 10-11 кл. з поглибл. вивч. матем. в загальноосвіт. серед. закладах. - К.: Освіта, 2000.

3. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач. – К.: Радянська школа, 1989. – 192 с.

4. Бевз Г.П. Обобщения при решении задач с помощью векторов// Математика в школе. – 1978. – №2.

5. Белешко Д.Т., Гнедко Н.М. Геометрія: Навчальний посібник. – Рівне. РІСКСУ, 2006. – 75с.

6. Білицький О. Управління процесом розвитку особистості засобами варіативного компоненту змісту освіти / Директор школи. - 2002. - № 8. - С. 2-3.

7. Біляк Б., Дуда О. Профільне навчання в загальноосвітніх навчальних закладах // Директор школи, ліцею, гімназії. - 2003. - № 4. - С. 44-47.

8. Бродський Я., Павлов О., Сліпенко А., Хаметова З. Готуємо майбутніх математиків // Рідна школа. - 2000. - Травень. - С. 59-62.

9. Броневщук С. Г. Профильное обучение и единый государственный экзамен / www.minobr.sakha.ru

10. Бурда М. І., Жалдак М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М., Шкіль М. І., Ядренко М. Й. Програма поглибленого вивчення математики в 10-11 профільних класах // Математика в школі. - 2003. - № 6. - С. 19-25.

11. Василюк А., Жук О. Основна школа в системі європейської середньої освіти // Директор школи. Україна. - 2002. - № 1. - С. 50-58.

12. Вища освіта у Німеччині http://www.daad.de

13. Вычислительные машины и мышление/Под. ред. Э. Фейнбаума и Дж. Гельдмана. М. – Мир, 1967 .

14. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії: навч.-метод. посібник / В.Б. Полонський, Ю.М. Рабинович , М.С. Якір. - К. : Магістр-S, 1998. - 256 с.

15. Геометрия в задачах : пособие для учащихся школ и классов с углубл. теоретическим и практическим изучением математики / А.И. Фетисов. - М. : Просвещение, 1977. - 192 с.
16. Геометрія. 10 клас : дидактичні матеріали для різнорівневого навчання / А.М. Капіносов. - Дніпропетровськ : [б. и.], 1993. - 132 с.
17. Геометрія-це нескладно. Стереометрія. Ч.2 : навч.-метод. посібник. Довідник-задачник / О.Г. Гайштут, Г.М. Литвиненко. - К. : Магістр-S, 1997. - 128 с.
18. Геометрія: Стереометрія : підруч. для 10-11-кл. серед. шк. / О.В. Погорєлов. - 5-те вид. - К. : Освіта, 2001. - 128 с.
19. Голодюк Л.С. "Рівнева диференціація на уроках геометрії".
20. Гусев В.А., Колягин Ю.М., Луканкін Г.Л. Векторы в школьном курсе геометрии. М.: Просвещение, 1978, 48 с.
21. Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Фирсов В. В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. - 1990. - № 4. - С. 18-21.
22. Дунець Л., Дунець О. Формування професійних інтересів у майбутніх фахівців // Рідна школа. - 2001. - Січень. - С. 48-49.
23. Елементи стереометрії в курсі математики основної школи : навч. посіб. для студ. / Л. Філон, В. Швець. - К. : Вид. дім "Шкіл. світ" : Вид. Л. Галіцина, 2006. - 128 с.
24. Эльконин Д.Б. Интеллектуальные возможности младших школьников и содержание обучения. – В кн.: Возрастние возможности усвоения знаний/ под. ред Д.Б. Эльконина, В.В. Давыдова. – М.: Просвещение, 1966.
25. Жадько О.А. Проблеми становлення профільної освіти // Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Чернігів: РВВ ЧДПУ, 2004. – С. 59-61.
26. Жовнір Я.М. Позиційні задачі в стереометрії: Посібник для вчителя. – К.: Освіта, 1991. – 95 с.

27. Задания по геометрии для 9 и 10 классов : методическое пособие / И.В. Баум, К.Н. Брызгалов, Т.А. Горзий. - К. : Радянська школа, 1987. - 96 с.
28. Задачи по стереометрии: сборник задач / В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин. - М. : "Наука", 1989. - 288 с.
29. Задача. – В кн.: БСЄ. 3 -е изд.1972, т. 9.
30. Задача / Сост. Менчинская Н.А. – В кн.: Педагогическая энциклопедия. – М.: 1965, т.2.
31. Кабардін О. Профільна школа / Завуч. - 2002. - № 16. - С. 2-3.
32. Каминская И. Кошелёк тут ни при чём / www.ug.ru
33. Каменецький С.Е., Орехов В.П. Методик решения задач по физике в средней школе: Пособие для учителей. – М.: Просвещение 1971. – 448с.
34. Карпов Е. Н., //Профильная школа: опит норвежских коллег. http://pedvesti.uvuo.ru
35. Клопський В.М., Скопець З.А., Ягодовський М.І. Геометрия 9-10. – К.:Радянська школа, 1982. – 256 с.
36. Кобко Л.М. Використання аналогії під час вивчення стереометрії //Математика, №10 (262), березень 2004.
37. Колягин Ю.М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: Автореф. дис…д-ра пед.наук. – М., 1977, - 55 с.
38. Колягин Ю. М., Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е. Профильная дифференциация обучения математике // Математика в школе. - 1990. - №4. - С. 21-27.
39. Концепція профільного навчання в старшій школі / Освіта України. - 2003. - № 42-43. - С. 8-9.
40. Костюк Г.С. Психология: Пособие для студентов педвузов. – Киев: Радянська школа, 1968. – 527 с.
41. Концепція розвитку загальної середньої освіти / Освіта України. - 2000. - № 3. - С. 8-11.
42. Кремень В. Старша школа має перейти на профільне навчання / Освіта України. - 2002. - № 49. - С. 3.

43. Кравченко Р.Г., Скрипка А.Г. Основы кибернетики. – М.: Экономика, 1974. – 278 с.
44. Крутецький В.А. Психологія -М.: Просвещение, 1974, с.155, 160.
45. Ленчук І.Г. Графоаналітичний метод побудови зображень комбінацій куля-описана піраміда. http://eprints.zu.edu.ua
46. Леонтьев А.Н. Проблемы развития психики. – 3-е изд. – М.: Издательство МГУ, 1972. – 575 с.
47. Лернер П. Профільна освіта старшокласників: якою їй бути? / Завуч. - 2003. - № 14. - С. 6-7.
48. Лікарчук І. Проблема профілізації навчання в старшій школі та шляхи її розв'язання / Директор школи. - 2003. - № 20. - С. 9-10.
49. Мартищук О.І. Взаємно обернені, взаємно протилежні твердження та співвідношення між ними. –У кн.: У світі математики. Вип. 9, К., 1978.
50. Матізин Т. Новій державі - нову школу // Рідна школа. - 2000. - № 2. - С. 65-66.
51. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. / [Учеб. Пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов.] / Колягин Ю.М., Оганесян В.А., Саннинский В.Я., Луканкин Л.Г. – М.: Просвещение, 1975.
52. Методи розв'язання задач з геометрії : кн. для вчителя / І.А. Кушнір. - К. : Абрис, 1994. - 464 с.
53. Моторіна В.Г. , Методика вивчення геометричних побудов в курсі геометрії загальноосвітньої школи, Наукове видання: Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики в 3-х томах.Том 1. - 444с
54. Національна доктрина розвитку освіти.
55. Нелін Є.П. Геометрія в таблицях: Навчальний посібник для учнів старших класів.- Харків: Світ Дитинства, 1998.- 32с.
56. Олійник В. Дистанційне навчання - не розкіш, а шлях до... відкритої освіти / Освіта України. - 2002. - № 49. - С. 4.
57. Підручна М.В., Янченко Г.М. Диференційовані дидактичні матеріали з геометрії, 7, 8, 9, 10, 11 класи. – Тернопіль: "Підручники і посібники", 1998, 1999.

58. Петренко С. В., Мартиненко О. В. Особливості навчання математики в профільній школі / Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції. - Чернігів: РВВЧДПУ, 2004. - С. 63-66.

59. Пойя Дж. Математика и правдоподобие рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 464 с.

60. Пустовая Є. Профорієнтація: проблеми, досвід, перспективи / Завуч. - 2003.- № 9. - С. 2-3.

61. Реморенко И. Моя профильная школа / Україна. Огляд. - 2003. - Травень. - С. 12.

62. Розв'язування геометричних задач : книжка для вчителя / М.І. Антоненко. - К. : Радянська школа, 1991. - 128 с.

63. Російський досвід профільного навчання http://zdosvita.at.ua

64. Савин А., Инверсия и задача Аполлония // kvant@mccme.ru

65. Сборник задач на геометрические преобразования: пособие для учащихся / Г.И. Саранцев. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Просвещение, 1981. - 112 с.

66. Скарбич С.Н. Задачи исследовательского характера в личностно-ориентированном обучении планиметрии. //Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета». www.omsk.edu

67. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. - К.: Зодіак-ЕКО, 2000. - 512 с.

68. Стереометрія у старшій школі [посібник для вчителя] / Я.С. Бродський, В.Ю. Гренчук, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко – Богдан, 2005. – 404 с.

69. Тимошенко Н. М. Початкові поняття стереометрії / Математика. - 2003. - № 48. - С. 6-8.

70. Тулькибаєва Н.Н., Усова А.В., «Методика обучения учащихся умению решать задачи» - Челябинск, 1981.

71. Филатова Л.О., Профильное обучение в зарубежных странах //Экономический вестник Ростовского гсударственного университета. Том 3, №1 2005 год.

72. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьних учебних задач. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.

73. Фридман Л.М., Турецький Е.Н., Как научиться решать задачи – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1984 – 178 с.

74. Человек и вычислительная техника / Под. ред. В.М. Глушкова. – Киев: Наукова думка,1971. – 294.

75. Черних Л.В. "Диференційований підхід у навчанні математики". Газета "Математика" №12, 2003.

76. Чада Б. Развивать алгоритмическую культуру учащихся // Математика в школе №2, 1983., с.62-63.

77. Швець В.А. Поиск решения задач на вычисление в курсе стереометрии.// Математика в школе №10, 1990.

78. Якиманськая И.С. Развивающее обучение. – М. : Педагогика, 1979, - 144 с.

ДОДАТОК А

Це треба знати

1. Визначення:
   - паралельних і прямих що перетинаються;
   - прямої, паралельної площині;
   - паралельних площин.
2. Формулювання й доведення:
   - теореми про паралельні прямі;
   - ознаки паралельності прямої і площини;
   - ознаки паралельності площин;
   - теорем про паралельні площини.

Ви повинні вміти застосовувати цю теорію в розв’язанні задач!

ДОДАТОК В

Задачі мінімально обов'язкового рівня

Паралельність прямих

1. Точки *M, K, P, T* – середини відповідно відрізків *DB, DC, AC, AB* тетраедра *ABCD*. Знайдіть периметр чотирикутника *MTPK*, якщо *AD* = 12 см, *BP* = 14 см.

2. Пряма *EP*, що не лежить у площині паралелограма *ABCD*, паралельна стороні *AB* цього паралелограма. З'ясуєте взаємне розташування прямих: *EP* й *CD*, *EP* і *BP*, *AC* й *EP*, *BP* й *PD*.

3. Прямі *a* й *b* перетинаються. Доведіть, що всі прямі, паралельні прямій а й ті що перетинають пряму *b*, лежать в одній площині.

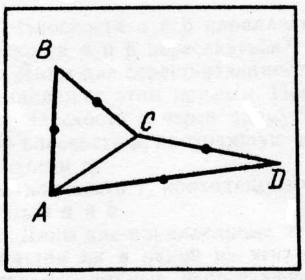
4. Доведіть, що середини просторового чотирикутника є вершинами паралелограма (див. мал. 52).

Паралельність прямої і площини

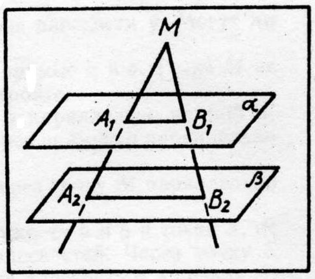
1. Точка *M* не лежить у площині прямокутника *ABCD*. Доведіть, що *CD* паралельно площини *ABM*.

2. Доведіть, що через кожну із двох прямих що перетинаються можна провести площину, паралельну іншій прямій.

3. Сторона *AC* трикутника *ABC* паралельна площині *a*, а сторони *AB* і *BC* перетинаються із цією площиною в точках *M* і *P*. Доведіть, що трикутники



Мал. 52



Мал. 53

ABC і *MBP* подібні.

Паралельність площин

1. Площини α і β паралельні, точка *M* не лежить у цих площинах, точки A_1 і B_1 належать площині α, A_2 й B_2 – площині β (див. мал. 53). Обчисліть A_2M й B_2M, якщо $A_1A_2=2A_1M$, A_1A_2=12 см, B_1M=5 см.

2. Паралельні відрізки A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 укладені між паралельними площинами α і β (див. мал. 54). Визначте вид чотирикутників $B_1C_1C_2B_2$, $A_1B_1B_2A_2$ й $A_1C_1C_2A_2$ й доведіть, що трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ рівні.

3. Площини α і β паралельні площині φ. Чи можуть площини α і β перетинатися?

ДОДАТОК С

Задачі обов'язкового рівня

Паралельність прямих

1. Через кінці відрізка *AB* і його середину *M* проведені паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1, M_1. Знайдіть довжину відрізка MM_1 якщо відрізок *AB* не перетинає площина і якщо AA_1=5 м, BB_1 = 7 м,

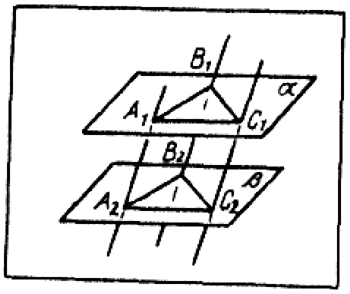
2. Розв’яжіть попередню задачу за умови, що відрізок *AB* перетинає площина.

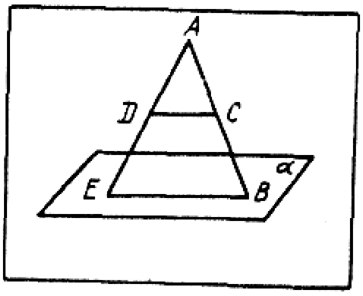
3. Через кінець *A* відрізка *AB* проведена площина. Через кінець *B* і точку *C* цього відрізка проведені паралельні прямі, що перетинають

площину в точках B_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо CC_1=15 см, $AC:BC=2:3$.

Паралельність прямої і площини

1. Точка *B* лежить у площині *α,* відрізок *CD* паралельний цій площині, *CD*=12 см, *AB:CB*=4:3 (див. мал. 55). Доведіть, що пряма *AD* перетинає площину α в деякій точці *E,* і знайдіть відрізок *BE.*





Мал. 54 Мал. 55

2. Дано дві прямі, що перетинаються. Як провести через них дві паралельні площини?
3. Через дану точку простору проведіть пряму, що перетинає кожну із двох прямих, що перетинаються.

Паралельність площин

1. Дано точки *A, B, C* и *D,* що не лежать в одній площині. Доведіть, що будь-яка площина, паралельна прямим *AB* й *CD,* перетинає прямі *AC, AD, BD* і *BC* у вершинах паралелограма.

2. Через середини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, що виходять із вершини D_1, проведена площина α. Доведіть, що *a*||*ABD.* Знайдіть периметр перетину, якщо діагоналі трьох нерівних граней мають довжини 26, 28 й 30 см.

3. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведені площина, паралельна площині AB_1D_1. Побудуйте перетин і знайдіть його площу, якщо *AB*=12 см, α проходить через середину відрізання A_1B_1.

4. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середини ребер AA_1 й AD і точку $K=BC_1 \cap B_1C$ проведена площина α. Побудуйте перетин і знайдіть його площу, якщо AD=12 см, AA_1= 16 см, AB=6 см.

ДОДАТОК D

Творчі задачі

1. AB_1C — перетин правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Через відрізок, що з'єднує середини ребер AA_1 й B_1C_1, проведіть перетин, паралельний стороні AC. Доведіть, що цей перетин паралельнbq перетину AB_1C, а також визначте бічне ребро й сторону основи призми, якщо периметри перетинів — 19 і 26 см.

2. AB_1C — перетин правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через відрізок, що з'єднує середини ребер AA_1 й B_1C_1, проведіть перетин, паралельний стороні AC. Доведіть, що цей перетин паралельний перетину AB_1C.

3. У правильній трикутній піраміді $SABC$ через вершину C и середину ребра SA проведіть перетин піраміди, паралельний SB. На ребрі AB узята точка F так, що $AF:FB$=3:1. Через точку F і середину ребра SC проведена пряма. Чи буде ця пряма паралельна площині перетину?
4. У правильній трикутній піраміді $SABC$ через відрізки AD і CE, де D — середина SB, а E — середина SA, проведіть перетини піраміди, паралельні між собою, і знайдіть відношення їх площ.
5. AB_1C — перетин прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки E, F, K, які є відповідно серединами ребер DD_1, A_1D_1, D_1C_1, проведений другий перетин. Доведіть, що трикутники EFK й AB_1C подібні, і встановіть, які кути цих трикутників рівні між собою.
6. У правильній трикутній призмі $ABC\ A_1B_1C_1$ через діагональ AC_1 і перпендикуляр BD до сторони AC проведіть перетини, паралельні між собою. Визначте периметри трикутників, отриманих у перетинах, якщо їхні сторони, що лежать проти рівних кутів, рівні 3 і 5 см.

7. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$через відрізки CD й A_1E, де D — середина AA_1, а E — середина AB, проведіть перетини призми, паралельні між собою. Визначте відстані між вершинами рівних кутів цих перетинів, якщо сторона основи призми дорівнює a, а бічне ребро b.
8. Дано дві паралельні площини α і β. Катет AC прямокутного трикутника ABC $(\angle C=90°)$ лежить у площині β, а вершина B — у площині α. Через вершину C и точку D, що ділить AB у відношенні 5:2 (від A до B), проведена пряма, що перетинає площину α в точці F. Визначте CF, якщо AB=12 см, BC=8 см.
9. Із точки A-площини α проведені до паралельної їй площини β відрізки AB=11 см, AC=12 см. Через точку C проведена пряма, паралельна AB і площина, що перетинає, α в *точці* D. Визначте відстань між точками B і D, якщо відстань між точками A і D дорівнює 7 см.
10. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого AB=30 см, AD=24 см. У паралелепіпеді проведений відрізок EF, де E — середина AD, а F — середина A_1B_1, і на відрізку EF узята точка M так, що $EM:MF$=3:5. Через вершину A и точку M проведена пряма, що перетинає площину основи $A_1B_1C_1D_1$ у точці K. Визначте відстань B_1K.

ДОДАТОК Е

Задачі до другого уроку

1. Площини α і β паралельні площині γ. Чи можуть площини α і β перетинатися?

2. Дано дві прямі, що перетинаються α і β. Точка M не належить цим прямим. Побудуйте:

а) площину α через пряму b паралельно прямій a;

б) площина β, що проходить через пряму a паралельно площині α;

в) площина γ, *що* проходить через точку M паралельно прямим a і b.

3. Дано дві паралельні площини α і β і точка S, не лежача в жодній із цих площин. Через точку S проведені прямі, що перетинають площину α в точках A_1 і B_1**,** площина β у точках A_2 й B_2. Знайдіть A_2S *s* B_2S, якщо A_1A_2=2*A1S*, A_1A_2=12 см, B_1S—*5* см.

ДОДАТОК F

Завдання до уроку-заліку

Варіант 1.

1. Ознака паралельності прямої і площини.

2. Пряма *EP*, що не лежить у площині паралелограма *ABCD*, паралельна стороні *AB* цього паралелограма. З'ясуєте взаємне розташування прямих – *EP* й *CD*, *EP* і *BP*, *AC* й *EP*, *BP* й *PD*.

3. У чотирикутній піраміді *SABCD* проведіть перетин площиною, що проходить через середину *AB* паралельно грані *SAD*.

4. Побудуйте перетин правильної чотирикутної піраміди площиною, що проходить через центр основи піраміди паралельно бічній грані.

Варіант 2.

1. Ознака паралельності площин.

2. Доведіть, що середини просторового чотирикутника є вершинами паралелограма.

3. У трикутній піраміді *SABC* проведіть перетин площиною, що проходить через середину *BP* паралельно грані *SAB*.

4. Побудуйте перетин правильної трикутної піраміди площиною, що проходить через точку перетину медіан бічної грані паралельно якій–небудь бічній грані.

Варіант 3.

1. Теорема про перетин двох паралельних площин третьою.

2. Точка *M* не належить площині прямокутника *ABCD*. Доведіть, що *CD* паралельно площині *ABM*.

3. У чотирикутній піраміді *SABCD* проведіть перетин площиною, що проходить через середину бічного ребра *SA* паралельно основі *ABCD*.

4. Побудуйте перетин правильної чотирикутної піраміди площиною що проходить через точку перетину медіан бічної грані паралельно протилежній бічній грані.

Варіант 4.

1. Теорема про відрізки паралельних прямих, вкладених між паралельними площинами.

2. Доведіть, що через кожну із двох прямих що перетинаються можна провести площину, паралельну іншій прямій.

3. У трикутній піраміді *SABC* проведіть перетин площиною, що проходить через середину *BP* паралельно грані *SAB*.

4. Побудуйте перетин правильної трикутної піраміди площиною, що проходить через середину висоти піраміди паралельно бічній грані.

ДОДАТОК G

Задачі до рівневої контрольної роботи

Варіант 1.

Обов'язкові задачі.

1. У тетраедрі *SABC* через середину ребра *SA* проведені площина α паралельно площині *SBC*. Побудуйте перетин і знайдіть його площу, якщо довжина кожного ребра тетраедра – 6 см.

2. Площини *M* и *H* паралельні між собою. Як розташована пряма *b* щодо площини М, якщо вона має із площиною М спільну точку й не перетинає площину *H*.

Задачі на "4"..

Через вершину A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена площина α паралельно площині CBD_1. Побудуйте перетин куба площиною α й знайдіть його площу, якщо ребро куба – 2 см.

Задачі на "5".

Дано прямокутний паралелограм, у якого *AB*=30 см, *AD*=24 см. У паралелограмі проведіть відрізок *EH*, де *E* – середина *AD*, *H* – середина A_1B_1, і на відрізку *EH* візьміть точку *M* так, що *EM*:*MH*=3:5. Через вершину *A* і точку M проведіть пряму, що перетинає площину основи $A_1B_1C_1D_1$, у точці К. Визначте, відстань B_1K.

Варіант 2.

Обов'язкові задачі.

1. Чи правильне твердження: "Дві прямі, паралельні однієї площини, паралельні між собою"?

2. У тетраедрі $ABCD$ через середину DC проведені площина α паралельно площині ABD. Побудуйте перетин і знайдіть його площу, якщо AD=DB=10 см.

Задачі на "4".

Побудуйте перетин трикутної піраміди площиною, що проходить через центр основи паралельно бічній грані. Обчисліть периметр перетину, якщо кожне ребро піраміди дорівнює 2 см.

Задачі на "5".

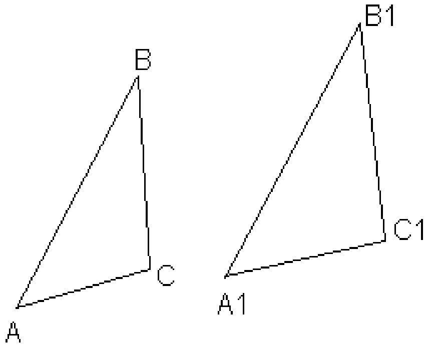
AB_1C – перетин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через відрізок, що з'єднує середини ребер AA_1, B_1C_1, проведіть перетин α паралельно AC. Доведіть, що цей перетин паралельний перетину AB_1C. Обчисліть периметр побудованого перетину.

ДОДАТОК J.

Подібні трикутники.

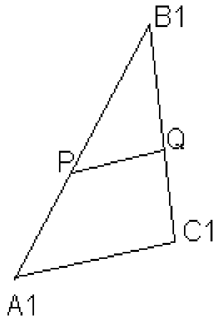
Довідкова таблиця 1.

1.Перша ознака подібності



$$\frac{\text{/\_A=/\_A1} \quad \text{/\_C=/\_C1}}{\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$$

2. Задача



$$\frac{PQ \parallel AB}{\Delta ABC \sim \Delta PQC}$$

3. Властивості сторін і кутів

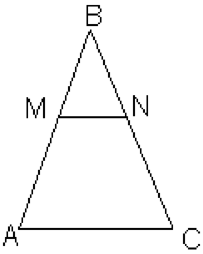
$$\frac{\Delta \widehat{ABC} \sim \Delta \widehat{MNK}}{}$$

1. $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK}$ 2. /_A=/_M, /_B=/_N, /_C=/_K

4. Властивості площин

$$\frac{\Delta ABC \sim \Delta MNK}{\frac{S\ \Delta ABC}{S\ \Delta MNK} = \frac{AB^2}{MN^2}}$$

5. Пропорційні відрізки (задачі)



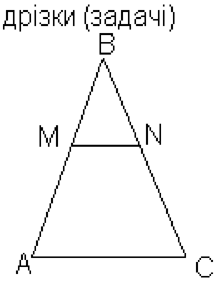
$$\frac{MN \parallel AC \quad \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}}{\frac{MA}{MB} - ?}$$

Розв'язання:

1) $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$, це означає, MB=2k, MA=3k,

AB=5k і $\frac{MA}{MB} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$

Відповідь: $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$



$$\frac{MN \parallel AC \quad \frac{BC}{CN} = \frac{5}{7}}{\frac{MN}{AC} - ?}$$

Розв'язання:

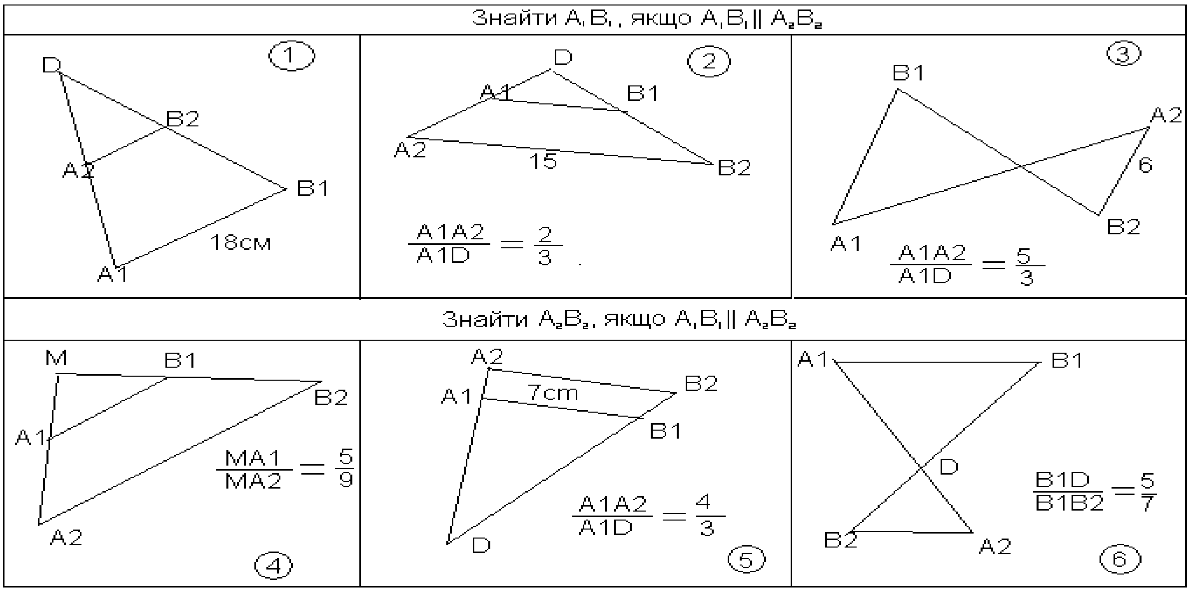
1) $\frac{BC}{CN} = \frac{5}{7}$ це означає, BC=..., CN=...,

BN=...., $\frac{BN}{BC} =$ .... .

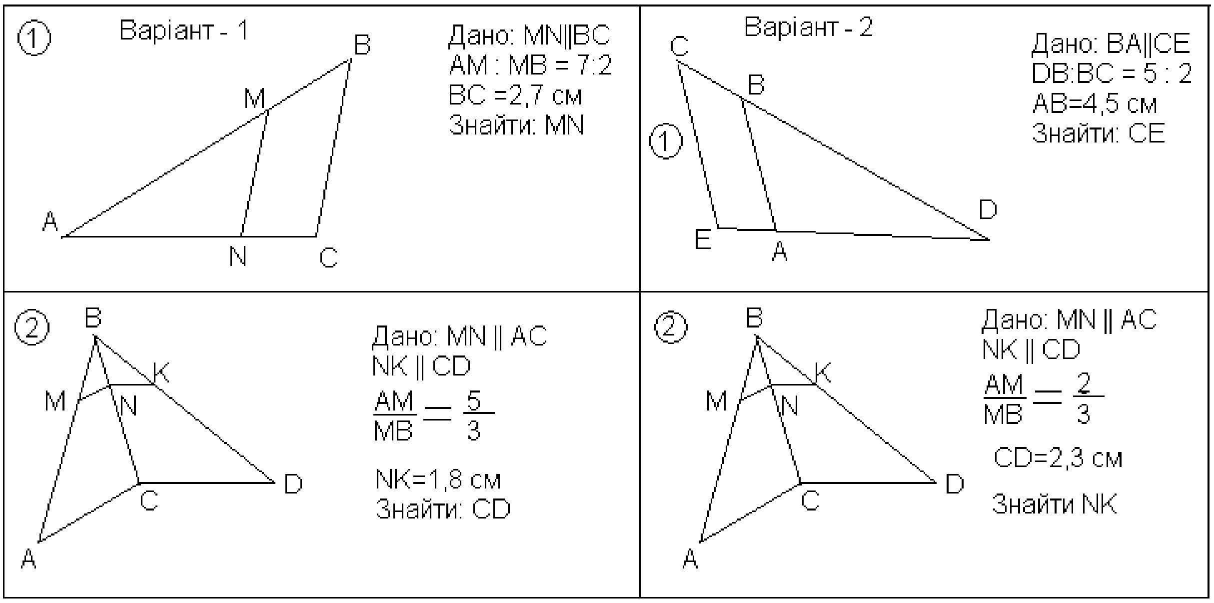
2) Так як $\Delta ABC \sim \Delta MBN$, то $\frac{MN}{AC} =$ ....

Відповідь: $\frac{MN}{AC} =$ ....

Вправи для тренування 1



Контрольна робота 1



Summary to the Master's Degree Work

For obtaining an educational qualification level "Master"

on the topic:

"Methodological peculiarities of studying geometry in profile school (academic level)"

Done by six-year student of the Faculty of Mathematics and Informatics

Specialty 014 Secondary education (Mathematics) Tiiara M.R.

Academic advisor – Candidate of Pedagogical Sciences, Professor D.T.Beleshko

Master's Degree Work consist of the introduction, three sections, conclusions, list of used literature, attachments.

The topicality of the work is the reform of the school transition to profile education, led to a contradiction between the new content of the course of geometry and the urgency of the need to develop its methodology of study.

The aim of the work study is to theoretically substantiate and experimentally test the teaching methodology of students of the profile school to solve geometric problems.

The object of the work the process of teaching students of the profile school to solve geometric problems.

The subject of the work

The novelty of the work is that is specifies the features of studing the course of geometry in profile classes.

The practical significance of the study can be used by mathematics teachers to conduct classes in mathematics in profile classes, to study and apply methods to solve stereometric problems, as well as to implement a project on the creation and testing of a methodological complex for teachers of mathematics in profile groups of students.