ЗМІСТ

ВСТУП

Важливим засобом і метою навчання математиці є розв’язування задач. Математичні задачі виконують ряд функцій освітнього, виховного та розвиваючого характеру. Вони є ефективним та часто незамінним засобом засвоєння учнями понять та методів шкільного курсу математики. Справді, розв’язок задач в сучасних методичних дослідженнях розглядається як ефективний засіб формування в учнів системи основних математичних знань, умінь і навичок, математичних методів дослідження, як важливої форми діяльності учнів в процесі вивчення математики, як засіб їх математичного розвитку. Загально прийнятим є те, що від ефективного застосування задач в навчанні учнів математиці залежить ступінь їх підготовки до практичної діяльності в будь-якій сфері людської діяльності.

Одним з шляхів покращення практичного напрямку викладання математики є формування різних методів розв’язування задач, які відіграють важливу роль в практичній діяльності і особливо важливі в практиці шкільного викладання.

Особливої уваги потребує навчання розв’язуванню геометричних задач . Тому що від цього залежить не тільки засвоєння геометрії на даному етапі, але й результативність їх навчальної та трудової діяльності в старших класах, після закінчення школи.

Однак аналіз практики навчання розв’язуванню геометричних задач показує, що не дивлячись на постійне удосконалення форм і методів роботи вчителів, в уміннях учнів розв’язувати геометричні задачі є прогалини. Значна частина школярів має недостатнє уявлення про структуру задач, їх класифікацію, зміст і механізм розв’язування.

Актуальність теми. За останні роки у соціальному житті суспільства відбулися значні зміни, що вимагають перегляду системи освіти. Переорієнтовують її *у* бік демократизації та гуманізації освіти, яка спрямована на виховання, перш, за все, особистості, функціонально грамотної і методологічно компетентної, яка володіє інформаційними технологіями, здатна адаптуватися до навколишнього середовища, до аналізу і самоаналізу, до свідомого вибору і до відповідальності за нього. Метою зміни системи освіти є, перш за все її орієнтація на учнів, на задоволення їх індивідуальних освітніх потреб.

Важливу роль при реалізації аспектів реформи зобов'язані зіграти задачі. Дійсно, розв'язування математичних задач в сучасних методичних дослідженнях розглядуються як ефективний засіб формування у школярів системи основних математичних знань, умінь і навичок, математичних методів дослідження, як важлива форма, діяльності учнів у процесі вивчення математики, як засіб їх математичного розвитку. Ефективність застосування задач у навчанні школярів математиці, озброєння учнів методами та способами розв'язування задач, навчання їх самостійного пошуку розв'язків задач - одна з важливих проблем шкільної математичної освіти.

Різні аспекти поняття "задача" і взагалі "математична задача" частково досліджувалися в роботах таких авторів: Ю.М. Колягина, Ф.Ф.Нагибина, Д.Пойа, А.А.Столяра, І.Ф.Тесленко, І.М.Фридмана, П.М.Эрдниева, З.І Слєпкань, Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, М.І. Бурда, І.Ф. Тесленко, І.Ф. Шаригін і інших.

Розв’язуванню навчальних геометричних задач належить одна з провідних ролей у процесі навчання геометрії. За останні десятиріччя відбулося значне розширення і усвідомлення значущості цілеспрямованої діяльності з розв’язування навчальних геометричних задач, що знайшло свій прояв в успішній реалізації різнобічних функцій навчання геолметричних задач : освітніх, політехнічних,виховних, розвивальних та ін.

Розв’язування навчальних геометричних задач та відповідна діяльність студентів вже не обмежується розглядом лише сформульованих задач у численних збірниках та посібниках, а стає поряд із спеціальним цілеспрямованим самостійним складанням задач; предметом реалізації задачного підходу у викладі та поясненні навчального матеріалу, при роботі з підручником.; об’єктом спеціального вивчення та аналізу як системи з певною структурою.

Одне з найважливіших завдань навчання геометрії – формування вмінь розвязувати задачі. Систематичне розвязування задач сприяє розвитку мислення студентів, їх підготовки до творчих пошуків, виховує працелюбність, наполегливість, волю, цілеспрямованість та є хорошим засобом контролю за знаннями, цілями та навичками.

Мета дослідження – полягає у тому, щоб теоретично обґрунтувати методику навчання студентів розв’язувати планіметричні та стереометричні задачі.

Об’єктом дослідження є навчально-виховний процес навчання студентів розв’язувати стереометричні та планіметричні задачі.

Предметом дослідження зміст навчання розв'язуванню навчальних стереометричних та планіметричних задач та відповідної навчальної діяльності студентів у вищих навчальних закладах.

Гіпотеза дослідження

Використання розробленого методичного забезпечення на заняттях спецкурсу сприяє більш свідомому володінню системою знань, вмінь та розв’язуванню геометричних задач, розвиток математичного мислення, творчої активності та пізнавальної самостійності.

Мета та висунута гіпотеза визначили **<u>основні завдання дослідження</u>:**

- ✓ аналіз літератури з теми дослідження;
- ✓ проаналізувати особливості змісту навчального матеріалу при вивченні спецкурсу «Розв’язування планіметричних та стереометричних задач»;
- ✓ розглянути класифікацію стереометричних задач;
- ✓ з'ясувати поняття «задача» у психолого-педагогічній літературі;

Методи дослідження. Використовувалися такі методи:

системний аналіз, порівняння, узагальнення даних з проблеми дослідження на основі вивчення наукової психолого-педагогічної літератури;

вивчення наукових праць філософів і математиків з методології наукового пізнання, навчальної і методологічної літератури;

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що обґрунтовано концепцію підготовки навчання студентів розв'язувати планіметричні та стереометричні задачі; обґрунтовані місце і роль математичних задач у навчально-виховному процесі з математики.

Теоретична значимість основних положень роботи полягає в тому, що вони є ефективними для подальших концептуальних положень та стратегій розвитку методики навчання математики у вищих навчальних закладах.

Практичне значення одержаних результатів полягає у розробці рекомендацій щодо підвищення ефективності використання задач у розв’язанні проблем математичної освіти;

РОЗДІЛ 1. ЗМІСТ ТА СТРУКТУРА ЗАДАЧІ.

1.1. Поняття «задача» у методиці навчання розв’язання геометричних задач

Щоб правильно розв’язати різні питання методики геометричних задач, слід виходити з досить обґрунтованих загальних принципових положень. Одне з таких положень полягає в тому, щоб завжди враховувати, що таке геометрична задача і що означає розв’язати геометричну задачу. У літературі з психології і педагогіки немає єдиного трактування поняття “задача”. Автори по-різному тлумачать це поняття – залежно від підходу до зв’язку між суб’єктом і задачею. У кібернетиці, дидактиці і методиці навчання математики задача трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка пропонується у відриві від суб’єкта діяльності. Тому здебільшого задача тут трактується як будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних відношень, або запитання, рівносильне такій вимозі.

Історія розвитку методичних ідей у галузі вивчення математики знає чимало спроб означення поняття задачі. Розглянемо деякі з них.

Відомий російський математик С.О.Шатуновський відзначав, що задача – виклад вимоги “знайти” за “даними” речами інші, “шукані” речі, що перебувають одна з одною і з даними речами в зазначених співвідношеннях. Розв’яснюючи це означення С.О.Шатуновський говорить, що в кожній задачі розглядаються два класи речей. Речі першого класу дані, зазначені, відомі, доступні спогляданню, розумінню або уявленню. Вони перебувають у нашому розпорядженні, ми їх знаємо, можемо уявити і т.д. Речі другого класу не дані, не відомі, не зазначені. Вони повинні бути знайдені, визначені. Розв’язування задачі і полягає в переведенні речей з другого класу в перший. Потім С.О.Шатуновський уточнює, що це переведення слід розуміти як зведення до певних постулатів. Пропозиції, якими встановлюються ті факти, обставини або умови, при наявності яких шукана річ стає даною, називаються постулатами, що лежать в основі розв’язування певної задачі або певної групи задач, розглядуваних в тій або іншій дисципліні (ці постулати можна назвати логічними засобами розв’язування).

В.М.Брадіс, аналізуючи означення задачі, запропоноване С.О.Шатуновським , зазначає, що воно не повне, бо під нього не підходить багато задач на доведення. І це правильно. Можна додати, що під нього не підходять і деякі інші види задач, наприклад задачі-запитання.

В.М.Брадіс пропонує і своє означення задачі. Він вважає що під задачею слід розуміти всяке математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення одного якогось результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу. [6,стр.60]

У кожній задачі щось дано і щось треба знайти. Те, що дано в задачі, називається її умовою, а те, що треба знайти – вимогою. Виконати поставлену в задачі вимогу – це й означає розв’язати її.

Задачі у навчанні математики є і об’єктом вивчення, і засобом навчання. Звичайно виділяють чотири основні їх функції – навчальна, розвивальна, виховна і контролююча.

Навчальна функція спрямована на формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах навчання. Через систему задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й переконуються на етапі мотивації у потребі здобуття нових знань. В процесі розв’язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи розв’язування.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення школярів, на формування в них розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо.

Виховна функція спрямована на формування в учнів наукового світогляду, сприяє екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю, відповідальність за доручену справу та ін.).

Контролююча функція задач спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом вцілому.

Жодна із названих функцій не може виступати ізольовано від інших, але в кожній конкретні задачі вчитель має виділяти провідну функцію і за належної цільової установки домагатися її реалізації в першу чергу. Кожна з основних функцій задач важлива в загальній системі навчання, але останніми роками особлива увага приділяється розвивальній функції. Не випадково Д.Пойа (1887-1985) зазначав, що задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються. [48, стр.26]

Математичні задачі умовно поділяють на чотири види відповідно до їхніх вимог: задачі на обчислення, доведення, дослідження і побудову.

У задачах на обчислення потрібно виразити величини (відрізки, кути, площі, об’єми) або їх відношення через відомі параметри. Якщо параметри дані в загальному вигляді, то результат отримаємо в буквах; коли ж умова містить числові значення параметрів, відповідь доводиться до числа.

Іноді умова буває така, що потрібно спочатку розв’язати задачу в загальному вигляді, а потім підставити в отриманий вираз значення параметрів. Але часом, незалежно від вимог умови, задачу доцільно розв’язати в загальному вигляді. Таким чином, розв’язання “в буквах” і “в числах” не протиставляються одне одному, вони є лише двома формами подання невідомих величин через відомі.

У завданнях на доведення необхідно встановити наявність певних співвідношень між елементами розглянутої фігури: рівність чи нерівність відрізків, кутів, паралельність або перпендикулярність прямих, площин і т.д.

Менш поширені задачі на дослідження. У таких вправах результат заздалегідь не повідомляється. Потрібно виявснити, чи лежить певна точка на даній прямій (на даній площині), чи перетинаються дані кола, чи паралельні дані прямі, з'ясувати який з даних відрізків більший, до якої із сторін трикутника ближче дана точка. Встановити залежність між перерахованими в умові елементами фігури.

В задачах на побудову невідомі величини визначаються в результаті виконання ряду геометричних побудов (за допомогою допустимих геометричних інструментів або в обумовленій проекції). Як правило, мова йде про побудову геометричної фігури за деякими даними про неї.

Крім названих трьох груп, в школах використовують задачі на моделювання. На уроках або в якості домашнього завдання учні повинні із вказаних матеріалів виготовити модель вказаної фігури.

Приступаючи до розв'язування задачі, треба вибрати метод.

Методи поділяють:

а) за структурою – синтетичний, аналітичний, від супротивного тощо;

б) за використанням математичного апарату – алгебраїчний, векторний, координатний, метод геометричних перетворень тощо.

Однією з найважливіших проблем шкільної математичної освіти є озброєння учнів методами і способами розв'язування задач, навчання самостійного пошуку розв'язування задач. Методи і способи розв'язування задач визначаються як характером самих задач, так і тими знаннями і допоміжними засобами, котрими учні володіють на даному етапі навчання.

У дослідженнях останніх років психологи, дидактики і методисти переконливо показали, що уміння школярів розв'язувати задачі прямо не залежить від кількості розв'язаних задач. Якщо навіть учень розв'язав багато задач, але в нього не сформований загальний підхід до задачі, аналізу її, пошуку плану розв'язування, самостійно розв'язувати задачі він не зможе.

1.2. Класифікація задач

Розв'язування математичних задач є найбільш важкою частиною діяльності школярів при вивченні математики, навчання студентів цьому виду діяльності займає одне з головних місць в загальному процесі навчання. Школярів навчають математиці не тільки тому, щоб вони оволоділи певною сумою математичних знань, але й щоб ці знання вони могли ефективно використовувати в своєму подальшому житті для розв'язування різноманітних задач, що виникають в практичній діяльності. Засвоїти ж математичні знання і навчитися їх застосовувати можна, лише вирішуючи задачі, використовуючи при цьому поняття, теореми, залежності в різних ситуаціях.

Найбільш прийнятним нам представляється визначення, дане Л. Л. Гурової: «Задача – об'єкт розумової діяльності, що містить вимогу деякого практичного перетворення або відповіді на теоретичне питання за допомогою пошуку умов, що дозволяють розкрити зв'язки (відносини) між відомими і невідомими її елементами»[11, с.16].

У дослідженнях процесу навчання важливим є діяльнісний підхід. При організації процесу навчання студентів розв'язуванню математичних задач, вчитель в першу чергу стикається з такими питаннями: задачі якої складності запропонувати студентам; чи знайомі школярі з тими діями, які потрібно застосувати при розв'язуванні задач; чи володіють вони відповідними прийомами розумової діяльності і т.д. А це означає, що на озброєнні вчителя повинна бути ясна типологія задач, яка направляла б його при дозволі цих питань, при навчанні задач, що вчаться розв'язуванню. Крім того, «певна типологія задач може мати важливе практичне значення для тієї людини, яка при розв'язуванні задачі могла б організувати свою роботу, спираючись на ці відомості» [51, с. 39].

Дуже часто зустрічається ділення задач на обчислення, на доведення, на побудову, на дослідження і вивчається кожен вид. Перший тип задач характеризується тим, що часто геометричними міркуваннями і за допомогою алгебраїчних й арифметичних співвідношень дані про шуканий елемент доводить до числа. Другий тип задач характеризується тим, що, розв’язуючи їх, часто геометричними міркуваннями послідовно перетворюють умову задачі, наближаючи її до висновку, і встановлюють справедливість цього висновку або, навпаки, вважаючи висновок задачі правильним, наближаючи його в результаті послідовних перетворень до умови і стверджують її. Третій тип задач характеризується тим, що зміст їх не вичерпується переліком даних величин і формулювання того, що треба знайти. Тут істотне значення має вказівка на ті засоби, за допомогою яких задача розв’язуватиметься, на ті інструменти, якими виконуватиметься побудова шуканої фігури, бо від цього може змінюватися спосіб розв’язування задачі. Задачі четвертого типу найбільш споріднені із задачами на доведення, але відрізняються від них насамперед тим, що умови не містять готової відповіді. Розв’язуючи їх, студенти повинні встановити, чи рівні між собою дані фігури або їх окремі елементи, чи паралельні дані прямі лінії. Очевидно, що таке ділення не може бути інструментом в навчанні школярів розв’язуванню задач хоч би тому, що задачі цих видів не відрізняються один від одного рівнем складності, характером діяльності людини по їх розв’язуванню. У задачах на обчислення, побудову, дослідження найчастіше доводиться багато доводити; у задачах на обчислення, доведення і побудову доводиться багато досліджувати і т.д. Не покращує справи і назва цих видів задач іншими словами: задачі на розпізнавання, на конструювання, на пояснення і доведення і ін.

Окрім цього, ділять задачі на правильні, задачі з суперечливими даними, задачі із зайвими даними і розглядають методику навчання студентів розв’язуванню таких задач. Також ділять задачі на теоретичні і практичні, стандартні і нестандартні; задачі з дидактичними функціями, з пізнавальними і розвиваючими функціями і т.д [42, с. 47].

Розглядаючи задачі як об'єкти розумової діяльності студентів, важливо враховувати характер зв'язків між елементами задачі, співвідношення між відтворюючою і творчою діяльністю студентів при рішенні задач, яке багато в чому визначається вказаним зв'язками. Таким чином, ми ділимо математичні задачі на наступні три типи: 1) алгоритмічні задачі; 2) напівалгоритмічні задачі; 3) евристичні задачі.

До алгоритмічних задач ми відносимо такі задачі, які розв'язуються за допомогою безпосереднього застосування визначення, формули, доведеної теореми, для розв’язування яких є алгоритм, і на базі вивчених теоретичних положень і засвоєних практичних прийомів діяльності ці задачі необхідно вирішувати за допомогою алгоритму.

Алгоритм характеризується наступними істотними рисами: детермінірованість, масовість, результативність. Оскільки задача розглядаються нами в системі «задача – людина», а не в системі «задача – машина», то і підхід до алгоритмів тут повинен бути іншим. Людина мислить не такими елементарними операціями, які потрібні при складанні програм для машини. Зайве дроблення матеріалу психологічно і педагогічно недоцільно. Тому в дидактиці і психології говорять про ослаблення поняття алгоритму, замінюючи його поняттям «розпорядження алгоритмічного типа»; операції, що входять в такі розпорядження, можуть бути достатньо складними, але такими, що розуміються без праці виконавцем.

Відразу обмовимося, що підхід до типів задач повинен бути діалектичним. Є задачі, які не можна раз і назавжди віднести до алгоритмічних. Таке віднесення повинне враховувати багато моментів. Наприклад, до алгоритмічних задач ми не відносимо (з учбовою метою) ті задачі, для розв’язування яких можна побудувати алгоритм, але які недоцільно вирішувати за допомогою цього алгоритму, недоцільно знайомити студентів з даним алгоритмом з огляду на те, що і алгоритм складний, і клас учбових задач, що вирішуються з його допомогою, дуже малий. До алгоритмічних задач ми не відносимо, і такі, алгоритм розв’язування яких студенти не можуть застосувати на базі вивчених теоретичних положень і засвоєних практичних прийомів діяльності. Наприклад, задачі знаходження коренів рівняння третього ступеня загального вигляду можна вирішити за допомогою алгоритму, який задається відповідною формулою, але школярі не знають необхідних теоретичних відомостей, не вивчають цієї формули, отже, цю задачу не можна відносити до алгоритмічних в системі «задача – учень», що функціонує в процесі навчання в школі. Звідси ж витікає, що задача може міняти своє положення у вказаній системі залежно від впливу різних чинників [40, с.115].

Роль алгоритмів, а отже алгоритмічних задач в навчанні математиці дуже велика. Розвязування задач по алгоритму швидко і легко приводить до бажаного результату, тоді як незнання алгоритму може привести до численних помилок і великої втрати часу. Роль алгоритмічних задач полягає в тому, щоб навчити студентів важливим алгоритмам, безпосередньому застосуванню визначень, теорем, формул, навчити їх діяти стандартно у відповідних ситуаціях.

Учень, що добре засвоїв необхідні алгоритми розв'язування задач, може оперувати згорнутими знаннями при розв'язуванні інших складних задач. Йому не потрібно буде витрачати великих зусиль на пошук розв'язування часткових проблем, які розв'язуються по алгоритму; розумова діяльність школяра буде направлена на розв'язування інших проблем, тобто потрібна автоматизація деяких дій студентів. Ця автоматизація і досягається самостійним розв'язуванням алгоритмічних задач.

До напівалгоритмічних ми відносимо ті задачі, правила розв'язку яких носять узагальнений характер і не можуть бути повністю зведені до об'єднання елементарних актів; зв'язки між елементами цих задач легко знаходяться студентами. В межах одного і того ж узагальненого правила розвязування задачі відрізняються варіативністю умов. Наприклад, завдання на доведення перпендикулярності двох прямих за допомогою векторів. Узагальнене правило розв'язку таких задач можна описати таким чином: а) вибрати вектори AB і CD, де точки A і B належать одній прямій, а точки C і D – інший; б) довести, що скалярний добуток векторів AB і CD рівний нулю.

Напівалгоритмічні задачі як під задачі містять алгоритмічні задачі. Для задач вказаного вище виду такими під задачами можуть бути: розкладання вектора на два не колінеарні або три не компланарні вектори; обчислення скалярного добутку двох векторів.

Вирішуючи напівалгоритмічні задачі, учень вчиться згортати знання, фіксуючи їх в свідомості крупними блоками. При цьому він вчиться застосовувати засвоєні алгоритми в різних ситуаціях; таким чином відбувається узагальнення вивченого матеріалу, узагальнення правил розвязування задач.

У різних ситуаціях одну і ту ж задачу можна відносити до напівалгоритмічних задач і можна не відносити до них (це визначається учбовою метою, а також іншими умовами). Наприклад, для розв’язування деякої задачі може існувати алгоритм, але він або спотворений, або часто дає нераціональний розв’язок і т.п. Зате якщо до цієї задачі підходити як до напівалгоритмічної, знаючи узагальнене правило її розв’язку, то діяльність студентів по її розв’язку може бути організована ефективніше.

Багато шкільних задач на побудову доцільно розглядати як напівалгоритмічні. В узагальнене правило розв’язування цих задач як орієнтири входять властивості зображень: 1) зображенням прямої є пряма (при відомому обмеженні); 2) зображенням паралельних прямих служать паралельні прямі; 3) відношення довжин паралельних відрізків рівне відношенню довжин їх зображень. Інший орієнтир узагальненого правила розв’язування вказаних задач (при розв’язуванні він використовується першим) такий: побудова фігури-оригіналу і виявлення у неї таких зв'язків, які повністю характеризують положення об'єкту, який потрібно побудувати, і зберігаються при зображенні. Виявлені зв'язки потім застосовуються для побудови потрібного об'єкту.

Зрозуміло, що зі всього класу цих задач можна виділити, наприклад, такі, де потрібно побудувати зображення центру кола, вписаного в трикутник, або якісь інші задачі і створити для їх розв’язку певний алгоритм; але, очевидно, робити це педагогічно і методично недоцільно, оскільки інакше число учбових алгоритмів буде настільки велике, що засвоїти їх учень не в змозі.

До евристичних ми відносимо ті задачі, для розв’язування яких необхідно виявити деякі приховані зв'язки між елементами умови і вимоги або знайти спосіб розв’язку, причому цей спосіб не є очевидною конкретизацією деякого узагальненого правила, відомого учню, або зробити і те і інше. Розв’язуючи такі задачі, учень повинен використовувати евристичні прийоми, методи. На думку Ю. Н. Кулюткина, важливою характеристикою евристичних методів є те, що вони «направлені на розкриття ще невідомих конкретно-змістовних відносин, через які визначається шуканий об'єкт».

При розв’язуванні евристичних задач учень використовує ті прийоми, які сформувалися в його попередній діяльності за розв’язуванням задач і які він усвідомлено переносить на дані задачі. До таких прийомів можна віднести наступні: переформування умови і вимоги, складання допоміжних задач, зіставлення проміжних висновків і вимог, розгляд розташування елементів фігури або всієї фігури в динаміці. Ці прийоми важливі для студента, вони направляють його думку, допомагають знайти розв’язок задачі, розвивають мислення.

Клас евристичних задач великий. Сюди входять задачі, для розв’язування яких потрібно виявити один-два приховані зв'язки між елементами задачі, і задачі, де таких зв'язків більше і де потрібно, мабуть, сконструювати новий спосіб дії.

Алгоритмічні задачі породжують відповідні класи напівалгоритмічних і евристичних задач. Студентів потрібно «провести» через розв’язок задач різних типів з тим, щоб у них накопичувався досвід діяльності на різних рівнях, щоб вони навчилися бачити загальне в способах розв’язку задач, вчилися діяти в нестандартних ситуаціях, опановували евристичними прийомами.

Приведена типологія задач дає ясний напрям діяльності вчителя по організації навчання студентів розв’язувати задачі. Вона допоможе оптимально підійти до питань співвідношення відтворюючих і творчих процесів в самостійних роботах школярів [48, с.27].

Яку задачу називають стереометричною? Часто вважають, що задача в якій йдеться мова про неплоску фігуру називається стереометричною, проте необхідно уточнити в якому просторі ця фігура знаходиться.

Розглянемо такі задачі:

Задача 1.

Один чоловік пройшов спочатку шлях 1 км на північ, потім кілометр на захід, а потім 1 км на південь. Чи міг він повернутися на те місце, звідки починав рухатись?

Здавалося б, намалювавши на аркуші паперу схему руху чоловіка, очевидно, що це неможливо. Проте, використавши модель кулі, відповідь протилежна. Тобто чоловік пройшов 1 км на північ, потім повернувшись на захід пройшов навколо північного коло радіусом 1км, і звернув на південь пройшовши 1 км він опиниться в тому ж місці.

Задача 2.

Побудувати трикутник з вершинами A(0;0;0), B(1;-1;3) та C(2;2;2)?

На перший погляд маємо трикутник та точки, тобто плоскі елементи, проте цю задачу необхідно вважати стереометричною тому, що побудова здійснюється в просторі.

Отже, стереометричними задачами називають задачі, в яких йдеться про фігури тривимірного простору. Залежно від вимог, які ставляться в стереометричній задачі, розрізняють задачі на обчислення, на побудову, на доведення і на дослідження.

1.2.1. Задачі на побудову.

До стереометричних задач на побудову відносять задачі, у яких вимагається в тривимірному просторі побудувати фігуру з певними властивостями.[53]

Базою для розв’язування стереометричних задач на побудову є розроблена Н.Ф. Четверухіним теорія довільного паралельного проектування, яка дає можливість довільно швидко і просто одержувати правильні і наочні малюнки.[45]

Існують різні підходи стосовно видів стереометричних задач на побудову і методики їх розв’язування.

Г.П. Бевз дотримується погляду, що до стереометричних задач на побудову належать задачі на уявлювані побудови, задачі на проекційних малюнках і задачі на моделях (ефективні побудови). Під час розв’язування задач першого типу побудови за допомогою інструментів не виконують, а тільки пояснюють спираючись на аксіоми і наслідки з них, що і в якій послідовності “будують”. [4]

Приклад задачі на уявлювану побудову.

Через точку, яку дано поза прямою, проведіть площину перпендикулярну до цієї прямої.

Задачі на ефективні побудови починають розв’язувати лише тоді, коли учні засвоять основні властивості паралельного проектування (припускається, що напрями прямих і відрізків, про які йдеться в цих властивостях, не збігаються з напрямами проектування):

- проекція прямої є пряма;
- проекція відрізка є відрізок;
- паралельні відрізки на проекції зображаються паралельними

відрізками або відрізками однієї прямої;

- відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих зберігається;
- проекція спільної точки двох фігур є спільною точкою їх проекцій.

Основні задачі на побудову розбиті на наступні групи.

До першої належить побудова точки перетину прямої з площиною, побудова лінії перетину двох площин і побудова перерізу многогранника площиною.

До другої відносять побудову прямої, що проходить через точку поза даною прямою і паралельна даній:

- побудова прямої, паралельної даній площині;
- побудова площини, паралельної даній;
- побудову площини, яка проходить через одну з даних мимобіжних прямих і паралельна другій з них;
- побудову прямої, яка проходить через дану точку і перетинає дві дані мимобіжні прямі.

До третьої групи належить побудова перпендикуляра до даної площини і побудова площини, перпендикулярної до даної прямої.

Л.М. Лоповок вказує види стереометричних задач на побудову: задачі на побудову зображень просторових фігур, основні задачі на побудову, позиційні задачі на побудову і метричні задачі на побудову. Цього погляду дотримуються Г.М. Литвиненко, М.С. Собко, Г.І. Саранцев, З.В. Рафаловський, Я.М. Жовнір та ін.[23]

Зображенням фігури (прообразу) називається будь-яка фігура (образ), подібна до паралельної проекції даної фігури на площину. Форма зображення залежить від положення зображуваної фігури щодо площини проекцій, а також від вибору напряму проектування.

Задача зображення фігури вважається розв’язаною, якщо одержано будь-яке зображення фігури, яке вдало, правильно і наочно відображає форму геометричної фігури і співвідношення між її елементами. Для цього у процесі виконання малюнків мають бути реалізовані такі вимоги:

- правильність, яка означає, що існує такий спосіб проектування, при якому зображення фігури подібне до його проекції;
- наочність, яка передбачає, що образ фігури створює саме те враження, що і прообраз;
- простота зображення, яка полягає в тому, що для виконання додаткових побудов не треба користуватися складними допоміжними побудовами;
- повнота, суть якої в тому, що за розміщенням усіх елементів геометричної фігури або її частин на малюнку можна говорити про розміщення цих елементів у просторі .

Способи побудови зображення фігур ґрунтуються на властивостях паралельного проектування (мається на увазі загальний випадок, коли проектування здійснюється паралельно прямій, яка не паралельна тим прямим чи відрізкам, що проектуються):

- проекція точки є точка;
- проекцією прямої є пряма;
- зберігається паралельність прямих (відрізків);
- відношення довжин відрізків прямої (яка проектується) дорівнює відношенню довжин їх проекцій;
- відношення довжин проекцій двох паралельних відрізків дорівнює відношенню довжин відрізків, які проектуються.[53]

До основних задач на побудову відносяться: *побудова точки зустрічі прямої з площиною; побудова лінії перетину двох даних площин; побудова перерізу многогранника площиною, яка визначена відповідним способом.*

Розглянемо побудову перерізів в многогранниках. Уміння розв'язувати задачі на побудову перерізів є основою вивчення майже усіх тем курсу стереометрії. Основними діями, які складають метод побудови перерізів, є:

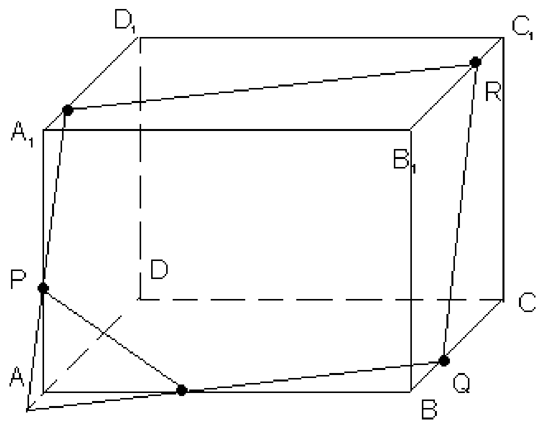
- знаходження точки перетину прямої з площиною;
- побудова лінії перетину двох площин;
- побудова прямої, паралельної до площини;
- побудова прямої перпендикулярної до площини;
- метод внутрішнього проектування;
- комбінований метод.

Для формування вмінь володіти вказаними діями, потрібно мати на увазі, що в сукупності вправ повинні бути передбачені всі ситуації застосування перелічених дій.

Приклад задачі на побудову.

Задача 1.

Дано зображення проекції на деяку площину куба ABCDA1B1C1D1 з відміченими точками P, Q, R на ребрах AA1, BC, C1D1. Побудуйте на цьому зображенні переріз куба площиною PQR.



Мал. 1

Розв'язання. У процесі побудови перерізу можна використати те, що прямі, по яким деяка площина перетинає пару паралельних площин, паралельні. Хід побудови видно на з малюнку. Спочатку через точку P проводимо пряму, паралельну прямій RQ, і знаходимо її точки перетину з прямими AD і A1D1. Ці точки з'єднуємо з точками Q та R і отримуємо переріз граней ABCD, A1B1C1D1 . На перетині однієї із двох граней, які залишаться, вже побудовані дві точки, і залишається з'єднати їх.

Задача на побудову точок перетину двох фігур чи взаємне розміщення їх, називається позиційною. Для розв'язання позиційної задачі потрібне повне зображення. Позиційні задачі зводяться до таких найпростіших: побудови лінії перетину двох площин, точки перетину прямої з площиною.

1.2.2. Задачі на обчислення

Найпоширенішими задачами стереометрії є задачі на обчислення. Для учнів загальноосвітніх шкіл, вони є найдоступніші і природніші. Зазвичай, вимоги стереометричних задач на обчислення починаються словами «визначте», «обчисліть», «знайдіть» тощо.

Задачі на обчислення можуть бути з параметрами і без них. Розв'язавши задачу з параметрами, отримують вираз або ж функцію від цих параметрів. Якщо серед параметрів задачі є і міри кутів, її майже завжди розв'язують, застосовуючи тригонометричні функції цих кутів. Розв'язавши задачу без параметрів, дістають число або числове значення геометричної величини: довжини, площі, об'єму, міри кута.

Стереометричні задачі поділяються і за складністю розв'язування. Найпростіші або ж нескладні задачі розв'язуються за допомогою однієї формули, відомої учням, в яку потрібно підставити відомі значення. Складні задачі розв'язуються за допомогою кількох формул, теорем чи властивостей, в тому числі і таких що розглядаються в планіметрії, алгебри, математичного аналізу, тригонометрії та інші, тобто весь «арсенал» математичних знань здобутих попередньо.

Задачі на обчислення бувають *абстрактні* й *прикладні.*

Стереометричну задачу вважають *абстрактною,* якщо в ній ідеться про абстрактні геометричні фігури та їх відношення.

Прикладними називають задачі про реальні, матеріальні об'єкти та зв'язки між ними. Ось приклади таких задач.

1. У скільки разів площа поверхні Землі більша від площі поверхні Місяця, якщо діаметр Землі наближено дорівнює 13 тисяч кілометрів, а діаметр Місяця 3,5 тисяч кілометрів?

2. Визначити об'єм води в басейні, якщо відомо, що висота - 3м, довжина - 50м, ширина - 15м?

Учнів часто цікавить не тільки розказане учителем розв'язання важкої задачі або доведення теореми, але питання про те, як можна було б до цього догадатися, тобто їм цікавий сам процес пошуку. Тому формування навичок пошуку розв'язання задач, доведення теорем повинно розглядатися як один з основних аспектів навчально-виховного процесу.

1.2.3. Задачі на доведення

Одним з видів стереометричних задач є задачі на доведення. Вимога цих задач починається словами «доведіть», «обґрунтуйте», «спростуйте», «покажіть, що» тощо. В таких задачах, оперуючи та використовуючи відомі теореми, аксіоми, властивості та формули, необхідно довести чи спростувати те чи інше твердження.

Задача 1.

Куля вписана в зрізаний конус. Доведіть, що площа поверхні кулі менше площі бокової поверхні конуса.

Задача 2.

Похила утворює рівні кути з трьома попарно непаралельними прямими, які лежать в одній площині. Доведіть, що похила перпендикулярна площині.

Задача 3.

Доведіть, що будь-який випуклий чотирьохгранний кут можна перетнути площиною так, щоб в перерізі отримали паралелограм.

Крім того, деякі математики поділяють задачі на побудову на такі, в яких потрібно довести або зобразити.

Задача 4.

Які правильні многокутники можна отримати при перетині куба площиною?

Задача 5.

Через точку А, що не належить площині, провести перпендикулярну пряму до площини.

1.2.4. Задачі на дослідження

Задачею на дослідження називатимемо кожну задачу, в якій вимагається що-небудь дослідити. Для них характерні вимоги «дослідіть», «порівняйте», «з'ясуйте» або запитання «чи існує?», «за якої умови?», «чи правильно?», «як зміниться?», «чи залежить?» тощо. Ось приклади таких задач.

1. Чи існує призма, що має 200 ребер?

2. У якої правильної чотирикутної піраміди центри вписаної і описаної сфер збігаються?

Одним з видів задач на дослідження є задачі на знаходження геометричних місць точок. Деякі автори їх відносять до задач на побудову, але так робити недоцільно. Тут не треба виконувати побудову (оскільки часто цього не можна зробити відомими учням методами), а тільки описати фігуру, яка є шуканим геометричним місцем точок.

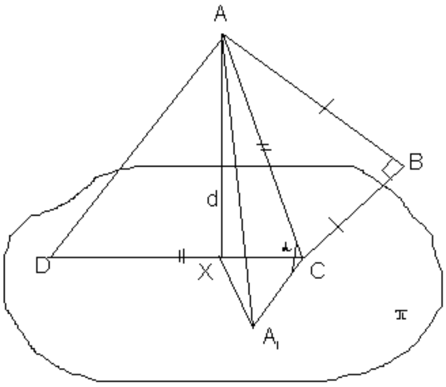
Іноді задачі на знаходження геометричних місць точок вважають задачами на доведення, з чим також не можна погодитись. Адже одним доведенням розв'язування таких задач не вичерпується. Перш ніж довести, що вказана фігура справді є шуканим геометричним місцем точок, треба з'ясувати яка це фігура. В задачах на доведення формулюється те твердження, яке треба довести, а у формулюваннях задач на знаходження геометричних місць ніяких тверджень немає. Розв'язавши задачу на доведення, відповідь не пишуть, а розв'язання задачі на знаходження геометричного місця має закінчуватись відповіддю.

Зрозумілі і доступні учням стереометричні задачі на дослідження великою мірою сприяють розвитку просторової уяви учнів. Систематичне розв'язування таких задач поглиблює знання, виховує інтерес до стереометрії, розвиває дослідницькі здібності учнів.

Приклад задачі на дослідження.

Задача 1.

Через бічну сторону CD трапеції ABCD, в якій AD||BC, $\angle B = 90°$, AB=BC і AC=CD, проведена площина π на відстані d від вершини A; точка A_1 - проекція вершини A на площину π. Знайти на стороні CD точку, із якої відрізок AA_1 видно під найбільшим кутом α, і обчислити площу трапеції.



Мал. 2

Розв’язання.

З’ясуємо, з якої сторони CD трапеції відрізок AA_1 видно під найбільшим кутом. Неважко довести, що $\angle ACD = 90°$. За теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри, $DC \perp A_1C$, отже, для будь-якої точки X відрізка CD $A_1X > A_1C$. Згідно умові, $\angle A_1CA = \alpha, A_1A = d.$

Обчислимо площу трапеції. $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC}$, де $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC^2, S_{ABC} = \frac{1}{4}AC^2$, а $AC = \frac{d}{\sin\alpha}$. Тоді $S_{ABCD} = \frac{3}{4}AC^2 = \frac{3d^2}{4\sin^2\alpha}$.

Відповідь. $S_{ABCD} = \frac{3d^2}{4\sin^2\alpha}$.

Як відомо, складовою частиною розв'язування задачі на обчислення чи на побудову є дослідження. Тому окремі автори часто і ці задачі вважають задачами на дослідження. Це неправильно, задачі на дослідження – окремий вид. Сказане, зрозуміло, не стосується комбінованих задач, які містять дві або й більше вимог.

Задача. Через дану точку на ребрі тетраедра проведіть переріз, "паралельний двом його мимобіжним ребрам". Доведіть, що цей переріз – паралелограм. За якої умови його площа буде найбільшою?

Ця задача – комбінована: на побудову, доведення і дослідження.

1.3. Психологічна сутність процесу розв'язування задач

Процес розв'язування задач із психологічної точки зору являє собою послідовний перехід суб'єкта від однієї проблемної ситуації до іншої шляхом моделювання першої ситуації й прийняття побудованої моделі за об'єкт своєї діяльності. Суб'єкт будує послідовність моделей спочатку складеної або прийнятої задачі. При цьому перехід від проблемної ситуації до її моделі відбувається шляхом децентрації суб'єкта, тобто уявного виходу суб'єкта із ситуації, її активного вивчення ним зі сторони.

У випадку, коли задача стає уявною моделлю, ця децентрація приймає форму уявного роздвоєння суб'єкта: він вивчає свою власну думку, її перетворення, процес її протікання. Інакше кажучи, суб'єкт ніби роздвоюється на дві істоти: одна з них будує й перетворює уявні моделі вихідної задачі, а друга подумки вивчає моделі, які отримуються й співвідносить їх з моделлю кінцевої або проміжної мети діяльності.

Культура поводження при ознайомленні із задачею є, по суті справи, оволодіння деякою стратегією й тактикою пошуку розв'язування задачі.

Дотепер вважається, що єдиний метод формування вміння розв'язувати задачі – це практика в розв'язуванні великої кількості задач. Відомий методист Д. Пойя так і радить: "Якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!" Дотримуючись цієї поради, учителі математики, фізики й інших предметів пропонують учням величезну кількість задач і витрачають на їх розв'язування не менше половини всього навчального часу, не враховуючи часу домашньої роботи учнів, що складається в основному з розв'язування задач. А результати цієї роботи більш ніж скромні: багато учнів так і не опановують загальні підходи їхнього розв'язування й, зустрівшись із задачею незнайомого виду, губляться й не знають, як до неї підступитися [48, с.74].

Культура розв'язування задач полягає в тому, що пошук розв'язування відбувається на базі глибокого й всебічного попереднього аналізу задачі, що кожна із численних спроб обґрунтовується і її результати аналізуються, що після знаходження правильного розв’язання виробляється ретроспективний аналіз із метою виявлення загальних методів, пошуку більш раціонального способу розв’язування, якщо це можливо.

Такій культурі можна й потрібно вчити учнів, починаючи з початкових класів.

Головне – це зробити самі задачі, їхню структуру й особливості предметом особливого вивчення й засвоєння.

Для цього необхідно використати особливу систему вправ, де конкретні задачі є лише матеріалом, а метою (вимогою) є послідовно: 1) розчленовування задачі на елементарні умови й вимоги; 2) виявлення зв'язків і залежностей між окремими умовами (даними) і між даними й вимогою; 3) побудова схематичної моделі задачі; 4) перекодування задачі на іншу мову. Неодмінною умовою є те, що у всіх цих вправах сама задача не розв’язується, щоб не відволікати учнів від головного ─ аналізу задачі.

Особливу роль у формуванні культури розв’язування задачі грає заключний, ретроспективний аналіз проведеного розв’язування з метою виявлення й засвоєння загальних методів і прийомів розв’язування задачі.

Зазначені навчальні задачі повинні використовуються протягом всіх років навчання й стати основою для формування навичок і вмінь розв’язування задач. Сам процес формування здатностей і вмінь повинен носити цілеспрямований і керований характер. Необхідно чітко представляти, який компонент загальних умінь розв’язувати задачі формується тепер за допомогою певної системи навчальних і конкретно-практичних задач, яку роль при цьому грає кожне з використовуваних задач.

Потрібно змінити й сам підхід до задач. Замість того, щоб бездумно розв’язувати велику кількість задач, корисніше розв’язувати в кілька разів меншу кількість задач, але при цьому саме розв’язування повинне містити глибоке вивчення їх умови, сутності їхнього розв’язування, виявлення загальних методів і прийомів. Задача й механізми їхнього розв’язування повинні стати об'єктами глибокого й постійного вивчення протягом усіх років навчання. Особлива увага повинна бути також приділена формуванню культури розв’язування, розумного підходу до пошуків і конструювання методів розв’язування, виробленню дисциплінованого мислення в процесі розв’язування, вихованню естетичного погляду на розв’язування, що припускає оцінку цього розв’язання не тільки з погляду його бездоганної логічної правильності, але й краси.

Кожний школяр у процесі навчання повинен набути вміння вчитися самостійно. Воно включає, зокрема, вміння ставити навчальну задачу й розв’язувати її.

Формулювання задачі учнем пов'язане з пошуком загального способу розв’язування цілого класу задач, перебором варіантів розв’язування окремо взятої, конкретної задачі. Розв’язування задачі повинне здійснюватися на базі глибокого й всебічного попереднього аналізу задачі, необхідний і аналіз ходу розв’язання, у тому числі ретроспективний, пошук найбільш раціонального. Учитель, формуючи в школярів таку культуру розв’язування задач, домагається позитивних результатів, не перевантажуючи учнів більшим обсягом завдань. Слід також зазначити, що в процес навчання розв’язуванню задач учитель може додати багато елементів творчості. Один з ефективних творчих прийомів сприйняття самим учителем простого й зрозумілого для нього завдання, як нового й дивного, тобто спроба сприйняття проблеми очима дитини .

1.4. Структура процесу розв'язування задач

Якщо під процесом розв'язування задачі розуміти процес, що починається з моменту умови задачі до моменту повного завершення її розв'язування, то, очевидно, що цей процес складається не лише з викладу вже знайденого розв'язку, а з ряду етапів, одним з яких і являється виклад розв'язування.

Очевидно, що, отримавши задачу, перше, що треба зробити, – це розібратися в тому, що це за задача, які її умови, в чому полягають її вимоги, тобто провести аналіз задачі. Аналіз і складає *перший етап* процесу розв'язування задачі.

Цей аналіз потрібно якось оформити, записати. Для цього використовуються різного роду схематичні записи задач, побудова яких складає *другий етап* процесу розв'язування.

Аналіз задачі і побудова її схематичного запису необхідно головним чином для того, щоб знайти спосіб розв'язування цієї задачі. Пошук цього способу складає *третій етап* процесу розв'язування.

Коли спосіб розв'язування задачі знайдений, його треба виконати, – це буде *четвертий етап* процесу розв'язування – етап виконання розв'язку задачі.

Після того, як розв'язування здійснене і викладене, необхідно переконатися, що це розв'язування правильне, що воно задовольняє усім вимогам задачі. Для цього проводять перевірку розв'язування, що складає *п'ятий етап* процесу розв'язування задачі.

При розв'язуванні багатьох задач, окрім перевірки, необхідно ще провести дослідження задачі, а саме встановити, за яких умов задача має розв’язок і притому скільки різних розв’язків у кожному окремому випадку; за яких умов задача взагалі не має розв'язку і т. д. Усе це складає *шостий етап* процесу розв'язування задачі.

Переконавшись в правильності розв'язування і, якщо потрібно, провести дослідження задачі, необхідно чітко сформулювати відповідь задачі, – це буде *сьомий етап* процесу розв'язування задачі.

Нарешті, в учбових і пізнавальних цілях корисно також виробити аналіз виконаного розв'язування, зокрема встановити, чи немає іншого, раціональнішого способу розв'язування, чи не можна задачу узагальнити, які висновки можна зробити з цього розв'язування і т. д. Усе це складає останній *восьмий етап* розв'язування задачі

Отже, увесь процес розв'язування задачі можна розділити на вісім етапів:

1-й етап – аналіз задачі;

2-й етап – схематичний запис задачі;

3-й етап – пошук способу розв'язування задачі;

4-й етап – виконання розв'язку задачі;

5-й етап – перевірка розв'язування задачі;

6-й етап – дослідження задачі;

7-й етап – формулювання відповіді задачі;

8-й етап – аналіз розв'язування задачі.

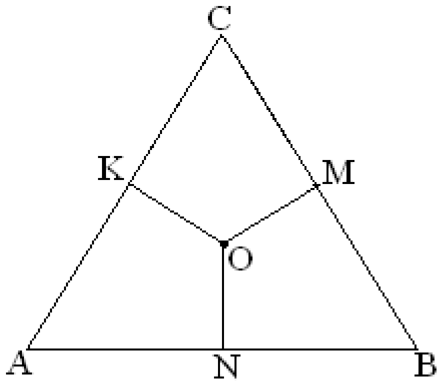
Наведена схема дає лише загальне уявлення про процес розв'язування задачі як про складний і багатоплановий процес.

Задача 1. Знайти радіус вписаного кола в рівносторонній трикутник із стороною a .

1. Аналіз задачі. Дана задача є геометричною задачею на обчислення з параметрами (буквеними даними). Тому в першу чергу потрібно встановити можливі області зміни параметрів. Очевидно, що a – довжина сторони трикутника – може бути будь-яким додатнім числом, тобто

$$a > 0.$$

2. Схематичний запис задачі. Побудуємо заданий в задачі рівносторонній трикутник.



Мал. 3

Відомо, що центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис. А в рівносторонньому трикутнику висота є і бісектрисою, і медіаною. Для того щоб побудувати висоти трикутника, потрібно з вершин трикутника опустити перпендикуляри на протилежні сторони. Утворилася точка *O*, яка є центром кола, вписаного в трикутник. Тоді з точки *O* опускаємо перпендикуляри на сторони. Утворені відрізки *OK*, *OM* і *ON* є радіусами вписаного кола в рівносторонній трикутник.

Виходячи з цього, умову задачі можна записати так.

Дано: 1) ABC – трикутник; 2) $AB = BC = CA = \alpha$;

Знайти: r.

3 – 5. Пошук і здійснення розв'язку. Дослідження задачі.

По відомій формулі маємо:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

Оскільки ΔABC рівносторонній трикутник зі стороною a, то

$$h_a = h_b = h_c = h.$$

Тоді $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h}$; $\frac{1}{r} = \frac{3}{h} \Rightarrow$

$$r = \frac{h}{3}. \quad (1)$$

Залишилося знайти h. Розглянемо трикутник ANB. Так як BN – висота, медіана, бісектриса, то $\angle BNA = 90^0$, а

$$AN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}. \quad (2)$$

За наслідком з теореми Піфагора знайдемо BN.

$$BN = \sqrt{AB^2 - AN^2}. \quad (3)$$

Підставимо вираз (2) у формулу (3), отримаємо:

$BN = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow$

$$BN = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad (4)$$

Підставивши вираз (4) у формулу (1), отримуємо, що

$$r = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

6. Перевірка. В даному випадку перевірка розв'язування зводиться до того, щоб переконатися, що по знайдених формулах дійсно можна знайти r таке, яке належить області його визначення. Очевидно, що повинна дотримуватися лише одна умова: $r > 0$. Розглядаючи отриману формулу для r і враховуючи вказані при цьому умови задачі, легко переконуємося у виконанні вказаної умови.

7. Відповідь: при $\alpha > 0$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

8. Аналіз розв'язування. Переглядаючи уважно проведене розв'язування, помічаємо, що при розв'язуванні подібних задач важливо заздалегідь при аналізі задачі встановити області зміни параметрів.

Отже, при розв'язуванні подібних задач потрібно аналізувати кожен крок розв'язування з точки зору його здійснимості за заздалегідь знайдених або заданих умов і при необхідності ці умови уточнювати, тим самим звужуючи області зміни параметрів.

При фактичному розв'язуванні вказані там етапи зазвичай не відокремлені один від одного, а переплітаються між собою. Так, в процесі аналізу задачі зазвичай здійснюється і пошук розв'язування. При цьому повний план розв'язування встановлюється не до здійснення розв'язку, а в його процесі. Тоді пошук розв'язування обмежується лише знаходженням ідеї розв'язування. Порядок етапів також іноді може мінятися.

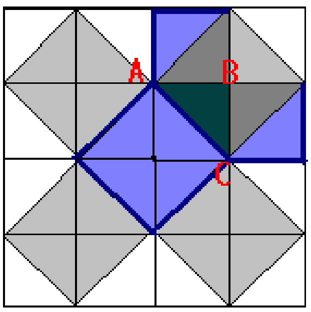
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ТА СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ У СПЕЦІАЛЬНОМУ КУРСІ

2.1. Базові теореми планіметрії

2.1.1. Теорема Піфагора

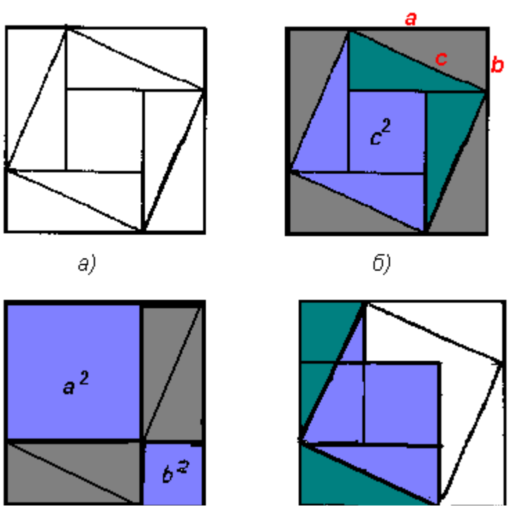
Перші доведення теореми Піфагора

Важко знайти людину, у якої ім'я Піфагор не асоціювалося б з теоремою Піфагора. Мабуть, навіть ті, хто в своєму житті назавжди розпрощався з математикою, зберігають спогади про «Піфагорові штани» - квадрат на гіпотенузі, дорівнює двох квадратам на катетах. Причина такої популярності теореми Піфагора триєдина: це простота, краса, значимість. Справді, теорема Піфагора проста, але не очевидна. Це поєднання двох суперечливих начал, яке надає їй особливу притягальну силу, робить її гарною. Але, крім того, теорема Піфагора має величезне значення: вона застосовується в геометрії буквально на кожному кроці, і той факт, що існує близько 500 різних доказів цієї теореми (геометричних, алгебраїчних, механічних і т.д.), свідчить гігантське число її конкретних реалізацій. Відкриття теореми Піфагором оточене ореолом красивих легенд. Прокл, коментуючи останнє речення першої книги «Начал» Евкліда, пише: “Якщо послухати тих, хто любить повторювати давні легенди, то доведеться сказати, що ця теорема сходить до Піфагора; розповідають, що він у честь цього відкриття приніс у жертву бика”. Втім, більш щедрі розповідачі одного бика перетворили на одну Гека-Томбо, а це вже ціла сотня. І хоча ще Цицерон помітив, що будь-яке пролиття крові було чужим статутом Піфагорівського ордену, легенда ця міцно зрослася з теоремою Піфагора і через дві тисячі років продовжувала викликати гарячі відгуки. А ось іронічний Генріх Гейне (1797-1856) бачив розвиток тієї ж ситуації трохи інакше: “Хто знає! Хто знає! Можливо, душа Піфагора переселилася в бідолаху кандидата, який не зміг довести теорему Піфагора і провалився через це на іспитах, тоді як у його екзаменатора сидять душі тих биків, яких Піфагор, радий від вікриття своєї теореми, приніс у жертву безсмертним богам". Сьогодні теорема Піфагора виявлена у різних приватних задачах та кресленнях: і в єгипетському трикутнику в папірусі часів фараона Аменемхета першого (бл. 2000 до н.е.), і в вавилонських клинописних табличках епохи царя Хаммурапі (XVIII ст. до н.е.), і в давньоіндійському геометро-теологічному трактаті VII-V ст. до н.е. "Сульва сутра" ("Правила мотузки"). У найдавнішому китайському трактаті "Чжоу-бі Суань цзинь", час створення якого точно не відомо, стверджується, що в XII ст. до н. е. китайці знали властивості єгипетського трикутника, а до VI ст. до н.е. і загальний вигляд теореми. Незважаючи на все це, ім'я Піфагора настільки міцного славилося з теоремою Піфагора, що зараз просто неможливо уявити, що це словосполучення розпадеться. Те ж відноситься і до легенди про різанину биків Піфагором. Та й навряд чи потрібно препарувати історико-математичним скальпелем красиві давні перекази.



Мал. 1

Розглянемо деякі класичні доведення теореми Піфагора, відомі з давніх трактатів. Зробити це корисно ще й тому, що в сучасних шкільних підручниках дається алгебраїчне доведення теореми. При цьому безслідно зникає первозданна геометрична аура теореми, втрачається та нитка Аріадни, яка вела давніх мудреців до істини, а шлях цей майже завжди опинявся найкоротшим і завжди гарним. Отже, Теорема Піфагора.



Мал. 2

"Квадрат, побудований на гіпотенузі прямокутного трикутника, рівновеликий сумі квадратів, побудованих на його катета.”

Найпростіше доведення теореми виходить в простому випадку рівнобедреного прямокутного трикутника. Ймовірно, з нього і починалася теорема. Справді, достатньо просто подивитися на мозаїку рівнобедрених прямокутних трикутників (рис.2.1.1.), щоб переконатися в справедливості теореми. Наприклад, для ΔABC: квадрат, побудований на гіпотенузі AC, містить 4 вихідних трикутника, а квадрати, побудовані на катета, - по два. Теорема доведена.

Давньокитайське доведення. Математичні трактати Стародавнього Китаю дійшли до нас в редакції II ст. до н.е. Справа в тому, що в 213 р. до н.е. китайський імператор Ши Хуан-ді, прагнучи ліквідувати колишні традиції, приказав спалити всі стародавні книги. У II ст. до н.е. в Китаї був винайдений папір і одночасно починається відтворення стародавніх книг. Так виникла тематика в дев'яти книгах – головне зі збережених математико – астрономічних творів у книзі “Математики” поміщено креслення (мал. 2 а), що доводить теорему Піфагора. Ключ до цього доказу підібрати неважко. Справді, на давньокитайському кресленні чотири рівних прямокутних трикутника з катетами a, b і гіпотенузою утворені так, що їх зовнішній контур утворює квадрат зі стороною $a+b$, а внутрішній - квадрат зі стороною с, побудований на гіпотенузі (мл.2,б). Якщо квадрат зі стороною с вирізати і залишилися 4 затушовані трикутника укласти в два прямокутника (мал. 2,в), то ясно, що утворилася порожнеча, з одного боку, дорівнює c^2, а з іншого - a^2+b^2, тобто $c^2=a^2+b^2$. Теорема доведена. Зауважимо, що при такому доведенні побудови всередині квадрата на гіпотенузі, які ми бачимо на давньокитайському кресленні (мал. 2,а), не використовуються.

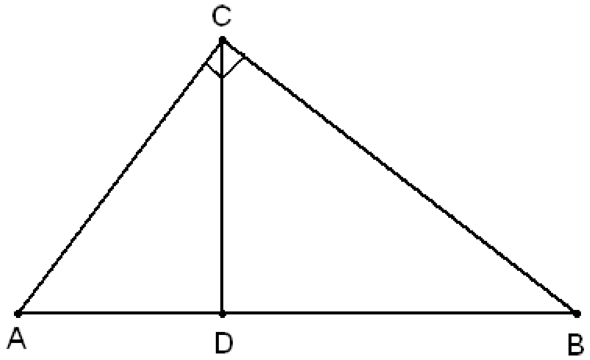
Зауважимо, що окремі випадки теореми Піфагора (наприклад, побудова квадрата, площа якого вдвічі більше площі даного квадрата) зустрічаються в давньоіндійському трактаті «Сульва сутра» (VII-V ст. До н.е.).

Сучасне формулювання теореми Піфагора та її доведення

Перш ніж доводити теорему Піфагора розглянемо основні метричні співвідношення в прямокутному трикутнику.

В геометрії метричними співвідношеннями називаються співвідношення між числами, які виражають довжини лінійних елементів або величини кутів.

В прямокутному трикутнику (мал.3) маємо наступні метричні співвідношення:



Мал. 3

1. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$;

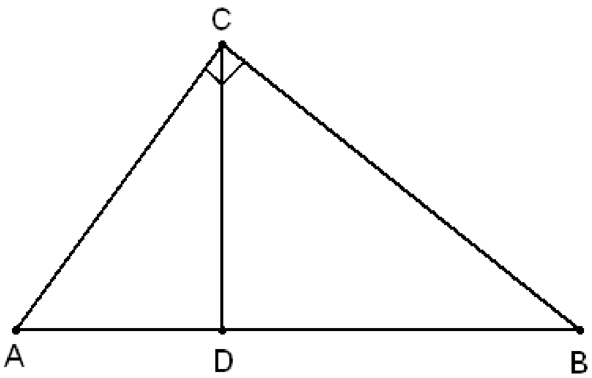
2. $\angle A + \angle B = 90^0$;

3. $\angle C = 90^0$.

Теорема 2.1.1. У прямокутному трикутнику перпендикуляр, проведений із вершини прямого кута до гіпотенузи є середнім пропорційним (геометричним) між проекціями катетів на гіпотенузу.

Теорема 2.1.2. Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним (геометричним) між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу.

Теорема 2.1.3. (Теорема Піфагора). У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.



Мал. 4

Доведення. Спосіб 1. Згідно Т.2.1.2. маємо: $AC^2 = AD \cdot AB$ (1)

$BC^2 = BD \cdot AB$ (2)

Додавши рівності почленно і врахувавши, що $AD+DB=AB$, дістанемо :

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2.$$

Спосіб 2.

За означенням косинуса кута $\cos\angle A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, звідси $AC^2 = AD \cdot AB$ (3)

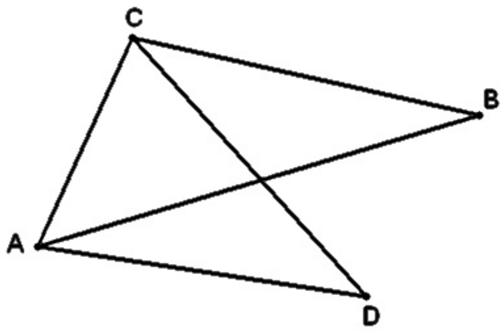
Аналогічно $\cos\angle B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$, звідки $BC^2 = BD \cdot AB$ (4)

Додавши рівності (3) і (4) почленно, як і в способі 1 отримаємо доведення теореми Піфагора.

Наслідки із теореми Піфагора

1. Квадрат сторони трикутника, яка лежить проти тупого кута, більше суми квадратів двох інших сторін.

Доведення. Нехай в трикутнику *ABC* кут *C* тупий (мал.5.). Побудуємо відрізок *CD*, який рівний *CB* і перпендикулярний *CA*. Згідно теореми Піфагора отримуємо $CA^2 + CD^2 = AD^2$.



Мал. 5

Але на основі теореми про трикутники, які мають по дві рівні сторони і нерівні кути отримаємо: *AB>AD*.

Отже, $AB^2 > CA^2 + CD^2$, або $AB^2 > AC^2 + BC^2$.

2. Квадрат сторони трикутника, який лежить проти гострого кута, менше суми квадратів двох інших.

Доведення. Аналогічне попередньому.

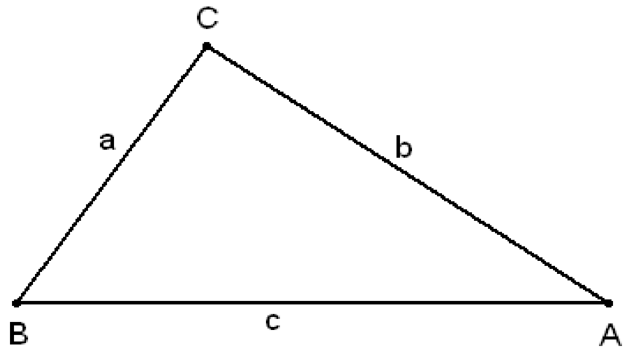
2.1.2. Теорема косинусів

Основне формулювання теореми косинусів

Теорема 2.1.4. Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

По суті це означає, що в будь-якому трикутнику ABC мають місце три співвідношення:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A; \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\angle B; \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C. \end{cases}$$



Мал. 6

Теорему косинусів часто називають узагальненою теоремою Піфагора, тому що теорема Піфагора є частковим випадком теореми косинусів.

Друге формулювання теореми косинусів

Часто задача, яку потрібно розв'язати, серед даних елементів не містять кутів, відповідь також не вимагає знання кутів. В цих випадках виведення відповідних кутів і відповідних тригонометричних виразів не є обов'язковим.

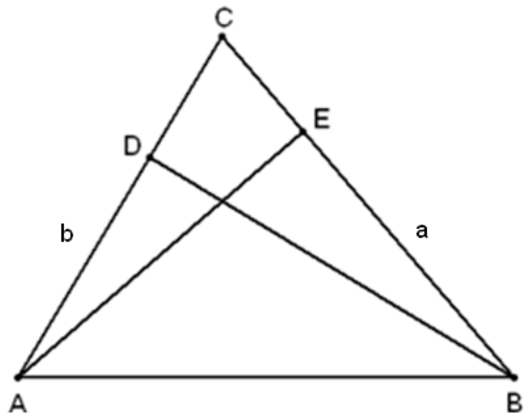
В підручниках з геометрії для подібних ситуацій наведене друге формулювання теореми косинусів.

Теорема 2.1.5.

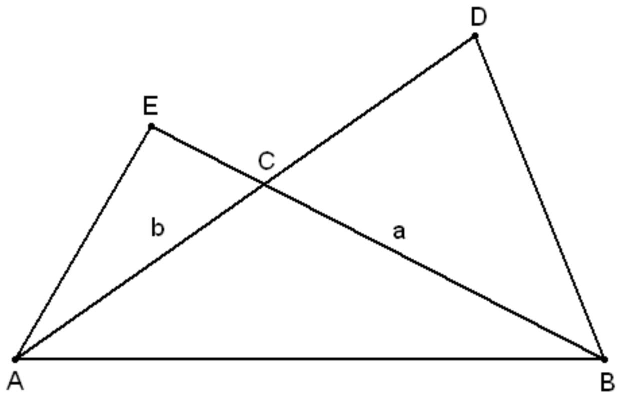
1) Квадрат будь-якої сторони трикутника, що лежить проти гострого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток однієї з цих сторін на проекцію на цю сторону іншої сторони.

2) Квадрат будь-якої сторони трикутника, що лежить проти тупого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін плюс подвоєний добуток однієї з цих сторін на проекцію на цю сторону другої сторони.

Іншими словами, мають місце наступні співвідношення:



Мал. 7



Мал. 1

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CE \qquad c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot CE$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot CD \qquad c^2 = a^2 + b^2 + 2b \cdot CD$$

2.1.3. Теорема синусів.

Перше формулювання теореми синусів

Теорема 2.1.6. У будь-якому трикутнику ABC сторони завжди пропорційні синусам протилежних кутів: $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$ (1)

Друге формулювання теореми синусів

Теорема 2.1.7.. У будь-якому трикутнику *ABC* зі сторонами *a, в, c* і радіусом описаного кола *R* мають місце рівності:

$$a = 2R \cdot \sin\angle A\,, b = 2R \cdot \sin\angle B\,, c = 2R \cdot \sin\angle C \qquad (2)$$

Іншими словами, кожна сторона трикутника дорівнює добутку діаметра описаного кола на синус протилежного даній стороні кута.

Зокрема, для прямокутного трикутника з гіпотенузою *c* маємо $c = 2R \cdot \sin 90^0 = 2R$, тобто гіпотенуза є діаметром описаного кола (і тому центр описаного кола знаходиться на середині гіпотенузи). Для правильного трикутника маємо $a = 2R \cdot \sin 60^0 = a\sqrt{3}$ — це також часто зустрічається в задачах планіметрії.

Рівності (2) можна записати так: $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R$.

Теорема стверджує не тільки те, що відношення сторін до синусів протилежних кутів рівні, але і те, що вказані відношення дорівнюють *2R*. Це розширює коло задач, які можуть бути розв’язаними за допомогою теореми синусів.

Третє формулювання теореми синусів

Іноді зручно сформулювати теорему синусів так, щоб в ній не містились тригонометричні функції. Це дає змогу розв’язувати задачі без використання кутів.

Теорема 2.1.8.. У будь-якому трикутнику мають місце співвідношення:

$$\frac{bc}{h_a} = \frac{ac}{h_b} = \frac{ab}{h_c} = 2R \qquad (1)$$

Легко побачити що, дана теорема рівносильна теоремі 2.3.1. Справді, відомо, що $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\angle C = \frac{1}{2}ch_c$ звідси $ab = \frac{ch_c}{\sin\angle C}$, аналогічно $bc = \frac{ah_a}{\sin\angle A}$ $ac = \frac{bh_b}{\sin\angle B}$. Підставивши це в (1), одержимо теорему 2.3.2 (і обернено).

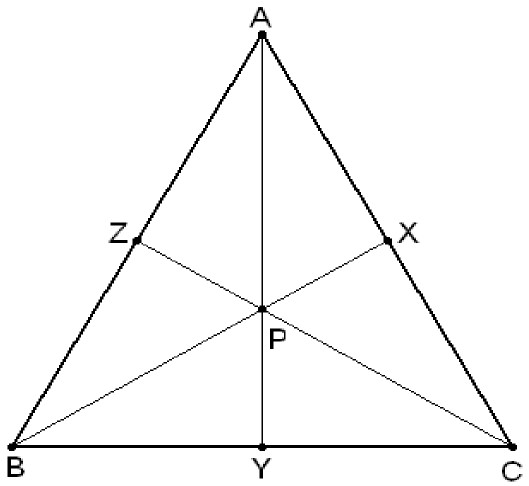
2.1.4. Теореми Чеви, Стюарта, Ван-Обеля

Теорема Чеви та її наслідки

Відрізок, який з'єднує вершину трикутника з деякою точкою на протилежній стороні називається чевіаною.Таким чином, якщо в трикутнику ABC X,Y,Z – точки, які лежать на сторонах BC, CA і AB відповідно, то відрізки AX, BY, CZ називають чевіанами. Цей термін походить від імені італійського математика Джованні Чеві, який в 1678 р. опублікував наступну теорему:

Теорема (Чеви):

Якщо три чевіани AX, BY, CZ (по одній з кожної вершини) трикутника ABC конкурентні, то $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=1.$



Мал. 9

Доведення. Конкурентні – це дві прямі, які проходять через одну точку. Позначимо цю точку через P. Пригадаємо, що площі трикутників з рівними висотами пропорційні основам трикутників.

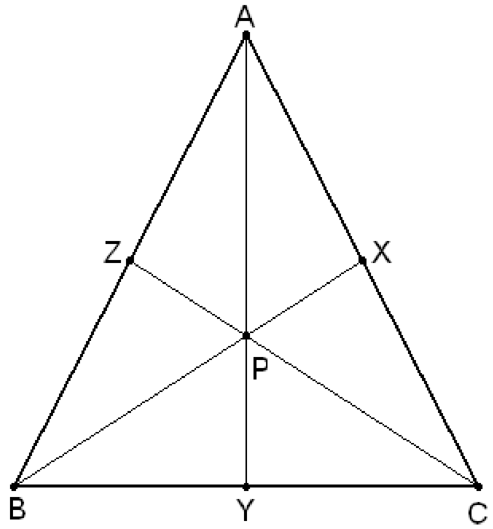
Розглянемо мал. 9.

$$\frac{|BX|}{|XC|}=\frac{S_{\Delta ABX}}{S_{\Delta AXC}}=\frac{S_{\Delta PBX}}{S_{\Delta PXC}}=\frac{S_{\Delta ABX}-S_{\Delta PBX}}{S_{\Delta AXC}-S_{\Delta PXC}}=\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta CAP}}.$$

Аналогічно $\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta ABP}}$, $\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{S_{\Delta CAP}}{S_{\Delta BCP}}$. Якщо перемножити їх, то отримаємо: $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta CAP}}\cdot\frac{S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta ABP}}\cdot\frac{S_{\Delta CPA}}{S_{\Delta BCP}}=1.$

Теорема (обернена до теореми Чеви)

Якщо три чевіани AX, BY, CZ задовільняють співвідношення: $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=1,$ то вони конкурентні.



Мал. 10

Доведення. Припустимо, що тільки дві перші чевіани перетинаються в точці P, а перетином, чевіаною, яка проходить через цю ж точку, буде CZ'.

Тоді за попередньою теоремою: $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ'|}{|Z'B|}=1$. Але за умовою теореми: $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=1$. Звідси $\frac{|AZ'|}{|Z'B|}=\frac{|AZ|}{|ZB|}$, тобто точка Z співпадає з точкою Z'. Отже, чевіани конкурентні.

З теореми Чеви випливають такі наслідки:

1. Медіани трикутника перетинаються в одній точці.

2. Висоти трикутника перетинаються в одній точці.

3. Бісектриси трикутників перетинаються в одній точці.

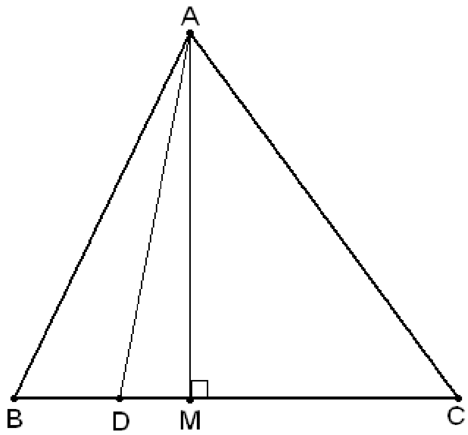
4. Прямі, які з’єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного кола, перетинаються в одній точці.

Теорема Стюарта

Теорема (Стюарта)

Якщо дано трикутник ABC і на його основі точка D, яка лежить між точками B і C, то маємо рівність

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD+AD^2\cdot BC=BC\cdot DC\cdot BD.$$



Мал. 11

Доведення. Опустимо з вешини A на BC перпендикуляр AM і припустимо, що точка M лежить з тієї ж сторони від точки D, як і вершина C. Так як в ΔACD $\angle ADC$ гострий, то $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DM$. А так як в ΔABD $\angle ADB$ – тупий ,то $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DM$. Домноживши першу рівність на BD, другу на DC і додавши їх, отримаємо:

$$AC^2 \cdot BD + AB \cdot DC = AD^2(DC + BD) + DC^2 \cdot BD + BD^2 \cdot DC;$$
$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC = AD^2 \cdot BC + DC \cdot BD \cdot BC;$$
$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC - AD^2 \cdot BC = DC \cdot BD \cdot BC.$$

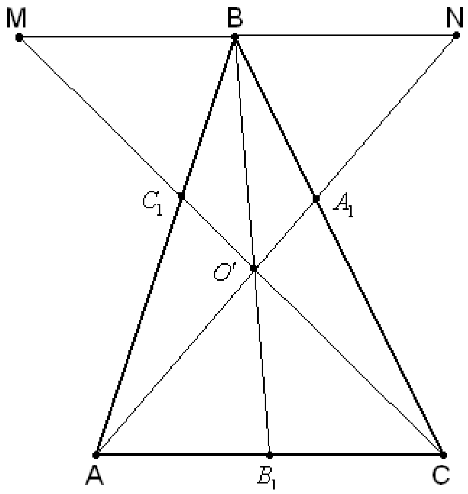
Теорема Ван–Обеля

Теорема (Ван-Обеля)

Якщо прямі AA_1, BB_1, CC_1 пертинаються в одній точці, то виконуються наступні співвідношення: $\dfrac{BO'}{O'B_1} = \dfrac{BC_1}{C_1A} + \dfrac{BA_1}{A_1C}$ (1)

$$\frac{AO'}{O'A_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{CB_1}{B_1A} \qquad (2)$$

$$\frac{CO'}{O'C_1} = \frac{CA_1}{C_1B} + \frac{CB_1}{B_1A} \qquad (3)$$



Мал. 12

Доведення. Через вершину B ΔABC проведемо $MN \| AC$. Тоді $\Delta MNO' \sim \Delta CAO'$, бо $\angle MO'N = \angle AO'C$ – вертикальні і $\angle O'MN - O'CA$ (при $MN \| AC$ та січній MC). Звідси

$$\frac{BO'}{O'B_1} = \frac{MN}{AC} = \frac{MB + BN}{AC} = \frac{MB}{AC} + \frac{BN}{AC} \qquad (1^*)$$

$\Delta MC_1B \sim \Delta CC_1A$, бо $\angle BC_1M = \angle AC_1C$ – як вертикальні і $\angle NMC_1 = \angle C_1CA$.

Тоді $$\frac{MB}{AC} = \frac{BC_1}{C_1A} \qquad (1')$$

Аналогічно доведемо, що $\Delta BNA_1 \sim \Delta CAA_1$ ($\angle BA_1N = \angle AA_1C$, $\angle BNA_1 = \angle A_1AC$),

і що $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{AC}$. $(2')$

Підставимо рівності $(1')$ і $(2')$ в рівність (1^*) і отримаємо: $\frac{BO'}{O'B_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C}$

. Аналогічно доводимо рівності (2) і (3) теореми.

2.2. Методика навчання розв’язуванню планіметричних задач

Ефективною методика навчання учнів розв’язуванню задач може бути лише за комплексного підходу до навчального процесу. Це означає, що має чітко визначатися мета навчання учнів розв’язуванню задач певного виду чи оволодіння певним методом, ретельно розроблятися система самих задач, які будуть розв’язуватись у класі і пропонуються як домашнє завдання, мають доцільно вибиратися методи й організаційні форми роботи на уроці, засоби навчання, здійснюватися контроль стану сприймання учнями методів і способів розв’язування, набутих ними навичок і умінь.

Приступаючи до розв’язування геометричної задачі слід враховувати, що майже кожна геометрична задача потребує індивідуального підходу, винахідливості та інтуїції. Проте можна дати деякі загальні рекомендації, що будуть корисні під час розв’язування багатьох задач.

Розв’язування практично будь-якої геометричної задачі починають з рисунка. Він повинен бути досить лаконічним. Слід зображати лише “функціонуючі” частини геометричних фігур. Так, наприклад, якщо в задачі розглядають радіус описаного кола, то часто можна не зображати коло, а зображати тільки його центр і радіус. Але якщо в умові задачі йдеться про точку кола, то його зображення може бути корисним для розв’язування.

Необхідно уникати надмірного ускладнення рисунка. Для цього можна, наприклад, виконати виносні рисунки, що зображують фрагменти даної конфігурації. З іншого боку, корисно безпосередньо на рисунку вказувати числові та буквені значення лінійних або кутових величин. Зазначимо, що є такі задачі, у процесі розв'язування яких доводиться уточнювати особливості конфігурації, що розглядається, та переробляти початковий рисунок таким чином, що остаточного вигляду він набуває лише одночасно із закінченням розв'язування. Розв'язуючи геометричну задачу, потрібно спиратися не лише на рисунок. Він може "підказати", що якісь точки лежать на одній прямій чи одному колі. Проте в процесі розв'язування ці особливості розміщення точок повинні бути обґрунтовані без посилань на рисунок. Інколи рисунок може стати причиною неповного розв'язування задачі, оскільки ті співвідношення, які виконують на ньому і здаються очевидними, насправді потребують спеціального обґрунтування.

Тому завжди слід намагатися зобразити всі можливі конфігурації, а потім за допомогою міркувань відкинути зайві. Нагадаємо, що додаткові побудови на початковому рисунку, якими вводять нові відрізки та кути, іноді полегшують розв'язування задачі.

У задачах на обчислення є сенс спочатку, не проводячи обчислень, визначити, які взагалі відрізки та кути можна знайти, виходячи з даних величин. Як тільки до цього переліку потрапить потрібний відрізок чи кут, можна легко скласти ланцюжок послідовних обчислень, що приведе до визначення шуканої величини. Іноді такий "прямий пошук" корисно доповнити пошуком плану розв'язування задачі "від шуканого", тобто виходячи з вимоги задачі (наприклад, щоб знайти площу вписаного кола достатньо знайти його радіус).

Проте ці способи не завжди вдається застосувати. У таких випадках часто допомагає алгебраїчний метод розв'язування геометричних задач на обчислення, пов'язаний із введенням невідомих та складанням рівняння або системи рівнянь.

Перевага цього методу полягає в тому, що основні його модифікації можуть бути в достатній степені алгоритмізовані. Мається на увазі дві модифікації: метод поетапного розв’язування і метод складання рівняннь. Розглядаючи кожну задачу разом з її методом розв’язування, виділимо так звані елементарні задачі, тобто задачі на одну дію на застосування відомої теореми чи формули. Під “дією” розуміємо також і розв’язування одного лінійного чи квадратного рівняння. Виділення елементарних задач педагогічно виправдано і корисно, оскільки дуже часто розв’язування більш складних, більш змістовних геометричних задач може бути, як із “цеглинок”, складено із задач найпростіших.

Отримали дві складові визначаючих уміння розв’язувати геометричні задачі, – рисунок плюс метод. Добавимо сюди третій доданок – володіння певним об’ємом допоміжних геометричних фактів і теорем, наявність активно використовуваного запасу опорних задач. Справа в тому, що теоретичну частину шкільного курсу геометрії включені в основному теореми, працюючи на сам цей курс, необхідні для подальшого його розвитку. Більшість теорем, областю додатка яких являються задачі, а не теорія, із курсу виключені. В зв’язку з цим виникає необхідність у виділенні деякої кількості так званих опорних задач, додаткових до курсу теорем, які ілюструють той чи інший метод або прийом розв’язування задач.

У процесі розв’язування задач здійснюється як алгоритмічна, так і евристична діяльність. Переважна більшість шкільних задач виконується за певними алгоритмами. Оволодіння учнями цими алгоритмами – важливе завдання навчання математики. Разом з тим розв’язування задач – творчий процес, і його не завжди можна алгоритмізувати. Як показують спостереження, найважливішу роль в розглядуваному питанні відіграють практика і навички. Але не правильно було б думати, що все залежить тільки від кількості розв’язаних задач. Велику роль відіграє і система запропонованих учням задач і ті зауваження, якими супроводжує їх вчитель, і загальні поради щодо пошуків розв'язань, складання планів, оформлення розв'язань.

Наведемо приклад схеми розв'язування геометричних задач, якою можуть користуватися учні при вивченні геометрії.

Загальна схема розв'язування геометричних задач

1. Уважно прочитати задачу і записати що в ній дано, і що вимагається.
2. Якщо йдеться про геометричні фігури, то накреслити їх, ввести позначення.
3. Скласти план розв'язування задачі.
4. Якщо такий план розв'язування задачі скласти не можна, то слід прочитати ще раз задачу, сформулювати її своїми словами, розчленувати на частини.
5. Замінити кожне поняття його означенням.
6. З'ясувати як пов'язані дані в задачі величини.
7. Записати висновки, які випливають з умови, розв'язати частину задачі.
8. Спробувати розв'язати задачу з "кінця".
9. Після розв'язування переглянути зроблене. Чи не має в міркуваннях зайвого? Чи не можна їх спростити?

2.2.1. Алгебраїчний метод розв'язування задач

Якщо безпосереднє обчислення на підставі даних задачі не приводить до потрібного результату, то можливим є використання такого способу. Позначаємо якоюсь буквою, наприклад, x, невідомий відрізок або кут, а потім пробуємо скласти рівняння, коренем якого буде шукана величина. При цьому зручно користуватися таким орієнтиром. Якщо умовою геометричної задачі на обчислення взагалі не задано відрізки або задані відрізки та кути не об'єднуються в зручний для розв'язування трикутник, то для розв'язування такої задачі звичайно вводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих).

Дамо кілька рекомендацій корисних при розв'язуванні геометричних задач алгебраїчним методом.

1. Моделювання тексту задачі за допомогою рисунка.
2. Введення позначень шуканих величин або тих, які приводять до шуканих.
3. Складання рівняння або системи рівнянь, використовуючи введені позначення та відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними величинами.
4. Розв'язування складеного рівняння або системи рівнянь. Повернення до введених позначень і визначення шуканих геометричних величин. За потреби, виконання дослідження знайдених розв'язків.
5. Запис відповіді.

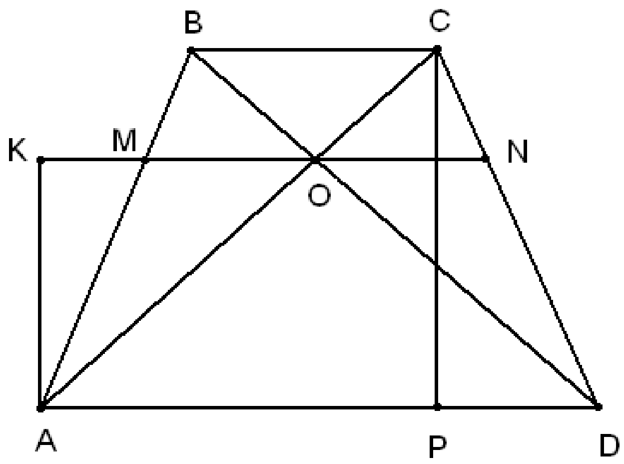
2.2.1.1. Введення допоміжного відрізка

При розв'язуванні багатьох задач можна вводити допоміжні елементи, які безпосередньо не задані в умові задачі. За їх допомогою складається рівняння, де невідомим буде шуканий елемент або елемент, потрібний для його пошуку. Іноді за допомогою цього елемента конструюється не рівняння, а співвідношення, якого потребує умова задачі.

Розглянемо допоміжний елемент – відрізок (або відношення довжин відрізків). Його зручно ввести, якщо фігури подібні. Тоді за допомогою пропорцій або геометричних побудов складається рівняння, в якому цей елемент як член рівняння скорочується, а знайти шуканий стає неважко.

Задача 1

Основи трапеції – a і b ($a<b$). Пряма, яка перетинає бічні сторони трапеції в точках M і N, проходить через точку перетину діагоналей паралельно основам. Знайти довжину відрізка MN.



Мал. 13

Дано: *ABCD* – трапеція, *a* і *b* – основи, *MN*||*BC, MN*||*AD.*

Знайти: MN.

Розв'язування. Введемо як допоміжні елементи h_1, h_2, h_3 – висоти трикутників *MBO*, *AMO* і *BCA* (мал. 13.).

Нехай *MO*=*x*, *ON*=*y*. Трикутники *MBO* і *ABD* – подібні: $\frac{x}{a} = \frac{h_1}{h}$. З подібності трикутників *AMO* і *ABC* випливає: $\frac{x}{b} = \frac{h_2}{h}$. Отже, $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{h_1 + h_2}{h}$. Але $h_1 + h_2 = h$, тому $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{h_1 + h_2}{h} = 1$; $x = \frac{a \cdot b}{a + b}$.

Аналогічно обраховуємо $ON = y = \frac{a \cdot b}{a + b}$. $MN = MO + ON$. $MN = \frac{2ab}{a + b}$.

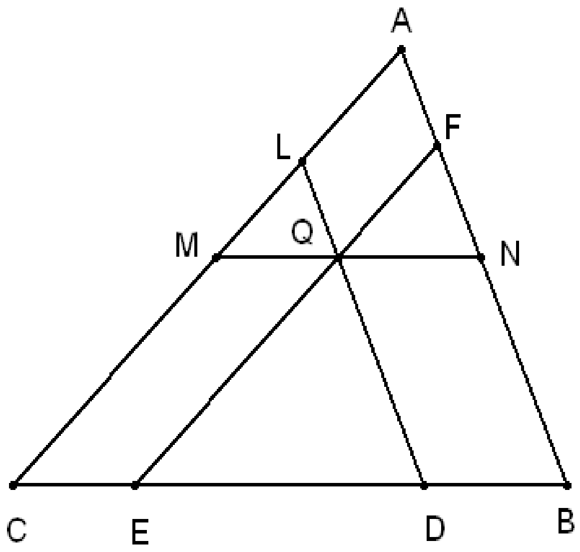
Відповідь: $\frac{2ab}{a + b}$.

Задача 2

Через довільну точку, яка належить площині трикутника *ABC*, проведено прямі, паралельні його сторонам. Довести, що відрізки a_1, b_1, c_1 цих прямих, обмежені сторонами трикутника, задовольняють умові: $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 2.$

Дано: ΔABC, *EF*||*AC, MN*||*BC, LD*||*AB.*

Довести: $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 2.$



Мал. 14

Доведення. Нехай Q – довільна точка всередині трикутника ABC, $FE||AC$, $LD||AB$ (мал. 2.2.2.). Нехай також $MG = x, DE = y, QN = z.$ Оскільки $MQ=CE$, $BD=QN$, то $\Delta AMN \sim \Delta ABC$,

$$\frac{a_1}{a} = \frac{x+z}{x+y+z}.$$

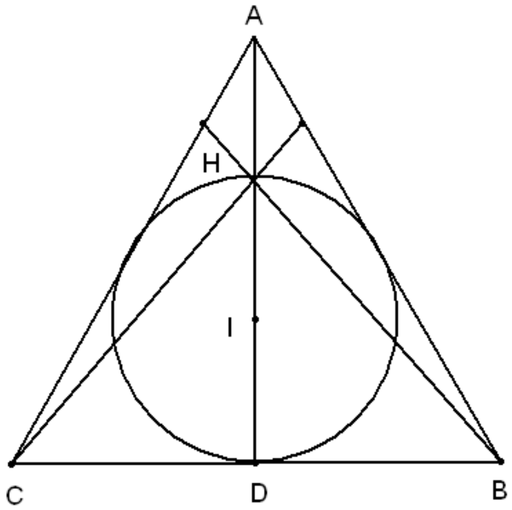
Трикутники BFE і BAC подібні: $\frac{FE}{AC} = \frac{BE}{BC}$, або $\frac{b_1}{b} = \frac{x+z}{x+y+z}$.

Далі $\frac{c_1}{c} = \frac{x+y}{x+y+z}$. Отже,

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2.$$

Задача 3

Знайти косинус кута при основі рівнобедреного трикутника, якщо його ортоцентр належить вписаному в трикутник колу.



Мал. 15

Дано: ΔABC – рівнобедрений, коло вписане в трикутник.

Знайти: $\cos \angle ABC$.

Розв'язування. За умовою ортоцентр H трикутника ABC ($AB=AC$) повинен знаходитись всередині трикутника, тому $\angle A = 90^0$ (мал. 16.).

Позначимо $\angle ABC = x$ і введемо допоміжний відрізок m – довжину відрізка BD. Оскільки $\angle HCD = \frac{\pi}{2} - x$, то

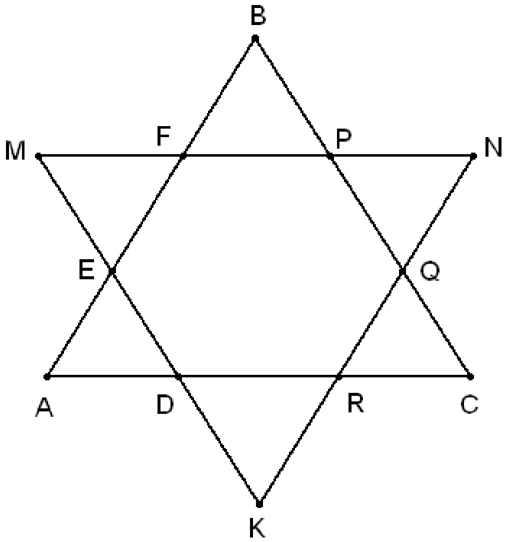
$HD = m \cdot tg(\frac{\pi}{2} - x) = m \cdot ctgx = 2ID$ (I – інцентр, D – точка дотику кола і сторони BC);

$ID = m \cdot tg\frac{x}{2}$, звідки $ctgx = 2tg\frac{x}{2}, tg\frac{x}{2} = \frac{1}{5}, \cos x = \frac{2}{3}.$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Задача 4

Дано трикутник, площа якого дорівнює S. Три прямі паралельні трьом сторонам цього трикутника, утворюють трикутник MNK з площею S' (мал. 16). Сторони цих двох трикутників визначають шість трикутників з площинами $S_1, S_2, S_3, ..., S_6$. Довести, що $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + \sqrt{S_5} + \sqrt{S_6} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$.



Мал. 16

Дано: $\Delta ABC, S_{\Delta ABC} = S$, $MN||AC$, $MK||BC$, $NK||AB$, $S_{\Delta MNK} = S'$.

Довести:

$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + \sqrt{S_5} + \sqrt{S_6} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$

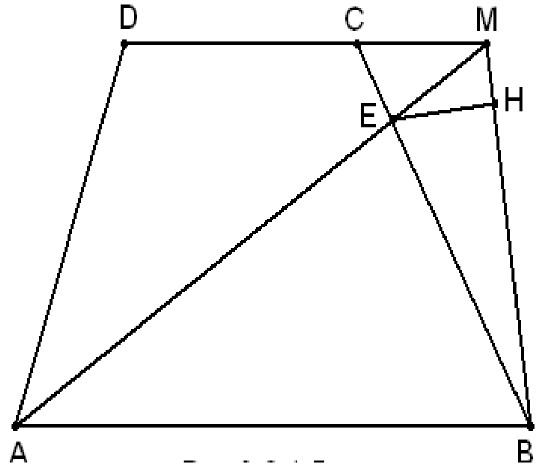
Доведення. Оскільки трикутники MNK і DAE – подібні, то $\sqrt{S'} : \sqrt{S_1} = MK : DE$

Враховуючи, що $MK = ME + ED + DK$, дістаємо $\sqrt{S'} : \sqrt{S_1} = \frac{ME}{DE} + \frac{DE}{DE} + \frac{DK}{DE}$. Отже, $\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S_1}} = \frac{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1} + \sqrt{S_6}}{\sqrt{S_1}} \Rightarrow$

$\sqrt{S'} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_6}$. Аналогічно розглянемо подібні трикутники ABC і NQP, враховуючи, що $BC = BP + PQ + QC$, дістанемо $\sqrt{S} = \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5}$. Якщо додамо рівності (1) і (2), дістанемо рівність, яку потрібно було довести.

Задача 5

В трапеції *ABCD* відрізки *DC* і *AB* – основи (*DC*<*AB*); *AB*=*a*, *DC*=*b*. Точка *M* належить продовженню *DC*. Визначити відрізок *CM*, якщо відомо, що пряма *AM* ділить площу трапеції навпіл.



Мал. 17

Дано: ABCD –трапеція, *AB*=*a*, *DC*=*b*.

Знайти: CM.

Розв'язування. В трапеції *ABCD* (рис.17) пряма *AM* перетинає *BC* в точці *E*. Позначимо *CM*=x. За умовою

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)(h_1 + h_2),$$

(h_1 і h_2 – відстані від точки *E* до прямих *DM* і *AB*).

Попередню рівність запишемо так:

$$\frac{2a}{a+b} = \frac{h_1 + h_2}{h_1} = 1 + \frac{h_2}{h_1} \qquad (1)$$

Трикутники *ABE* і *MCE* – подібні: $\frac{x}{a} = \frac{h_2}{h_1}$ (2)

Враховуючи рівності (1) і (2), дістанемо $\frac{2a}{a+b} = 2 + \frac{x}{a}$, $x = a \cdot \frac{a-b}{a+b}$.

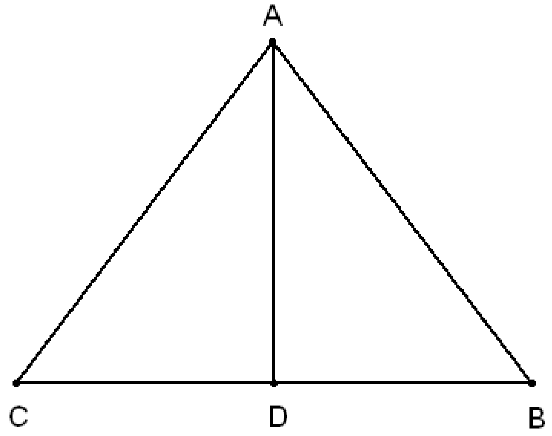
Відповідь: $a \cdot \frac{a-b}{a+b}$.

2.2.1.2. Введення допоміжного кута при розв'язуванні задач

Застосування кута як допоміжного елемента пов'язано з тригонометрією. Теореми синусів, косинусів, розв'язування трикутників дозволяють звести задачу до доведення тригонометричної тотожності, тригонометричних нерівностей або до розв'язування рівнянь чи нерівностей.

Задача 1

Довести, що в трикутнику ABC $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$, де D – точка перетину бісектриси кута BAC з стороною BC.



Мал. 18

Дано: ΔABC.

Довести: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

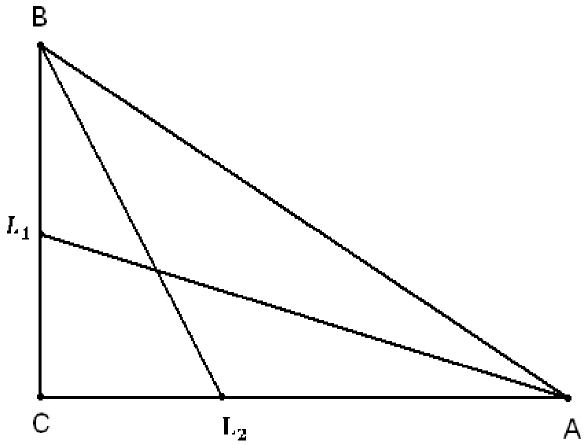
Доведення. Введемо позначення $\angle DAB=\alpha$, $\angle ADB=\beta$.

За теоремою синусів з трикутника ADB одержимо: $\frac{AD}{DB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

З трикутника CAD випливає, що $\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(180^0-\beta)}{\sin\alpha}$ або $\frac{AC}{DC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Отже, $\frac{AC}{BD}=\frac{AB}{BD}$.

Задача 2

Довести, що у прямокутному трикутнику ABC ($\angle C=90^0$)бісектриси l_a,l_b та катети a і b пов'язані співвідношенням $a\cdot l_a\sqrt{c+b}=b\cdot l_b\sqrt{c+a}$.



Мал. 19

Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$, l_a,l_b - бісектриси.

Довести: $a\cdot l_a\sqrt{c+b}=b\cdot l_b\sqrt{c+a}$.

Доведення. Введемо позначення $\alpha=\angle CAL_1$, $\beta=\angle CBL_2$ (мал. 19). З трикутників AL_1C і BL_2C маємо:

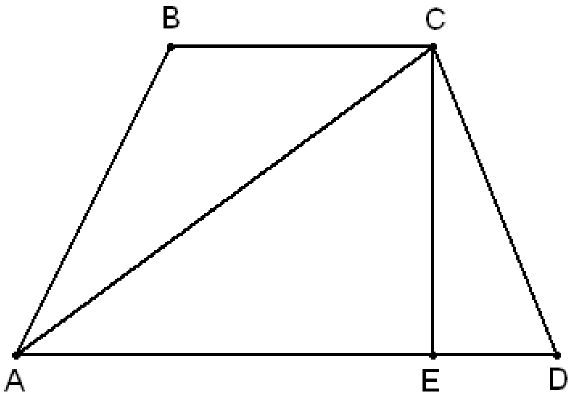
$l_a = \dfrac{b}{\cos\alpha}$, $l_b = \dfrac{a}{\cos\beta}$.

Отже, $a \cdot l_a \cos\alpha = b \cdot l_a \cos\beta$ (1)

Оскільки $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\beta}{1+\cos 2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{a}{c}}{1+\dfrac{a}{b}}} = \dfrac{\sqrt{c+a}}{c+b}$, то з співвідношення (1) слідує, що $a \cdot l_a = b \cdot l_b \dfrac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+b}}$ або $a \cdot l_a \sqrt{c+b} = b \cdot l_b \sqrt{c+a}$.

Задача 3

В трапеції *ABCD (AD||BC),* $BC = AB = \dfrac{1}{2} AD$. Відомо, що *AC=a, DC=b.* Знайти площу трапеції.



Мал. 20

Дано: ABCD – трапеція, $BC = AB = \dfrac{1}{2} AD$, *AC=a, DC=b.*

Знайти: S_{ABCD}.

Розв'язання. Введемо позначення: $\angle BCA = \alpha$, *AB=BC=x*; S_x – площа трапеції *ABCD, CE* – висота трапеції. Тоді $S_x = \dfrac{1}{2}(BC + AD) \cdot CE$.

Оскільки $BC = x$, $AD = 2x$, $CE = a\sin\alpha$, то $S_x = \dfrac{3}{2} xa \sin\alpha$ (1)

За теоремою косинусів із трикутника *ACD* одержимо $b^2 = a^2 + 4x^2 - 4ax\cos\alpha$ або $4axcoc\alpha = a^2 + 4x^2 - b^2$ (2)

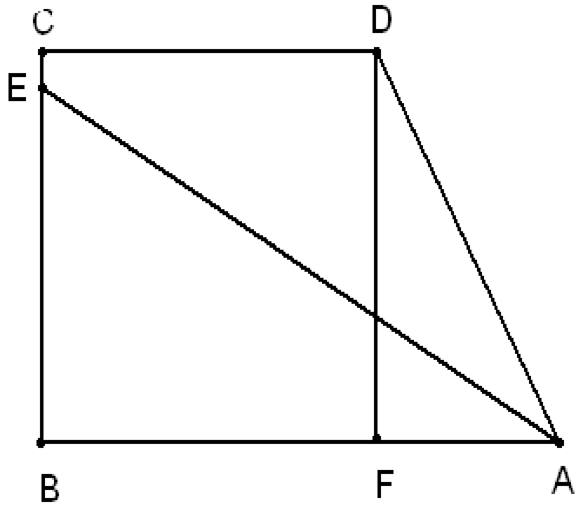
Оскільки $a = 2x\cos\alpha$ (з трикутника *ABC*), $4ax\cos\alpha = 2a^2$ і врахувавши вираз (2) запишемо так: $2a^2 = a^2 + 4x^2 - b^2$, звідки $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ (3)

Оскільки $\cos\alpha = \dfrac{a}{2x}$, то $\sin\alpha = \dfrac{1}{2x}\sqrt{4x^2 - a^2}$. Врахувавши формулу (1) отримаємо: $S_x = \dfrac{3}{2}a \cdot x \cdot \dfrac{1}{2x}\sqrt{4x^2 - a^2} = \dfrac{3}{4}a\sqrt{4x^2 - a^2}$. Враховуючи формулу (3), одержимо $S_x = \dfrac{3}{4}a \cdot \sqrt{4 \cdot \dfrac{1}{4}(a^2 + b^2) - a^2} = \dfrac{3}{4}ab$.

Відповідь: $\dfrac{3}{4}ab$.

Задача 4

В трапеції *ABCD* бічна сторона ВС перпендикулярна основам *AB* і *CD*. Бісектриса гострого кута *BAD* перетинає сторону *BC* в точці *E* так, що *BE=CD*. Довести, що в трапецію можна вписати коло.



Мал. 21

Дано: ABCD – трапеція, *BC*⊥*AB, BC*⊥ *CD*, *BE=CD*.

Довести: .

Доведення. В трапеції *ABCD* (мал. 21.) введемо позначення $\angle DAB = \alpha$, $AB = a, CD = b$ Доведемо, що . З точки *D* опустимо перпендикуляр *DF* на сторону *AB*.

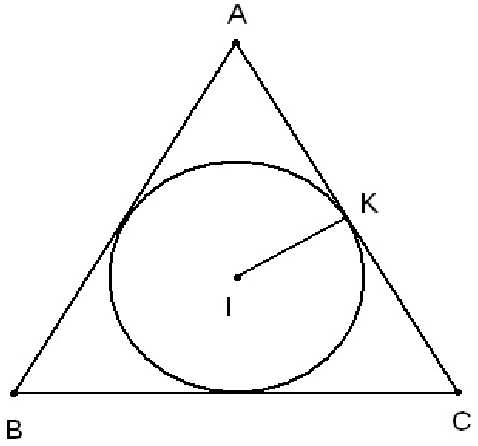
З трикутника *DFA* випливає

$$AD = \frac{a-b}{\cos\alpha}, BC = (a-b)tg\alpha, AD + BC = \frac{a-b}{\cos\alpha} + (a-b)tg\alpha = (a-b)\cdot(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}) =$$
$$= (a-b)\cdot tg(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}).$$

Але $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b}{a}$ (з трикутника *BAE*).

Задача 5

Довести формулу Герона $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$.



Мал. 22

Дано: ΔABC.

Довести: $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$

Доведення. Оскільки у трикутнику ABC:

$$ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}=ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{B}{2}\cdot ctg\frac{C}{2},$$

$$ctg\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}, ctg\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r}, ctg\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r},$$

то $\dfrac{p-a+p-b+p-c}{r}=\dfrac{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{r^3}$

або $(3p-2p)\cdot r^2=(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$.

Помножимо обидві частини рівності на p, дістанемо, що $p^2\cdot r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Враховуючи, що $S=p\cdot r$ маємо: $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Звідси $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$.

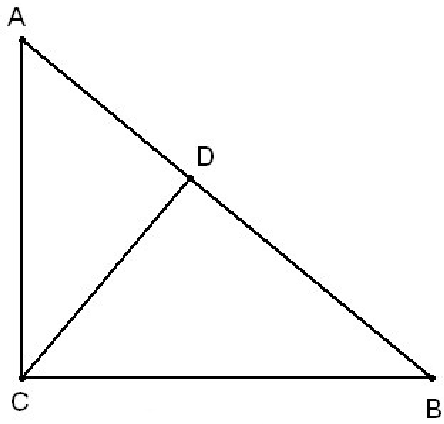
2.2.1.3. Спосіб площ

Введення площі як допоміжного елемента аналогічне введенню лінійного елемента – відрізка. Порівнюючи площі фігур, можна дістати рівняння відносно невідомих задачі або необхідне співвідношення у вигляді формули.

Краще знаходити чи порівнювати ті площі, сума (різниця) яких дає площу заданої фігури або відношення площ тих фігур, у яких лінійні елементи – шукані, або є компонентами співвідношення у вигляді формули.

Задача 1.

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C=90^0$) $a\cdot b=c\cdot h$ (h – висота). Довести це.



Мал. 23

Дано: ΔABC, $\angle C = 90^0$, $CD \perp AB$.

Довести: $a \cdot b = c \cdot h$

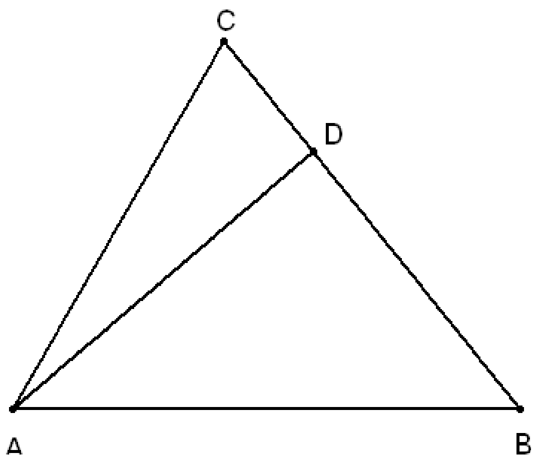
Доведення. Нехай *BC=a, AC=b, AB=c, CD=h,* а площа трикутника *ABC* рівна *S* (Мал. 2.2.2.1)

Тоді $S = \frac{1}{2}ab$ і $S = \frac{1}{2}ch$. Отже

$a \cdot b = c \cdot h$.

Задача 2

Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Обчисліть висоту, проведену до сторони, яка має довжину 14 см.



Мал. 24

Дано: ΔABC, *AC*=13 см, *CB*=14 см, *AB*=15 см, $AD \perp CB$..

Знайти: AD.

Розв'язування. За формулою Герона площа трикутника буде дорівнювати:

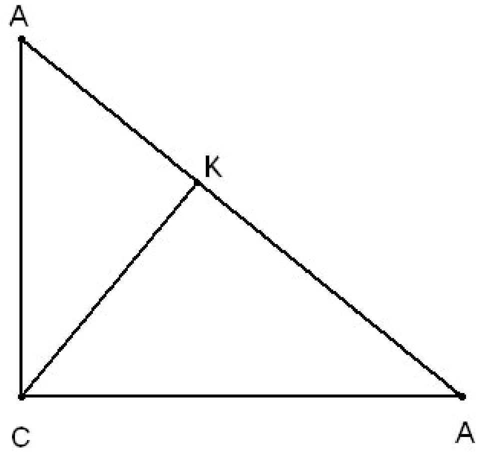
$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-CB)}$, а з іншої сторони $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CB \cdot AD$.

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} = 84$ $(см^2)$. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot CD = 7 \cdot CD.$

$7 \cdot CD = 84, CD = 12$ см.

Відповідь: 12 см.

Задача 3



Мал. 25

Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 6 см. Знайдіть довжину бісектриси прямого кута.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90^0$, *BC*=3 см, *AC*=6 см.

Знайти: CK.

Розв'язування. Нехай *CK=x*.

Знайдемо площу трикутника *ABC* двома різними способами. З однієї сторони $S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2}$, а з іншої бісектриса *CK* розділила трикутник *ABC* на два трикутники, площі яких невідомі. Але їх площі можна знайти за формулами: $S_{\Delta BCK} = \frac{1}{2} CB \cdot CK \cdot \sin \angle BCK$,

$S_{\Delta ACK} = \frac{1}{2} CK \cdot CA \cdot \sin \angle ACK$.

Оскільки *CK* бісектриса, то $\angle BCK = \angle ACK = 45^0$. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCK} + S_{\Delta ACK}$.

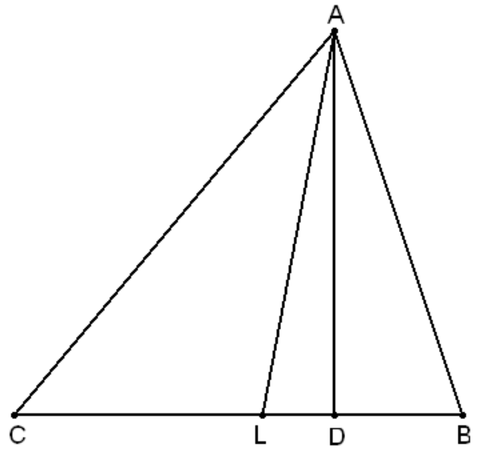
$S_{\Delta ABC} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ (см^2)$. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sin 45^0 + \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot \sin 45^0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{9\sqrt{2}}{4}x\ \ (см^2)$

Оскільки ліві частини рівностей рівні, то можемо прирівняти й праві: $\frac{9\sqrt{2}x}{4} = 9, x = 2\sqrt{2}.$ Отже, $CK = 2\sqrt{2}$ см.

Відповідь: $2\sqrt{2}$ см.

Задача 4.

У трикутнику ABC бісектриса поділяє сторону трикутника на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам. Довести це.



Мал. 26

Дано: $\Delta ABC, AL_1$ – бісектриса.

Довести: $LB : LC = AB : AC$.

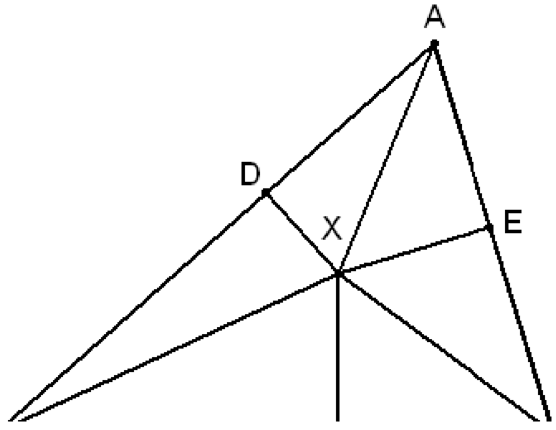
Доведення. Оскільки трикутники ALB і ALC мають спільну висоту (мал.26.) то $S_{\Delta ALB} : S_{\Delta ALC} = LB : LC$. З іншого боку:

$$\frac{S_{\Delta ALB}}{S_{\Delta ALC}} = \frac{\frac{1}{2} AL \cdot AB \cdot \sin\frac{A}{2}}{\frac{1}{2} AL \cdot AC \cdot \sin\frac{A}{2}} = \frac{AB}{AC}.$$

Отже, $LB : LC = AB : AC$.

Задача 5

В трикутнику ABC d_1, d_2, d_3 – відстані від довільної точки x до сторін *BC, AC, AB*. Довести, що $\frac{d_1}{h_a} + \frac{d_2}{h_b} + \frac{d_3}{h_c} = 1$.



Мал. 27

Дано: ΔABC , x – довільна точка.

Довести: $\frac{d_1}{h_a} + \frac{d_2}{h_b} + \frac{d_3}{h_c} = 1$.

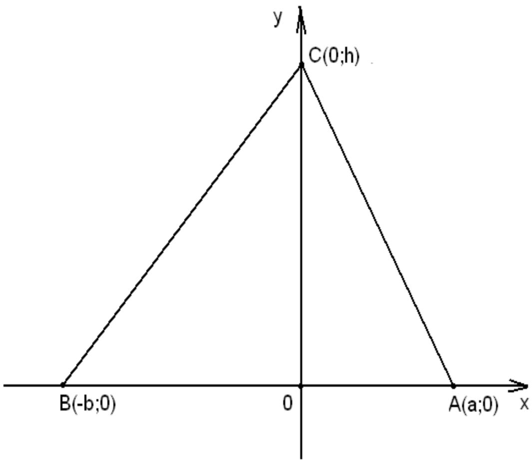
Доведення. У трикутнику BXC висота $XX_1 = d_1$ мал. 27.).

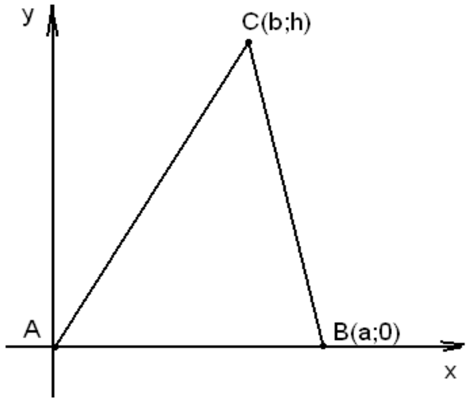
Оскільки трикутники *BXC* і *ABC* мають спільну сторону *BC*, то $\frac{S_{\Delta BXC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{d_1}{h_a}$. Аналогічно $\frac{S_{\Delta AXC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{d_2}{h_b}$, $\frac{S_{\Delta AXB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{d_3}{h_c}$.

Отже, $\frac{d_1}{h_a} + \frac{d_2}{h_b} + \frac{d_3}{h_c} = \frac{S_{\Delta BXC} + S_{\Delta AXC} + S_{\Delta AXB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}} = 1.$

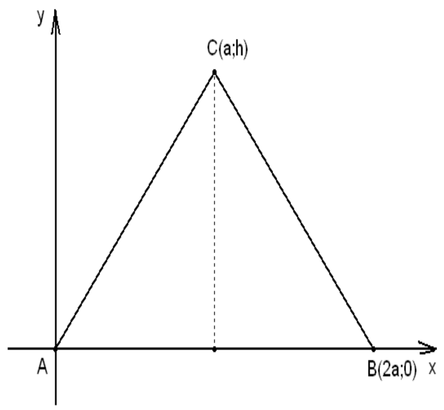
2.2.2. Розв'язування планіметричних задач координатним методом

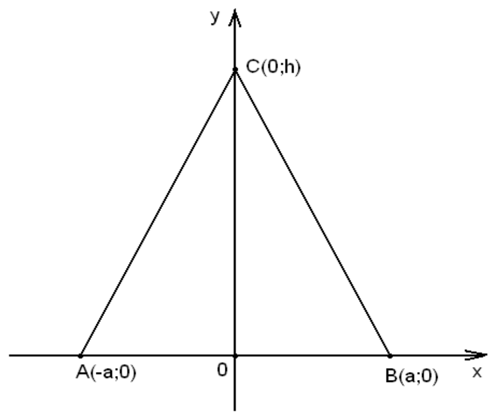
Зв'язуючою ланкою між фігурами і числами є система координат, яка дозволяє встановити взаємнооднозначну відповідність між точками прямої (площини) і дійсними числами (парами дійсних чисел), тобто дати імена безіменним точкам. Звичайно, вибір системи координат нічим не регламентується, але, як правило, вибирають прямокутну декартову систему координат, розміщуючи її найзручніше. Наведемо приклади таких розміщень.



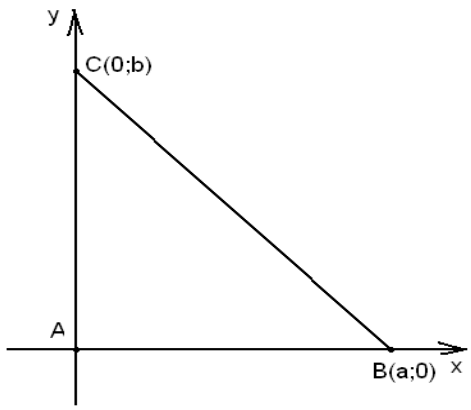


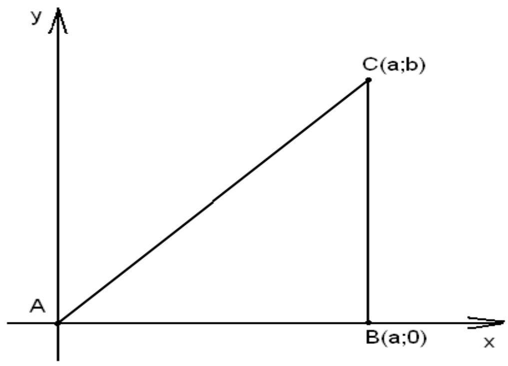
Довільний трикутник



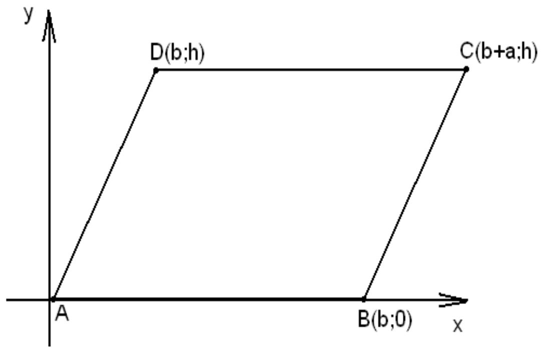


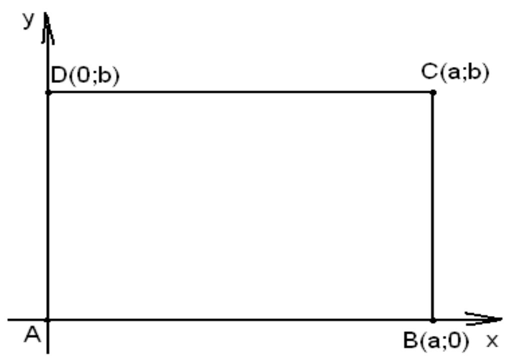
Рівнобедрений трикутник



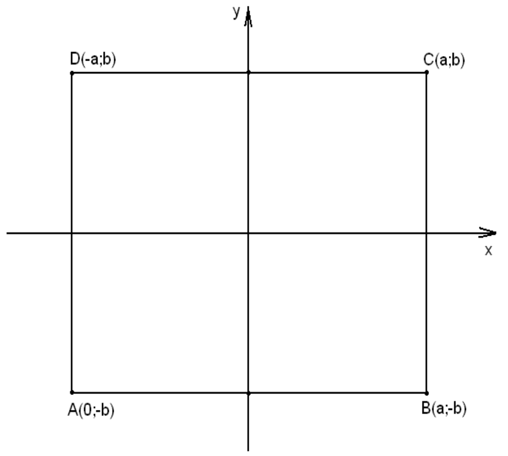


Прямокутний трикутник

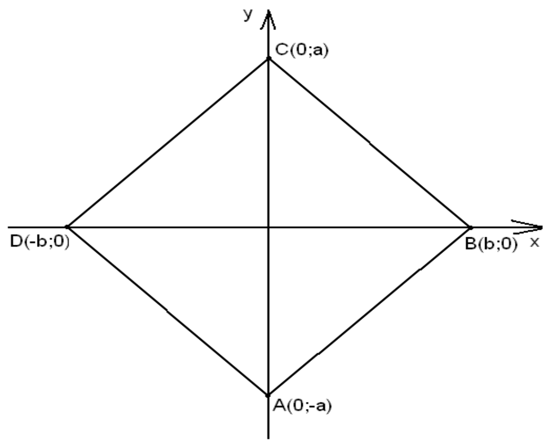




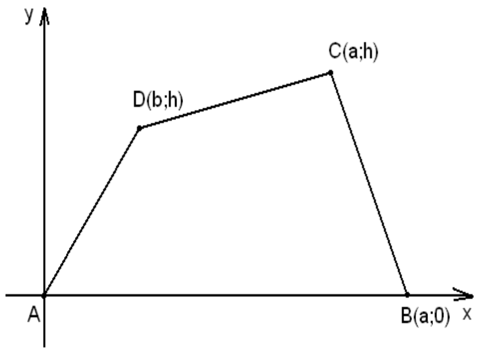
Паралелограм



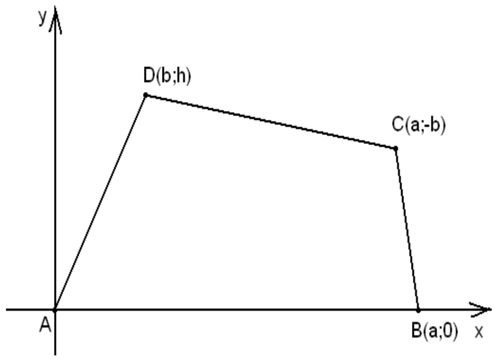
Прямокутник



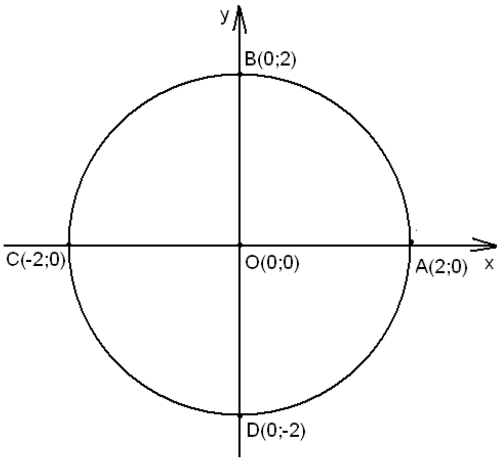
Квадрат

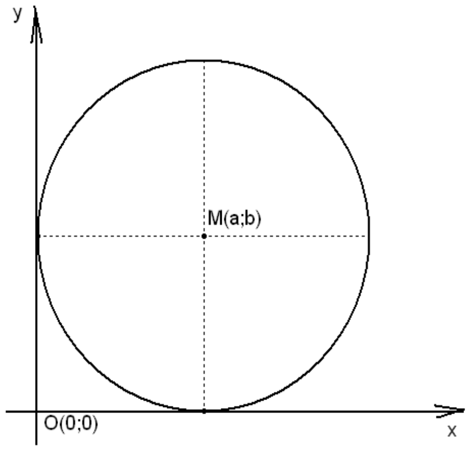


Ромб



Довільний чотирикутник





Коло

Після розміщення фігури, її вважають заданою, якщо задано рівняння або нерівність, або їх система яким задовольняють координати будь-якої точки, фігури і не задовольняють координати точок, які не належать фігурі.

Суть координатного методу розв'язування геометричної задачі полягає у виборі системи координат, складанні за заданими геометричними властивостями рівнянь, нерівностей або їх систем, в проведенні алгебраїчного аналізу і в з'ясуванні геометричного змісту кінцевого результату.

Порівнюючи цей метод з алгебраїчним, можна помітити, що він істотно спрощує міркування і дозволяє розв'язувати задачі за певним алгоритмом. Проте обсяг викладок може бути значним, а інколи, що саме головне з методичної точки зору, втрачається геометрична суть задачі.

Наведемо перелік аналітичних умов, які задають основні геометричні фігури або виражають найпростіше відношення між ними (система координат – прямокутна декартова).

1. Нехай $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ – дві різні точки. Тоді рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2 має наступний вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

2. Точка M з координатами $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $(\lambda \neq -1)$, ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ, тобто $M_1M=\lambda \cdot MM_2$.

3. Рівняння $y-y_0=k(x-x_0)$ є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k, яке проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$.

4. Рівняння $Ax+By+C=0$ задає пряму l на площині, причому вектор $\vec{n}=(A;B)$ перпендикулярний до прямої, а вектор $\vec{l}=(-B;A)$

паралельний прямій ($\vec{n}$– вектор нормалі, $\vec{l}$ – напрямний вектор). Нерівності $Ax+By+c<0,\ \ Ax+By+C>0$ задають дві площини, на які пряма l ділить координатну площину.

5. Дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ лежать в одній півплощині тоді і тільки тоді, коли $(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)>0.$

6. Відстань між двома точками $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ обчислюється за формулою: $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

7. Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої l, заданої рівнянням $Ax+By+C=0$, обчислюється за формулою: $d(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

8. Нехай маємо два рівняння: $A_1x+B_1y+C=0, A_2x+B_2y+C=0$. Вони задають одну пряму, якщо існує таке λ, що $A_2=\lambda A_1, B_2=\lambda B_1, C_2=\lambda C_1$, паралельні прямі, якщо $A_2=\lambda A_1, B_2=\lambda B_1, C_2=\lambda C_1$, перпендикулярні, якщо $A_1A_2+B_1B_2=0$. Кут між такими прямими обчислюється за формулою: $tg\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.

9. Для прямих, заданих рівняннями $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$.

Умова паралельності: $k_1=k_2$.

Умова перпендикулярності: $k_1k_2=-1$.

Кут між такими прямими обчислюється за формулою: $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

10. Рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ задає коло радіуса R з центром у точці $O(a;b)$. Рівняння $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$ є рівнянням дотичної до нього у точці $M_0(x_0;y_0)$.

11. Координати середини відрізка: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

12. Рівняння кола з центром в точці $A(a;b)$ і радіусом R:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Відповідний круг задаватиметься нерівністю: $(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$.

13. Рівняння кола з центром у початку координат: $x^2+y^2=R^2$.

Відповідний круг задаватиметься нерівністю: $x^2+y^2\le R^2$.

Для підготовки учнів до розв'язування геометричних задач координатним методом варто вже з перших уроків по темі пропонувати учням усні вправи на введення системи координат, пов'язаної із зданою фігурою.

Перші задачі на застосування методу координат потрібно підбирати так, щоб при їх розв'язуванні легко вводилася система координат і легко можна було визначити координати точок (найчастіше це задачі пов'язані з прямокутниками, прямокутними трикутниками, паралелограмами, трапеціями).

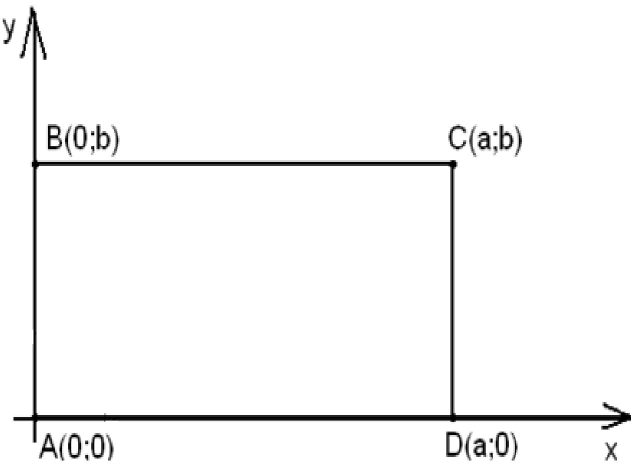
Розв'язуючи задачу координатним методом, слід виконати такі дії:

1. Раціонально вибрати систему координат: дану фігуру слід розмістити відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювало нулю.
2. Перетворити вираз чи обчислити його значення.
3. Перевести знайдений результат на мову геометрії.
4. Записати відповідь.

Методом координат найчастіше розв'язують задачі:

– на відшукання геометричних місць точок;

– на доведення залежностей між лінійними елементами геометричних фігур.



Мал. 28

Розв'язуючи задачу методом координат, як уже зазначалося, потрібно раціонально вибрати систему координат. Наприклад, координати вершин прямокутника *ABCD* можна вибрати так, як на мал. 28.

Задача 1

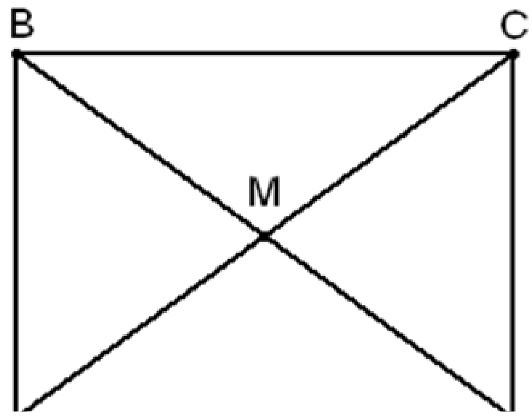
На мал. (29.) зображено прямокутник з сторонами *a* і *b*. Виберіть систему координат таким чином, щоб три вершини прямокутника лежали на осях координат. Запишіть координати всіх вершин прямокутника і координати точки перетину діагоналей.

Розв'язування.

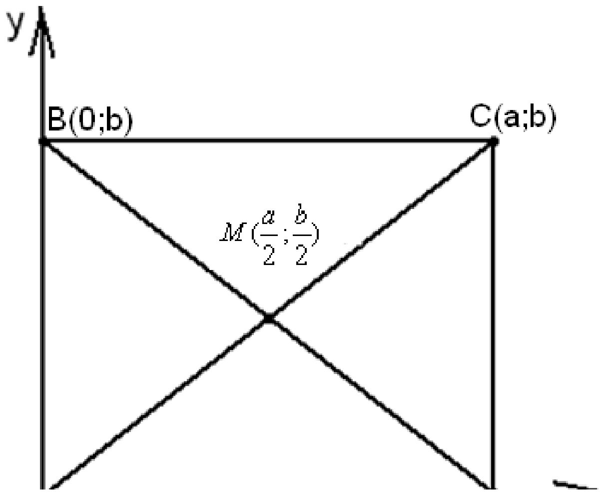
Нехай дано прямокутник зі сторонами *a* і *b.* Якщо розмістити систему координат так, як вимагається в умові задачі (мал 30.), то вершини прямокутника *ABCD* матимуть координати: $A(0;0),\ B(0;b),\ C(a;b),\ D(a;0)$.

Скориставшись формулою (11), отримаємо, що точка *M,* яка є точкою

+перетину діагоналей прямокутника матиме координати: $M(\frac{a}{2};\frac{b}{2})$.



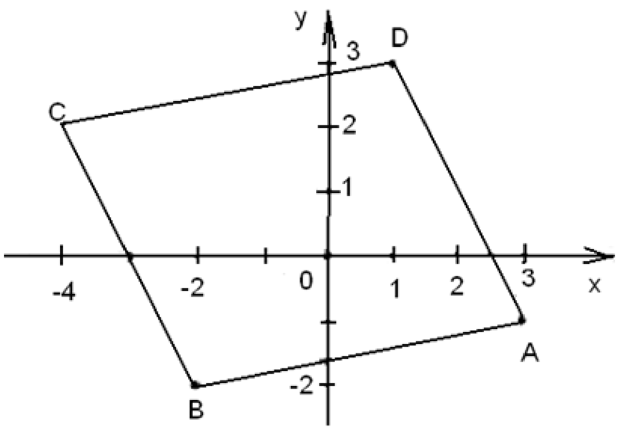
Мал. 29



Мал. 2

Задача 2

Визначити вид чотирикутника *ABCD,* де $A(3;-1)$, $B(-2;-2)$, $C(-4;2)$, $D(1;3)$



Мал. 3

Дано: ABCD – чотирикутник, $A(3;-1)$, $B(-2;-2)$, $C(-4;2)$, $D(1;3)$.

Визначити: вид чотирикутника.

Розв'язування. Побудуємо чотирикутник на координатній площині(мал.31.)

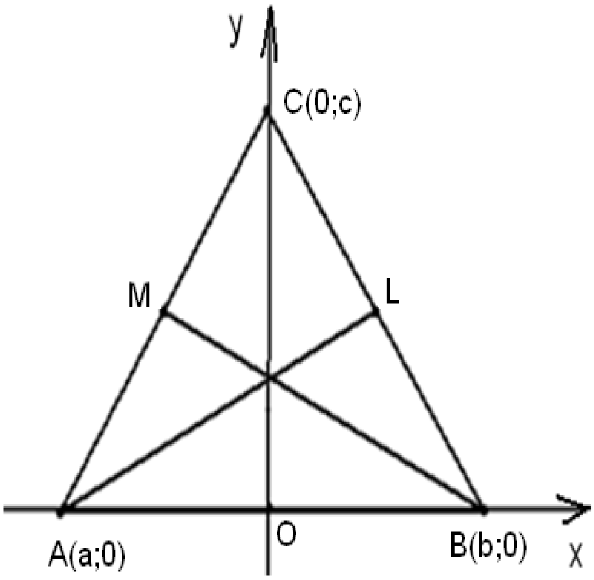
Скористаємося формулою для обчислення довжини: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ і обчислимо відповідні довжини сторін даного чотирикутника: $AB=\sqrt{(-2-3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{26}$, $DC=\sqrt{(-4-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{26}$,

$AD=\sqrt{(1-3)^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{20}$, $DC=\sqrt{(-4+2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}$.

Отримали, що *AD=BC, AB=DC,* тобто чотирикутник *ABCD* є паралелограмом.

Задача 3

Доведіть, що коли дві медіани трикутника рівні, то трикутник – рівнобедрений.



Мал. 4

Дано: ΔABC, *AL, BM* – медіани.

Довести: ΔABC – рівнобедрений.

Доведення. Нехай у трикутнику *ABC* медіани *AL* і *BM* рівні. Потрібно довести, що трикутник рівнобедрений. Виберемо систему координат *Oxy* так, щоб вісь *Ox* містила основу *AB* трикутника, а вісь *Oy* – вершину *C*.

Нехай у цій системі вершини трикутника мають такі координати: $A(a;0), B(b;0), C(0;c)$, де *a, b, c* – взяті з відповідними знаками довжини відрізків *OA, OB, OC*.

Оскільки точки *L* і *M* – середини відрізків *BC* і *AC*, то їхні координати можна визначити за відомими формулами. Отримаємо: $L(\frac{b}{2};\frac{c}{2}), M(\frac{a}{2};\frac{c}{2})$. Тоді за формулою для довжини відрізка знаходимо: $AL = \sqrt{(\frac{b}{2}-a)^2 + \frac{c^2}{4}}$; $BM = \sqrt{(\frac{a}{2}-b)^2 + \frac{c^2}{4}}$.

Оскільки за умовою *AL=BM*, то отримаємо $\sqrt{(\frac{b}{2}-a)^2 + \frac{c^2}{4}} = \sqrt{(\frac{a}{2}-b)^2 + \frac{c^2}{4}}$.

Підносячи до квадрату обидві частини одержаної рівності, після відповідних спрощень отримаємо рівність: $a^2 = b^2$.

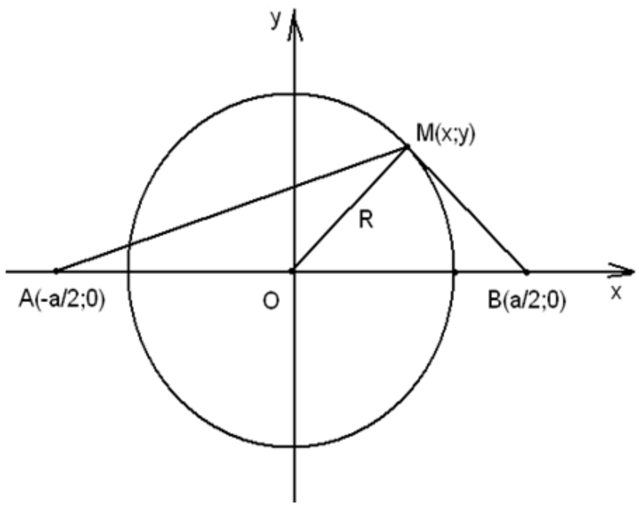
Обчислимо тепер довжини відрізків *AC* і *BC*: $AC = \sqrt{a^2 + c^2}$; $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$

.

Оскільки $a^2 = b^2$, то *AC=BC*, що й означає, що трикутник *ABC* – рівнобедрений.

Задача 4

Дано відрізок *AB* завдовжки *a* і коло радіуса *R* з центром в середині відрізка *AB*. Довести, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до точок *A* і *B* є сталою.



Мал. 5

Дано: AB=a, коло, радіуса *R*.

Довести: $MA^2 + MB^2 = const$.

Доведення. Виберемо систему координат *Oxy* таким чином, щоб вісь *Ox* містила заданий відрізок *AB*, а початок координат *O* був серединою цього відрізка.

Тоді кінці відрізка матимуть такі координати: $A(-\frac{a}{2};0); B(\frac{a}{2};0)$.

Нехай $M(x;y)$ довільна точка заданого кола радіуса *R*. Оскільки центр кола збігається з початком координат, то його рівняння має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$ (1)

Координати точки *M* задовольняють це рівняння.

Далі за формулою для відстані між двома точками знаходимо:

$$MA^2 = (x + \frac{a}{2})^2 + y^2.$$

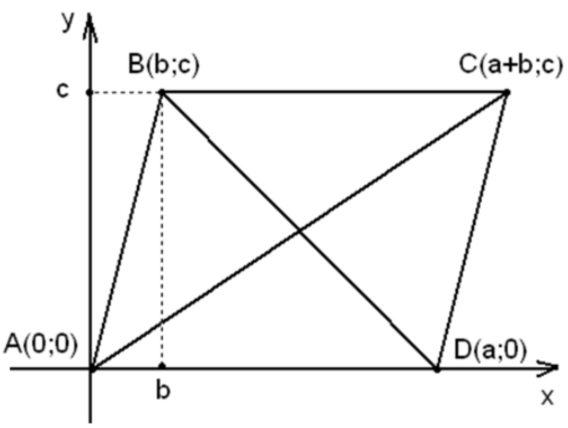
Отже, $MA^2 + MB^2 = (x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{2}).$

Враховуючи рівняння (1), остаточно одержимо: $MA^2 + MB^2 = 2R^2 + a^2$

Знайдена сума не залежить від координат точки *M*, отже, для усіх точок кола вона однакова. Твердження задачі доведено.

Задача 5

Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він –прямокутник.



Мал. 6

Дано: ABCD – паралелограм, *AC=BD*.

Довести: ABCD – прямокутник.

Розв'язання. Перший крок. Записуємо задачу мовою координат. Розміщуємо систему координат відносно паралелограма так, щоб його вершини мали координати:

$A(0;0), B(b;c), C(a+b;c), D(a;0).$ (Рис.2.3.6.).

За умовою *AC=BD*. Подаємо відстані між точками *A* і *C, B* і *D* через їх координати: $\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}$; $(a+b)^2+c^2=(a-b)^2+c^2$.

Другий крок. Перетворюємо одержану рівність:

$a^2+2ab+b^2+c^2=a^2-2ab+b^2+c^2 \Rightarrow 4ab=0.$

Третій крок. З останньої рівності випливає:

оскільки $a>0,$ то $b=0.$ Це означає, що точка $B(b;c)$ лежить на осі *Oy*. Тому кут *BAD* прямий, а звідси паралелограм *ABCD* – прямокутник.

2.2.3. Розв'язування планіметричних задач векторним методом

Суть векторного методу розв'язування задач полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок і прямих записати мовою векторів, точніше – у вигляді векторної рівності, і, навпаки, мову векторних формул і рівностей наповнити геометричним змістом, тобто перевести ту чи іншу векторну рівність на мову геометрії, надати їй геометричного звучання. Про ступінь оволодіння учнем методом векторів при розв'язуванні задач можна судити з того, наскільки вільно він вміє перейти від векторної мови до мови геометрії, і навпаки.

Особливістю методу векторів є те, що він не вимагає розгляду складних геометричних конфігурацій, а зводить геометричну задачу до алгебраїчної, яку, звичайно, легше розв'язати, ніж вихідну геометричну.

Задачі, які розв'язуються за допомогою векторів, поділяються на дві групи: афінні і метричні.

Задачі афінної частини геометрії розв'язуються із застосуванням лише лінійних операцій: додавання і віднімання векторів та множення вектора на число. Тут переважно ставиться вимога довести паралельність прямих, довести, що дані точки розміщені на одній прямій.

У задачах метричної частини геометрії, крім лінійних операцій, ще застосовується скалярний добуток векторів, і найчастіше ставиться вимога знайти довжину відрізка, величину кута, встановити відношення перпендикулярності прямих та ін.

Як вже зазначалося вище, суть векторного методу розв'язування задач полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок і прямих записати мовою векторів, точніше – у вигляді векторної рівності, і, навпаки, мову векторних формул і рівностей наповнити геометричним змістом, тобто перевести ту чи іншу векторну рівність на мову геометрії, надати їй геометричного звучання. Вказаний підхід до розв'язання задач векторним методом корисно зафіксувати в спеціальній довідковій таблиці (і в зошитах учнів) у формі загальної схеми векторного розв'язання геометричної задачі (Таблиця 1).

Таблиця 1.

Схема розв'язування геометричних задач векторним методом

Крок	Дії на даному кроці

1.	Перевести вимогу в задачі на векторну мову (записати векторні співвідношення, згідно з умовою задачі).
2.	Вибрати прямокутну систему координат (або вибрати два неколінеарні вектори в якості базисних).
3.	Знайти координати векторів, що входять у співвідношення або виразити ці вектори через базисні.
4.	Довести або знайти дане співвідношення і перевести результат на геометричну мову.

Ця ж таблиця служить і для оберненого переводу векторних співвідношень на геометричну мову. Для роботи з таблицею необхідно пояснити учням всі дані, що входять до неї.

На перших уроках на застосування векторного методу до розв’язування геометричних задач варто ознайомити учнів із загальною схемою розв’язання геометричних задач векторним методом. Для навчання учнів розв’язувати задачі векторним методом найбільш підходящими є задачі з конкретними числовими даними, так як іноді громіздкі алгебраїчні перетворення в процесі розв’язування приховують від учнів не тільки геометричну суть задачі, але й схему векторного розв’язування цієї задачі.

При розв’язуванні геометричних задач векторним методом доцільно користуватися Таблицею 2. Для переводу геометричних фактів на векторну мову і навпаки.

Найважчим для учнів є позначення векторів на рисунку. Досвід раціонального позначення векторів набувається на практиці, а певні орієнтири в цьому дає аналіз формулювання задачі. Для формування навичок використання правила-орієнтира варто запропонувати учням розв'язати векторним методом відомі з планіметрії твердження про властивість середньої лінії трикутника, про суму квадратів діагоналей паралелограма, властивість діагоналей ромба, прямокутника.

Таблиця 2.

Основні відношення між фігурами

№	Мова геометрії	Мова векторів
1	$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$
2	$AB \perp CD$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
3	а - пряма, А,В,С – точки на прямій а.	$\overline{AB} = k \cdot \overline{BC}$, або $\overline{AC} = k \cdot BC$ або $\overline{AC} = k \cdot \overline{AB}$, або $\overline{OC} = p \cdot \overrightarrow{OA} + q \cdot \overrightarrow{OB}$, де О – довільна точка, $p+q=1$.
4	$M = M_1$	$\overrightarrow{MM_1} = \vec{0}$, або $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM}$, де О – довільна точка.
5	O,A,B,C – точки на площині α.	$x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, де x, y, z – дійсні числа.
6.	$AB \parallel \alpha, CD \parallel \alpha, EF \parallel \alpha$, де AB, CD, EF – прямі, α – площина, AB і CD – перетинаються.	$\overrightarrow{EF} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{CD}$ x, y – дійсні числа.
7.	M_1 – середина відрізка A_1B_1, M_2 – середина відрізка A_2B_2.	$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$
8.	$OABC$ – паралелограм.	а) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, A, B, C не лежать на одній прямій.
9.	$AB = m$, де AB – відрізок, m – довжина AB.	$m^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB^2}$
10.	M – центроїд ΔABC	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, де О – довільна точка або $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} +$ $+\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Задача 1

Дано вектори $\vec{a}(-5; 4)$ і $\vec{b}(2; -2)$. Знайдіть:

а) їх суму;

б) їх різницю;

в) вектор $2\vec{a} - 3\vec{b}$;

г) модулі даних векторів;

д) їх скалярний добуток;

е) косинус кута між даними векторами.

Розв'язування.

а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}(-5+2;4-2)=\vec{c}(-3;2)$;

б) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}(-5-2;4+2)=\vec{d}(-7;6)$;

в) $2\vec{a}-3\vec{b}=(-10;8)-(6;-6)=(-16;14);|\vec{a}|=\sqrt{(-5)^2+4^2}=\sqrt{41};|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$.

д) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5\cdot 2+4\cdot(-2)=-18$;

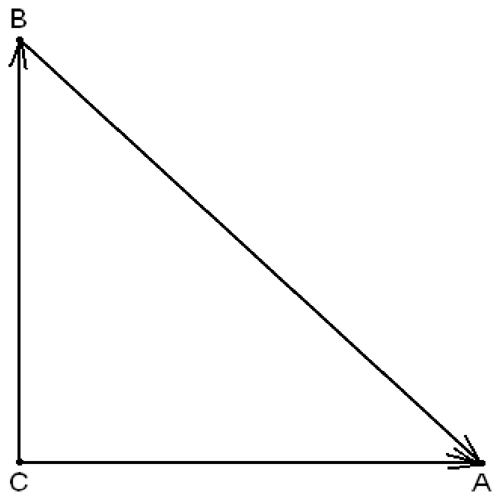
е) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=-18;|\vec{a}|=\sqrt{41};|\vec{b}|=\sqrt{8}$ тому $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{-18}{\sqrt{41\cdot 8}}=-\frac{9}{\sqrt{164}}$.

За допомогою векторногою векторного методу можна набагато простіше розв'язувати велику кількість задач.

Зокрема такі основні теореми геометрії.

Задача 2

Довести, що в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів (теорема Піфагора).



Мал. 7

Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$.

Довести: $AB^2=AC^2+CB^2$.

Доведення. Очевидно, що $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$, враховуючи теорему косинусів можна записати: $|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{CB}|^2-2|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos\angle C$

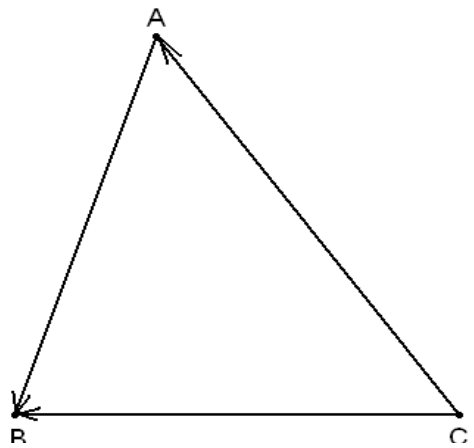
Оскільки, $\cos\angle C=0$ ($\angle C=90^0$), то $|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{CB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2$.

Отже, $AB^2=AC^2+CB^2$.

Задача 3

Довести, що для будь-якого трикутника справедлива формула

$\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a}\vec{b}\cos\angle C$ (теорема косинусів).



Дано: ΔABC.

Довести: $\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a}\vec{b}\cos\angle C$.

Доведення. Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{CB}, \vec{b} = \overrightarrow{CA}, \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, тоді $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, і отримаємо (враховуючи, що кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\angle C$):

$$c^2 = \vec{c}^{\,2} = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2} =$$
$$= a^2 - 2ab \cdot \cos\angle C + b^2.$$

Мал. 8

Задача 4

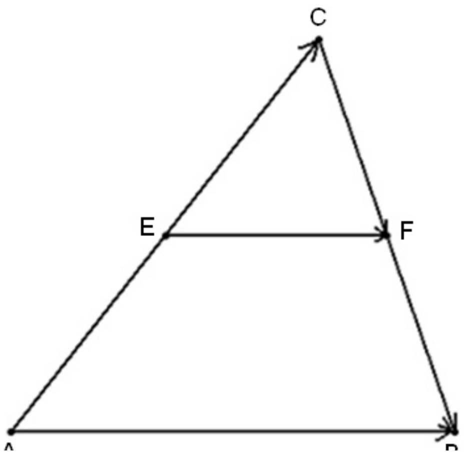
Знайти довжину векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо задано координати точок $A(2;4), B(8;10), C(-6;13), D(3;5)$.

Розв'язування.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$. Для цього необхідно від координат кінцевої точки відняти відповідні координати початкової точки. Отримаємо: $\overrightarrow{AB} = (8-2;10-4) = (6;6)$ $\overrightarrow{CD} = (3+6;5-13) = (9;-8)$. Обчислимо довжину даних векторів: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + (-8)^2} = \sqrt{145}$.

Відповідь: $6\sqrt{2}, \sqrt{145}$.

Задача 5



Доведіть,що середня лінія трикутника паралельна стороні й дорівнює її половині.

Дано: ΔABC, *EF* – середня лінія трикутника.

Довести: $EF || AC$, $EF = \frac{1}{2} AC$.

Мал. 9

Доведення. Нехай *EF* – середня лінія трикутника А*BC* (мал. 37). Доведемо рівності: $EF||AC$ і $EF = \frac{1}{2}AC$.

Перший крок. Сформулюємо вимогу задачі мовою векторів: позначимо на малюнку вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{EF}$. Тоді вимогу задачі запишемо так: $EF = \frac{1}{2}AC$. Другий крок. За правилом трикутника $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$.

Перетворимо цю векторну рівність, враховуючи, що $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Дістанемо: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

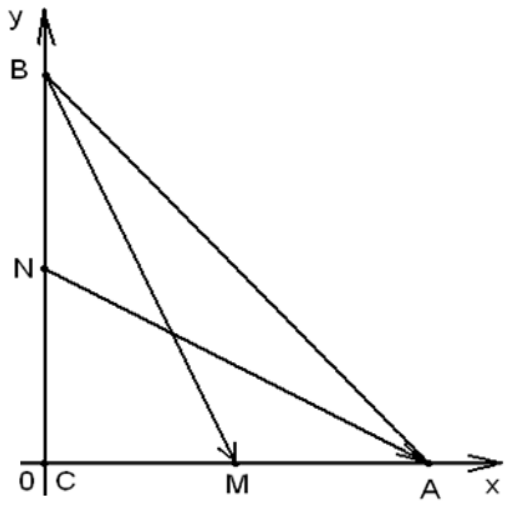
Третій крок. З останньої векторної рівності $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ випливає:

1) вектори $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні і, отже відрізки *EF* і *AC* паралельні;

2) $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, або $EF = \frac{1}{2}AC$.

Задача 6

Дано “єгипетський” прямокутний трикутник з катетами 3 і 4. Визначити кут між медіанами, проведеними до його катетів.



Мал. 10

Дано: ΔABC, $\angle C = 90^0$, *AC=3*, *BC=4.*

Знайти: φ.

Розв'язування. Введемо систему координат *Oxy*, направивши вісь *Ox* по катету *CA* завдовжки 3 одиниці, а вісь *Oy* – по катету *CB* завдовжки 4 одиниці. (мал. 38). Нехай *M, N* – середини катетів *CA* і *CB*.

Тоді шуканим є кут φ між векторами $\overrightarrow{NA}$ і $\overrightarrow{BM}$. Запишемо координати точок *A, B, M*, *N*. $A(3;0), B(0;4), M(\frac{3}{2};0), N(0;2).$ Тоді $\overrightarrow{NA}(3;-2), \overrightarrow{BM}(\frac{3}{2};-4)$, $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{NA}|\cdot|\overrightarrow{BM}|}$

$\cos\varphi = \frac{3\cdot\frac{3}{2}+(-2)\cdot(-4)}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(\frac{3}{2})^2+4^2}} = \frac{25}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{73}} \approx 0{,}8115$. За таблицями знаходимо, що $\varphi \approx 35^0 10'$.

Відповідь: $35^0 10'$.

2.2.4. Методи геометричних перетворень.

Як відомо, навчання учнів розв’язанню геометричних задач із використанням геометричних перетворень представляють особливу трудність для вчителів. Це пов’язано з тим, що розв’язування задач даним методом не можна звести до визначених алгоритмів або вказівок. Розв’язання кожної задачі представляє творчий процес.

Тому , перш ніж приступити до навчання розв’язувати задачі даними методами, особливу увагу необхідно приділити поетапному формуванню наступних умінь:

1) будувати образи фігур при переміщені і гомотетії;

2) знаходити відповідні в перетвореннях точки на даних відповідних у тому ж перетворені фігурах;

3) виділяти елементи, що визначають перетворення: осі симетрії, центр і кут повороту, напрям і відстань паралельного перенесення, центр, коефіцієнт гомотетії;

4) будувати відповідні в перетвореннях точки на заданих фігурах.

І тільки переконавшись, що учні вільно володіють вказаними методами, можна приступити до навчання розв’язування задач.

Для виявлення рівня сформованості уміння призначені діагностичні задачі, дані перед зразками розв’язання задач кожним методом.

2.2.4.1. Метод паралельного перенесення

Якщо система $O'x'y'$ одержується із системи Oxy паралельним перенесенням, то й відповідне переміщення називається паралельними перенесенням. Позначимо через $(x';y')$ координати образу M' точки $M(x;y)$ у системі координат Oxy і знайдемо вираження для них через координати $(x;y)$ та координати $(x_0;y_0)$ точки O'. Зв'язок між "сторими" координатами $(x';y')$ в системі Oxy і "новими" $(x;y)$ виражається формулами:

$$\begin{aligned} x &= x' - x_0; \\ y &= y' - y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Звідси $$\begin{aligned} x' &= x + x_0; \\ y' &= y + y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Формули (2) називаються формулами паралельного перенесення. Вони виражають координати $(x';y')$ образу точки через координати $(x;y)$ самої точки в одній і тій самій системі координат Oxy. Сталі числа x_0, y_0 одержуються з формул (2) при підстановці у них значень *x=y=0.* Отже, це – координати образу O' точки O при паралельному перенесенні.

Подальше виведення властивостей паралельного перенесення можна проводити уже на основі формул (1) і (2).

Задача 1

Кожній точці $X(x;y)$ фігури поставлено у відповідність точка $X_1(x+m;y+n)$, m,n – задані числа. Доведіть, що таке перетворення фігури F є паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}(m;n)$.

Розв'язання.

Розглянемо вектор $\vec{a}(m;n)$. Зауважимо, що координати вектора $\overrightarrow{XX_1}$ дорівнюють $(m;n)$, тобто $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Отже, описане перетворення фігури F – паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$.

Задача 2

Точка $A_1(-2;3)$ є образом точки $A(-1;2)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$ і координати образу точки $B(-7;-3)$.

Розв'язання.

З умови випливає, що $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Звідси $\vec{a}(-1;1)$. Нехай $B_1(x;y)$ - образ точки $B(-7;-3)$. Тоді $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, тобто $x + 7 = -1$ і $y + 3 = 1 \Rightarrow x = -8, y = -2.$

Задача 3

Унаслідок паралельного перенесення точка $(-2;1)$ переходить у точку $(3;-6)$. У яку точку внаслідок такого перетворення переходить початок координат?

Розв'язання.

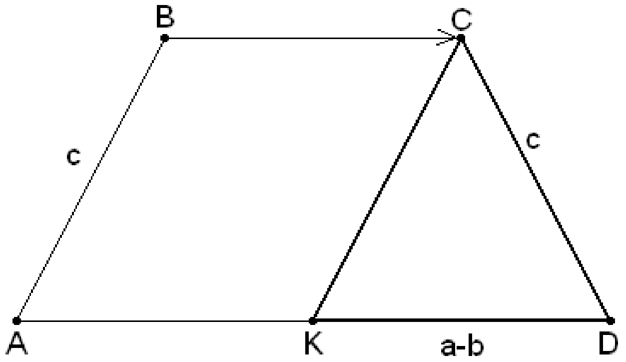
Нехай паралельне перенесення задано формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$. Оскільки точка $(-2;1)$ переходить у точку $(3;-6)$, то $3=-2+a$, $-6=1+b$. Звідси $a=5$, $b=-7$, тобто дане паралельне перенесення задається формулами $x' = x + 5$, $y' = y - 7$. Підставивши в ці формули координати початку координат $x=0$, $y=0$, маємо $x' = 0 + 5 = 5$, $y' = 0 - 7 = -7.$

Отже, початок координат переходить у точку $(5;-7)$.

Відповідь: $(5;-7)$.

Задача 4

У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60^0. Доведіть, що бічна сторона дорівнює різниці основ трапеції.



Мал. 11

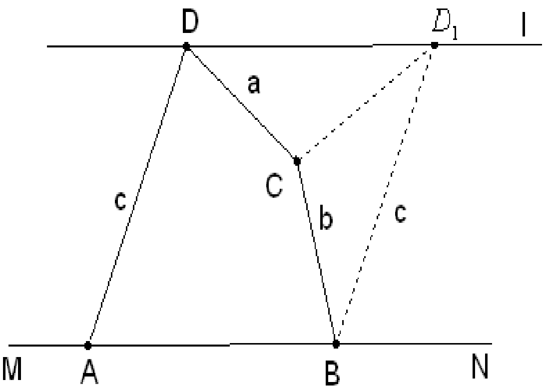
Дано: *ABCD* – рівнобічна трапеція, $\angle BAK = 60^0$.

Доведіть: c=a-b.

Доведення. Нехай *a, b* – основи, *c* – бічна сторона рівнобічної трапеції. Доведемо, що *c=a-b*. Виконаємо паралельне перенесення бічної сторони *AB* так, щоб точка B перейшла в точку *C*. Тоді точка A перейде в точку *K*. Оскільки паралельне перенесення є переміщенням, то воно кут переводить у рівний йому кут. Отже, $\angle DKC = \angle KAB = 60^0$. Тоді ΔKCD– рівносторонній і *KD=c*. З другого боку *KD=AD-AK=AD-BC=a-b*. Маємо: *c=a-b*.

Задача 5

Побудувати чотирикутник за трьома сторонати і двома кумами , прилеглим до невідомої сторони.



Мал. 12

Розв'язання.

I. Аналіз. Нехай наш чотирикутник побудований і задовільняє дану умову задачі: *CD = a, CB = b, AD = c,* $\angle DAB = \angle A$, $\angle CBA = \angle B$. Зробимо паралельне перенесення відрізка *AD* в точку *B*. Тоді $\angle D_1BN = \angle DAB = \angle A$.

Так як, $\angle CBA = \angle B$,то $\angle CBD_1 = 180^0 - (\angle A + \angle B)$. Розглянемо трикутник ΔCBD_1: $CB = b$; $BD_1 = c$, $\angle CBD_1 = 180^0 - (\angle A + \angle B)$.

Так як, відомі дві сторони і кут між ними, то трикутник CBD_1 – можна побудувати.

II. Побудова.

1. Будуємо *MN*.
2. Будуємо $\angle CBD_1 = 180^0 - (\angle A + \angle B)$.
3. Будуємо ΔCBD_1 (за двома сторонами і кутом між ними).
4. Для побудови точки *D* будуємо пряму *l*, паралельну *MN* і що проходить через точку *D*.
5. Знаходимо точку *D* (радіусом рівним з центром в т. *C* проводимо дугу до перетину з прямою *l*, що проходить через точку D_1 паралельну *MN*).
6. Знаходимо точку *A* (можна двома способами: 1. провести пряму, паралельну до D_1B, що проходить через *D*; 2. радіусом рівним *C* з центром в точці *D* описує дугу до перетину з прямою *MN*).

III. Доведення. Чотирикутник *ABCD* задовольняє умову задачі на побудову.

IV. Дослідження. Задача має:

a) два розв'язки, якщо дуга проведена з т. *C* радіусом, що дорівнює *a*, перетне пряму *l*, в двох точках;

b) єдиний розв'язок, якщо дуга дотикається прямої *l*;

c) не має розв'язків, якщо дуга не перетинає пряму *l*.

2.2.4.2. Метод повороту навколо точки

Нехай задано точку *O* - центр повороту і деякий орієнтований кут *a*.

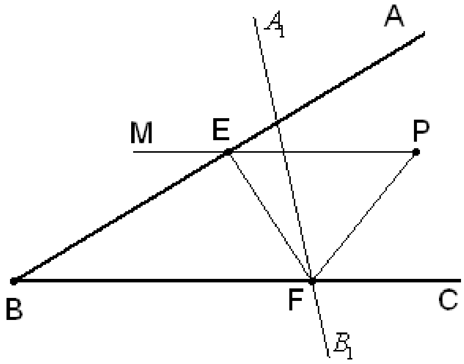
Тоді поворотом навколо точки O на кут α називається перетворення, при якому кожній точці *A* площини ставиться у відповідність така точка A' цієї площини, що:

1) $\rho(OA') = \rho(OA)$;

2) Кут AOA' рівний куту α і орієнтований так само як кут α. Поворот навколо точки *O* на кут α позначається R_O^α.

Задача 1

Точка *P* належить куту *ABC*. Побудуйте рівносторонній трикутник, однією з вершин якого є точка *P*, а дві інші належать сторонам *BA* і *BC*.*Розв'язання.* Нехай пряма A_1B_1 - образ прямої *AB* при повороті навколо центра *P* проти годинникової стрілки на кут 60^0. Позначимо *F* – точку перетину прямих A_1B_1 і *BC*.

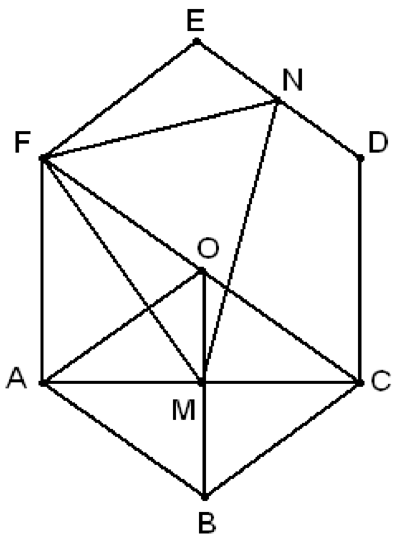


Мал. 13

Знайдемо прообраз точки *F* при виконаному повороті. Очевидно, що він лежить на прямій *AB*. Тому достатньо побудувати кут *MPF*, рівний 60^0. Нехай прямі *MP* і *AB* перетинаються в точці *E*. Ця точка і є прообразом точки *F*. Маємо: $PF = PE$ і $\angle FPE = 60^0$. Отже, ΔEPF - рівносторонній, а точки *F* і *E* – шукані.

Задача 2

В правильному шестикутнику *ABCDEF*, точка *M* – середина діагоналі *AC, N* – середина сторони *DE.* Довести, що трикутник *MNF* правильний.



Мал. 14

Розв'язання. Розглянемо мал.2.2.5.4.

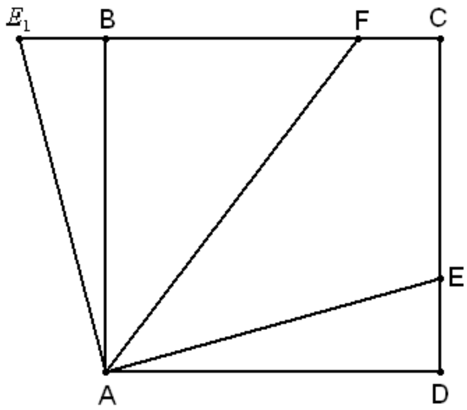
Нехай O – центр даного шестикутника, тоді $ABCD$ – ромб і тому M – середина OB. Розглянемо поворот $R_F^{-60^0}$ і знайдемо образ точки N.

Маємо: $\Rightarrow R_F^{-60^0}(ED) = OB \Rightarrow R_F^{60^0}(N) = M \Rightarrow$

$$\begin{cases} FN + FM \\ \angle NFM = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta MNF - \text{правильний}.$$

Задача 3

На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC в точці F. Доведіть, що $AE_1 = ED + BF$.



Мал. 15

Доведення. Розглянемо поворот з центром A на кут 90^0. Тоді $R_A^{90^0}(D) = B$, $R_A^{90^0}(E) = E_1$, причому E_1 належить BC. Тоді $DE = BE_1$.

Отримаємо: $E_1F = E_1B + BF = DE + BF$.

Оскільки $\angle E_1AB = \angle EAD$, то $\angle E_1AF = \angle FAD$.

Осклькии $\angle FAD = \angle BFA$, то $\angle E_1AF = \angle E_1FA$.

Отже, $AE_1 = E_1F = DE + BF$.

2.2.4.3. Метод осьової симетрії

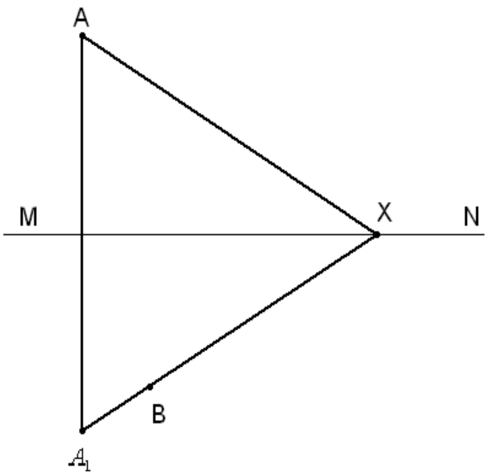
Метод осьової симетрії найчастіше використовується для розв'язування задач на побудову.

Ідея методу осьової симетрії полягає в тому, що разом із заданими і шуканими фігурами розглядаються також фігури, симетричні деяким із них відносно вибраної осі. Для методу осьової симетрії можна сформулювати правило-орієнтир:

1. Припускаємо, що задачу розв'язано. Обираємо певну симетрію відносно даної прямої, яку легко побудувати. Замінюємо один з даних елементів симетричним відносно обраної осі симетрії.
2. Розв'язуємо задачу стосовно побудованого симетричного елемента та інших даних. Цим самим задача зведеться до відомої чи простішої.
3. Від допоміжної задачі переходимо до шуканої, застосовуючи обернене перетворення симетрії.

Задача 1

Дано пряму *MN* і точки *A* і *B* з різних боків від неї. Через точки *A* і *B* провести дві прямі так, щоб кут між ними ділився прямою *MN* навпіл.



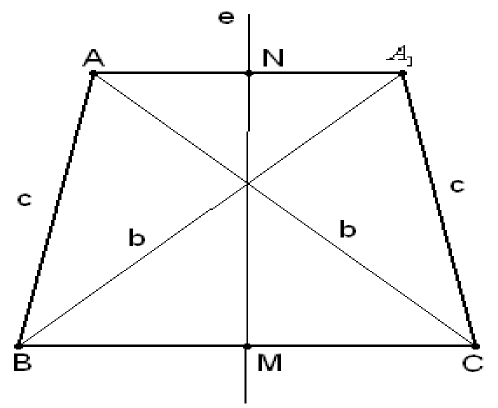
Мал. 16

Розв'язання. Припустимо, що задачу розв'язано і шукані прямі побудовано. Рівність кутів *AXM* і *BXM* свідчить, що як вісь симетрії доцільно взяти бісектрису *XM* кута *AXB*. Тоді задача зводиться до знаходження точки *X*.

Для цього будуємо точку A_1, симетричну *A* відносно даної прямої *MN*, і через точки A_1 і *B* проводимо пряму до перетину з прямою *MN* в точці *X*. Потім через точки *X* і *A* проводимо пряму *AX*. Прямі *AX* і *BX* – шукані.

Задача 2

Побудувати трикутник за двома сторонами *b* і *c* і різниці його кутів, які лежать проти його сторін.



Мал. 17

Розв'язання. I. Аналіз. Нехай трикутник *ABC* побудований. $AC = b$, $AB = c$, $\angle B - \angle C = \alpha$.

Проведемо через середину основи *BC* перпендикуляр *MN* і приймаємо його за вісь симетрії для побудови симетричного ΔA_1BC.

Розглянемо $\Delta A_1AC : A_1C = c, A_1B = b,$ $\angle BCA_1 = \angle B$, $\angle ACA_1 = \angle B - \angle C = \alpha$.

Так як в ΔA_1BC відомі дві сторони і кут між ними , то його можна побудувати.

II. Побудова.

1. Будуємо ΔA_1BC (за двома сторонами і кутом між ними).
2. Ділимо відрізок AA_1 – навпіл.
3. Будуємо пряму *l,* перпендикулярну AA_1 і що проходить через його середину.
4. Через точку *C* проведемо пряму, паралельну прямій AA_1.
5. Відкладаємо відточки перетину прямих *C* і *CB* рівний відрізок *MC.* Отримаємо точку *B*.
6. Трикутник *ABC* побудований.

III. Доведення. Трикутник *ABC* задовільняє умову задачі за побудовою.

IV. Дослідження. Задача завжди має єдиний розв'язок**.**

2.2.4.4. Метод центральної симетрії

Якщо кут повороту α дорівнює 180^0, то таке переміщення називається центральною симетрією (позначають S_O). Точка O називається центром симетрії.

При центральній симетрії кожна точка $M(x;y)$ площини відображається у таку точку M', яка в системі $Ox'y'$ має координати $(x'y)$, а в системі Oxy– координати $(x';y')$, які дорівнюють $(-x;-y)$.

Отже, формули даного перетворення такі:

$$\begin{matrix} x' = -x, \\ y' = -y. \end{matrix} \quad \text{Звідси} \quad \begin{matrix} x = -x', \\ y = -y'. \end{matrix}$$

Після застосування до прямої лінії центральної симетрії, її рівняння $y = kx + p$ перетвориться на: $-y' = -kx' + p$, або $y' = kx' - p$.

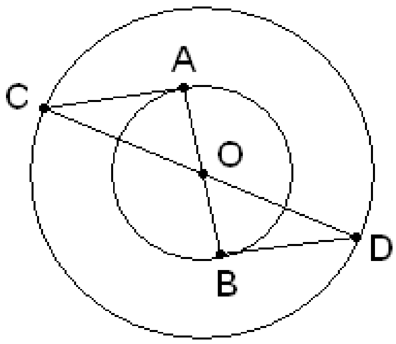
Якщо $p \neq 0$, то рівняння $y = kx + p$ та $x' = kx - p$ задають паралельні прямі, а якщо $p = 0$– то одну й ту саму пряму. Отже, при центральній симетрії прямі, які не проходять через центр симетрії, переходять у паралельні прямі, а ті, що проходять через центр симетрії, - самі у себе.

Якщо для фігури F існує така точка O, що центральна симетрія відносно цієї точки переводить фігуру F саму в себе, то фігура F називається центрально-симетричною, а точка O – центром її симетрії.

Очевидно, що центрально-симетричними фігурами є коло, круг, правильні многокутники з парною кількістю сторін.

Задача 1

Нехай AB і CD – діаметрально протилежні точки двох концентричних кіл. Довести, що $AC = BD$.



Мал. 18

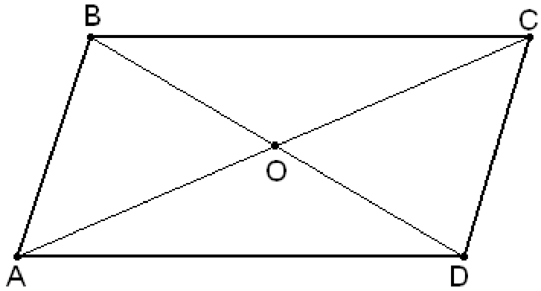
Розв'язання.

$$\left.\begin{array}{l} S_O(A)=B \\ S_O(C)=D \end{array}\right. \Rightarrow S_O(AC)=BD\,.$$

Звідси $AC = BD$. Розом з тим доведено, що $AC \| BD$.

Задача 2

Доведіть, що паралелограм є центрально-симетричною фігурою.



Мал. 19

Дано: $ABCD$ – паралелограм,

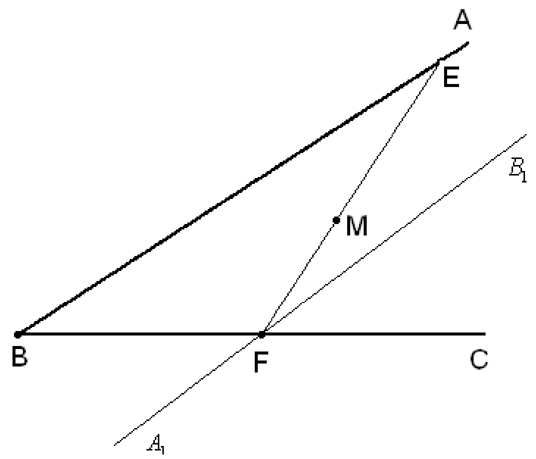
Довести: $ABCD$ – центрально-симетрична фігура.

Доведення. Нехай O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$.

Відомо, що в цій точці діагоналі діляться навпіл. Отже, при симетрії відносно точки O точка A перейде в точку C, а B – в D. Аналогічно, сторона BC перейде в сторону DA, що й теба було довести.

Задача 3

Точка M належить куту ABC. На сторонах BA і BC кута знайдіть такі точки E і F, щоб точка M була серединою відрізка EF.



Мал. 20

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 – образ прямої AB при центральній симетрії відносно точки M. Позначимо F – точку перетину прямих A_1B_1 та BC.

Знайдемо прообраз точки F. Очевидно, що він лежить на прямій AB. Позначимо цю точку E. Тоді зрозуміло, що точки E і F – шукані.

Задача 4

Доведіть, що:

1) композиція двох центральних симетрій є паралельним перенесенням;

2) композиція центральної симетрії і паралельного перенесення є центральною симетрією;

Розв'язання.

1) Розглянемо дві центральні симетрії з центрами $O_1(a_1;b_1)$ і $O_2(a_2;b_2)$. Нехай $A(x;y)$ – довільна точка площини і $S_{O_1}(A) = A_1$, $S_{O_2}(A_1) = A_2$. Легко показати, що $A_1(2a_1 - x;2b_1 - y)$, $A_2(2a_2 - 2a_1 + x;2b_2 - 2b_1 + y)$. Звідси отримаємо, що вектор AA_2 при заданих точках O_1 і O_2 має сталі координати. Отже, точка A_2 є образом точки А при паралельному перенесенні га вектор з координатами $(2a_2 - 2a_1;2b_2 - 2b_1)$.

2) Розглянемо композицію $T_{\vec{a}} \circ S_O$. Оберемо систему координат так, щоб ц, точка О, мав координати $(0;0)$. Нехай при цьому вектор $\vec{a}$ має координати $(a;b)$. Розглянемо довільну точку $A(x;y)$ координатної площини. Маємо $S_O(A) = A_1(-x;-y)$; $T_{\vec{a}}(A_1) = A_2(-x + a;-y + b)$. Отже, точка A_2 є образом точки А при центральній симетрії з центром $O_1(\frac{a}{2};\frac{b}{2})$. Аналогічно можна

показати, що композиція $S_O \circ T_{\bar{a}}$ є центральною симетрією з центром $O_2(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$.

2.3. Методичні особливості розв'язування стереометричних задач

Способи розв'язування геометричних задач на обчислення залежать, від того, чи функціональні залежності, які треба встановити для розв'язання задачі, можна подати в явному вигляді, чи цього зробити не можна і деякі функціональні залежності ми змушені спочатку подавати в неявному вигляді за допомогою допоміжних невідомих.

Способи розв'язування і прийоми, що застосовуються при розв'язуванні стереометричних задач на обчислення, досить різноманітні. Усіх їх вказати неможливо, та в цьому немає потреби. Більш того, було б шкідливо, коли б усяку задачу із стереометрії учні намагалися підвести під якийсь шаблон. Але ясне й чітке з'ясування учням основних, найбільш уживаних способів і прийомів розв'язування стереометричних задач дуже допомагає їм в опануванні потрібного навчального матеріалу. Набуті знання розширюють кругозір учнів, дають їм можливість легко орієнтуватися у складних задачах і розчленовувати їх на простіші.

Розв'язування геометричної задачі на обчислення з параметричними даними (в середній школі) зводиться до встановлення певної функціональної залежності (звичайно у вигляді якоїсь формули) між даними і шуканими величинами.[5]

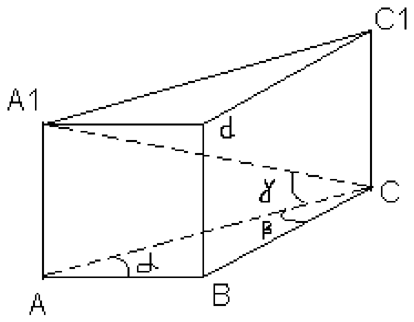
2.3.1. Спосіб обчислення невідомих величин

При розв'язуванні стереометричних задач на обчислення цей спосіб найчастіше здійснюється так: знаходять таку фігуру (найчастіше трикутник), в якій є достатня кількість даних для знаходження інших її елементів. Далі, розглядають ряд інших прилеглих до неї фігур (теж найчастіше трикутники) так, щоб в результаті послідовного визначення певних елементів цих фігур можна було знайти шукану величину.

Задача 1.

В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β. Діагональ бічної грані, що містять сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює d і утворює з площиною основи кут γ. Визначити об'єм призми.

Роз'яснення. Нехай в основі прямої призми лежить трикутник ABC, у якому $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Тоді заданою є діагональ грані AA1B1B: A1B= d. Оскільки ребро AA1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі A1B на цю площину є сторона AB трикутника ABC. Тоді за умовою $\angle A_1BA = \gamma$. Об'єм призми V=Sосн·H



Мал. 49

2. Помітивши, що в прямокутному трикутнику A1BA (/_A=90) є досить даних для його розв'язання (гіпотенуза і гострий кут), саме з цього почнемо розв'язувати задачу H= AA1 =d·sin γ; AB=d·sin γ.

3. Бачимо, що в трикутнику ABC достатньо даних (сторона та два прилеглих кута) для його розв'язання за теоремою синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B}$$

$$AC = \frac{AB \cdot \sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{d \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Тоді

$$S_{осн} = \frac{d^3 \cdot \cos^2\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin(\alpha+\beta)}$$

$$V = \frac{d^3 \cdot \cos^2\gamma \cdot \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin(\alpha+\beta)}$$

Відповідь: $\dfrac{d^3 \cdot \cos^2\gamma \cdot \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin(\alpha+\beta)}$

2.3.2. Метод доведення від супротивного

У математиці ми нерідко маємо справу з висловленнями, істинність чи хибність яких можна встановити лише на основі міркувань. Згадаємо доведення теорем.

Є різні методи доведення. Прикладом непрямого доведення є відомий читачеві з курсу геометрії VII класу *метод доведення від супротивного*. Наведемо ланцюжок міркувань (алгоритм) за цим методом:

1) припускаємо супротивне тому, що треба довести;

2) доводимо, спираючись на умову даної теореми, зроблене припущення, відомі означення, аксіоми, інші теореми, в результаті чого приходимо до висновку, який суперечить відомим математичним твердженням або умові теореми, яку доводимо, або деякому припущенню;

3)здобута суперечність і доводить теорему;

Для обґрунтування методу доведення від супротивного, як і будь-якого іншого методу міркувань, потрібні певні знання з математичної логіки.

Приклад задачі.

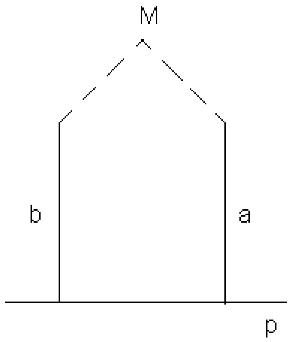
Задача 1.

Довести, якщо дві прямі перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої, то ці прямі паралельні.

Дано: $a \perp p, b \perp p, a \neq b$ (А – істинне висловлення (умова теореми)).

Довести: a || b (В – висновок теореми)

Доведення:



Мал. 50

Нехай прямі a і b не є паралельними. (Нехай $\overline{B}$ - істинне висловлення)

Маємо: $a \perp p, b \perp p, a \neq b$ a і b не паралельні. ($A \wedge \overline{B} = B_1(\textit{позначення})$)

З того, що справджується умова А і прямі a і b не паралельні, випливає, що перпендикулярні до прямої p прямі a і b перетинаються, тобто:

$a \perp p, b \perp p, a \neq b, a \cap b = M(B_2)$ ($B_1 \Rightarrow B_2$ - істинне висловлення)

Але тоді через точку М проходять два різні перпендикуляри a і b до прямої p, що суперечить відомій теоремі: (В2 – хибне висловлення)

Через будь-яку точку площини проходить один і тільки один перпендикуляр до даної прямої.[49]

Доведення цієї задачі традиційно закінчуються такими словами: «Отже, наше припущення неправильне, прямі a і b паралельні»

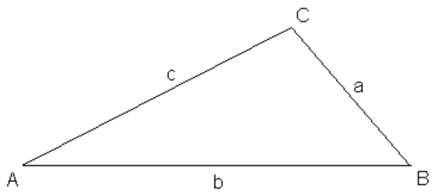
Задача 2.

Якщо в трикутнику ABC, де a, b, c – довжини його сторін, $c^2 = a^2 + b^2, \text{то} \angle C = 90°$.

Доведення:

Використаємо спосіб доведення від супротивного.

Припустимо, що в трикутнику АВС ($\angle C = 90°$) .



Мал. 51

Тоді можливі два випадки: а) $0° < \angle C < 90°$ б) $90° < \angle C < 180°$. Розглянемо кожний з них:

а) У ΔАВС: $(0° < \angle C < 90°) \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$. Але за умовою $c^2 = a^2 + b^2$. Отже, $c^2 \neq a^2 + b^2$ - хибне висловлення.

Тоді хибним буде і те, що $0° < \angle C < 90°$.

б) У ΔАВС: $(90° < \angle C < 180°) \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$. Але за умовою $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 \neq a^2 + b^2$ - хибне висловлення.

Маємо: $0° < \angle C < 90°$ і $90° < \angle C < 180°$ - хибне висловлення. Тоді $\angle C = 90°$.

Задачу доведено.

Отже, для доведення теорем або задач методом від супротивного треба вміти правильно заперечувати дане висловлення.

2.3.3. Спосіб введення допоміжного відрізка

Введенням допоміжного відрізка користуються і при розв'язуванні задач, в яких задані лінійні величини не входять в один трикутник з заданими кутами.

Розв'язання таких задач введенням допоміжного відрізка зводиться до складання рівняння знаходження одного з невідомих відрізків (допоміжних відрізків), величину знаходять за допомогою знайденого відрізка.

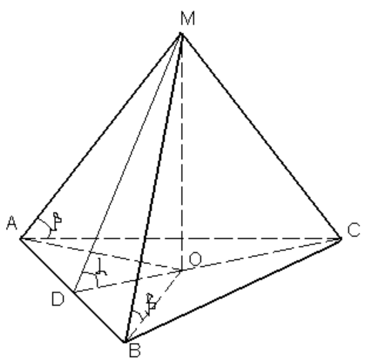
При складанні рівнянь слід користуватися прикладами:

1) Слід знайти такий відрізок (або два рівних між собою), які можна виразити двома різними способами через введений відрізок та дані величини і порівняти ці вирази. Таким відрізком може бути і один з двох відрізків.

2) Якщо не вдається першим способом, то слід шукати геометричні зв'язки між елементами фігури (подібність, відрізок, що дорівнюють сумі або різниці двох даних відрізків, і т.д.) і у співвідношення, що дається цим зв'язком, підставити величини, виражені через ведений відрізок, дані величини.

Задача 1.

Основа піраміди – правильний трикутник, сторона якого *a*. Два бічних ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β, а грань між ними нахилена до основи під кутом α. Знайти об'єм піраміди.



Мал. 52

Розв'язання:

Так як, кут /_MOA=/_MBO маємо, що AO=BO. Отже, основа висоти O – рівновіддалена від кінців відрізка A і B і мають на висоті CD правильний трикутник ABC.

Дані сторони, з жодним з кутів не пов'язані, тому задачу розв'язуємо шляхом введення допоміжного відрізка. З рисунка видно, що висота піраміди входить у прямокутні трикутники, в яких відомі кути, до того ж саме висота потрібна для визначення об'єму, тому висоту ми приймаємо за допоміжний відрізок.

Позначимо MO через *x*.

AO =x·ctg β, DO =x·ctg α.

Для знаходження х маємо рівняння

$$AO^2 - DO^2 = AD^2$$

$$x^2 \cdot ctg^2\beta - x^2 \cdot ctg^2\alpha = \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 \cdot (ctg^2\beta - ctg^2\alpha) = \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{ctg^2\beta - ctg^2\alpha}$$

$V = \frac{1}{3}$ Sосн.н., $\qquad V = a^3\sqrt{\frac{3}{24}} \cdot \sqrt{ctg^2\beta - ctg^2\alpha}$

2.3.4. Спосіб введення допоміжного кута

Розв'язуючи геометричні задачі, іноді зручно використовувати так званий метод введення допоміжного кута.

Суть цього методу полягає в тому, що шукані лінійні елементи виражають спочатку через лінійні елементи і тригонометричні функції допоміжного (невідомого) кута, а потім тригонометричні функції допоміжного кута або виключають (наприклад, виражають через тригонометричні функції відомих кутів), або обчислюють їх значення.

Який з невідомих кутів вибрати за допоміжний, можна встановити, розв'язуючи конкретну задачу. Взагалі, в задачах на многогранники за допоміжний можна взяти:

1) кут між бічним ребром і основою многогранника;
2) лінійний кут деякого двогранного кута;
3) плоский кут деякого многогранного кута і т.п.

Щоб показати, як вводити допоміжний кут, розглянемо розв’язування кількох геометричних задач, серед яких будуть задачі на обчислення (із застосуванням тригонометрії). Розв’язавши таку задачу, дістанемо відповідь у вигляді формули, яка виражає шукану величину як функцію даних величин (параметрів). Під дослідженням розв’язку задачі ми будемо розуміти встановлення тих значень параметрів, а також співвідношень між ними, при яких він додатний (числове значення геометричної величини додатне).

Досліджуючи розв’язок, найчастіше використовують такі відомості з курсу геометрії:

1. У опуклому многогранному куті сума всіх плоских кутів менша від 2π.
2. У тригранному куті кожний плоский кут менший від суми двох інших плоских кутів і більший за їх різницю.
3. Кут між похилою і площиною гострий.
4. Властивості внутрішніх кутів і зовнішнього кутів трикутника, а саме:

а) якщо α – кут при вершині рівнобедреного трикутника, то

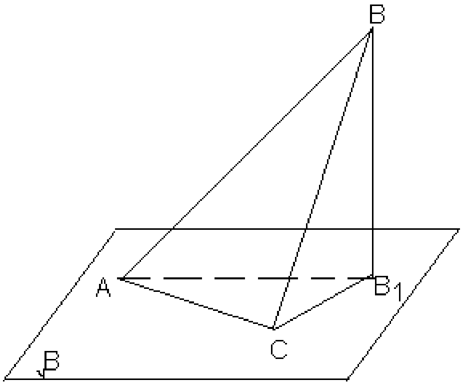
$0< 2\alpha <\pi$. Кут при основі рівнобедреного трикутника – гострий.

б) Зовнішній кут трикутника більший від кожного внутрішнього, не суміжного з ним.

в) У трикутнику проти більшої сторони лежить і більший кут та ін.

5. Деякі співвідношення між кутами в просторі та їх проекціями на площину, які сформулюємо у вигляді теореми та наслідку з неї.

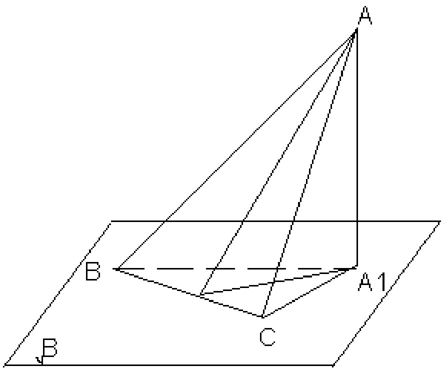
Теорема.



Якщо B1 – проекція вершини B прямокутного трикутника ABC на площину β, яка проходить через катет AC, то AB1C > ABC (мал. 53)

Мал. 53

Наслідок. *Якщо з однієї і тієї самої точки A, взятої поза площиною p, проведеної до цієї площини дві рівні похилі AB та AC, то кут між ними менший від кута між їх проекціями на площину β.*



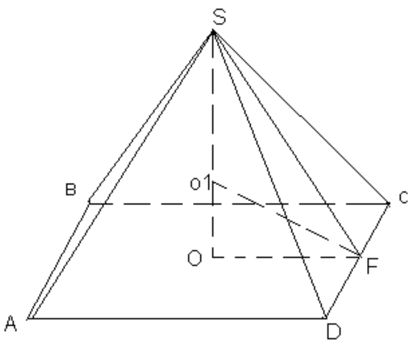
Цей наслідок легко довести, провівши висоти AD та A1D рівнобедрених трикутників ABC та A1BC.

Мал. 54

Розв’яжемо кілька задач введенням допоміжного кута й дослідимо їх розв’язки.

Задача 1.

У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює *a,* а плоский кут при вершині піраміди α. Визначити радіус кулі, вписаної в дану піраміду.



Мал. 55

Розв’язання.

Центр O1 кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду SABCD, є точкою перетину висоти SO піраміди з бісектрисою O1F лінійного кута двогранного кута, утвореного бічною гранню і основою піраміди.

Невідомий радіус OO1 вписаної кулі можна визначити з прямокутного трикутника OO1F, в якому $OF = |\frac{\alpha}{2}|$. Кути трикутника OO1F невідомі, а тому один з них, наприклад $\angle SOF$, можна взяти за допоміжний і позначити його через φ. Тоді $O_1FO = |\frac{\varphi}{2}|$; з ΔOO1F маємо $|O_1O| = \frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\varphi}{2}$.

Щоб розв'язати задачу до кінця, треба виразити $tg\frac{\varphi}{2}$ через тригонометричні функції кута *а*.

Відомо, що

$$\sqrt{tg\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{(1-\cos\varphi)\cdot(1+\cos\varphi)}(0° < \varphi < 90°)$$

лишається cosφ виразити через функції кута α; з ΔSOF маємо cosφ=$\frac{|OF|}{|SF|}$

З ΔSCF маємо $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{|CF|}{|SF|}$, але |CF|=|OF|, то cos φ= $tg\frac{\varphi}{2}$

Остаточно маємо:

$$|OO_1| = \frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)} = \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{(1-tg\frac{\varphi}{2})(1+tg\frac{\varphi}{2})} = \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{tg(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}$$

Отже, в цій задачі за допоміжний доцільно було взяти лінійний кут двогранного кута при основі правильної піраміди.

Дослідимо даний розв'язок.

Очевидно, що *а* >0. Крім цього, за властивістю плоских кутів многогранного кута при вершині S даної піраміди:

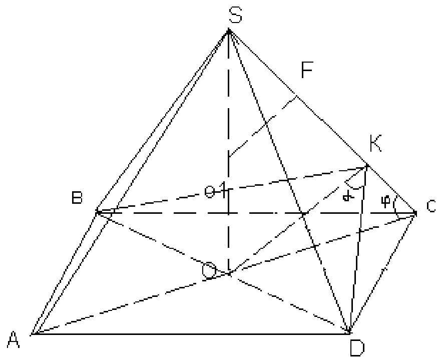
0<4α<2π, тому 0< $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, отже, $tg(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$>0.

При *a >0, і 0*< α < $\frac{\alpha}{2}$ радіус OO1 виражається додатнім числом.

Відповідь. |OO1|= $\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}$, де 0< $\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$.

Задача 2.

В кулю радіуса R вписана правильна чотирикутна піраміда, в якої двогранний кут між суміжними бічними гранями дорівнює 2α. Визначити сторону основи піраміди.



Мал. 56

Розв’язання.

Нехай O1 – центр кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди SABCD. Відомо, що точка O1 є точкою перетину висоти SO піраміди і прямої O1F, яка перпендикулярна до бічного ребра і піраміди і ділить його пополам. Щоб визначити сторону основи піраміди, достатньо визначити |OC|. Введемо допоміжний кут SCO і позначимо його через, оскільки $\angle SO_1F=\angle SCO=\varphi$ з ΔSFO1, в якому |SO1|=R, знайдемо |SF|=Rsinφ, а, отже, |SC|=2R sin φ.

Нехай |CD|=x, тоді |OC|=$\frac{x}{\sqrt{2}}$; з ΔSOC маємо:

|OC|= $\frac{x}{\sqrt{2}}$ =|SC| cosφ= 2Rsinφ cosφ,

x=2$\sqrt{2}$Rsinφ cosφ. (1)

Щоб розв’язати задачу до кінця, треба sinφ і cosφ виразити через тригонометричні функції кута α. Побудувавши кут BKD – лінійний кут двогранного кута між суміжними бічними гранями і сполучивши точки К та О, дістанемо

з ΔOKD: $\frac{|\mathrm{OK}|}{|\mathrm{OD}|} = ctg\alpha$; з ΔOKC: $\frac{|\mathrm{OK}|}{|\mathrm{OC}|} = \sin\alpha$; але |OD|=|OC|, тому

ctg φ=sin φ, а $\cos\varphi = \frac{\sqrt{-\cos\varphi}}{\sin\alpha}$.

Підставивши значення sinφ і cosφ в (1), знаходимо:

x=2$\sqrt{2}$ Rsinφ cosφ=2$\sqrt{2}$ R ctg α cosec α$\sqrt{-\cos 2\alpha}$ (2)

Отже, за допоміжний зручно було вибрати кут нахилу бічного ребра піраміди до основи.

Дослідимо знайдений розв’язок.

Очевидно, що R>0. Крім того, [KC] перпендикулярний до площини трикутника BKD, тому відрізки BK і KD є проекціями конгруентних похилих BC і CD на площину трикутника BKD. За наслідком з теореми: $\angle BKD > \angle BCD$, отже, 2α>$\frac{\alpha}{2}$. Крім того кут BCD – кут при вершині рівнобедреного ΔBKD, тому 2α<π.

При $\frac{\pi}{2}$< 2α < π маємо: -cos α >0.

ctg α >0 і cosec α >0, бо $\frac{\pi}{4}$< α <$\frac{\pi}{2}$.

Отже, права частина формули (2) додатна.

Відповідь. x=2√2Rsinφ cosφ=2√2R ctg α cosec α√-cos 2 α, де $\frac{\pi}{4}$< α <$\frac{\pi}{2}$

2.3.5. Метод аналогії

Слово аналогія в перекладі з грецької мови означає подібність. *Аналогія* – дуже ефективний інструмент пізнання. Тому доцільно спеціально навчати школярів застосування методу аналогії.

Застосування аналогії поділяється на такі дії: побудова аналогів різних заданих об’єктів та відношень; знаходження відповідностей елементів в аналогічних виразах; побудова виразів або задач, аналогічних даним; проведення роздумів по аналогії.

Відомо, що аналогія є одним із найбільш розповсюджених методів пізнання, застосування якого є досить результативним у наукових дослідженнях. Підкреслюючи важливість аналогії у науковому пошуку, Д. Пойа писав: «Аналогія, напевно, має частку у всіх відкриттях, але в деяких вона має левову частку».

Аналогія є таким умовиводом, при якому, встановивши схожість будови об’єктів у деяких властивостях, припускають, що вони, можливо, схожі і в інших властивостях.

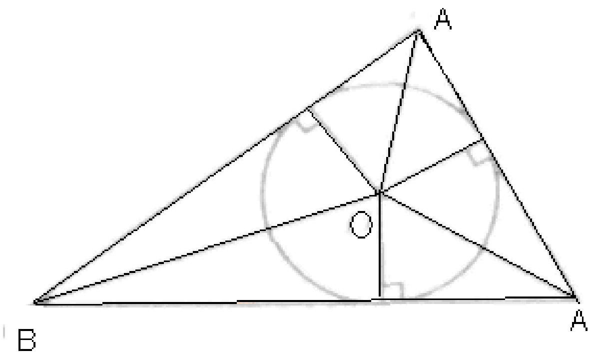
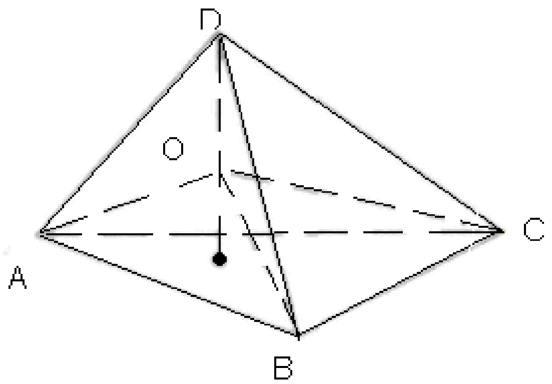
Особливо плідним є використання аналогії під час вивчення стереометрії. Тут чітко можна простежити аналогію між поняттями і твердженнями на площині і в просторі.

Говорячи про дидактичні функції аналогії, слід підкреслити основні з них. По-перше, аналогія сприяє глибшому осмисленню матеріалу, що вивчається; по-друге, під час вивчення нового матеріалу використання аналогії допомагає учням формулювати означення нових для них понять, самостійно знаходити способи розв’язування задачі, робити висновки; по-третє, аналогія використовується для ефективнішої організації повторення, узагальнення та систематизації матеріалу; по-четверте, допомагає привести в єдину систему знання, сприяє усвідомленню ієрархії понять, поглибленню знань.

Продуктивна функція аналогії виявляється у створенні проблемних ситуацій, в організації пізнавальної діяльності, в забезпеченні глибокого осмислення учнями матеріалу, який вивчається.

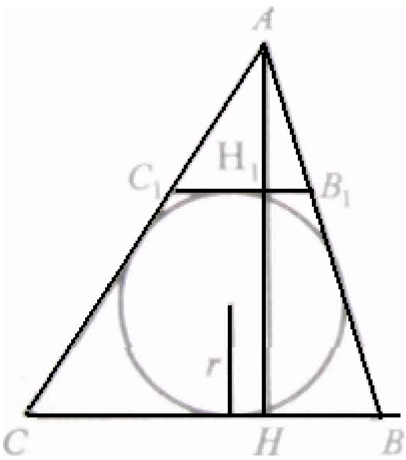
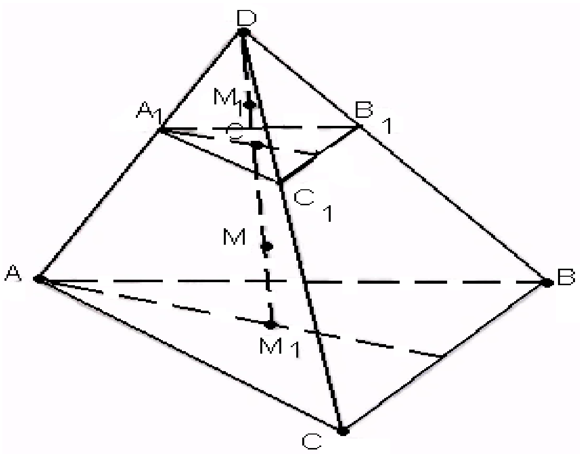
Багато схожого знаходимо в означеннях і властивостях кола і сфери, круга і кулі та їх елементів, вписаного кола і вписаної в тетраедр сфери.

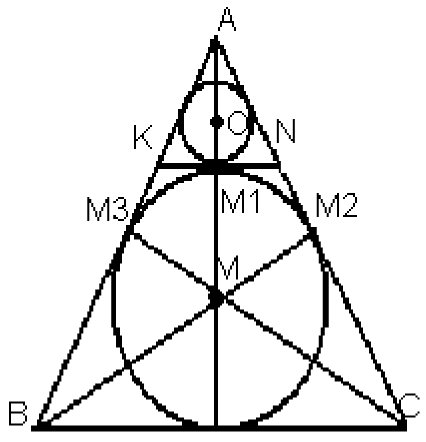
Коло і круг, вписані та описані трикутники	Сфера і куля, вписані та описані тетраедри
ГМТ площини, відстань від яких до даної точки дорівнює даному відрізку, називається *колом*	ГМТ простору, відстань від яких до даної точки дорівнює даному відрізку, називається *сферою*
Дана точка називається *центром* кола, відстань R від центра до точки кола називається його *радіусом*	Дана точка називається *центром* сфери, відстань R від центра до точки кола називається її *радіусом*
Радіусом кола називається також відрізок, що сполучає точку кола з його центром	*Радіусом* сфери називається також відрізок, що сполучає точку сфери з його центром
Відрізок що сполучає дві точки кола, називається *хордою*	Відрізок що сполучає дві точки сфери, називається *хордою*
Точки площини, віддалені від центра кола на відстань, меншу ніж r, називаються *внутрішніми* для кола; точки площини, віддалені від центра на відстань, більшу ніж r, називаються *зовнішніми* для кола	Точки простору, віддалені від центра сфери на відстань, меншу ніж r, називаються *внутрішніми* для сфери; точки площини, віддалені від центра на відстань, більшу ніж r, називаються *зовнішніми* для сфери

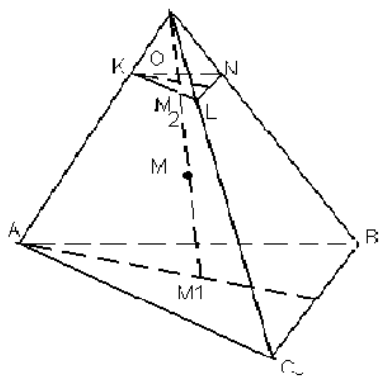
Частина площини, обмежена колом, тобто ГМТ, віддалених від центра кола на відстань, не більшу ніж r, називається *кругом*	Частина простору, обмежена сферою, тобто ГМТ, віддалених від центра сфери на відстань, не більшу ніж r, називається *кулею*
Центр кола, *вписаного* в трикутник, є точкою перетину бісектрис його кутів (інцентр трикутника)	Центр сфери, *вписаної* в тетраедр, є точкою перетину бісектрис його тригранних кутів (інцентр тетраедра)
Центр кола, *описаного* навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін	Центр сфери, *описаної* навколо тетраедра, є точкою перетину площин симетрії кожної пари суміжних вершин
У всякому трикутнику має місце співвідношення r = S/p, де S – площа трикутника p – півпериметр, r – радіус вписаного кола  Мал.57 **Доведення** Нехай O – центр, r – радіус кола, вписаного в трикутник ABC, BC = a, AC = b, AB= c. Тоді S(ABC)=S(OBC)+S(OAC)+S(OAS), або S=0,5ar+0,5br+0,5cr; S = rp,	У всякому тетраедрі має місце співвідношення r = 3V/S, де V – об’єм тетраедра, S – повна поверхня тетраедра, r – радіус вписаної сфери.  Мал.58 **Доведення** Нехай O – центр, r – радіус сфери, вписаної в тетраедр DABC. Тоді

$r=\frac{R}{p}$.	V(DABC)=V(OABC)+V(ODBC)+V(ODAS)+ V(ODAS) , або $V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot r+\frac{1}{3}\cdot S_{DBC}\cdot r+\frac{1}{3}\cdot S_{DAC}\cdot r+$ +1 $+\frac{1}{3}\cdot S_{DAB}\cdot r$ V=r$\cdot\frac{S}{r}$; $r=\frac{3V}{S}$
У всякому трикутнику має місце співвідношення $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ де ha, hb, hc – висоти трикутника, r – радіус вписаного кола. **Доведення** Нехай a, b, c – сторони трикутника, S – його площа. $S=\frac{ah_a}{2},\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}$; $S=\frac{bh_b}{2},\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$; $S=\frac{ch_c}{2},\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$ Тоді $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$	У всякому тетраедрі має місце співвідношення $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}$ де h1, h2, h3, h4– висоти тетраедра, r – радіус вписаної кулі. **Доведення** Нехай V – об’єм тетраедра, S1, S2, S3, S4– площі його граней. $V=\frac{1}{3}\cdot S_1\cdot h_1,\quad \frac{1}{h_1}=\frac{S_1}{3V}$; $V=\frac{1}{3}\cdot S_2\cdot h_2,\quad \frac{1}{h_2}=\frac{S_2}{3V}$; $V=\frac{1}{3}\cdot S_3\cdot h_3,\quad \frac{1}{h_3}=\frac{S_3}{3V}$; $V=\frac{1}{3}\cdot S_4\cdot h_4,\quad \frac{1}{h_4}=\frac{S_4}{3V}$; Тоді

<table>
<tr><td></td><td>$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_2}=\frac{S_1}{3V}+\frac{S_2}{3V}+\frac{S_3}{3V}+\frac{S_4}{3V}=$
$\frac{S_n}{3V}=\frac{1}{r}$</td></tr>
<tr><td>У всякому трикутнику має місце співвідношення
$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ де ha, hb, hc – висоти трикутника, r – радіус вписаного кола.</td><td>У всякому тетраедрі має місце співвідношення
$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}$ де h1, h2, h3, h4– висоти тетраедра, r – радіус вписаної кулі.</td></tr>
<tr><td>У трикутнику АВС вписано коло радіуса r. Паралельно сторонам трикутника проведено дотичні до кола і в утворені малі трикутники вписано кола радіусів r1, r2, r3.

Довести, що r1+r2+r3 = r.

Мал.59
Доведення</td><td>У тетраедр DABC вписано кулю радіуса r. Площини, які дотикаються до цієї кулі і паралельні граням тетраедра, відтинають від тетраедра DABC чотири тетраедри. Нехай r1, r2, r3, r4 – радіуси куль, вписаних у ці тетраедри.
Довести, що r1+r2+r3+r4=2r.

Мал.60
Доведення</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Розглянемо один із утворених трикутників – трикутник AB1C1. Δ AB1C1 подібний Δ ABC, тоді
$\frac{r_1}{r}=\frac{h_a-2r}{h_a}$ або $\frac{r_1}{r}=\frac{S-r\cdot a}{S}$,
Аналогічно, $\frac{r_2}{r}=\frac{S-r\cdot b}{S}$,
$\frac{r_3}{r}=\frac{S-r\cdot c}{S}$.
Отже,
$r1+r2+r3=\frac{3S-r(a+b+c)}{S}=r$</td>
<td>Розглянемо один із утворених тетраедрів – трикутник DA1B1C1 і DABC подібний, тоді $\frac{r_1}{r}=\frac{h-2r}{h}$, або
$\frac{r_1}{r}=\frac{3V-2rS_1}{3V}$,
$r_1=\frac{r(3V-2rS_1)}{3V}$,
Аналогічно,
$r_2=\frac{r(3V-2rS_2)}{3V}$,
$r_3=\frac{r(3V-2rS_3)}{3V}$,
$r_4=\frac{r(3V-2rS_4)}{3V}$,
Отже, $r1+r2+r3+r4=$
$\frac{\mathrm{r(12V - 2r(S_1+S_2+S_3+S_4))}}{\mathrm{3V}}=2r$</td>
</tr>
<tr>
<td>У правильний трикутник вписано коло. До цього кола і сторін трикутника дотикаються три малі кола. Знайти сторону трикутника, якщо радіус малого кола дорівнює r.


Мал.61</td>
<td>У правильний тетраедр вписано сферу. До цієї сфери і граней тетраедра дотикаються три малі сфери. Знайти ребро тетраедра, якщо радіус малої сфери дорівнює r.


Мал.62</td>
</tr>
</table>

Розв'язання	**Розв'язання**
Нехай a – сторона правильного трикутника ABC, M – його центроїд (центр вписаного та описаного кіл), MM1 = r1. Тоді MA = 2r1. Побудуємо KN – спільну дотичну до великого і малих кіл. У трикутнику ANK, OM1 = r, OA = 2r. Тому AM1 = 3r = r1, AM1 = 3r = 3·3r =9r. З трикутника ABM1 (∠ M1 =90º) $AB^2 = AM1^2 + BM1^2$. $a^2=(a/2)^2+(9r)^2$, $a^2=108r^2$, $a=6r\sqrt{3}$	Нехай a – сторона правильного тетраедра DABC, M – центроїд (центр вписаного та описаного сфер), M – центроїд ΔABC, MM1 = r1, MD=3r1. Побудуємо плоский переріз KNL, який дотикається до великої і малої сфери. У тетраедрі DNKL OM2 = r, OD = 3r. Тому DM2 = 4r = 2r1, r1= 2r. DM1 = 4r1 = 4·2r = 8r. З трикутника ADM1 (∠ M1 =90º, $AM1=r\sqrt{3}/3$, AD= a, DM1=8r) маємо: $a^2=(a\sqrt{3}/3)^2+(8r)^2$, $a^2=96r^2$, $a=4r\sqrt{6}$

Розкриваючи дидактичні функції аналогії, слід зауважити, що нею можна користуватися в навчальних цілях як засобом, який веде до гіпотез, що потребують інших методів доведення та перевірки на практиці.

Суперечлива природа аналогії в тому, що вона хоч і є засобом «відкриття» нових тверджень, проте не гарантує їх істинності. Але це аж ніяк не означає, що треба повністю відмовлятися від аналогії в навчанні чи звести її до мінімуму.

Широке застосування аналогії в процесі навчання математики є одним із ефективних прийомів, здатних викладати в учнів живий інтерес до предмета, заохотити їх до того виду діяльності який називають дослідницьким

Застосування аналогії в школі є однією з актуальних проблем, розв'язання якої тісно пов'язане з розвитком творчої діяльності учнів. За допомогою аналогії здобуваються нові знання, формулюються гіпотези, вона сприяє актуалізації, узагальненню та систематизації навчального матеріалу, а також укрупненню дидактичних одиниць засвоєння. Аналогія як евристичний метод навчання активізує пізнавальну самостійність учнів, залучає їх до проблемно-пошукової діяльності.

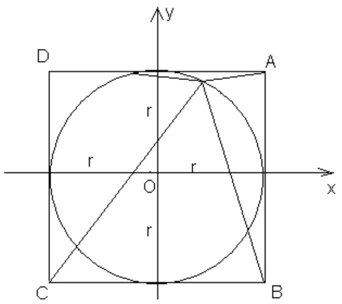
2.3.6. Координатний метод

При вивченні геометрії в просторі методом координат частіше всього розглядають поверхні. Метод координат полягає в тому, що завдяки координатам точок геометричні об'єкти задають аналітично за допомогою чисел, рівнянь, нерівностей та їх систем і тим самим при доведенні теорем або розв'язанні геометричних завдань використовують аналітичні методи. Це суттєво спрощує розмірковування та часто дозволяє доводити теореми або розв'язувати задачі, користуючись певним алгоритмом (виконуючи ті чи інші обчислення), в той час, як синтетичний метод в геометрії в більшості випадків вимагає штучних прийомів. Але для того, щоб користуватися методом координат, необхідно вміти за допомогою чисел, рівнянь, нерівностей та їх систем завдавати геометричні фігури.

Головне при розв'язуванні геометричних задач координатним методом – вдалий вибір системи координат, тобто вибір початку координат і напряму осей. Звичайно за осі координат вибирають прямі, що фігурують в умові задач, або осі симетрії (якщо вони є) фігур, розглядуваних у задачі. Бажано, щоб вибрана система координат природно визначалася умовою задачі.

Задача 1.

У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки до всіх вершин квадрата є величина постійна.



Мал. 63

Розв'язання.

Виберемо початок координат у центрі квадрата, а осі проведемо паралельно сторонам квадрата (тобто за осі координат вибираємо осі симетрії квадрата). Позначимо радіус даного кола через r, тоді кожна точка M, що лежить на цьому колі, матиме координати (x,y), які задовольняють рівняння кола: $x^2+y^2=r^2$. Вершини квадрата мають координати: A(r,r), B(r,-r), C(-r,-r), D(-r,r).

Знайдемо суму квадратів відстаней від довільної точки M(x,y) кола до всіх вершин квадрата.

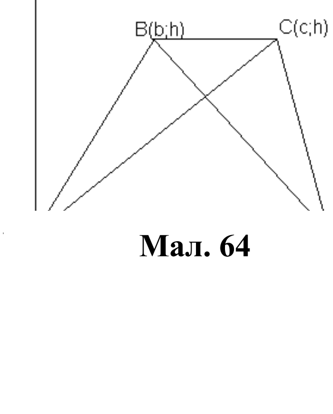
$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=(x-r)^2+(y-r)^2+(x-r)^2+(y+r)^2+(x+r)^2+(y+r)^2+(x+r)^2+(y-r)^2=$$

$$=4\cdot(x^2+y^2+2r^2).$$

Враховуючи, що для координат точки M виконується рівність $x^2+y^2=r^2$, дістаємо: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4\cdot(r^2+2r^2)=12r^2$ - величина постійна, оскільки радіус даного кола є величина постійна.

Задача 2.

Довести, що трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін плюс подвоєний добуток основ.



Мал. 64

Розв'язання.

Якщо ввести систему координат, так як зображено на малюнку то координати точок B і C будуть рівні (оскільки BC||AD), і координати вершин трапеції можна записати в такому вигляді: A(0;0), B(b;h), C(c;h), D(d;0). Запишемо в координатах вирази, про які йдеться в умові задачі:

$AC^2 + BD^2 = c^2 + h^2 + (d - b)^2 + h^2 = c^2 + 2h^2 + d^2 - 2b \cdot d + b^2$.

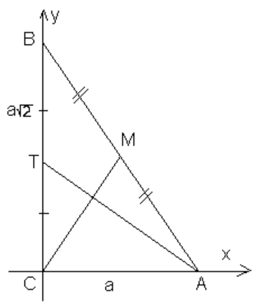
$AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot BC = b^2 + h^2 + (d - c)^2 + h^2 + 2d(c - b) = b^2 + 2h^2 + d^2 + c^2 - 2db$.

Як бачимо, $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot BC$, що й треба було довести.

Для більш складних задач зручно спочатку скласти план координатного розв'язування геометричної задачі, а потім вже виконувати конкретні обчислення.

Задача 3.

У прямокутному трикутнику ABC (∠C=90º) AC =a, BC=a√2. Довести, що медіани, проведені з вершини A і C, взаємно перпендикулярні.



Мал. 65

Розв'язання. Введемо систему координат так, як зображено на рис.

Нехай AT і CM – медіани заданого трикутника. План координатного розв'язування цієї задачі та його реалізація можуть бути таким.

План розв'язування	Реалізація плану
1. Ввести систему координат і записати координати точок A; C; T; M	A(a;0), C(0;0), T(0;a/√2), M(a/2;a/√2) (M – середина AB)
2. Знайти кутові коефіцієнти прямих AT і CM	k1=kAT=(yA-yT)/(xA-xT)=-1/√2 k2=kCM=(yC-yM)/(xC-xM)=√2
3. Перевірити виконання умов перпендикулярності прямих AT і CM	Оскільки k1·k2=-√2/√2=-1, то прямі AT||CM взаємно перпендикулярні.

Оскільки умову перпендикулярності прямих можна записати не тільки в координатній формі, але й у векторній, то цю саму задачу можна розв'язати також і векторно-координатним методом.

2.3.7. Метод векторів

Досить часто при розв'язуванні стереометричних задач використовують метод векторів. Цілі вивчення векторного методу в середній школі:

- дати ефективний метод розв'язання різних геометричних задач і доведення теорем;
- використання векторного методу при розв'язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення і конкретизацію;
- формувати у учнів такі якості мислення, як гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність і ін.

Основні компоненти векторного метода розв'язання задач:

- переклад умови задачі на мову векторів, в тому числі: введення в розгляд векторів, вибір системи координат (якщо це необхідно), вибір базисних векторів, розклад введених векторів по базисним;
- складення системи векторних рівностей (або однієї рівності);
- спрощення векторних рівностей;
- заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв'язання;
- пояснення геометричного смислу одержаного розв'язку цієї системи (або одного рівняння).

Схема розв'язування геометричних задач векторним методом:

1. Перекласти вимогу задачі на векторну мову.

2. Ввести прямокутну систему координат або вибрати два не колінеарні вектори на площині (або три не компланарні вектори у просторі) як базисні.

3. Знайти координати векторів, виділених в пункті 1, або виразити ці вектори через базисні.

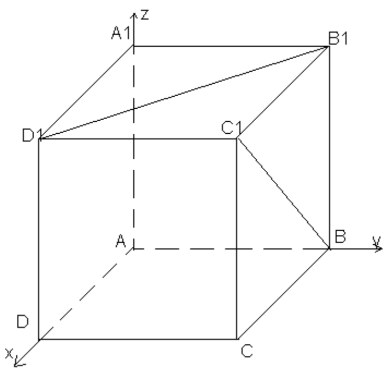
4. Довести або знайти виділене у пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову.

Інколи вектори можуть бути ефективно використані при розв'язуванні не тільки планіметричних, а й стереометричних задач, наприклад, задач на знаходження кутів між мимобіжними прямими або на обчислення відстаней між точками у просторі.

Приклад розв'язання задачі методом векторів:

Задача 1.

Знайти кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.



Мал. 66

Розв'язання. Скористаємось запропонованою вище загальною схемою розв'язування.

Нехай дано куб ABCDA1B1C1D1. Позначимо кут між мимобіжними діагоналями B1D1 і BC1 двох суміжних граней куба через φ (/_(B1D1 ,BC1)=φ).

1.На векторній мові вимога задачі виглядає так: необхідно знайти кут φ із співвідношення

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{B_1D_1} \cdot \overline{BC_1}|}{|\overline{B_1D_1}| \cdot |\overline{BC_1}|}$$

2. Введемо прямокутну систему координат так: початок виберемо в точці А, вісь Ох направимо вздовж AD, Оу – вздовж АВ і Oz – вздовж АА1.

Якщо ребро куба взяти за одиницю, то координати вершин куба: А(0;0;0), В(0;1;0), С(1;1;0), D(1;0;0), А1(0;0;1), В1(0;1;1), С1(1;1;1),D1(1;0;1).

3. Тоді координати векторів, виділених у пункті 1, будуть:

$\overline{B_1D_1} = \overline{(1;-1;0)}, \ \overline{BC_1} = \overline{(1;0;1)}$

Знайдемо кут φ: cos φ=$\frac{1}{2}$

Оскільки cos φ=$\frac{1}{2}$ і кут φ – гострий (як кут між прямими), то φ=60^o.

Відповідь. φ=60^o

2.3.8. Спосіб інверсії

Згадки про метод інверсії використовувався ще в Стародавній Греції Аполонієм, проте це були лише згадки. Вперше цей метод інверсією назвав 1830 році німецький математик Л. Магнус. Що ж таке метод інверсії або інверсія? Припустимо, що на площині α задано коло С з радіусом R та центром в точці О. Інверсією площини α відносно цього кола називається відображення , при якому кожній точці А площини α, за виключенням точки О, ставиться відповідність що лежить на промені (ОА) точка А' така, що

$$|OA^{'}| = \frac{R^2}{|OA|}$$

Отже, видно, що при інверсії точки А і А' міняються місцями, відображуючись одна в одну. Центр О кола С, називається центром інверсії, не маючи образу, і ніяка точка при інверсії в нього не попаде.

Інколи інверсію називають симетрією відносно кола, а точки А і А' – симетричні відносно кола. Як і осьова симетрія, інверсія відносно кола С володіє цікавою властивістю: її повторне виконання повертає точки в початкове положення.

Розглянемо деякі властивості інверсії:

1. Точки на вибраному нами колі при інверсії переходять в себе; точки, що лежать всередині кола, переходять у внутрішні точки (окрім точки О – центра кола), а зовнішні точки – у внутрішні.
2. Якщо при інверсії фігура Ф переводить в фігуру Ф', то фігура Ф' переходить в фігуру Ф.
3. При інверсії точки, що лежать на прямій, проходять через центр інверсії, переходять в точки, що лежать на цій ж прямій.

Приклад задачі.

Задача 1.

Коло T радіуса $\frac{R}{2}$ *дотикається до прямої l в точці S. Точка N – діаметрально протилежна точці S. Точки B і B' лежать на колі T, причому* $|SB| = |NB'|$. *Прямі* NB' *та NB перетинають пряму l в точках A та A' відповідно. Довести, що* $|SA'| = \frac{R^2}{|SA|}$.

Задача 2

Знайти радіус кулі, описаного навколо тетраедра, знаючи довжини шести його ребер.

Для розв'язання даної задачі необхідно спочатку зробити деякі позначення. Нехай a=BC, b=AC, c=AB, α=DA, β=DB, γ=DC тетраедра ABCD.

Розглянемо A', B', C', протилежні точки A, B, C приймаючи за полюс інверсії точку D і вибираючи довільно степінь інверсії *к*. Куля, описана навколо тетраедра, буде при таких умовах фігурою, протилежної площини A'B'C'; її діаметр 2R буде рівний $\frac{k}{DH}$, де через DH визначено відстань полюса від даної площини.

Але DH є висотою тетраедра A'B'C'D; відповідно, об'єм цього тетраедра рівний одній третій добутку DH на площу трикутника A'B'C'. З іншої сторони, даний тетраедр і тетраедр DA'B'C' можна розглядати як ті, що мають своїми основами відповідно грані DAB і DA'B'; і висотами будуть відрізки CP і C'P'; відповідно, відношення об'ємів цих тетраедрів рівне відношенню площ їх основ. Якщо позначити через V об'єм даного тетраедра, то будемо мати:

$$\frac{DH \cdot S_{A'B'C'}}{3V} = \frac{DA' \cdot DC' \cdot DB'}{DA \cdot DC \cdot DB} \text{ (*)}$$

Але відрізки, що входять в праву частину цієї рівності, відповідно рівні: α=DA, β=DB, γ=DC, $DA' = \frac{k}{\alpha}, DB' = \frac{k}{\beta}, DC' = \frac{k}{\gamma}$. З іншої сторони , ми маємо:

$B'C' = \frac{k \cdot BC}{DB \cdot BC} = \frac{k \cdot a}{\beta\gamma} = \frac{k \cdot a \cdot \alpha}{\beta\gamma\alpha}, C'A' = \frac{kb\beta}{\alpha\beta\gamma}, A'B' = \frac{kc\gamma}{\alpha\beta\gamma}$, ці рівняння показують, що трикутник A'B'C' подібний трикутнику , сторони якого відповідно виміряються $a\alpha, b\beta, c\gamma$ причому коефіцієнт подібності рівний $\frac{k}{\alpha\beta\gamma}$. Позначивши через Σ площу цього останнього трикутника, будемо мати:

$$S_{A'B'C'} = \frac{k^2\Sigma}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

Якщо в рівнянні (*) замінити DH через $\frac{k}{2R}$ та інші вхідні в нього елементи (крім V) – отриманих для них виразів, то після всіх перетворень отримаємо $6VR = \Sigma$.

Таким чином, добуток радіуса описаної кулі на об’єм тетраедра, рівне одній шостій площі трикутника, сторони якого вимірюється відповідно добутками протилежних ребер тетраедра.[64]

2.3.9. Метод геометричних місць точок

Поняття геометричного місця точок у просторі (ГМТ) має велике методичне і загальноосвітнє значення. Неможливо переоцінити його роль у розвитку просторової уяви.

Розв'язування задач, в яких застосовуються геометричні місця точок як на площині, так і в просторі, активізують творчу думку і фантазію, розвивають логічне мислення, кмітливість, змушують перебирати в пам’яті всі відомі теореми з метою відбору і застосування найбільш придатної з них.

У стереометрії не існує реального інструмента "сферографа", щоб побудувати у просторі сферу або лінію перетину двох сфер, якщо вона існує.

Звичайно, ці побудови можна здійснити на проекційному кресленні, але виконання їх у більшості випадків громіздке, потребує багато часу і неабияких креслярських знань і навичок.

У просторі доводиться обмежуватись "уявним" проведенням прямих, площин, сфер тощо. Можливість таких побудов встановлюється певними аксіомами.

Що ж таке геометричне місце точок у просторі?

На площині ГМТ визначається так:

Геометричним місцем точок називається фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.

Якщо на площині розглядається геометричне місце тільки точок, то у просторі можна розглядати геометричні місця не тільки точок, але й ліній (як прямих, так і кривих), і тому можна дати таке означення ГМТ у просторі:

Геометричним місцем точок у просторі називається деяка фігура, що складається з усіх об'єктів простору, положення яких задовольняє одній або кільком певним умовам.

"об'єкт", бо це більш широке поняття і включає в себе не тільки точки, але й

У цьому формулюванні замість слова "точка" застосовується термін лінії. При цьому часто одну і ту ж геометричну фігуру можна розглядати як геометричне місце точок і як геометричне місце ліній.

Наприклад, площини α_1, α_2, паралельні площині β і віддалені від неї на відстань *a*, є:

- геометричне місце точок простору, віддалених від площини β на відстань *a*;

- геометричне місце прямих простору, паралельних площині β і віддалених від неї на відстань *a*;

- геометричне місце кривих, які лежать у площині, паралельній даній площині і віддаленій від неї на відстань *a*;

- геометричне місце фігур, які лежать у площині, паралельній даній площині і віддаленій від неї на відстань *a.*

Циліндрична поверхня, утворена обертанням прямої навколо паралельної їй прямої AB і віддаленої від неї на відстань *a,* є:

- геометричне місце точок простору, віддалених на відстань *a* від даної прямої AB;

- геометричне місце прямих простору, паралельних даній прямій AB і віддалених від неї на відстань a;

- геометричне місце кіл радіуса a, центри яких лежать на даній прямій AB, а їх площини перпендикулярні до AB;

- геометричне місце рівних еліпсів, центри яких знаходяться на прямій AB, а їх площини утворюють з прямою AB один і той же кут α.

Геометричні місця у просторі надзвичайно різноманітні. Деякі з них є природним узагальненням геометричних місць на площині, є ніби їх стереометричними аналогами (наприклад, сфера є стереометричний аналог кола, площина - аналог прямої тощо).

Існують інші розташування прямих у просторі: дві прямі перетинаються, а третя мимобіжна до них; дві прямі паралельні, третя мимобіжна до них; всі три прямі попарно мимобіжні. В цих випадках ГМТ, рівновіддалених від трьох прямих є перетином гіперболічних параболоїдів, утворених парами мимобіжних прямих.

Приклади задач.

Задача 1.

Дано куб. Вершинами випуклого многогранника лежать на його ребрах, причому на кожному ребрі лежить по одній вершині. Найти множину точок, що належать всім таким многогранникам.

Для розв’язання цієї задачі необхідно міркувати так:

Кожний розглянутий многогранник отримується із даного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ шляхом відсічення тетраедрів від кожної із його сторін. Тетраедр, відсічений від вершини A1 міститься в тетраедрі AA_1BD. Таким чином, якщо від куба відсікти тетраедри, кожний з яких заданий трьома ребрами куба, що виходять із однієї точки, то частина куба, що залишилась, знаходиться в кожному із розглянутих многогранників. Легко перевірити, що частина, що залишилась є октаедром з вершинами в центрах граней куба. Якщо ж точка не належить цьому октаедру, то не важко вказати многогранник, якому вона не належить; в якості такого многогранника можна взяти тетраедр AB_1CD_1 і тетраедр A_1BC_1D.

2.3.10. Метод центральних й паралельних проекцій

Розглянемо один загальний метод розв'язування задач на побудову точок перетину прямої з поверхнею просторової геометричної фігури та перерізів просторових фігур січною площиною, так званий метод проекцій – центральних та паралельних. Цей метод ґрунтується на аксіомах належності.

А1. *Існує принаймні одна пряма і принаймні одна площина. Кожна пряма і кожна площина є не порожня множина точок, яка не збігається з простором.*

А2. *Через будь-які дві різні точи проходить одна і тільки одна пряма.*

А3. *Пряма, що проходить через дві різні точки площини, лежить у цій площині.*

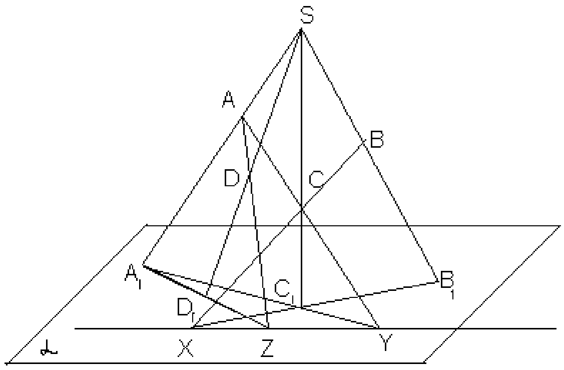
А4. *Через три точки, які не належать одній прямій, проходить одна і тільки одна площина.*

А5. *Якщо дві площини мають спільну точку, то їх перерізом є пряма.*

На рівні обов'язкових результатів навчання програмою і підручником передбачено найпростіші випадки побудови перерізів. На гурткових або факультативних заняттях, в класах з поглибленим вивченням математики доцільно ознайомити учнів із загальними методами побудови перерізів тіл, зокрема многогранників. Мається на увазі метод внутрішнього проектування і метод слідів при паралельному та центральному проектуванні. Алгоритми обох методів зручно подати у вигляді таблиці.

Центральне проектування.

I. Метод слідів.



Мал. 67

Дано: α - площина,

S – центр проектування,

A(A1), B(B1), C(C1) – точки і їх проекції,

D1 – проекція невідомої точки D.

Знайти: D.

Алгоритм розв’язання:

1. $X = BC \cap B_1C_1$

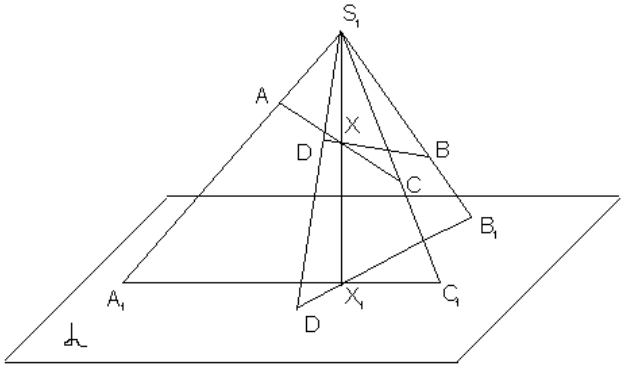
2. $Y = AC \cap A_1C_1$

XY – слід пл.ABC на α

3. $Z = D_1A_1 \cap XY$

4. $D = AZ \cap SD_1$

II. Метод відповідності.



Мал. 68

Дано: α - площина,

S – центр проектування,

A(A1), B(B1), C(C1) – точки і їх проекції,

D1 – проекція невідомої точки D.

Знайти: D.

Алгоритм розв'язання:

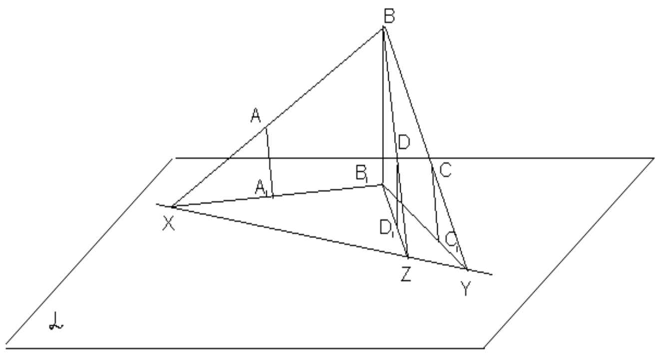
1. $X_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$

2. $X = AC \cap A_1C_1$

3. $D = BX \cap D_1S$

Паралельне проектування

I. Метод слідів



Мал. 69

Дано: α - площина,

A(A1), B(B1), C(C1) – точки і їх проекції,

D1 – проекція невідомої точки D.

Знайти: D.

Алгоритм розв'язання:

1. $X = AB \cap A_1B_1$

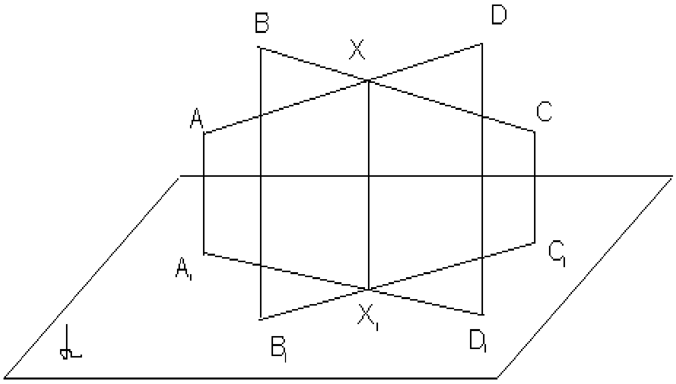
2. $Y = BC \cap B_1C_1$

XY – слід пл.ABC на α

3. $Z = D_1B_1 \cap XY$

4. $D = ZB \cap D_1D$

II. Метод відповідності.



Мал. 70

Дано: α - площина,

A(A1), B(B1), C(C1) – точки і їх проекції,

D1 – проекція невідомої точки D.

Знайти: D.

Алгоритм розв'язання:

1. $X_1 = B_1C_1 \cap A_1D_1$

2. $X = BC \cap XX_1$

3. $D = AX \cap DD_1$

Зіставлення центрального і паралельного проектування легко виявити їхні спільні властивості:

а) Проекцією точки є точка;

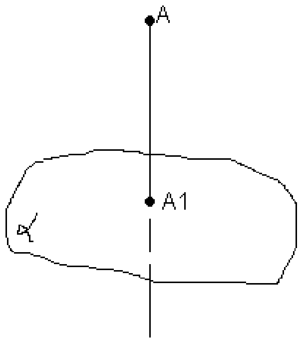
б) Проекцією прямої (загального положення) є пряма;

в) Якщо пряма паралельна напряму s проектування або проходить через центр S проекцій, то її проекцією є точка;

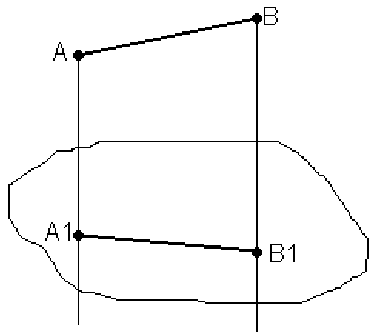
г) Якщо точка належить прямій, то проекція цієї точки належить проекції даної прямої (властивість *інцидентності* або *взаємоналежності*);

д) Зберігається відношення відрізків;

е) проекцією паралельних прямих є паралельні прямі;



Мал. 71



Мал. 72

Із властивостей г) і д) випливає досить важливий наслідок: проекція середини будь-якого відрізка-оригіналу є серединою його проекції на площину (тобто середина переходить у середину). Ось тому властивість діагоналей паралелограма – ділиться в точці перетину навпіл, властивість ортоцентра трикутника, властивість основи медіани трикутника – при таких проектуваннях зберігаються.

Щоб свідомо виконувати ті чи інші побудов в курсі стереометрії, треба добре осмислити властивості паралельного проектування. Наведемо лише один поширений приклад того, як нерозуміння аксіоми А4 і властивості г) призводить до грубих помилок.

Задача 1.

Побудувати паралельну проекцію чотирикутника ABCD на площину проекцій α.

Часто базисними точками для побудови чотирикутника помилково вважають чотири вершини, а не три. При цьому міркують так:

1) (AA1), (BB1), (CC1), (DD1) || s.
2) (AA1) ∩ α = A1, (BB1) ∩ α = B1, (CC1) ∩ α = C1, (DD1) ∩ α = D1.
3) A1=прαA, B1=прαB, C1=прαC, D1=прαD.
4) A1B1C1D1 – чотирикутник.
5) A1B1C1D1=прα ABCD

Відповідь. Чотирикутник A1B1C1D1 – шуканий.

Насправді чотирикутник A1B1C1D1 може і не бути шуканим, оскільки невідомо, чи лежить точка C1 у площині, яка визначається трьома не колінеарними точками A1, B1,D1 (умова колінеарності побудови будь-якого многокутника(мал.34)).

Наведемо правильне розв'язання цієї задачі:

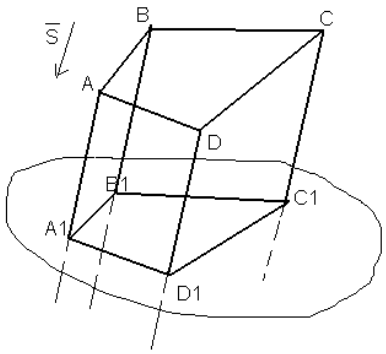
1) (AA1), (BB1), (CC1), (DD1) || s.
2) (AA1) ∩ α = A1, (BB1) ∩ α = B1, (DD1) ∩ α = D1.
3) A1=прαA, B1=прαB, D1=прαD.
4) A1 < - >B1< - >D1;
5) B< - >D, A< - >C; [BD1]∩ [AC]=M;
6) За властивістю інцидентності точки прямій маємо:

(MM1) || s; [MM1] ∩ [B1D1]= M1; M1=прαM; B1D1=прαB1D1; M є [BD] => M1 є [B1D1];

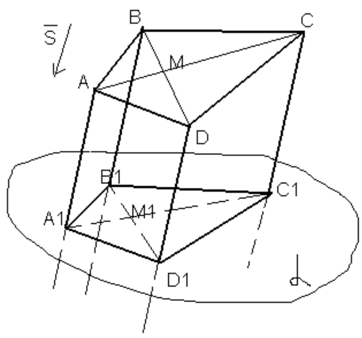
7) проводимо промінь: [A1D1) є α; [CC1) ∩ [A1M1) =C1

Отже, C1=прαC – шукана точка.

Відповідь. Чотирикутник A1B1C1D1 – шуканий.



Мал. 73



Мал. 74

2.3.11. Позиційні задачі

Позиційними називаються задачі, в яких визначається взаємне розміщення геометричних фігур одна відносно одної. У них йдеться про розміщення точок, прямих, площин у просторі. Від цього тільки й залежить існування їх розв'язку:

До класу позиційних задач відносять задачі на побудову:

А) точки перетину прямої з площиною;

Б) точки перетину прямої з поверхнею геометричних фігур;

В) перерізів многогранників і фігур обертання;

Г) ліній перетину (переходу) фігур;

Д) тіней (власної і падаючої);

Розглянемо розв'язання позиційних задач:

1) точка, пряма, площина вважаються заданими, якщо задано їх проекції на площину або ці проекції можна легко побудувати. Очевидно, пряма буде визначена двома різними заданими точками, а площина – трьома точками, які не лежать на одній прямій (такі точки називаються не колінеарними);

2) точку перетину прямої з площиною називають *слідом даної прямої на цю площину*;

3) пряму перетину двох площин називають *слідом перетину цих площин;*

4) в позиційних задачах, пов'язаних з призматичними та циліндричними формами, *площина проекцій* – це площина основи фігури, а *напрям проектування* – напрям, паралельним бічним ребрам призми або контурним твірним циліндра;

5) у випадку пірамідальних та конічних форм *площина проекцій* – це площина основи фігури, причому проектування є центральним: одну з вершин піраміди або вершину конуса беруть за центр проекцій.[26]

Отже, в цьому розділі розглянуто деякі методи та способи розв'язання стереометричних задач, що повинно стати невід'ємним «багажем» знань в арсеналі кожного учня старшої профільної школи при вивченні стереометрії.

2.3.12. Афінне перетворення площини (теорема Польке-Шварца та її наслідки)

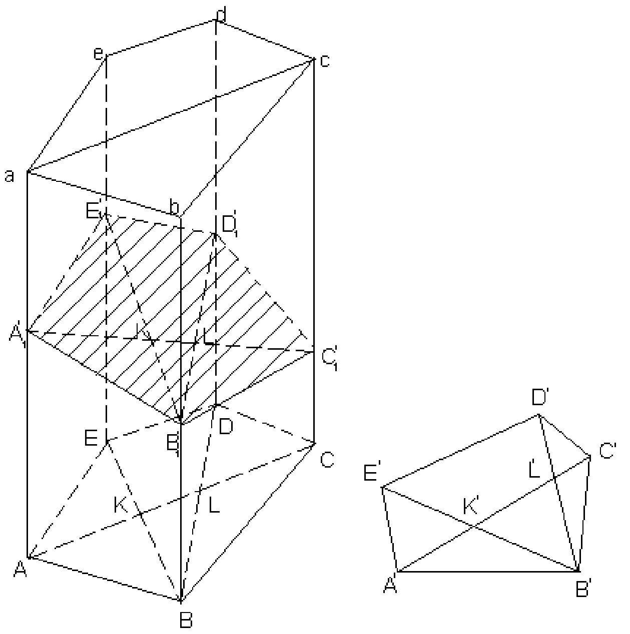
Усякий повний чотирикутник, що не вироджується, можна розглядати як паралельну проекцію тетраедра будь-якої наперед заданої форми.

Доведення теореми Польке-Шварца ґрунтується на такій лемі.

Лема. Усяку призму можна перерізати площиною так, щоб в перерізі вийшов многокутник, подібний будь-якому даному многокутнику, афінному до основи призми.

Доведення.

Нехай многокутник $ABCDE$ є основою призми $ABCDEabcde$ (мал.71). Доведемо, що можна перерізати цю призму площиною так, щоб у перерізі вийшов многокутник, подібний даному многокутнику $A'B'C'D'E'$, афінному до основи призми.

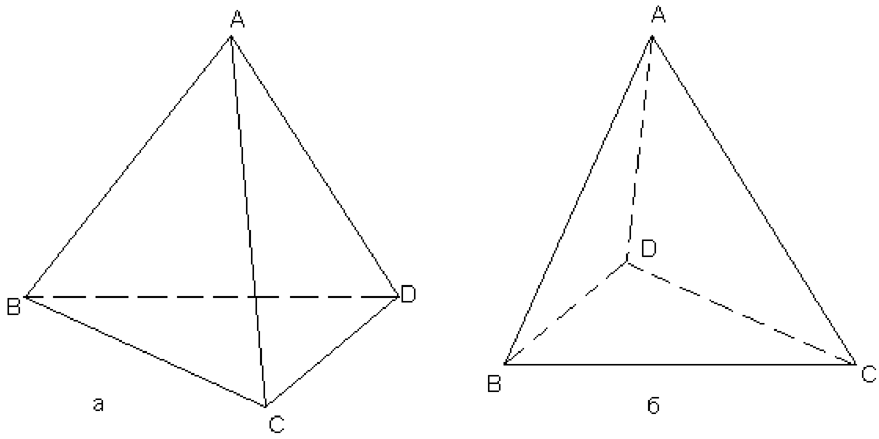


Мал. 75

Розглянемо трикутну призму $ABCabc$. Цю призму можна перерізати площиною так, що в перерізі дістанемо $\Delta A_1'B_1'C_1'$, подібний даному трикутнику $A'B'C'$. Побудуємо точки K_1' і L_1' так, щоб $(A_1'C_1'K_1') = (ACK)$ і $(A_1'C_1'L_1') = (ACL)$. Інакше, проведемо прямі KK_1' і LL_1' , паралельні ребрам призми, до перетину з прямою $A_1'C_1'$ у точках K_1' і L_1'. Далі будуємо прямі $B_1'K_1'$ і $B_1'L_1'$ до перетину з ребрами eE і dD у точках E_1' і D_1'. Ми дістали переріз призми $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$. Неважко переконатись, що він подібний даному многокутнику $A'B'C'D'E'$. Справді, многокутники $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$ і $A'B'C'D'E'$ афінні, бо кожний з них афінний до многокутника $ABCDE$. З другого боку, $\Delta A_1'B_1'C_1'$ подібний $\Delta\, A'B'C'$. Звідси робимо висновок, що вся фігура $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$ є результатом подібного перетворення многокутника $A'B'C'D'E'$, бо при такому перетворенні, яке переводить $\Delta\, A'B'C'$ у $\Delta A_1'B_1'C_1'$, точки K', L', E' і D' переходять у точки K_1', L_1', E_1' і D_1'.

Перед доведенням теореми Польке-Шварца зробимо такі зауваження.

1. Чотирикутник, про який ідеться в теоремі, не обов'язково опуклий. На малюнку 37, тетраедр $A'B'C'D'$ зображено опуклим чотирикутником $ABCD$ з діагоналями AC і , на малюнку _ той самий тетраедр зображено не опуклим чотирикутником з діагоналями AC і BD.

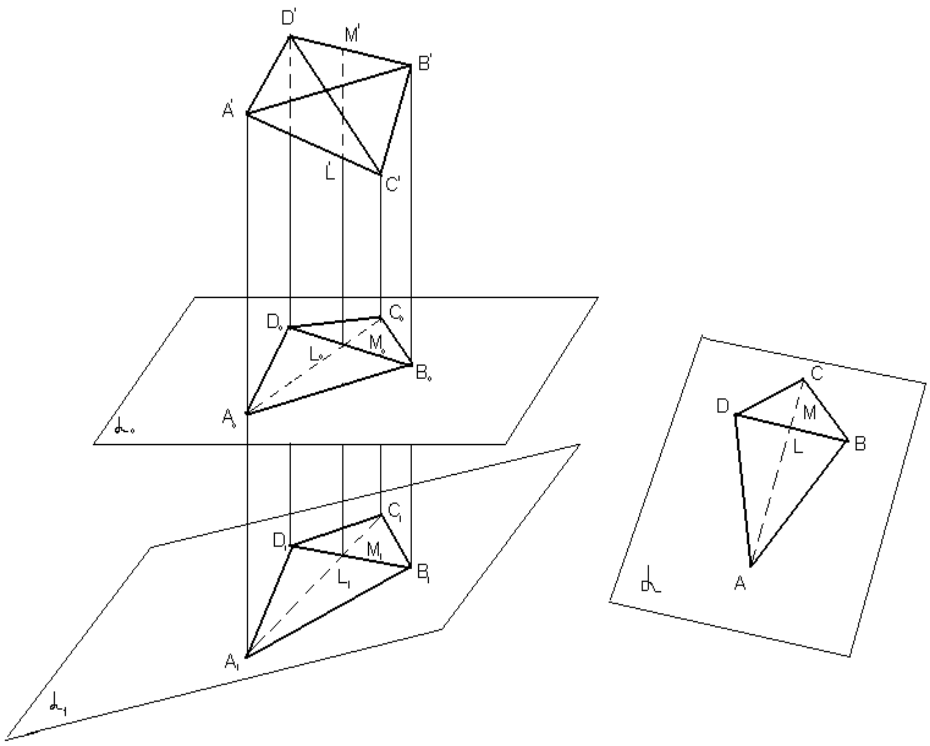


Мал. 76

2. Не слід вважати, що відрізки, обведені штриховою лінією, це – діагоналі. Штрихова лінія використовується для позначення невидимих ліній (передбачається, що грані тетраедра непрозорі). Як би не були розміщені точки A, B, C, D, у чотирикутнику $ABCD$, відрізки AB, BC, CD, DA вважаються сторонами, а AC і - діагоналями.

Доведення теореми Польке-Шварца.

Нехай дано тетраедр $A'B'C'D'$ і повний чотирикутник . (мал.77)



Мал. 77

Розглядаючи останній як проекцію деякого тетраедра, ми повинні вважати шість відрізків, що його утворюють, проекціями ребер тетраедра. Тоді точку перетину діагоналей чотирикутника позначимо двома буквами L і M залежно від того, чи вважаємо цю точку проекцією точки, яка лежить на одному або на другому ребрі тетраедра-оригіналу.

Знайдемо точки $L^{'}$ і $M^{'}$ відповідно на ребрах $A^{'}C^{'}$ і $B^{'}D^{'}$ тетраедра з умов $(A_1^{'}C_1^{'}L_1^{'}) = (ACL)$ і $(B_1^{'}D_1^{'}M_1^{'}) = (BDM)$. Вважатимемо тепер, що напрям проектування тетраедра $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ збігається з напрямом прямої $M'L'$. Проводячи через кожну вершину тетраедра проектуючи пряму, паралельну прямій $M'L'$, дістанемо проектуючи призму. Якщо переріжемо останню довільною площиною α_0, то дістанемо в перерізі повний чотирикутник $A_0B_0C_0D_0$ для якого, очевидно, матимемо: $(A_0C_0L_0) = (A'C'L')$, $(B_0D_0M_0) = (B'D'M') = (BDM)$.

Звідси робимо висновок, що повний чотирикутник $A_0B_0C_0D_0$, який можна вважати основою проектуючої призми, є афінними до чотирикутника .

Тоді на підставі леми можна побудуати переріз $A_1B_1C_1D_1$ проектуючої призми площиною α_1, який буде подібний даному чотирикутнику .

Якщо повний чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією даного тетраедра $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$, то подібний йому чотирикутник є, очевидно, проекцією подібного тетраедра. Цим доведено теорему Польке-Шварца.[26,с.24]

Наслідки з теореми Польке-Шварца.

1. Коли задано проекцію тетраедра на площину α (повний чотирикутник) і форму тетраедра-оригіналу, то можна визначити напрям проектування відносно площини проекції (проектуючий апарат), положення і справжні розміри тетраедра-оригіналу.
2. З доведеної теореми випливає, що довільне креслення тетраедра відповідає в оригіналі тетраедру будь-якої форми. Інакше: теорема Польке-Шварца дає змогу трикутну піраміду будь-якої форми зображати на площині цілком довільно. Але при цьому слід дотримуватись властивості паралельного проектування і забезпечити наочність зображення.
3. Маючи довільне зображення тетраедра, можна доповнити це зображення до призми, піраміди, зберігаючи властивості паралельних проекцій.

Так, наприклад, зображення правильної чотирикутної піраміди, куба, можна побудувати, спираючись на зображення тетраедра.

4. Зображення призми ґрунтується на зображенні вихідного тетраедра. Такий тетраедр неважко знайти в будь-якій призмі. Дальші побудови призми (після заданого тетраедра) треба виконувати з дотриманням властивостей паралельних проекцій.[26, с.25]

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТЬ З СПЕЦКУРСУ «РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ТА СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ»

3.1. Аналіз різних підходів до навчання студентів методам розв'язування планіметричних та стереометричних задач різними способами.

Математичні вміння – компонент і результат рівневої математичної діяльності, яка має такі особливості: а) спрямована на формування узагальнених способів мисленнєвих дій; б) основні функції – пізнавальна і перетворююча; в) домінування просторового і логічного компонентів, зв'язків, відношень конструктивного характеру; г) притаманність діяльності операційно – орієнтовного змісту, прийомів, які можна подати у вигляді покрокових програм дій; д) має прикладну і практичну спрямованість.

Сформованість вмінь залежить від того, наскільки повно в процесі навчання враховуються рівні математичної діяльності студентів (мінімально базовий, базовий, підвищений).

Формування математичних умінь ефективне, якщо включає такі етапи: підготовчо – мотиваційний, операційно – пізнавальний, рефлексивно – оціночний.

Підготовчо – мотиваційний етап: мотивація введення способу діяльності; актуалізація опорних знань; встановлення програмних вимог до способу діяльності, які показують на базі і в контексті яких знань повинен формуватися спосіб діяльності; виділення методів, прийомів і засобів, необхідних для його формування.

Операційно – пізнавальний етап: виділення операцій способу діяльності; визначення найбільш раціональної послідовності їх виконання;

складання на основі узагальнених операцій моделі способу діяльності; уточнення і встановлення меж його застосування.

Основна увага приділяється розкриттю відповідної системи об'єктивних умов виконання способу діяльності.

Рефлексивно – оціночний етап: узагальнення способу діяльності; ретроспективний аналіз і самооцінювання діяльності; співставлення результатів діяльності з навчальними завданнями.

Контроль, корекція і оцінювання навчальної роботи студентів на заняттях здійснюється як в процесі її виконання, так і у формі рефлексивно – оціночного етапу. Рекомендуються такі види контролю: за кінцевим результатом, за параметрами діяльності, покроковий контроль.

Розглянуті етапи становлять інваріантну дидактичну структуру процесу формування вмінь, яка сприяє самостійному з'ясуванню студентами операційного складу вмінь, конструюванню орієнтовно – операційних основ їх діяльності.

Діяльність навчання майбутнього вчителя математики має конкретний предметний зміст, який і повинен бути проаналізований перш за все. Ми притримуємося думки про те, що процес діяльності навчання обов'язково повинен включати в себе ті акти предметно – специфічної діяльності, вмінням виконувати яку майбутній вчитель повинен оволодіти, адже тому чи іншому вмінню можна навчитись, тільки реально виконуючи його.

Стало уже традицією оцінювати продуктивну діяльність вчителя математики по вмінню його учнів розв'язувати задачі. Це і зрозуміло, адже по тому, як учні розв'язують задачі, можна судити і про те, як і на скільки глибоко засвоїли вони теоретичний матеріал, про вміння орієнтуватись в цьому матеріалі і застосовувати знання про ступінь їх математичного розвитку. З іншої сторони, на тому, як учні розв'язують задачі, можна судити і про педагогічну майстерність вчителя. При такому підході до оцінки діяльності вчителя, його майстерності навчати математиці через задачі, постає важливе питання якості підготовки студентів – майбутніх вчителів до організації цієї діяльності.

У відповідності з цими проблемами підготовки студентів на заняттях математики та методики викладання розглядаються нами з двох позицій: з точки зору підвищення їх загальної ефективності і в плані підготовки для майбутньої педагогічної діяльності вчителя математики. Основою майстерності вважається оперування знаннями з предмету, який вивчається, а теоретичною основою – удосконалення методики навчання розв’язуванню і формуванню професійної майстерності по навчанню учнів розв’язувати математичні задачі на заняттях ШКМ та МВ є системний та діяльнісний підхід, який дозволяє всю множину часткових явищ розглядати як систему, виявити інваріант, основу орієнтовної діяльності, який лежить в основі всіх часткових випадків.

Аналіз теорії поетапного формування розумових дій, одним з головних акцентів якої є вимога здійснення учнями засвоюваної діяльності, а відповідна методика передбачає спеціальні засоби по організації орієнтування у виконанні цієї діяльності, і потім її поетапного відпрацювання, направленого на зміну показників тих чи інших параметрів показує, що діяльність навчання виступає як не самостійно зі сторони того, хто навчається, а тому в основі діяльнісного підходу для формування професійної майстерності вчителя математики ми виділяємо дві стадії.

Перша стадія передбачає виникнення у майбутнього вчителя математики вмінь, які забезпечать можливість актуалізації навчання учнів розв’язуванню задач, засобами нетрадиційного характеру постановки задач, формування їх умов; у відшуканні чітких критеріїв дидактичної значущості задачі і достатнього числа задач, які пропонувалися б учням для реалізації мети навчання; вмінь вірно поєднувати індуктивні та дедуктивні методи роботи з учнями; оволодіння мистецтвом формулювати запитання; прийомами розумових дій (аналогія, узагальнення, конкретизація); вміння будувати контрприклади, обернені твердження; оволодіння узагальненим підходом до розв'язування задач (задача – задача – аналогія – обернена задача – задача узагальнення або задача конкретизація) [10].

Друга стадія передбачає ряд послідовних трансформацій цих вмінь, які мають за мету отримання запланованих характеристик і перш за все певної ступені міцності, достатньої для їх функціонування в ході майбутньої педагогічної діяльності.

Реалізація кожної стадії можливе лише при умовах:

- значного підвищення математичної кваліфікації вчителя;
- ефективної перебудови його методичної підготовки;
- широкого обґрунтування місця і ролі кожної дисципліни в загальній системі підготовки студентів;
- підвищення науково – дослідницької роботи з методики математики.

Початковим етапом для реалізації даних умов повинна виступати модель компетентності вчителя математики, яка б відповідала сучасним вимогам і базувалась на науково обґрунтованих методологічних основах, психолого – педагогічних принципах, які б відповідали концепції формування вчителя математики національної школи.

Крім того, вміння викладача математики визначають зміст курсів, які читаються студентам в педагогічному інституті, а також методи читання цих курсів. Наступним шляхом удосконалення процесу підготовки майбутніх вчителів математики є систематичне вдосконалення навчальних планів та програм.

3.2. Усні стереометричні задачі як засіб розвитку просторового мислення

Особливості змісту програми по стереометрії спричиняються необхідність удосконалювання традиційних форм і методів навчання для того, щоб забезпечити високу якість засвоєння учнями програмного матеріалу.

Особливе місце при цьому займає проблема розвитку просторових уявлень, просторової уяви й просторового мислення учнів. Термін, «просторове мислення» у методиці математики чомусь практично ігнорується. Звичайно прийнято говорити про просторові подання й просторову уяву, а просторове мислення виступає при цьому якщо не їхньою підмножиною, то, принаймні. синонімом (найчастіше відбувається ототожнення просторової уяви й мислення). Таке ототожнення неправомірно, оскільки уява й мислення, різні процеси.

У сучасній психології уява розуміється як «необхідний елемент творчої діяльності людини, що виражається в побудові образа продуктів праці, а також забезпечує створення програми поведінки в тих випадках, коли проблемна ситуація характеризується невизначеністю», а мислення – як «соціально-обумовлений, нерозривно пов'язаний з мовою психічний процес пошуків і відкриття істотного нового, процес опосередкованого й узагальненого відбиття дійсності в ході її аналізу й синтезу. Мислення виникає на основі практичної діяльності з почуттєвого пізнання й далеко виходить за його межі».

Випереджальне відбиття дійсності, здійснюване в процесах уяви, відбувається в конкретнообразній формі, у вигляді яскравих подань, у той час, як випереджюче відбиття в процесах мислення відбувається шляхом оперування поняттями, що дозволяють узагальнено й опосередковано пізнавати світ.

Таким чином, на наш погляд, доцільно розрізняти просторову уява й просторове мислення, хоча ці процеси мають багато загального (наприклад, їхня проблемність, аналітико-синтетичний характер). Найчастіше важко навіть з'ясувати, який саме із цих процесів «працює» при розв'язанні тієї або іншої задачі.

Однією з особливостей мислення є його опосередкованість: мислення поза мовою не існує й не може розвиватися без розвитку мови. Інша найважливіша особливість процесів, мислення – його проблемність.

Виходячи з цих особливостей, ми вважаємо за необхідне включення усних стереометричних задач у систему вправ по розвитку просторового мислення учнів. Розв'язання задачі відповідає проблемній спрямованості мислення, а усна форма розв'язання сприяє розвитку мови учнів, розвиває в такий спосіб їхнє мислення. Відзначимо також, що усне мовлення по своїй природі найбільш близька до внутрішньої мови, у якій формується й існує думка.

Зрозуміло, усне розв'язання задач не може повністю замінити письмове й не повинне йому протиставлятися. Необхідно розумне сполучення обох форм розв'язання, що буде сприяти більше ефективному розвитку просторового мислення учнів.

Усне розв'язання стереометричних задач може здійснюватися;

а) без наочної опори;

б) з опорою на наочність.

Таке ділення трохи умовно, оскільки необхідність застосування наочних опор багато в чому залежить від ступеня підготовки учнів.

3.2.1. Усні вправи без наочної опори

З розвитком просторового мислення учнів тісно зв'язане використання усних стереометричних задач практичного характеру. Ми маємо на увазі, насамперед, групу задач-ілюстрацій до аксіом і теорем. У них потрібно (посилаючись на вивчений матеріал) пояснити, чому має місце той або інший факт.

1) Чому мотоцикл із коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоциклу без коляски потрібна додаткова опора?

2) Чому штатив фотоапарата стоїть стійко завжди, а стілець на чотирьох ніжках – не завжди?

3) Чому листи жерсті зшивають по прямих, перпендикулярним до гребеня даху?

В іншій групі задач учні самі повинні відшукати ілюстрацію до тої або іншої теореми.

а) Як використовується ознака паралельності площин при установці геодезичних інструментів?

б) Як використовується ознака перпендикулярності площин при перевірці вертикальності кладки стін?

У третій групі задач студентів повідомляють про прийоми виконання окремих видів робіт що зустрічаються на практиці, вимірів й обчислень. Учні встановлюють, чи правильний розглядуваний прийом, порівнюють його з викладеним у підручнику; якщо прийом неточний, установлюють його точність, допустимість застосування й т. д.

Всі ці задачі розвивають просторове мислення учнів, підготовлюють їх до майбутньої трудової діяльності.

Корисні для розвитку просторового мислення задачі, розв’язання яких припускає кілька відповідей. Тут, на перший план виступає аналіз різних можливих випадків.

Наприклад. 1) Скільки площин можуть визначати чотири різні точки простору?

2) Чи завжди існує пряма, паралельна одночасно двом даним площинам?

3) Скільки площин можна провести через дану точку паралельно даній прямій?

Усне розв’язання стереометричних задач без опори на наочність припускає, що або дана геометрична конфігурація легко уявляється без креслення, або задача розв’язується на понятійному рівні й образні подання відіграють другорядну роль.

Приведемо приклади таких задач.

1) Чи існує багатогранник, у якого рівно сім ребер?

Якби всієї грані багатогранника були трикутниками, то число ребер ділилося б на 3. Отже, не всі грані трикутники. ,Якщо ж одна грань має *К* ребер (більше 3), то загальне число ребер не може бути менш *2К*, тобто більше 7. Отже, такого багатогранника не існує.

2) Що можна сказати про призму, у якої діагоналі всіх бічних граней конгруентні?

3) Чи існує правильна шестикутна піраміда, всі бічні грані якої правильні трикутники?

4) Площа основи й площа бічної грані правильної чотирикутної піраміди рівні по 64 см^2. Знайти довжину апофеми.

Усні задачі не слід вважати обов'язково легкими задачами. Мається на увазі, що розв’язання проходить без письмового оформлення й не містить складних викладень. При цьому усне розв’язання не означає що воно не має доведення. Всі необхідні міркування, обґрунтування проводяться так само, як і при письмовому розв’язуванні задач.

3.2.2. Усні вправи з опорою на наочність

Наочною опорою може служити як модель геометричної фігури, так й її креслення. Креслення виконується або по ходу розв'язання задачі, або готується заздалегідь.

У нашій практиці усне розв'язання задач по готових кресленнях виступало в декількох варіантах.

1) Умова задачі прочитана. Відповідь потрібно знайти саме на кресленні.

Наприклад, визначити, яким ребрам правильної чотирикутної піраміди *MABCD* або діагоналям основи паралельна пряма, що проходить через середини ребер: а) *MA* й *MB*? б) *MA* й *MC*? в) *MA* й *AB*?

2) Умова задачі доповнена кресленням.

Наприклад, *MABCDEF* – правильна шестикутна піраміда. Чи можуть перетин *MAD* й одна з бічних граней виявитися а) конгруентними? б) рівновеликими?

Розв'язання цієї задачі набагато полегшується, якщо на кресленні зображені апофеми й висота піраміди.

3) Умова задачі повністю не формулюється.

Наприклад. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти кут між

(AD_1) і (DC_1).

Так як умова в цьому випадку повністю не сформульована, то учні повинні велику увагу приділити аналізу просторових відносин між елементами даної фігури.

4) Креслення, містить план розв'язання або вказівки, що допомагають скласти такий план.

Такими вказівками можуть служити виділені на кресленні тим або іншим способом відрізки, кути, трикутники й т.п. Являє собою інтерес так називана «колірна підказка».

Наприклад. Дано квадрат *ABCD*. *CK* – відрізок перпендикулярний до площини квадрата; кінець його з'єднаний відрізками прямих з вершинами *A* і *B*. Довести, що трикутник *KAB* прямокутний.

Елементами, що підказують, тут можуть бути виділені одним кольорами кути *ABC* і *BCK*, і позначені іншими кольорами відрізки *AB* і *KB* (суцільна лінія) і відрізок *BC* (пунктирна лінія). Таке виділення елементів креслення дозволяє сконцентрувати увага на певній групі елементів даної фігури, стимулює учнів до пошуку тих просторових відносин, які мають тут місце.

Залежно від складу учнів, ступеня їхньої підготовки «підказуючих» елементів може бути більше або менше. Тут дуже зручне демонстрування креслень із кодопозитиву прямо на дошку, що дає можливість додаткових зображень на дошці кольоровими крейдами (або сполучення двох або декількох кодопозитивів).

5) По даному кресленню необхідно проаналізувати дану геометричну конфігурацію.

Наприклад, даний рівнобедрений прямокутний трикутник *ABC*. $\angle A = 90^{\circ}$ град. *AM* – відрізок перпендикулярний до площини трикутника. Точка *D* – середина (*BC*). Проведено відрізки *MB*, *MD*, *MC*, *AD*. Охарактеризувати отриману фігуру.

У цій задачі учням необхідно встановити якнайбільше залежностей між елементами даної фігури, знайти конгруентні відрізки, кути, трикутники, вказати можливість знаходження величин тих або інших елементів при різних варіаціях заданих величин (наприклад, знаючи величини відрізків *AC* й *AM* скласти план знаходження величин інших елементів даної конфігурації).

Задачі такого типу, активізуючи аналітико-синтетичну діяльність мозку, сприяють розвитку просторового мислення учнів.

Розвивають просторове мислення учнів і задачі на знаходження множин точок, що володіють зазначеними властивостями. При цьому необхідно привчати студентів давати мотивовані відповіді, досліджуючи всі можливі випадки. У міру необхідності може бути виконане у ході розв'язання відповідне схематичне креслення.

Нехай, наприклад, необхідно знайти множину всіх точок, що належать даній площині *b* і рівновіддалених від даних точок *A* і *B*.

Відповідь: «Шукана множина точок є пряма, по якій площина симетричні точок *A* і *B* перетинає площину *b*», – є недостатнім, оскільки він справедливий тільки для випадку, коли пряма АВ не перпендикулярна до площини, *b*.

Якщо ж (*AB*) || *b,* то може мати місце один із двох випадків:

1) точки А і В симетричні щодо площини *b.*
2) точки А і В не симетричні щодо площини *b*.

У першому випадку шуканою множиною є вся площина *b*, а в, другому – шукана множина порожня.

Як видно з швидкого огляду, усне розв'язання стереометричних задач може застосовуватися для розвитку просторового мислення студентів у різних формах.

Було б помилкою протиставляти усне розв'язання стереометричних задач іншим формам роботи з розвитку просторового мислення студентів. Тільки в сполученні з іншими формами роботи усне розв'язання стереометричних задач дасть належний ефект.

3.3. Педагогічний експеримент

Педагогічний експеримент планується з метою визначення або уточнення основних напрямів здійснення наукового дослідження, дослідної перевірки його результатів, ефективності розробленої методичної системи.

Основними структурними елементами системи педагогічного експерименту є його планування, організація та проведення, обробка та аналіз отриманих результатів з використанням методів математичної статистики.

Для перевірки ефективності проведення математичних гуртків, було розроблено та проведено даний педагогічний експеримент.

Педагогічний експеримент було проведено методом експертних оцінок.

В ході виконання педагогічного експерименту було проведено експертне опитування, в ході якого була перевірена доцільність введення в навчальну програму гуртка, яка в свою чергу складається з таких тем :

1. Середини сторін чотирикутника.
2. Медіана проведена до гіпотенузи.
3. Співвідношення у прямокутному трикутнику.
4. Формула $a = 2R\sin\alpha$.
5. Дотична і січна, проведені до кола з однієї точки.
6. Відношення площ трикутників, що мають спільну висоту (основу).
7. Площі трикутників, на які чотирикутник поділено діагоналями.
8. Кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх і суміжних кутів.
9. Відстань від вершини трикутника до точки дотику вписаного кола зі стороною.
10. Властивості бісектриси кута трикутника.
11. "Продовження" медіани.
12. Метод допоміжної площі.
13. Метод допоміжного кола.
14. Застосування центральної та осьової симетрії.
15. Застосування перетворення повороту.

16. Застосування гомотетії.

17. Метод координат.

18. Метод векторів.

В групу експертів були запрошені ряд компетентних фахівців:

1. Антонюк М. С. – кандидат педагогічних наук, доцент.

2. Клекоць Г. Я. – старший викладач кафедри математикм та МВ.

3. Коваль В.В. – кандидат педагогічних наук, доцент.

4. Генсіцька-Антонюк Н.О. – кандидат педагогічних наук, доцент.

5. Сяська Н. А. - кандидат педагогічних наук, доцент.

Результати опитування експертів являють собою сукупність оцінок (балів). Оцінки – $C_{ік}$ виставляються по десятибальній системі. Показником узагальненої думки групи експертів є середнє арифметичне величин оцінки певного питання (фактору) – M_k. Середнє арифметичне величини оцінки фактора обчислюється за формулою: $M_k = \frac{1}{m}\sum C_{ік}$, де

m – кількість експертів, що приймали участь в оцінці;

$C_{ік}$ – оціночний показник k-го фактора в i-го експерта.

Таблиця 3.1.

Підсумкова таблиця даних експертного анкетування

Оцінювані фактори	Експерти					M_k
	1	2	3	4	5	
1	10	10	8	9	9	9,2
2	8	10	9	10	7	8,8
3	9	9	10	9	10	9,4
4	9	9	8	9	10	9

5	9	9	10	9	8	9,2

Сума рангів S_k кожного фактора обчислюється наступним чином:

1. Проводиться ранжування за спаданням оцінок за допомогою чисел натурального ряду, які є рангами оцінок певного експерта.
2. Якщо експерт оцінює декілька факторів однаковою оцінкою, то їм присвоюються “зв’язані ранги”.
3. Суми рангів кожного із стовпчиків повинні бути рівними, і дорівнювати контрольному числу, яке обчислюється за наступною формулою: $S_m = \frac{(1+k)k}{2}$, де k – кількість розглядуваних факторів.
4. Далі підраховуються суми рангів кожного із рядків S_k.

Таблиця 3.2.

Ранжування експертних оцінок

Фактори	Показники	Експерти					S_k
		1	2	3	4	5	
1	Бали	10	10	8	9	9	14
	Числа натурального ряду	1	1	4	2	3	
	Ранги	1,5	1,5	4,5	3,5	3	
2	Бали	8	10	9	10	7	15,5
	Числа натурального ряду	5	2	3	1	5	
	Ранги	5	1,5	3	1	5	
3	Бали	9	9	10	9	10	14
	Числа натурального ряду	3	3	1	3	1	
	Ранги	3,5	4	1,5	3,5	1,5	
4	Бали	9	9	8	9	10	17

	Числа натурального ряду	4	4	5	4	2	
	Ранги	3,5	4	4,5	3,5	1,5	
5	Бали	10	9	10	9	8	14,5
	Числа натурального ряду	2	5	2	5	4	
	Ранги	1,5	4	1,5	3,5	4	
$S_m = 15$		15	15	15	15	15	75

Показником ступеня узгодженості думок експертів є коефіцієнт варіації оцінок кожного фактора V_k. Цей коефіцієнт обчислюється наступним чином:

1. Обчислюється дисперсія оцінок D_k: $D_k = \frac{1}{m-1}\sum(C_{ік} - M_k)^2$, де

m – кількість експертів, що приймали участь в оцінці;

$C_{ік}$ – оціночний показник k-го фактора в i-го експерта;

M_k – середнє арифметичне величини оцінки фактора.

2. Обчислюється середнє квадратичне відхилення оцінок – σ_k:

$\sigma_k = \sqrt{D_k}$.

3. Знаходиться коефіцієнт варіації V_k : $V_k = \frac{\sigma_k}{m}$.

Таблиця 3.3.

Показники ступеня узгодженості думок експертів

Фактори	$(C_{ik} - M_k)^2$					$\sum(C_{ік} - M_k)^2$	D_k	σ_k	V_k
	Експерти								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**				
1	0,36	0,36	1,96	0,36	0,16	3,2	0,8	0,894	0,095
2	0,04	1,44	0,64	1,44	3,24	6,8	1,7	1,304	0,148
3	0,04	0,04	0,04	0,04	0,64	0,8	0,2	0,447	0,051
4	0,04	0,64	1,44	0,04	0,64	2,8	0,7	0,837	0,091
5	0,64	0,04	0,64	0,04	1,44	2,8	0,7	0,837	0,091

Таким чином, на основі аналізу вище наведених таблиць, можна обґрунтовано стверджувати, що впровадження методичної системи організації навчально – дослідницької діяльності учнів з математики, яка включає в себе різноманітні, ефективні форми і методи роботи, позитивно впливає не лише на рівень сформованності математичних знань, умінь і навичок, але й на формування позитивної мотивації, на їх відношення до навчальної та дослідницької діяльності, на задоволення власних потреб і запитів. Враховуючи зміни в системі навчання, можна з упевненістю стверджувати, що методична система організації навчально – дослідницької діяльності учнів з математики має своє місце, але підтвердження цього висновку потребує широкомасштабних експериментальних досліджень на значній кількості учнів, шкіл та регіонів.

ВИСНОВКИ

В магістерській роботі було перевірено і підтверджено гіпотезу дослідження і можна з впевненістю сказати, що при застосуванні поданих у роботі методичних рекомендацій, при навчанні студентів розв'язуванню планіметричних та стереометричних задач ефективність значно покращиться. В даній роботі розглянуто основні методи розв'язування планіметричних та стереометричних задач, наведені приклади розв'язування різних задач за допомогою алгебраїчного, векторного, координатного методів та методу геометричних перетворень і розроблена методика їх вивчення в залежності від розглядуваної теми, що може бути використана при навчанні математики.

Робота досить змістовна, так як в ній розглянуто як теоретичні, так і практичні основи методики викладання математики, зокрема методика навчання студентів методам розв'язування стереометричних задач. Перший розділ представлений теоретичними відомостями про поняття "задачі", функції задач, роль і місце геометричних задач в геометрії, поняття "розв'язання задач", "метод розв'язування задач". У другому розділі розглянуто базові теореми планіметрії, методи розвязування стереометричних задач та їх класифікація. У третьому розділі розглянуто методику проведення занять з даного спецкурсу, а також розглянуто різні підходи до розвязування задач, та окремо виділено тему усні задачі на основі яких проведено педагогічний експеримент.

Геометричні побудови грають важливу роль в математичній підготовці студентів. Виконання різних геометричних побудов сприяють розвитку логічного мислення, просторової уяви, формують графічні навики, розвивають конструктивні здібності, допомагають кращому засвоєнню теоретичного матеріалу і т. д.

Діючі навчальні посібники, написані так, що всі розділи програми вивчалися з широкими залученнями геометричних побудов і вимірювань. На геометричних побудовах ґрунтується використання в геометрії конструктивних прийомів при вивченні різних понять і доведенні теорем.

Розділ геометрії, в якому вивчаються властивості фігур на площині, називається планіметрією.

Стереометрія – це розділ геометрії, який вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

Система вивчення курсу стереометрії, як і курсу планіметрії, ґрунтується на загальному для побудови математичної теорії аксіоматичному методі. Зокрема, аксіоматичний метод побудови геометрії містить такі чотири етапи.

1) На початку вводять основні (неозначувані, ще кажуть, первісні) поняття. Вони відповідають тим геометричним об'єктам, для яких неможливо сформулювати означення, але які легко інтуїтивно уявити. Так, наприклад, у планіметрії такими поняттями є точка, пряма і відстань. При цьому в геометрії оперують й іншими загальними для математичної теорії поняттями, наприклад поняттям множини.

2) Формулюють аксіоми, що описують основні властивості неозначуваних понять, тобто вводять систему аксіом. Нагадаємо, що аксіоми – це твердження, які приймають без доведення. Вони описують неодноразово перевірені й підтверджені на практиці реальні властивості геометричних об'єктів, які відповідають неозначуваним поняттям, а тому зазвичай є інтуїтивно очевидними.

3) Використовуючи неозначувані поняття, визначають інші, більш складні, поняття. Так, наприклад, використовуючи поняття точки і прямої, дають означення відрізка та променя.

4) Використовуючи всі введені поняття та аксіоми доводять теореми.

Раціональна методика навчання розв’язуванню математичних задач відіграє істотну роль у формуванні високого рівня математичних знань, умінь і навичок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Адамар Ж. Елементарна геометрія: в 2 ч. Ч.2, вип. 2. Стереометрія / Ж. Адамар; пер. В. Е. Бучков, Я. Д. Костецький – К. : Рад. шк., 1955 – 244 с.

2. Бевз В .Г. Методические основы построения системы стереометрических упражнений : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Валентина Григорьевна Бевз. – К., 1989. –197 с.

3. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посіб. / Г. П. Бевз. – К. : Вища шк., 1977. – 376 с.

4. Бевз Г. П. Методика розв’язування стереометричних задач : посіб. для вчителя. – К. : Рад. шк., 1988. – 192 с.

5. Бондаренко М.Ф., Дикарев В.А., Мельников А.Ф. и др. Под ред. Семенца В.В. Математика для поступающих в ВУЗы / Учебное пособие. – Харьков, ХТУРЭ, 1999. – 1120с.

6. Брадіс В.М. Методика викладання математики в середній школі / В.М.Брадіс. – К.: Радянська школа, 1953.

7. Василевский А.В. Методы решения задач. – Минск: Вища школа, 1974.

8. Васильева М.В. Методические рекомендации и указания по геометрии.

9. Вітюк О.В. GRAN-2D і GRAN-3D – програмні засоби для підтримки курсу геометрії // Інформатика та комп'ютерно-орієнтовані технології навчання: Зб.наук. праць Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Хмельницький, 16–18 травня 2001 року)/ Редкол.-К: Педагогічна думка. 2001.

10. Вітюк О.В. Розвиток образного мислення учнів при вивченні геометрії з використанням ППЗ GRAN-3D. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: 36. наук. праць/К.:НПУ ім. Драгоманова.-Випуск 3. 2001

11. Габович И. Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: Кн. для учащихся. / И.Г. Габович. — М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.—192 с.

12. Гальперин П.Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка. – М.: Изд. Московского ун-та, 1985.

13. Гальперіна А.Р. Математика. Методика підготовки до ЗНО. – Х.: Веста, 2009. – 208с.

14. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В. Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями). – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1983. – 384с.

15. Гольдберг Я.Є. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителя. – Київ: Радянська школа., 1990.

16. Гулівата І. О. Демонстраційні комп'ютерні моделі як засіб формування просторової уяви / І. О. Гулівата, В. Ф. Заболотний // Зб. наук. пр. Херсон. держ. ун-ту. Сер. Педагогічні науки. – Херсон, 2010. – Вип. 56. – С. 401–406.

17. Гулівата І. О. Естетичний аспект використання комп'ютерних моделей у навчальному процесі / І. О. Гулівата // Нові технології навчання : зб. наук. пр. / Ін-т інновац. технологій і змісту в освіти МОН України ; Вінниц. соц.-екон. ін.-т ун-ту «Україна». – К. ; Вінниця, 2007. – № 48, ч. 1 : Шляхи розвитку духовності та професіоналізму за умов глобалізації ринку освітніх послуг – С. 100–102.

18. Гулівата І. О. Розвиток просторової уяви учнів з використанням демонстраційних мультимедійних моделей / І. О. Гулівата, В. Ф. Заболотний, Н. А. Мисліцька // Зб. наук. пр. Уман. держ. пед. ун-ту ім. П. Тичини. – Умань, 2008. – Ч. 2. – С. 131–137.

19. Гулівата І. О. Розвиток просторової уяви учнів у процесі вивчення стереометрії з використанням динамічних комп'ютерних моделей / І. О. Гулівата // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Педагогіка. Соціальна робота. – Ужгород, 2010. – Вип. 18. – С. 46–49.

20. Гусев В. А. и др. Практикум по элементарной математике. Геометрия: Учеб. пособие для студ. физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей. 2-е изд., перераб. и доп. М., 1992.

21. Далингер В.А. Проектирование элективных курсов по геометрии посредством локальной аксиоматизации // Современные проблемы науки и образования. – 2006. – № 3. – С. 67-70.

22. Демидов В.П. Сборник задач на доказательство по геометрии. – Саранск, 1964.

23. Жовнір Я.М. 500 задач з методики викладання математики. – Харків, 1997.

24. Жовнір Я.М. Позиційні задачі в стереометрії. – Київ, 1991.

25. Жук Ю. О. Педагогічні програмні засоби як ринковий продукт / Ю. О. Жук, О. М. Соколюк // Засоби і технології єдиного інформаційного освітнього простору : зб. наук. пр. / за ред. В. Ю. Бикова, Ю. О. Жука ; Ін-т засобів навчання АПН України. – К., 2004. – С. 154–158.

26. Збірник екзаменаційних завдань в 10-11 кл. Геометрія.

27. Зенчин А.Р. Основные принципы построения изображений в стереометрии.

28. Игначкова А.В., Марченко Т.Л. Методические указания и задания для самомтоятельной работы по геометрии для слушателей подготовительного отделения. - Харьков, ХИЭИ, 1985. – 46с.

29. Изаак Д. Ф. К методике решения задач на построение сечений призм и пирамид // Математика в школе. 1978. № 5.

30. Изаак Д. Ф. О задачах на построение в стереометрии // Математика в школе. 1978. № 3.

31. І.А. Сверчевська «Еволюція вивчення геометричних тіл у шкільному курсі стереометрії»

32. Касьяненко М.Д. Підвищення ефективності навчання математики / М.Д. Касьяненко. – К., 1999. – 180 с.

33. Колягин Ю.М. и др. Методики преподавания в средней школе. Общая методика / Ю.М. Колягин – М.: Просвещение, 1980. – 386 с.

34. Кравченя Э. М. Средства обучения в педагогическом образовании / Э. М. Кравченя. - Минск : БГПУ, 2004.-235 с.

35. Кульчицька Н. В. Вивчення стереометрії в старшій школі в умовах використання нової інформаційної технології: дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Н. В. Кульчицька ; УДПУ ім. М. П. Драгоманова. – К., 1993. – 144 с.

36. Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. - М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1981. - 480с.

37. Литвиненко В.М. Практикум по решению задач школьной математики. – Москва: Просвещение, 1982., 159с.

38. Лінник Г.Б., Лінник Б.С., Решетнікова С.М. Навчальний посібник з елементарної математики для школярів та студентів. Х.: Парус, 2005. – 384с.

39. Лоповок Л.М. Сборник задач по стереометрии. Пособие для учителей средних школ. – Москва, 1959.

40. Малкова Наталія «Навчання учнів розв'язувати стереометричні задачі в умовах застосування ІКТ»

41. Математика. Довідник з розв’язування екзаменаційних завдань. 11 кл. Ч.2. Геометрія. – Тернопіль: “Підручники – посібники”, 1998.

42. Методика викладання математики: Практикум. / за ред. Бевза Г. П. – К.: Вища школа, 1981. –263 с.

43. Моторіна В. Г. Технології навчання математики в сучасній школі. – Харків, 2001. - 262 с.

44. Наумович Н.В. Геометрические места в пространстве и задачи на построение. – Москва, 1962.

45. Нелін Є.П. Геометрія в таблицях.

46. Новик И. А. Формирование методической культуры учителя математики в педвузе / И. А. Новик. -Минск : БГПУ, 2003. – 178 с.

47. О.В. Погорєлов. Геометрія 10 – 11. – К.: Освіта, 2000. – 128 с.

48. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: Основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. – М.: Наука, 1975. – 448с.

49. Польских И.Г. Проекционный чертеж и построения на нем. – Москва, 1962.

50. Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / А. В. Прус ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2007. – 209 с.

51. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій: Дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / ХНПУ імені Г. С. Сковороди. – Х., 2005.

52. Роганін О.М., Каплун О.І. Математика: Практичний довідник. – Харків: Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы (с решениями). В 2-х кн. Кн.1. Алгебра: Учеб.пособие / Егеров В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др.; под ред. Сканави М.И. - М.: Высш.шк., 1994. – 528с.

53. Семушин А.Д. Методика обучения решению задач на построение в стереометрии. – Москва, 1959.

54. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. пед. навч. закл.в / З. І. Слєпкань. – К. : Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

55. Смирнова И.М. В мире многогранников: Кн. для учащихся. / И.М. Смирнова. – М.: Просвещение, 1995. – 144 с.

56. Смирнова И.М. Геометрия: Учеб. пособие для 10-11 кл. гуманит. Профиля. / И.М. Смирнова. – М.: Просвещение, 1997. – 159 с.

57. Смирнова И.М. Об определении понятия правильного многогранника. / И.М. Смирнова. // Математика в школе. – 1995. – № 3.

58. Смирнова И.М. Уроки стереометрии в гуманитарных классах. Изучение многогранников. / И.М. Смирнова. // Математика в школе. – 1994. – № 4.

59. Смогоржеввский О.С. Дослідження задач на побудову. – Харків, 1961.

60. Співаковський О. В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей : монографія / О. В. Співаковський. – Херсон : Айлант, 2003. – 249 с.

61. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1984. - 416с.

62. Стереометрія у старшій школі : посіб. для вчителя /Я. С. Бродський, В. Ю. Грек, О. Л. Павлов [та ін.]. – Т. : Богдан, 2005. – 404 с.

63. Столяр А.А. Педагогика математики. – Минск: Высшая школа, 1986.

64. Тесленко И.Ф. Методика преподавания геометрии: метод. Пособие / Тесленко И.Ф., Чашечников С.М., Чашечникова Л.И. – К.: Рад. шк., 1962. – 124 с.

65. Усова А.В. Формирование учебных умений и навыков учащихся на уроках физики / А.В.Усова, А.А. Бобров. – М.: Просвещение, 1988. – 112с.

66. Федорчук Е. І. Сучасні педагогічні технології. Навч.-методичний посібник. - Абетка, 2006. - 212 с.

67. Філон Л. Елементи стереометрії в курсі математики основної школи : навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. / Л. Філон, В. Швець. – К. : Шкіл. світ, 2006. – 128 с. – (Б-ка «Шкіл. світу»). – Бібліогр. : с. 123–127.

68. ФОП Співак Т.К., 2009. – 416с.

69. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – 2-е изд., – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.

70. Четверухин М.Ф. Изображение фигур в курсе геометри: пособие для учителей / М.Ф. Четверухин. − М. : Учпедгиз, 1958. − 216 с.

71. Четверухин Н. Ф. Вопросы формирования и развития пространственных представлений и пространственного воображения учащихся / Н. Ф. Четверухин // Формирование и развитие пространственных представлений у учащихся. – М., 1964. – С. 52–60.

72. Четверухин Н.Ф. Вопросы методологии и методики геометрического построения в школьном курсе геометрии. – АПНРСФСР, 1940.

73. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений. – Москва. Учпедгиз, 1952.

74. Четверухин Н.Ф. Стереометрия задачи на проекционном чертеже. – Москва, 1954.

75. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (стереометрия).

76. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике.

77. Решение задач. – М.: Просвещение, 1991.- 384с.

78. Шклярский Д.О. Избранные задачи.Ч.3. Геометрия. – Москва, 1954.

79. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе. – М. «Сентябрь», 1996.

80. Якиманская И.С. Розвитие пространственного мышления школьников. – М.:Педагогіка, 1980.

ДОДАТКИ

Додаток А

Усні вправи на тему «Взаємне розміщення прямих і площин у просторі»

1. Незнайкові дали завдання принести предмет, який містив би сім пар паралельних прямих та три пари паралельних площин. Він довго думав приніс коробку від сірників. Чи правий був Незнайко?

2. На заводі виготовили стіл у вигляд трапеції. Потім провели середню лінію (КМ) та поставили перегородку, яка проходила через неї. Чи буде ця перегородка паралельна до сторін стола (АВ, CD), як основами трапеції? Вважати що кришка стола виготовлена з тоненько пластинки.

3. Знайдіть на трикутній призмі паралельні площини, перпендикулярні площини та площини, які перетинаються.

4. Виготовити чотирикутну призму , використовуючи , покажіть, що дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою. Знайдіть на ній перпендикулярні та мимобіжні прямі.

5. Назвіть предмети вашого щоденного використання, як містять перпендикулярні прямі та площини; паралельні прямі та площини, мимобіжні прямі.

6. Учневі сказали провести через задану точку поза прямою дві прямі a b так, щоб вони були паралельні до прямо c. Чи виконав учень завдання? Чому?

7. Виготовити наочність паралельних площин. Побудуйте довільні паралельні прямі, як перетинають ц площини. Як співвідносяться довжини відрізків цих прямих, що знаходяться між паралельними прямими? Зробіть відповідні висновки накресліть утворену модель в зошит.

8. Зробити з пластиліну пластинку (основу), за допомогою дроту побудуйте дві паралельні прямі (в просторі). Використовуючи картон, побудуйте площину, перпендикулярну до одно з цих прямих. Як буде розміщені друга пряма, дана площина? Які можна зробити висновки? Зобразіть відповідну модель в зошит.

9. Використовуючи елементи моделі з попередньо задач, зробіть наступне: побудуйте пряму, перпендикулярну до пластилінового площини; прикріпіть паперову площину до дано прямо так, щоб ця пряма лежала на даній площині. Під яким кутом розміщена пластилінова та паперова площини? Зробіть відповідні висновки, накресліть утворену модель в зошит.

Усні вправи на тему «Призми. Піраміди.»

1. Щоб запакувати товар у вигляді прямої призми, в основі якої лежить прямокутник, потрібно використати певну кількість паперу. Яка найменша площа паперу потрібна для запакування товару? Відомо, що ширина призми a=6 см, довжина b=8 см, висота h =2 см.

2. Обчисліть об’єм класу, в якому ви вчитеся. Уявіть, що підлога стеля у вигляд правильних п’ятикутників зі стороною 1м. Яким тоді буде об’єм класу.

3. Знайдіть об’єм споруди, накритого чотирикутною пірамідою, в основі якої прямокутник з сторонами b1=12м, a1=8м. Висота даху h1=2м, сам будинок має вигляд прямокутного паралелепіпеда довжиною b2=11,5м, шириною a2=7,5м та висотою h2=2,5м.

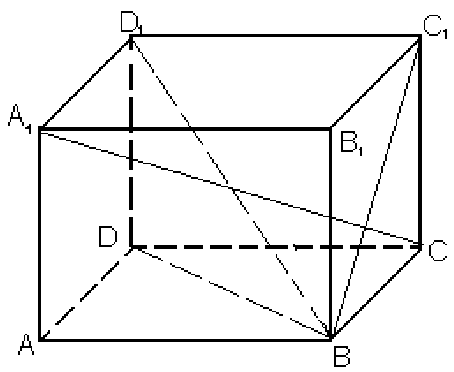
4. Багато тисячоліть тому стародавні єгиптяни ховали царів (фараонів) у кам’яних спорудах. Геометричні форми цих споруд піраміди. Обчислити бічну поверхню шестикутної піраміди, в основі якої лежить правильний шестикутник з стороною 5м. Апофема піраміди h=8м.

5. Побудуйте розгортку куба з стороною 3 см. В одній з граней виріжте отвір діаметром 1см. Яка площа утвореної поверхні?

6. Які лінійні розміри може мати будка для вашої собаки, якщо відомо, що вона має вигляд паралелепіпеда, накритого чотирикутною пірамідою. Висота паралелепіпеда дорівнює 50 см, V дорівнює 2500 см ; висота піраміди 20см, а виступи навколо паралелепіпеда мають по 2см.

7. Знайдіть об'єм фігури, якщо відомо, що це куб з отвором у вигляд піраміди, в основі якої лежить правильний п'ятикутник. Основа піраміди та грань куба – співпадають, а вершина піраміди лежить на відповідній протилежній грані куба. Сторона куба дорівнює a; сторона п'ятикутника дорівнює b.

8. Розгляньте зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



а) Які ребра даного куба належать паралельним (мимобіжним) прямим? Які ребра даного куба належать прямим, що перетинаються?

б) Які ребра даного куба перпендикулярні (паралельні) до його граней?

в) Грані $ABCD$ та ABA_1B_1 мають спільну точку. Назвіть лінію їх перетину.

г) Назвіть по зображенню кути, величина яких (90º).

д) Які прямі, зображені на малюнку перетинаються з прямою, якій належить діагональ A_1D_1? Паралельні з нею? Мимобіжні з нею?

е) Яким площинам куба належать точки A, C_1, D, D_1?

ж) З якими площинами куба пряма AC має хоча б одну спільну точку?

з) Вкажіть кут, утворений діагоналлю куба з площиною граней $ADCD, ABA_1B_1, A_1B_1C_1D_1$. Якщо потрібно, виконайте необхідні побудови.

и) Який вид мають трикутники ADB, AD_1C, ACA_1?

к) Діагональ основи куба дорівнює 5 см, а діагональ куба 7 см. Знайдіть його об’єм.

л) Знайдіть V піраміди , якщо ребро куба дорівнює 13 см.

м) Об’єм піраміди ADD_1B - 60 см^3. Знайдіть об’єм куба.

н) Знайдіть центр куба.

Усні вправи на тему «Конус. Циліндр»

1. Обчисліть об’єм вашого олівця. Яка його довжина, діаметр?

2. Обчисліть об’єм циліндра, у якому діагональ осьового перерізу d=10см, а висота h=8см.

3. На заводі виготовляють котли циліндричної форми, які перед продажею фарбують. Фарбу розраховують у відповідності до площ поверхні котла. Яка площа поверхні котла, якщо діаметр основи відповідного циліндра d=0,5м, а твірна l=2м?

4. На карнавалі діти виготовляли шапочки у вигляд конуса. Скільки вони витрачали паперу на одну шапочку, якщо твірна відповідного конуса l=20см, а діаметр основи d=10см.

5. Обчисліть об’єм конуса, висотою h=20м, діаметр основи d=6м.

6. В циліндричну деталі, об’єм якої V=20 дм^3, зробили порожнину у вигляді конуса з висотою h=2см, радіусом основи r=0,5см. Який об’єм утвореної деталі?

8. Взяли три сплави об’ємами 45, 60, 100, з них виплавили циліндр. Який об’єм утвореного циліндра?

9. В циліндричну вазу, внутрішній діаметр якої 14 см., опустили металічний конус. При цьому рівень води у вазі піднявся на 3 см. Який об’єм деталі?

10. Знайдіть об’єм циліндра, утвореного в результат повороту прямокутного трикутника АВС навколо катета АВ. АВ=9 см.; ВС=4см.

12. Знайдіть площу поверхні фігури, яка складається з двох циліндрів, лінійні розміри яких такі: $r1$=3см.; $r2$=6 см.; $h1$=4см.; $h2$=6см.

13. Об’єми двох бочок відносяться як 4 : 9. Висоти бочок рівні. Як відносяться їхні діаметри?

Усні вправи на тему «Куля»

1. Обчисліть об’єм м’яча, якщо відомо, що його діаметр дорівнює 20 см.

2. Знайдіть об’єм тіла, яке має форму кулі з порожниною об’ємом 4 см^2 . Діаметр кулі дорівнює 4 см.

3. В скільки разів більша площа поверхні кулі радіусом 6 см., від поверхні кулі, радіус якої дорівнює 2 см. 5. Площі поверхонь двох куль відносяться як 4:9. Об’єм одно кулі дорівнює 54 см^3. Знайдіть об’єм другої кулі.

5. Півкруг, площею 8 см^2 повернули навколо основи. Знайдіть об’єм кулі, яка утворилася в результаті цього повороту.

6. Що має більший об’єм, три кульки діаметром 2 см, чи куля діаметром 6 см?

7. Знайдіть площу поверхні фігури у формі півкулі з вирізаним кубом (одна з граней куба співпадає з основою півкулі). Радіус кулі дорівнює 6 см, сторона куба 1 см.

8. Розташуйте дані тіла за такими категоріями : тіла мають однакові об'єми ; тіла мають однакові площі поверхонь. а) циліндр (r=1 см.; h=2см.); б) куля (r=1см.); в) конус (r=1см.; h=4см.)

Додаток Б

Тест № 1 Аксіоми стереометрії і наслідки з них

1 варіант

1. Яке з наступних тверджень вірне?

а) Будь-які чотири точки лежать в одній площині;

б) будь-які три точки не лежать в одній площині;

в) будь-які чотири точки не лежать в одній площині;

г) через будь-які три точки проходить площину;

д) через будь-які три точки проходить площина, і притому тільки одна.

2. Скільки спільних точок можуть мати дві різні площини?

а) 2; б) 3; в) декілька; г) нескінченно багато; д) нескінченно багато або жодної.

3. Точки *A, B, C* лежать на одній прямій, точка *D* не лежить на ній. Через кожні три точки проведена одна площина. Скільки різних площин при цьому вийшло?

а) 2; б) 3; в) 1; г) 4; д) нескінченно багато.

4. Якщо три точки не лежать на одній прямій, то розміщення площини в просторі вони:

а) не визначають у будь-якому випадку;

б) визначають, але за додаткових умов;

в) визначають у будь-якому випадку;

г) нічого сказати не можна;

д) інша відповідь.

5. Виберіть вірне твердження.

а) Якщо одна прямій точки лежить в площині, то всі точки прямої лежать в цій площині;

б) через пряму і не лежачу на ній точку проходить площина, і притому тільки одна;

в) через дві прямі, що перетинаються площину провести не можна;

г) будь-які дві площини не мають спільних точок

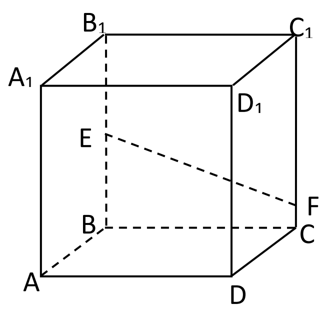
д) якщо чотири точки не лежать в одній площині, то які-небудь три з них лежать на одній прямій.

6. Назвіть спільну пряму площин *AFD* і *DEF.*

а) *AD;* б) *DE;* в) визначити не можна; г) *DF;* д) *AF.*

7. Яку з перерахованих площин перетинає пряма *EF* (мал. 1)?

а) *ABC;* б) AA_1D; в) BB_1C_1; г) *AEF;* д) B_1C_1C.



Мал. 1

8. Через точку *M*, що не лежить на прямій *a*, провели прямі, що перетинають пряму *a.* Тоді:

а) ці прямі не лежать в одній площині;

б) ці прямі лежать в одній площині;

в) ніякого висновку зробити не можна;

г) частина прямих лежить в площині, а частина – ні;

д) всі прямі співпадають з прямою *a.*

9. Пряма *a* лежить в площині α і перетинає площину β. Яке взаємне розташування площин α і β?

а) Визначити не можна;

б) вони співпадають;

в) мають тільки одну спільну точку;

г) не перетинаються;

д) перетинаються по деякій прямій.

10. Точки *A, B, C* не лежать на одній прямій. $M \in AB$, $K \in AC$, $X \in MK$. Виберіть вірне твердження.

а) $X \in AB$; б) $X \in AC$; в) $X \in ABC$;

г) точки *X* і *M* співпадають;

д) точки *X* і *K* співпадають.

ІІ варіант

1. Що можна сказати про взаємне розташування двох площин, які мають три загальні точки, що не лежать на одній прямій?

а) Перетинаються; б) нічого сказати не можна; в) не перетинаються; г) співпадають; д) мають три загальні точки.

2. Яке з наступних тверджень вірно?

а) Якщо дві точки кола лежать в площині, то все коло лежить в цій площині;

б) пряма, що лежить в площині трикутника, перетинає дві його сторони;

в) будь-які дві площини мають тільки одну спільну точку;

г) через дві точки проходить площина, і притому тільки одна;

д) пряма лежить в площині даного трикутника, якщо вона перетинає дві прямі, що містять сторони трикутника.

3. Чи можуть дві різні площини мати тільки дві загальні точки?

а) Ніколи;

б) можуть, але за додаткових умов;

в) завжди мають;

г) не можна відповісти на питання;

д) інша відповідь.

4. Точки *K, L, M* лежать на одній прямій, точка *N* не лежить на ній. Через кожні три точки проведена одна площина. Скільки різних площин при цьому вийшло?

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) нескінченно багато.

5. Виберіть вірне твердження.

а) Через будь-які три точки проходить площина, і притому тільки одна;

б) якщо дві точки прямої лежать в площині, то всі точки прямої лежать в цій площині;

в) якщо дві площини мають спільну точку, то вони не перетинаються;

г) через пряму і точку, що лежить на ній, проходить площина, і притому тільки одна;

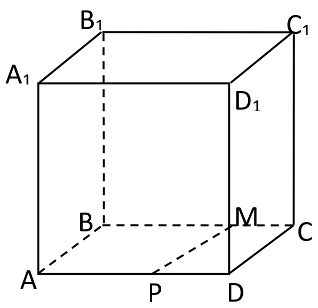
д) через дві прямі, що перетинаються площину провести не можна.

6. Назвіть спільну пряму площин *PBM* і *MAB*.

а) *PM;* б) *AB;* в) *PB;* г) *BM;* д) визначити не можна.

7. Яку з перерахованих площин перетинає пряма *PM* (мал. 2)?

а) DD_1C_1 ; б) D_1 *PM;* в) B_1PM; г) *ABC;* а) *CAD.*



Мал. 2.

8. Дві площини перетинаються по прямій *c*. Точка *M* лежить тільки в одній з площин. Що можна сказати про взаємне розміщення точки *M* і прямої *c*?

а) Ніякого висновку зробити не можна;

б) пряма *c* проходить через точку *M;*

в) точка *M* лежить на прямій *c*;

г) пряма *c* не проходить через точку *M*;

д) інша відповідь.

9. Прямі *a* і *b* перетинаються в точці *M*. Пряма *c*, що не проходить через точку *M,* перетинає прямі *a* і *в*. Що можна сказати про взаємне розміщення прямих *a*, *b* і *c*?

а) Всі прямі лежать в різних площинах;

б) прямі *a* і *b* лежать в одній площині, а пряма *c* в ній не лежить;

в) всі прямі лежать в одній площині;

г) нічого сказати не можна;

д) пряма *c* співпадає з однією з прямих: або з *a*, або з *b.*

10. Прямі *a* і *b* перетинаються в точці *O*. $A \in a$, $B \in b$, $У \in AB$. Виберіть вірне твердження.

а) Точки *O* і *Y* не лежать в одній площині;

б) прямі *OY* і *a* паралельні;

в) прямі *a, b* і точка *Y* лежать в одній площині;

г) точки *O* і *Y* співпадають;

д) точки *Y* і *A* співпадають.

Тест № 2

Взаємне розташування прямих в просторі. Кут між прямими

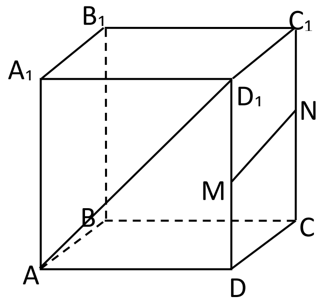
I варіант

1. З'ясуйте взаємне розташування прямих *AC* і *KC.*

а) Паралельні; б) визначити не можна; в) мимобіжні; г) перетинаються; д) співпадають у будь-якому випадку.

2. Як взаємне розташування прямих AD_1 і *MN* на мал. 3?

а) Паралельні; б) визначити не можна; в) мимобіжні; г) перетинаються; д) співпадають.



Мал. 3

3. Точка *M* не лежить в площині трикутника *ABC, K* – середина *MB*. Яке взаємне розташування прямих *MA* і *CK*?

а) Визначити не можна; б) мимобіжні; в) паралельні; г) співпадають; д) перетинаються.

4. Прямі *a* і *b* мимобіжні з прямою *c*. Що можна сказати про прямі *a* і *b*?

а) Взаємне розташування визначити точно не можна;

б) мимобіжні або паралельні;

в) паралельні або перетинаються;

г) співпадають;

д) перетинаються або мимобіжні.

5. Виберіть вірне твердження.

а) Дві прямі називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок;

б) дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні;

в) дві прямі, перпендикулярні третій прямій, паралельні;

г) якщо кути рівні, то їх сторони відповідно співнапрямлені;

д) промені, що виходять з однієї точки, є співнапрямлені.

6. Пряма *a*, паралельна прямій *b,* перетинає площину α. Пряма *c* паралельна прямій *b,* тоді:

а) прямі *a* і *c* перетинаються;

б) пряма *c* лежить в площині α;

в) прямі *a* і *c* мимобіжні;

г) пряма *b* лежить в площині α;

д) прямі *a* і *c* паралельні.

7. У трикутнику *ABC* кут *A* на 30° більше суми кутів *B* і С. Знайдіть кут між прямими *AC* і *BC.*

а) 105°; б) 75°; в) 37,5°; г) 30°; д) визначити не можна.

8. Яким може бути взаємне розташування прямих *a* і *b,* якщо через пряму *a* можна провести площину, паралельну прямій *b*?

а) Мимобіжні або перетинаються;

б) перетинаються або паралельні;

в) мимобіжні або паралельні;

г) тільки мимобіжні;

д) тільки паралельні.

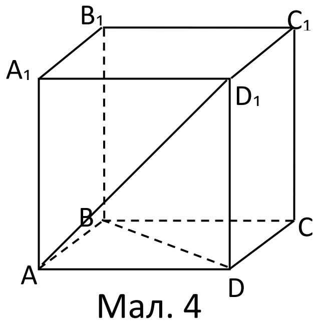
9. Через вершину *A* паралелограма *ABCD* і точку *M*, що не лежить в площині паралелограма, проведена пряма *AM.* Чому дорівнює кут між прямими *AM* і *BC,* якщо кут *MAD* дорівнює 120°?

а) Визначити не можна;

б) 120°; в) 30°; г) 60°; д) 150°.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 4). Чому дорівнює кут між прямими BD і AD?

а) 90°; б) 45°; в) 30°; г) 60°; д) визначити не можна.



Мал. 4

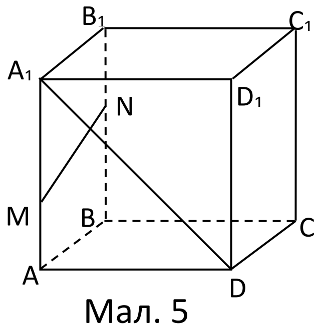
II варіант

1. З'ясуйте взаємне розташування прямих MN і NP.

а) Паралельні; б) мимобіжні; в) визначити не можна; г) перетинаються; д) співпадають у будь-якому випадку.

2. Як взаємне розташування прямих DA_1 і MN на мал. 5?

а) Паралельні; б) визначити не можна; в) перетинаються; г) співпадають; д) мимобіжні.



Мал. 5

3. Точка *M* не лежить в площині чотирикутника *ABCD, K* – середина *MA*. Яке взаємне розташування прямих *MB* і *DK*?

а) Визначити не можна; б) мимобіжні; в) паралельні; г) перетинаються; д) співпадають.

4. Прямі *a* і *c* мимобіжні з прямою *b,* тоді самі прямі *a* і *c*:

а) паралельні або перетинаються;

б) мимобіжні або паралельні;

в) взаємне розташування визначити точно не можна;

г) мимобіжні або перетинаються;

д) співпадають.

5. Виберіть вірне твердження.

а) Якщо сторони двох кутів відповідно співнапрямлені, то кути рівні;

б) дві прямі, паралельні третій прямій, перетинаються;

в) дві прямі, перпендикулярні третій прямій, перпендикулярні;

г) дві прямі, що мають спільну точку, є такими, що мимобіжні;

д) промені називаються співнапрямленими, якщо вони лежать на одній прямій.

6. Пряма *c*, паралельна прямій *a*, перетинає площину β. Пряма *b* паралельна прямій *a,* тоді:

а) прямі *b* і *c* перетинаються;

б) пряма *b* лежить в площині β;

в) прямі *b* і *c* мимобіжні;

г) прямі *b* і *c* паралельні;

д) пряма *a* лежить в площині β.

7. У трикутнику *ABC* кут *C* на 40° більше суми кутів *B* і *A*. Знайдіть кут між прямими *AC* і *BC*.

а) 110°; б) 70°; в) 55°; г) 125°; д) визначити не можна.

8. Яким може бути взаємне розташування прямих *a* і *b,* якщо будь-яка площина, що проходить через *a,* непаралельна *b*?

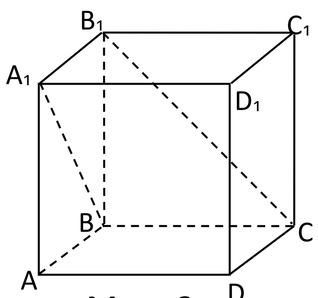
а) Мимобіжні; б) паралельні; в) перетинаються; г) співпадають; д) визначити не можна.

9. Через вершину *C* паралелограма *ABCD* точку *M*, що не лежить в площині паралелограма, проведена пряма *CM.* Чому дорівнює кут між прямими *AB* і *M*C, якщо кут *MCD* дорівнює 100^0?

а) Визначити не можна; б) 100°; в) 80°; г) 130°; д) 50°.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 6). Чому дорівнює кут між прямими B_1C і A_1B.

а) 30°; б) 45°; в) визначити не можна; г) 60°; д) 90°.



Мал. 6

Тест № 3 Паралельність прямих і площин

І варіант

1. Яким може бути взаємне розташування прямих *a* і *b,* якщо пряма *a* лежить в площині α, а пряма *b* паралельна цій площині?

а) Паралельні або перетинаються;

б) мимобіжні або перетинаються;

в) паралельні або мимобіжні;

г) визначити не можна;

д) співпадають.

2. Пряма *a* паралельна площині α. Яке із наступних тверджень вірне?

а) Пряма *a* паралельна будь-якій прямій, що лежить в площині α;

б) пряма *a* не перетинає жодну пряму, що лежить в площині α;

в) пряма *a* схрещується зі всіма прямими площини α;

г) пряма *a* має спільну точку з площиною α;

д) пряма *a* лежить в площині α.

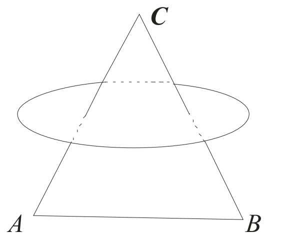
3. Дані трикутник *ABC* і площина α, причому $AB \| \alpha$, $AC \| \alpha$, тоді пряма *BC* і площина α:

а) паралельні; б) перетинаються; в) пряма лежить в площині; г) визначити не можна;

д) інша відповідь.

4. На мал. 7 площина, паралельна стороні *AB* трикутника *ABC,* перетинає його сторони в точках *M* і *K.* Знайдіть довжину *AB,* якщо точка *M* – середина *AC* і $MK = 10$.

а) Визначити не можна; б) 10; в) 5; г) $6\frac{2}{3}$; д) 20.



Мал. 7

5. Виберіть вірне твердження.

а) Якщо одна з двох паралельних прямих паралельна даній площині, то інша пряма так само паралельна даній площині;

б) якщо одна з двох паралельних прямих перетинає дану площину, то інша пряма також перетинає цю площину;

в) якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони перетинаються;

г) якщо пряма і площина не мають спільних точок, то пряма лежить в площині;

д) пряма і площина називаються такими, що мимобіжні, якщо вони не мають спільних точок.

6. Через кінці відрізка *AB,* що не перетинає площину α і точку *C* – середину цього відрізка, проведені паралельні прямі, що перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо AA_1 – 12, $BB_1 = 6$.

а) 6; б) 9; в) $6\sqrt{2}$; г) $9\sqrt{2}$; д) інша відповідь.

7. У паралелограмі *ABCD* точки *F* і *E* належать сторонам *CD* і *AB,* причому *BE:EA=CF:FD*. Через ці точки проведена площина α так, що *AD*||α, тоді:

а) *BC*||α; б) $BC \cap$ α; в) $BC \subset$ α; г) *BC* схрещується з α; д) площина α співпадає з площиною паралелограма.

8. Пряма *a* паралельна прямій *b* і площині α. Виберіть вірне твердження.

а) Пряма *b* паралельна площині α;

б) пряма *b* лежить в площині α;

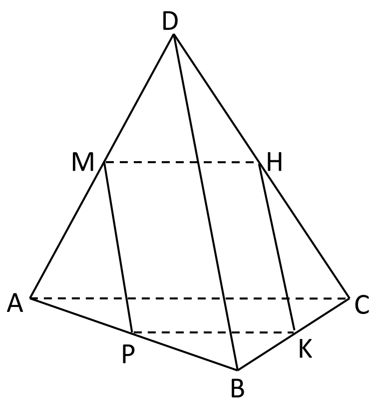
в) пряма *b* перетинає площину α;

г) пряма *b* лежить в площині α або паралельна їй;

д) пряма *b* схрещується з площиною α.

9. На мал. 8 точки *M*, *H*, *P* – середини відповідно сторін *AD, DC, AB*. *HK*||*ABD*. Знайдіть периметр чотирикутника *MHKP,* якщо *AC* = 8, *BD*=10.

а) 18; б) 36; в) 28; г) 26; д) визначити не можна.



Мал. 8

10. На сторонах *AB* і *AC* трикутника *ABC* узяли відповідно точки *D* і E так, що *DE*=5см, *BD*:*DA*=2:3, провели площину через точки *B* і *C* паралельно до відрізка *DE.* Знайдіть довжину відрізка *BC.*

а) 7,5 см; б) $8\frac{1}{3}$ см; в) 15 см; г) визначити не можна; д) 4,6 см.

II варіант

1. Яким може бути взаємне розташування двох прямих, якщо обидві вони паралельні одній площині?

а) Тільки паралельні; б) визначити не можна; в) всі випадки взаємного розташування; г) тільки мимобіжні; д) тільки перетинаються.

2. Пряма *b* паралельна площині α. Яке з наступних тверджень вірне?

а) Пряма *b* паралельна будь-якій прямій, що лежить в площині α;

б) пряма *b* паралельна деякій прямій, що лежить в площині α;

в) пряма *b* перетинається зі всіма прямими площини α;

г) пряма *b* перетинається з деякою прямою площини α;

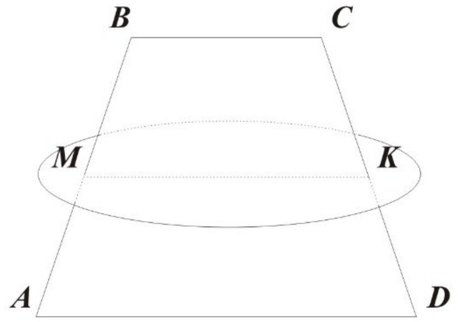
д) будь-яка площина, що проходить через пряму *b* перетинає площину α.

3. Дані трапеція *ABCD* і площина α. Діагоналі трапеції *AC* і *BD* паралельні площини α. Тоді пряма *BA* і площина α:

а) паралельні; б) перетинаються; в) визначити не можна; г) пряма лежить в площині; д) інша відповідь.

4. На мал. 9 площина, паралельна основам трапеції *ABCD,* перетинає сторони *AB* і *CD* в точках *M* і *K* відповідно. Знайдіть довжину *MA*, якщо точка *M* – середина *AB* і *AD*=10, *BC*=6.

а) визначити не можна; 6) 16; в) 11; г) 13; д) 8.



Мал. 9

5. Виберіть вірне твердження.

а) Якщо одна з двох паралельних прямих паралельна даній площині, то друга пряма лежить в даній площині;

б) якщо площина проходить через дану пряму, паралельну іншій площині, то ця площина паралельна другій площині;

в) якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони мимобіжні;

г) якщо дві прямі перетинають площину, то вони паралельні;

д) пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

6. Через кінці відрізка *NM,* що не перетинає площину α, і точку *K* – середину цього відрізка, проведені паралельні прямі, що перетинають площину α в точках *N*, M_1, К, відповідно. Знайди ті довжину відрізка NN_1, якщо MM=16, KK_1=9.

а) 2; б) 5; в) 12; г) 12,5; д) інша відповідь.

7. У трикутнику *ABC* точки *F* і *E* належать сторонам *CB* і *AB* відповідно, причому *BE:EA*=2:3. Через ці точки провели площину, паралельну *AC*. Знайдіть відношення *BF*:*FC*.

а) 3:2; б) 2:3; в) 3:5; г) 2:5; д) визначити не можна.

8. Пряма *a* паралельна площині α, точка *M* належить цій площині. Виберіть вірне твердження.

а) Точка *M* належить прямій *a*;

б) будь-яка пряма, що проходить через точку *M*, буде паралельна прямій *a*.

в) у площині α існує пряма, що проходить через точку *M* і паралельна прямій *a*;

г) існує пряма, що не лежить в площині α, яка проходить через точку *M* і паралельна прямій *a;*

д) у площині α існують дві прямі, про ходячі через точку *M* і паралельні прямій *a.*

9. Точки *M*, *H*, *K* – середини з відповідно сторін *AD*, *DC, CB*. *MP*||*BCD*. Знайдіть периметр чотирикутника *MHKP*, якщо *AC*=10, *BD*=8.

а) 18; б) 26; в) 28; г) 36; д) визначити не можна.

10. На сторонах *DE* і *DF* трикутника *DEF* взяли відповідно точки *A* та *B* так, що *AB*=6см, *EA:DA*=2:3, провели площину через точки *E* та *E* паралельно до відрізка *AB*. Знайдіть довжину відрізка *EF*.

а) 9 см; б) 10 см; в) 4 см; г) визначити не можна; д) 3,6 см.

Тест № 4

Паралельність площин

І варіант

1. Виберіть вірне твердження.

а) Відрізки прямих, обмежені паралельними площинами, рівні;

б) якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються;

в) якщо дві площини перетинаються третьою, то лінії їх перетину паралельні;

г) якщо дві прямі однієї площини відповідно паралельні двом прямим іншої площини, то ці площини паралельні;

д) дві площини називаються паралельними, якщо мають спільну точку.

2. Площини α і β паралельні площині γ, тоді площини α і β:

а) перетинаються; б) співпадають; в) паралельні; г) мимобіжні; д) взаємне розташування площин не визначити.

3. Паралелограми $A\ BCD$ і ABC_1D_1 лежать в різних площинах, тоді CC_1DD_1 є:

а) паралелограм; б) трапецію; в) ромб; г) довільний чотирикутник; д) прямокутник.

4. Сторона AC трикутника ABC лежить в площині α. Через середину сторони BA – точку M – проведена площина β, паралельна площині α і що перетинає BC в точці K. Знайдіть MK, якщо AC=10 см.

а) 10 см; б) 5 см; в) 2,5 см; г) 20 см; д) визначити не можна.

5. Паралельні площини α та β перетинають сторони кута B в точках A_1, C_1, і A_2, C_2 відповідно. Знайдіть BC_1, якщо $A_1 B:A_1 A_2$=1:3, BC_2=12 см.

а) 1,5 см; б) 3 см; в) 6 см; г) 9 см; д) 4 см.

6. Відрізки *AB і CD* лежать відповідно в паралельних площинах α та β. Що можна сказати про взаємне розташування прямих *AD* і *BC*?

а) Перетинаються; б) мимобіжні; в) паралельні; г) нічого сказати не можна; д) за різних умов виконуються затвердження пунктів *а-в.*

7. Точка *B* не лежить в площині трикутника *ACD,* точки *M, N, P* – середини відрізків *BA, B*C, *BD* відповідно. Знайдіть площу трикутника *MNP,* якщо площа трикутника *ACD* дорівнює 48 см^2.

а) 48 см^2; б) 24 см^2; в) 12 см^2; г) 96 см^2; д) 192 см^2.

8. Пряма *а* паралельна одній з двох паралельних площин. Виберіть вірне твердження.

а) Пряма *а* або паралельна іншій площині, або лежить в ній; б) пряма *а* паралельна іншій площині; в) пряма *а* перетинає іншу площину; г) пряма *а* лежить в іншій площині; д) про взаємне розміщення прямої *а* з іншою площиною нічого сказати не можна.

9. Три відрізки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, що не лежать в одній площині, мають спільну середину, тоді площини $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$:

а) співпадають; б) мають спільну точку; в) мимобіжні; г) перетинаються; д) паралельні.

10. Точка *M* не лежить в площині α. Де розміщені всі прямі, що проходять через точку *M* і паралельні площини α?

а) У площині α; б) у площині, що проходить через точку *M* і перетинає площину α; в) у площині, що не проходить через точку *M* і паралельної площини α; г) у площині, що проходить через точку *M* і паралельної площини α; д) у всіх випадках, вказаних в пунктах а-г.

II варіант

1. Виберіть вірне твердження.

а) Відрізки паралельних прямих, обмежених паралельними площинами, рівні;

б) якщо дві площини мають спільну точку, то вони співпадають;

в) якщо дві площини, перетинаються третьою, то лінії їх перетину паралельні;

г) якщо дві прямі однієї площини відповідно мимобіжні з двома прямими іншої площини, то ці площини паралельні;

д) дві площини називають такими, що перетинаються, якщо вони не мають спільних точок.

2. Площини α та β перетинаються, тоді будь-яка площина γ:

а) паралельна площинам α і β; б) обов'язково перетне обидві площини; в) перетне тільки одну з двох площин; г) перетне хоча б одну з двох площин; д) співпаде хоч би з однією з двох площин.

3. Через вершини паралелограма *ABCD,* що лежить в одній з двох паралельних площин, проведені паралельні прямі, що перетинають другу площину в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Тоді $A_1B_1C_1D_1$ є:

а) паралелограм; б) трапеція; в) довільний чотирикутник; г) прямокутник; д) ромб.

4. Точка *K* лежить між паралельними площинами α та β. Прямі *a* і *b*, що проходять через точку *K,* перетинають площину α в точках A_1 і B_1, а площина β в точках A_2 і B_2 відповідно. Знайдіть KB_1, якщо $A_1K:A_1A_2=1:3$, $B_1B_2=15$ см.

а) 3,75 см; б) 5 см; в) 7,5 см; г) 10 см; д) 12,5 см.

5. Сторона *AB* трикутника *ABC* лежить в площині β. Через середину сторони *CA* – точку *P* – проведена площина α, паралельна площині β, вона перетинає сторону *BC* в точці *E.* Знайдіть *AB,* якщо *PE*= 7 см.

а) 3,5 см; б) 7 см; в) 10,5 см; г) 14 см; д) визначити не можна.

6. Відрізки *AB* і *CD* лежать відповідно в паралельних площинах α та β. Що можна сказати про взаємне розташування прямих *AC* і *DB?*

а) Перетинаються; б) мимобіжні; в) паралельні; г) за різних умов виконуються затвердження пунктів *а-в;* д) нічого сказати не можна.

7. Точка *B* не лежить в площині трикутника *ACD,* точки *M, N, P* – середини відрізків *BA, BC, BD* відповідно. Знайдіть площу трикутника *ACD,* якщо площа трикутника *MNP* дорівнює 48 см^2.

а) 48 см^2; б) 24 см^2; в) 12 см^2; г) 96 см^2; д) 192 см^2.

8. Пряма *a* перетинає площину α. Виберіть вірне твердження.

а) Пряма *a* перетинає також будь-яку площину, паралельну площині α;

б) пряма *a* лежить в площині, паралельної площини α;

в) пряма *a* схрещується з будь-якої прямої площини α;

г) будь-яка площина, що проходить через пряму *a*, паралельна площині α;

д) існує площина, що проходить через пряму *a,* паралельна площині α.

9. Відомо, що $a||\alpha$, $b||\alpha$, $a||\beta$, $b||\beta$. Яким повинне бути взаємне розташування прямих *a* і *b,* якщо площини α та β паралельні?

а) Інша відповідь; б) повинні співпадати; в) повинні бути паралельними або такими, що мимобіжні; г) повинні бути паралельними або перетинаються; д) повинні бути такими, що мимобіжні або перетинаються.

10. Три відрізки D_1D_2, E_1E_2, F_1F_2, що не лежать в одній площині, мають спільну середину, тоді площини $D_1E_1F_1$ і $D_2E_2F_2$:

а) паралельні; б) співпадають; в) мають спільну точку; г) мимобіжні; д) перетинаються.

Тест № 5

Тетраедр і паралелепіпед

І варіант

1. Даний тетраедр *ABCD, у* якого протилежними ребрами є:

а) *AC* і *DC;* б) *AC* і *DB;* в) *AB* і *DA;* г) *AC* і *BC;* д) *AC* і *DA*.

2. Трикутник із сторонами 3 см, 4 см і 5 см зігнули по його середніх лініях і одержали модель тетраедра. Знайдіть площу кожної грані одержаної моделі.

а) Всі грані мають площу 3 см^2; б) дві грані мають площу 3 см^2, а дві інші – 1,5 см^2; в) всі грані мають площу 1,5 см^2; г) одна грань має площу 1,5 см^2, а інші – 3,5 см^2; д) всі грані мають площу 6 см^2.

3. У тетраедрі *DABC* кути *DBC, DBA* і *ABC* рівні 90°, *DB*=*AB*=*BC*=*2* см. Знайдіть площу грані *DAC*.

а) $2\sqrt{2}$ см^2; б) $2\sqrt{6}$ см^2; в) $2\sqrt{3}$ см^2; г) 4 см^2; д) $8\sqrt{3}$ см^2.

4. Дано тетраедр *ABCD.* Точка *M* – середина ребра *AD,* точка *N* лежить на ребрі *AB* так, що *AN*:*NB*=3:1, *К* – середина *BC.* Тоді перерізом тетраедра площиною *MNK* є:

а) трикутник; б) паралелограм; в) довільний чотирикутник; г) п'ятикутник; д) шестикутник.

5. Дано тетраедр *ABCD,* всі ребра якого рівні 6 см. Точки *M, N, K* – середини відповідно ребер *AB, AC* і *CD,* тоді периметр перерізу тетраедра площиною *MNK* дорівнює:

а) 24 см; б) 12 см; в) 6 см; г) 18 см; д) 9 см.

6. Яке з наступних тверджень вірно?

а) Паралелепіпед складається з шести трикутників; б) протилежні грані паралелепіпеда мають спільну точку; в) діагоналі паралелепіпеда перетинаються і діляться відносно 2:1, починаючи від вершини нижньої основи; г) дві грані паралелепіпеда, що не мають загального ребра, називаються суміжними; д) існують тетраедр і паралелепіпед, у яких однакова площа повної поверхні.

7. Три ребра паралелепіпеда рівні 3 м, 4 м і 5 м. Знайдіть суму довжин всіх його ребер.

а) 12 м; б) 18 м; в) 24 м; г) 48 м; д) 36 м.

8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки *M, N, K* – середини відповідно ребер *AA1,* B_1C_1 і *CD.* Переріз куба площиною *MNK* є:

а) трикутник; б) чотирикутник; в) п'ятикутник; г) шестикутник; д) семикутник.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Пряма *BE* лежить в площині A_1BD, тоді пряма *BE* паралельна площині:

а) DA_1D_1; б) AA_1B; в) $\mathrm{CB_1D_1}$; г) CDD_1; д) $A_1B_1D_1$.

10. Сума всіх ребер паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 120 см. Знайдіть довжину кожного ребра паралелепіпеда, якщо $AB:BC=4:5$, $AA_1:BC=3:5$.

а) Чотири ребра по 40 см, чотири – по 30 см, чотири – по 50 см;

б) чотири ребра по 10 см, чотири – по 7,5 см, чотири – по 12,5 см;

в) чотири ребра по 8 см, чотири – по 10 см, чотири по 12 см;

г) всі ребра по 10 см;

д) знайти довжини ребер неможливо.

II варіант

1. Дано тетраедр *MNPK,* у якого протилежними ребрами не є:

а) *MN* і *PK;* б) *MP* і *NK;* в) *MK* і *PN*; г) *MN* і *NP;* д) визначити не можна.

2. Трикутник із сторонами 13 см, 12 см і 5 см зігнули по його середніх лініях і одержали модель тетраедра. Знайдіть площу кожної грані одержаної моделі.

а) Всі грані мають площу 7,5 см^2;

б) всі грані мають площу 15 см^2;

в) дві грані мають площу 7,5 см^2, а дві інші – 15 см^2;

г) одна грань має площу 7,5 см^2, а інші – 17,5 см^2;

д) всі грані мають площу 30 см^2.

3. У тетраедрі *DABC* кути *DBC, DBA* і *ABC* рівні 60°, *DB*=*AB*=*BC*=4 см. Знайдіть площу грані *DAC.*

а) $4\sqrt{2}$ см^2; б) $4\sqrt{3}$ см^2; в) $4\sqrt{6}$ см^2; г) $4\sqrt{5}$ см^2; д) 8см^2.

4. Дано тетраедр *KLMN.* Точка *A* – середина ребра *KL,* точка *B* лежить на ребрі *LM* так, що *LB:BM*=2:3, точка *C* – середина *MN,* тоді перерізом тетраедра площиною *ABC* є:

а) довільний чотирикутник; б) трикутник; в) трапеція; г) п'ятикутник; д) шестикутник.

5. Дано тетраедр *DABC,* всі ребра якого рівні 10 см. Точки *K, L, M* – середини відповідно ребер *AD, AB* і *CB.* Знайдіть периметр перерізу тетраедра площиною *KLM.*

а) 40 см; б) 20 см; в) 10 см; г) 5 см; д) 15см.

6. Яке з наступних тверджень вірне?

а) Тетраедр складається з чотирьох паралелограмів;

б) суміжні грані паралелепіпеда паралельні;

в) діагоналі паралелепіпеда мимобіжні;

г) відрізок, що сполучає протилежні вершини паралелепіпеда, називається його діагоналлю;

д) паралелепіпед має всього шість ребер.

7. Три ребра паралелепіпеда рівні 6 см, 8 см і 10 см. Знайдіть суму довжин всіх його ребер.

а) 72 см; б) 24 см; в) 48 см; г) 60 см; д) 96см.

8. Даний куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки *K, L,* М – середини відповідно ребер BB_1, A_1D_1 і *CD,* тоді переріз куба площиною *KLM* є:

а) шестикутник; б) п'ятикутник; в) чотирикутник; г) трикутник; д) семикутник.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Пряма *AK* лежить в площині ACD_1, тоді пряма *AK* паралельна площині:

а) DC_1D_1; б) AA_1D_1; в) BB_1C_1; г) *CDA*; д) A_1BC_1.

10. Сума всіх ребер паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 112 см. Знайдіть довжину кожного ребра паралелепіпеда, якщо $AB:BC=3:7$, $AA_1:BC=4:7$.

а) Всі ребра по 9 см;

б) чотири ребра по 42 см, чотири – по 34 см, чотири – по 36 см;

в) чотири ребра по 14 см, чотири – по 6 см, чотири – по 8 см;

г) чотири ребра по 7,5 см, чотири – по 6,5 см, чотири – по 14 см;

д) знайти довжину ребер неможливо.

Тест № 6 Перпендикулярність прямої і площини

I варіант

1. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна третій прямій, то і інша пряма перпендикулярна до цієї прямої;

б) пряма називається паралельною площині, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить в цій площині;

в) дві прямі, перпендикулярні до площини, паралельні;

г) якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і інша пряма перпендикулярна до цієї площини;

д) через будь-яку точку простору проходить пряма, перпендикулярна до даної площини, і притому тільки одна.

2. Дві прямі, що мимобіжні, взаємно перпендикулярні. Чому дорівнює кут між ними?

а) 90°; б) 0°; в) 180°; г) 45°; д) визначити не можна.

3. Через вершину квадрата *ABCD* проведена пряма *AM,* перпендикулярна його площині. Яке з наступних тверджень невірно?

а) $MA \perp BD$; б) $MD \perp CD$; в) $MB \perp BC$, г) $MC \perp BC$, д) $MA \perp AC$.

4. Даний правильний трикутник *ABC* із стороною, рівною 3. Точка *O* – центр трикутника, *OM* – перпендикуляр до його площини, *OM*=1. Знайдіть відстані від точки *M* до вершин трикутника.

а) $\sqrt{3}$; б) визначити не можна; в) 3; г) 1; д) 2.

5. Пряма *m* перпендикулярна до прямих *a* і *b*, що лежать в площині α, але *m* не перпендикулярна до площини α. З'ясуйте взаємне положення прямих *a* і *b*.

а) Паралельні; б) перетинаються; в) мимобіжні; г) співпадають, д) визначити не можна.

6. Відрізок *AB,* рівного 5 см, не має спільних точок з площиною *α.* Прямі *AC* і *BD,* перпендикулярний до цієї площини, перетинають її в точках *C* і *D* відповідно. Знайдіть *BD,* якщо *CD* = 3 см, *AC*= 17 см, $BD<AC$.

а) Визначити не можна; б) 12 см; в) 13 см; г) $17-\sqrt{34}$ см; д) I см.

7. Пряма перпендикулярна до двох площин, тоді площини:

а) перетинаються; б) паралельні; в) визначити, не можна; г) мимобіжні; д) співпадають.

8. У тетраедрі *DABC* $AD \perp AC$, $AD \perp AB$, $DC \perp BC$. Тоді пряма *BC* і площина *ADC:*

а) паралельні; б) пряма лежить в площині; в) пряма перетинає площину, але не перпендикулярна до площини; г) пряма перпендикулярна до площини, але не перетинає площину; д) перпендикулярні.

9. Відстань від деякої точки до площини квадрата дорівнює 4 см, а до кожної з його вершин – 6 см. Знайдіть діагональ квадрата.

а) $2\sqrt{5}$ см; б) 5 см; в) $5\sqrt{2}$ см; г) $2\sqrt{10}$ см; д) $4\sqrt{5}$ см.

10. Відрізок *AB* перетинає деяку площину в точці *O*. Прямі *AD* і *BC,* перпендикулярні до цієї площини, перетинають її в точках *D* та *C* відповідно. Знайдіть довжину *AB,* якщо *AD*=6 см, *BC=2* см, *OC*=1,5 см.

а) 8 см; б) визначити не можна; в) 14 см; г) 9 см; д) 12 см.

II варіант

1. Якщо кут між двома прямими дорівнює 90°, то ці прямі:

а) перетинаються; б) паралельні; в) мимобіжні; г) перпендикулярні; д) співпадають.

2. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать в площині, то вона перпендикулярна до цієї площини;

б) якщо пряма перпендикулярна до площини, то вона її перетинає;

в) якщо дві площини перпендикулярні до прямої, то вони паралельні;

г) якщо дві прямі перпендикулярні до площини, то вони паралельні;

д) якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і інша пряма перпендикулярна до цієї площини.

3. Якщо одна з двох прямих, що мимобіжні, перпендикулярна до площини, то чи буде перпендикулярна до цієї площини друга пряма?

а) Так; б) так, але за певних умов; б) визначити не можна; г) ні; д) інша відповідь.

4. *ABCD* – квадрат із стороною, рівною $\sqrt{2}$, *O* – точка перетину його діагоналей, *OE* – перпендикуляр до площини *ABC*, $OE = \sqrt{3}$. Знайдіть відстань від точки *E* до вершин квадрата.

а) Визначити не можна; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$; г) 1; д) 2.

5. Пряма *a* перпендикулярна до прямих *c* і *b*, що лежать в площині α, пряма *a* перпендикулярна до площини α. Яке взаємне розташування прямих *c* та *b*.

а) Паралельні; б) перетинаються; в) паралельні або перетинаються; г) співпадають; д) визначити не можна.

6. Відрізок *MH* не має спільних точок з площиною α. Прямі *MK* і *HT*, перпендикулярні до цієї площини, перетинають її в точках *K* і *T* відповідно. Знайдіть *MH*, якщо *KT*=5 см, *MK*=4 см, *HT*=6 см.

а) $\sqrt{29}$ см; б) 7 см; в) $3\sqrt{3}$ см; г) 3 см; д) визначити не можна.

7. Одна з двох паралельних площин перпендикулярна прямій, тоді:

а) інша площина паралельна прямій;

б) пряма лежить в іншій площині;

в) інша площина перпендикулярна прямій;

г) пряма не перетинає іншу площину;

д) виконуються всі випадки, вказані в пунктах а-г.

8. Точка *E* не належить площині прямокутника *ABCD*. $BE \perp AB$, $BE \perp BC$. Тоді пряма *CD* і площина *BCE:*

а) паралельні; б) перпендикулярні; в) мимобіжні; г) пряма лежить в площині; д) перпендикулярні, але не перетинаються.

9. Відстань від деякої точки до площини квадрата дорівнює 4 см, а до кожної з його сторін – 6 см. Знайдіть діагональ квадрата.

а) $2\sqrt{10}$ см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $5\sqrt{10}$ см; г) $10\sqrt{2}$ см; д) $5\sqrt{10}$ см.

10. Відрізок *MH* перетинає деяку площину в точці *K*. Через кінці відрізка проведені прямі *HP* і *ME,* що перпендикулярні до площини і перетинають її в точках *P* і *E* відповідно. Знайдіть довжину відрізка *PE,* якщо *HP*=4 см, *HK*=5 см, *ME*=12 см.

а) Визначити не можна; б) 8 см; в) 10 см; г) 12 см; д) 14 см.

Тест № 7

Перпендикуляр і похилі. Кут між прямою і площиною

І варіант

1. З точки *M* до площини а проведені дві похилі, довжини яких 18 см і $2\sqrt{109}$ см. Їх проекції на цю площину відносяться як 3:4. Знайдіть відстань від точки *M* до площини α.

а) $6\sqrt{5}$ см; б) 30 см; в) 6 см; г) $3\sqrt{14}$ см; д) $2\sqrt{78}$ см.

2. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Перпендикуляр і похила, що виходять з однієї точки, мають різну довжину;

б) відстань від точки до площини називається довжиною перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини;

в) рівні похилі, проведені до площини з однієї точки, мають різні проекції;

г) проекцією точки на площину є точка;

д) кутом між прямою і площиною, що перетинає цю пряму і неперпендикулярної до неї, називається кут між прямою і її проекцією на цю площину.

3. Відстань від точки *M* до кожної з вершин правильного трикутника *ABC* дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від точки *M* до площини *ABC,* якщо *AB*=6 см.

а) 4 см; б) $16 - 2\sqrt{3}$ см; в) 8 см; г) 6 см; д) 2 см.

4. Через точку *A*, віддалену від площини α на 4 см, проходить пряма, що перетинає площину а в точці *B*. Знайдіть кут між прямою *AB* і площиною α, якщо довжина відрізка *AB* дорівнює 6 см.

а) $\arccos\frac{2}{3}$; б) ; в) ; г) $arctg\frac{2}{3}$; д) $arcctg\frac{2}{3}$.

5. З точки до площини проведені дві рівні похилі. Величина кута між цими похилими дорівнює 60°. Величина кута між їх проекціями дорівнює 90°. Знайдіть кут між кожною похилою і її проекцією.

а) 90°; б) 60°; в) 30°; г) 45°; д) визначити не можна.

6. Відрізок, довжина якого дорівнює 10 см, перетинає площину. Його кінці знаходяться відповідно на відстані 3 см і 2 см від площини. Знайдіть кут між даним відрізком і площиною.

а) 30°; б) 45°; в) визначити не можна; г) 60°; д) 90°.

7. З точки *A* до площини α проведені дві похилі, одна довше за іншу на 1 см. Проекції похилих рівні 5 см і 2 см. Знайдіть відстань від точки *A* до площини α.

а) 10 см; б) $5\sqrt{3}$ см; в) $5\sqrt{2}$ см; г) 5 см, д) $4\sqrt{6}$ см.

8. Пряма *CD* перпендикулярна до площини гострокутного трикутника *ABC,* у якого *CK* – висота. Знайдіть відстань від точки *A* до площини *CDK,* якщо см, а $\angle DAK$= 45°.

а) $\sqrt{2}$ см; б) 2 см; в) $\sqrt{3}$ см; г) 1 см; д) $\sqrt{5}$ см.

9. Точка *M* віддалена від площини трикутника *ABC* на відстань, що дорівнює 12, і знаходиться на однаковій відстані від його вершин. Знайдіть кут між прямою *MA* і площиною *ABC,* якщо $AC=CB=8$, $\angle ACB=120°$.

а) $\arccos\frac{3}{2}$; б) $\arcsin\frac{3}{2}$; в) $arctg\frac{3}{2}$; г) $arcctg\frac{2}{3}$; д) $\arcsin\frac{2}{3}$.

10. У основі тетраедра *KMPH* лежить трикутник *MPH* з кутом *H,* рівним 90°. Пряма *HK* перпендикулярна до площини основи. Знайдіть відстань від точки *K* до прямої *MP,* якщо $KH=9$ см, $PH=24$ см, $\angle MPH=30°$.

а) 9см; б) 12см; в) 15см; г) 18см; д)24см.

II варіант

1. З точки *M* до площини α проведені дві похилі, довжини яких 18 см і $2\sqrt{53}$ см. Їх проекції на цю площину відносяться як 4:3. Знайдіть відстань від точки *M* до площини α.

а) 34 см; б) $2\sqrt{17}$ см; в) 2 см; г) $2\sqrt{77}$ см; д) $10\sqrt{2}$ см.

2. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Перпендикуляр і похила, що виходять з однієї точки, мають рівні довжини;

б) проекцією прямої на площину є точка або пряма;

в) похилі різної довжини, проведені до площини з однієї точки, мають проекції різних довжин;

г) пряма, проведена в площині через основу похилої перпендикулярно до неї, перпендикулярна до її проекції;

д) відстань від довільної точки однній з паралельних площин до іншої площини називається відстанню між паралельними площинами.

3. Відстань від точки K до кожної з вершин квадрата $ABCD$ дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини ABC, якщо AB=2 см.

а) $4-\sqrt{2}$ см; б) 14 см; в) 2 см; г) $\sqrt{14}$ см; д) $2\sqrt{5}$ см.

4. Через точку A, віддалену від площини α на 3 см, проходить пряма, що перетинає площину α в точці B. Кут між прямою AB і площиною α дорівнює arcsin0,6. Знайдіть довжину відрізка AB.

а) 4 см; б) 3 см; в) 6 см; г) 50 см; д) 5 см.

5. З точки до площини проведені дві рівні похилі. Величина кута між цими похилими дорівнює 60°. Знайдіть величину кута між їх проекціями, якщо кут між кожною похилою і її проекцією дорівнює 45°.

а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) визначити не можна.

6. Кінці відрізка, що перетинає площину, знаходяться відповідно на відстані 3 см і 2 см від неї. Величина кута між цим відрізком і площиною дорівнює 30°. Знайдіть довжину відрізка.

а) 2 см; б) 4 см; в) 6 см; г) 8 см; д) 10 см.

7. З точки A до площини α проведені дві похилі, рівні 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від точки A до площини α, якщо проекція однієї з похилих довше за іншу в $1{,}5\sqrt{2}$ рази.

а) Визначити не можна; б) 28 см; в) $2\sqrt{7}$ см; г) $7\sqrt{2}$ см; д) 14 см.

8. Трикутник ABC – прямокутний ($\angle C$=90°), $\angle A$=30°, AB=12. Точка M віддалена на відстань, рівну 10, від кожної вершини трикутника. Знайдіть кут між прямою MC і площиною ABC.

а) arcsin0,8; б) arccos0,8; в) arctg0,8; г) arcctg0,8; д) arcsin0,6.

9. У трикутнику ABC кут С – прямий, $\angle A$=30°, AC=18см. Через точку C проведена пряма CM, перпендикулярна до площини трикутника, CM=12 см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB.

а) 12 см; б) 15 см; в) 18 см; г) 9 см; д) 6 см.

10. Пряма CD перпендикулярна до площини гострокутного трикутника ABC, у якого CK – висота. Відстань від точки A до площини DKC дорівнює $\sqrt{2}$ см, Знайдіть довжину DA, якщо $\angle DAK$= 45°.

а) 2 см; б) $\sqrt{2}$ см; в) 1 см; г) $\sqrt{3}$ см; д) $\sqrt{5}$ см.

Тест № 8

Двогранний кут. Перпендикулярність площин

І варіант

І. Точка A знаходиться на відстані 3 см і 5 см від двох перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину цих площин.

а) $\sqrt{34}$ см; б) 4 см; в) 6 см; г) $2\sqrt{7}$ см; д) $\sqrt{14}$ см.

2. Відстані від точки M до вершин прямо вугільного трикутника ABC ($\angle C$=90°) рівні. Яке з наступних тверджень вірно?

а) Площини MAB і ABC перпендикулярні;

б) площини MBC і ABC перпендикулярні;

в) площини MAC і ABC перпендикулярні;

г) площини MAC і MBC перпендикулярні;

д) умови в пунктах а-г невірні.

3. Площини α та β перетинаються по прямій *c.* Площина γ перпендикулярна площині α, але не перпендикулярна площині β. З'ясуєте взаємне розміщення прямої *c* і площини γ.

а) $c \cap \gamma$; б) $c \| \gamma$; в) $c \subset \gamma$; г) визначити не можна; д) з упевненістю можна сказати тільки те, що пряма *c* не перпендикулярна площині γ.

4. При перерізі двох площин утворилися двогранні кути, один з яких в два рази більший за інший. Знайдіть градусну міру кута між цими площинами.

а) 30°; б) 60°; в) 90°; г) 120°; д) 150°.

5. Рівнобедрені трикутники *ABC* і *BDC,* кожний з яких має основу *BC,* не лежать в одній площині. Їх висоти, проведені до основи, дорівнюють 5 см, і відстань між точками *A* і *D* також дорівнює 5 см. Знайдіть градусну міру двогранного кута *ABCD.*

а) 60°; б) 120°; в) 30°; г) 45°; д) 90°.

6. Відрізок *AM* є перпендикуляром до площини прямокутника *ABCD.* Кут між прямою *M*C і цією площиною дорівнює 30°. $AD=\sqrt{2}$, $CD=2$. Знайдіть величину двогранного кута *MCDA.*

а) визначити не можна; б) 45°; в) 30°; г) 60°; д) 90°.

7. Яке з наступних тверджень вірне?

а) Двогранним кутом називається фігура, утворена прямою *a* і двома півплощинами із спільною границею *a;*

б) двогранний кут має нескінченну безліч різних лінійних кутів;

в) градусною мірою двогранного кута називається градусна міра його лінійного кута;

г) кут між площинами що перепинаються може бути тупим;

д) якщо одна з двох площин проходить через пряму, що перетинає іншу площину, то такі площини перпендикулярні.

8. Гіпотенуза прямокутного рівнобедреного трикутника лежить в площині α, а катет нахилений до цієї площини під кутом 30°. Знайдіть кут між площиною α і площиною трикутника.

а) 90°; б) 60°; в) 45°; г) 30°; д) визначити не можна.

9. Знайдіть двогранний кут *ABCD* тетраедра *ABCD,* якщо кути *DAB, DAC* і *ACB* прямі, *AC*=*BC*=5, *AD*= $5\sqrt{2}$.

а) $\arccos 5\sqrt{2}$; б) $\arcsin 5\sqrt{2}$; в) $arcctg\sqrt{2}$; г) $arctd\sqrt{2}$; д) визначити не можна.

10. У рівнобедреному трикутнику *ABC AC*=*BC*=2, $\angle BAC$= 30°. Відрізок *CM* – перпендикуляр до площини *ABC,* $CM = 2\sqrt{2}$. Знайдіть величину двогранного кута *MABC.*

а) $arctg 2$; б) $arctg 2\sqrt{3}$; в) визначити не можна; г) $arctg 4$; д) $arctg\sqrt{2}$.

II варіант

1. Точка *A* знаходиться на відстані 1 см від однієї з двох перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від точки *A* до другої площини, якщо відстань до прямої їх перетину дорівнює $\sqrt{5}$ см.

а) 2 см; б) $\sqrt{2}$ см; в) 1 см; г) $\sqrt{3}$ см; д) 4 см.

2. Відстані від точки *M* до сторін прямокутного трикутника *ABC* ($\angle C$=90°) рівні. Яке з наступних тверджень вірне?

а) Площини *MAB* і *ABC* перпендикулярні;

б) площини *MBC* і *ABC* перпендикулярні;

в) площини *MAC і ABC* перпендикулярні;

г) площини *MAC* і *MBC* перпендикулярні;

д) умови в пунктах а-г невірні.

3. Кут між двома площинами дорівнює 80°. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Площини перетинаються;

б) у одній з площин знайдеться пряма, перпендикулярна іншій площині;

в) у одній з площин всі прямі не перпендикулярні іншій площині;

г) у одній з площин знайдеться пряма, паралельна іншій площині;

д) площини не перпендикулярні.

4. При перерізі двох площин утворилися двогранні кути, градусна міра одного з яких на 30° більше градусної міри іншого. Знайдіть градусну міру кута між цими площинами.

а) 105°; б) 90°; в) 75°; г) 60°; д) 45°.

5. Рівнобедрені трикутники *ABC* і *BDC,* кожний з яких має основу *BC,* не лежать в одній площині. Їх висоти, проведені до основи, дорівнюють 2 см, а відстань між точками *A* і *D* дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть градусну міру двогранного кута *ABCD.*

а) 60°; б) 120°; в) 30°; г) 45°; д) 90°.

6. У трикутнику *ABC* кут *B* – прямий, *BC*=2*,* Проекцією цього трикутника на деяку площину є трикутник *BCD,* $AD = \sqrt{2}$. Двогранний кут *ABCD* дорівнює 45°. Знайдіть кут між прямою *AC* і площиною *BCD.*

а) 30°; б) 45°; в) визначити не можна; г) 60°; д) 90°.

7. Яке з наступних тверджень вірне?

а) Градусна міра двогранного кута не перевищує 90°;

б) двогранним кутом називається плоский кут, утворений прямою *a* і двома півплощинами із загальною границею *a;*'

в) якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини;то такі площини перпендикулярні;

г) кут між площинами завжди тупий;

д) всі лінійні кути двогранного кута різні.

8. Гіпотенуза прямокутного рівнобедреного трикутника лежить в площині α, кут між площиною α і площиною трикутника дорівнює 45°. Знайдіть градусну міру кута, під яким катет нахилений до площини α.

а) 90°; б) 60°; в) 45°; г) визначити не можна; д) 30°.

9. Знайдіть двогранний кут *DABC* тетраедра *ABCD,* якщо ребро *DC* перпендикулярне до площини *ABC, AC=BC=AB=*6, $BD = 3\sqrt{7}$.

а) 90°; б) 60°; в) 45°; г) 120°; ' д) 30°.

10. У рівнобедреному трикутнику *HEP* кути при основі *HP* дорівнюють 30°, висота трикутника $EM = \sqrt{3}$. Пряма *KE* перпендикулярна до площини *HEP HK=*6. Знайдіть величину двогранного кута *KHPE.*

а) $arctg 2$; б) $arctg 2\sqrt{3}$; в) визначити не можна; г) $arctg 4$; д) $arctg \sqrt{2}$.

Тест № 9

Прямокутний паралелепіпед

І варіант

1. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Паралелепіпед називається прямокутним, якщо його бічні ребра перпендикулярні до основи, а основи є прямокутники;

б) у прямокутному паралелепіпеді всі шість граней – довільні паралелограми;

в) всі двогранні кути прямокутного паралелепіпеда – прямі;

г) куб є прямокутним паралелепіпедом;

д) квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірювань.

2. Вимірюваннями прямокутного паралелепіпеда називаються:

а) довжини трьох довільно взятих діагоналей;

б) довжини трьох рівних ребер паралелепіпеда;

в) довжини трьох ребер, що мають спільну вершину;

г) довжини діагоналей основи паралелепіпеда;

д) довжини суміжних сторін і діагоналі паралелепіпеда.

3. Знайдіть довжину ребра куба, якщо довжина його діагоналі дорівнює 18 см.

а) $6\sqrt{3}$ см; б) 6 см; в) $6\sqrt{2}$ см; г) $\sqrt{6}$ см; д) 3 см.

4. Знайдіть довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 2 м, 3 м і 5 м.

а) 10 м; б) 38 м; в) $\sqrt{10}$ м; г) $\sqrt{38}$ м; д) $4\sqrt{2}$ м.

5. Знайдіть відстань від вершини верхньої основи куба до центру нижньої основи, якщо діагональ грані куба дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

а) $2+\sqrt{2}$ см; б) $\sqrt{2}$ см; в) 2 см; г) $\sqrt{5}$ см; д) $\sqrt{6}$ см.

6. Даний прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $BD_1=d$, $AC=m$, $AB=n$. Знайдіть відстань між прямою A_1C_1 і площиною ABC.

а) визначити не можна; б) $\sqrt{m^2-n^2}$; в) $\sqrt{d^2-n^2}$; г) $\sqrt{d^2-m^2}$; д) $\sqrt{d^2-m^2-n^2}$.

7. Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо AC_1=6 см, діагональ BD_1 складає з площиною грані AA_1D_1D кут 30°, а з ребром D_1D – кут 45°.

а) 3 см, 3 см, $3\sqrt{2}$ см; б) 3 см, $3\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см;

в) $3\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см; г) 3 см, 3 см, 3 см; д) $3\sqrt{2}$ см, 3 см, $3\sqrt{2}$ см.

8. Скільки двогранних кутів має прямокутний паралелепіпед?

а) 6; б) 9; в) 12; г) 3; д) немає зовсім.

9. Сума площ трьох граней прямокутного паралелепіпеда, що мають спільну вершину, дорівнює 404 дм^2, а його ребра пропорційні числам 3, 7 і 8. Знайдіть довжину діагоналі паралелепіпеда.

а) Визначити не можна; б) $1\sqrt{122}$ дм; в) 488 дм; г) 36 дм; д) $4\sqrt{61}$ дм.

10. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1 м, 2 м і 3 м. Визначте кут між діагоналлю паралелепіпеда і площиною основи.

а) $\arccos\frac{\sqrt{70}}{14}$; б) визначити не можна; в) $\arccos\frac{\sqrt{182}}{14}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{35}}{7}$; д) 45^0.

II варіант

1. Яке з наступних тверджень вірне?

а) У прямокутному паралелепіпеді всі шість граней – довільні паралелограми;

б) всі двогранні кути паралелепіпеда – гострі;

в) прямокутний паралелепіпед, у якого всі три виміри рівні, називається кубом;

г) квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі трьох його вимірювань;

д) паралелепіпед називається прямокутним, якщо його бічні ребра перпендикулярні до основи.

2. Довжини трьох ребер, що мають спільну вершину, називаються:

а) висотами прямокутного паралелепіпеда;

б) діагоналями прямокутного паралелепіпеда;

в) вимірами прямокутного паралелепіпеда;

г) діагоналями основи прямокутного паралелепіпеда;

д) суміжними ребрами прямокутного паралелепіпеда.

3. Знайдіть довжину ребра куба, якщо довжина його діагоналі дорівнює 12 см.

а) 2 см; б) $2\sqrt{2}$ см; в) 4 см; г) $4\sqrt{2}$ см; д) $4\sqrt{3}$ см.

4. Знайдіть довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см.

а) $5\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$ см; в) 50 см; г) 12 см; д) $4\sqrt{2}$ см.

5. Відстань від вершини верхньої основи куба до центру нижньої основи рівне $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину діагоналі грані куба.

а) 8 см; б) 4 см; в) $2\sqrt{2}$ см; г) 2 см; д) 1 см.

6. Даний прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $BD_1=d$, $AC=m$, $AB=n$. Знайдіть відстань між площинами ABB_1 і DCC_1.

а) $\sqrt{d^2-m^2-n^2}$; б) $\sqrt{d^2-m^2}$; в) $\sqrt{d^2-n^2}$; г) $\sqrt{m^2-n^2}$; д) визначити не можна.

7 Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо AC_1=6 см, діагональ BD_1 складає з площиною грані $AA_1D_1D_1$ кут 45°, а з ребром D_1D – кут 60°.

а) 3 см, 3 см, 3 см; б) $3\sqrt{2}$ см, 3 см, 3 см; в) $3\sqrt{2}$ см, 3 см, $3\sqrt{2}$ см; г) $3\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см, 3 см; д) $3\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см.

8. Скільки двогранних кутів має прямокутний паралелепіпед?

а) 4; б) 9; в) 12; г) 6; д) немає зовсім.

9. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3 м, 4 м і 5 м. Визначте кут між діагоналлю паралелепіпеда і площиною основи.

а) 45°; б) $arctg\frac{3}{5}$; в) $arctg\frac{4}{5}$; г) $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{5}$; д) визначити не можна.

10. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 3, 7 і 8. Довжина діагоналі паралелепіпеда дорівнює $2\sqrt{122}$ см. Знайдіть суму площ трьох граней прямокутного паралелепіпеда, що мають спільну вершину.

а) 808 см^2; б) 404 см^2; в) 202 см^2; г) 101 см^2; д) 303 см^2.

Тест № 10

Призма

І варіант

1. Скільки ребер у шестикутної призми?

а) 18; б)6; в) 24; г) 12; д) 15.

2. Яке найменше число граней може мати призма?

а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 9.

3. Виберіть вірне твердження.

а) У n-кутній призмі 2n граней;

б) призма називається правильною, якщо її основи – правильні багатокутники;

в) у трикутної призми немає діагоналей;

г) висота призми дорівнює її бічному ребру;

д) площею бічної поверхні призми називається сума площ всіх її граней.

4. Чому рівні градусні міри двогранних кутів, утворених бічними гранями правильної п'ятикутної призми?

а) 90°; б) 105°; в) 120°; г) 108°; д) 72°.

5. У основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить рівнобедрений прямокутний трикутник ABC, у якого $\angle C=90°$, а гіпотенуза дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Через сторону AB і вершину C_1 проведено переріз. Знайдіть кут між площиною перерізу і площиною основи, якщо довжина бічного ребра дорівнює 3 см.

а) 45°; б) $arctg\dfrac{1}{2}$; в) $arctg 2$; г) $arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; д) $arctg\sqrt{2}$.

6. У основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить прямокутний трикутник ABC, у якого $\angle C=90°$, $AC=4$ см, $BC=3$ см. Через сторону AC і вершину B_1 проведена площина. Кут B_1AC дорівнює 60°. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

а) $12\sqrt{39}$ см^2; б) $35\sqrt{39}$ см^2; в) $6\sqrt{39}$ см^2; г) визначити не можна; д) $10\sqrt{39}$ см^2.

7. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площа основи дорівнює 16 см^2. Знайдіть відстань між прямими AA_1 і B_1D.

а) 4 см; б) не можна визначити; в) $4\sqrt{2}$ см; г) $2\sqrt{2}$ см; д) 2 см.

8. У правильній трикутній призмі бічне ребро дорівнює 3 см, а відстань від вершини верхньої основи до середини протилежної сторони нижньої основи дорівнює 6 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

а) $\left(54+9\sqrt{3}\right)$ см^2; б) $21\sqrt{3}$ см^2;

в) $\left(18+3\sqrt{3}\right)$ см^2; г) 54 см2; д) $27\sqrt{3}$ см^2.

9. У похилій трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ основою служить прямокутний трикутник ABC з прямим кутом С. Площина грані AA_1C_1C перпендикулярна до площини основи, тоді CC_1B_1B:

а) довільний чотирикутник; б) паралелограм; в) трапеція; г) ромб; д) прямокутник.

10. У похилій трикутній призмі з бічним ребром, рівним 10 см, площі двох граней дорівнюють 70 см^2 і 150 см^2, кут між ними – 60°. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

а) $367{,}5\sqrt{3}$ см^2; б) 350 см^2; в) визначити не можна; г) $262{,}5\sqrt{3}$ см^2; д) 90 см^2.

II варіант

1. Скільки граней у шестикутної призми?

а) 6; б) 8; в) 10; г) 12; д) 16.

2. Яке найменше число ребер може мати призма?

а) 9; б) 8; в) 7; г) 6; д) 5.

3. Виберіть вірне твердження.

а) У *n*-кутової призми *2n* ребер;

б) площею повної поверхні призми називається сума площ її бічних граней;

в) у трикутної призми дві діагоналі

г) висота прямої призми дорівнює її бічному ребру;

д) призма називається правильною, якщо в основі лежить правильний багатокутник.

4. Чому рівні градусні міри двогранних кутів, утворених бічними гранями правильної шестикутної призми?

а) 72°; б) 108°; в) 90°; г) 120°; д) 105°.

5. У основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить рівнобедрений прямокутний трикутник *ABC,* у якого $\angle C$=90°. Через сторону *AB* і вершину *C*, проведено переріз, що становить кут 60° з площиною основи. Знайдіть довжину *AB,* якщо довжина бічного ребра дорівнює 3 см.

а) Визначити не можна; б) $\sqrt{3}$ см; в) $2\sqrt{3}$ см; г) $3\sqrt{3}$ см; д) 1 см.

6. У основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить прямокутний трикутник *ABC,* у якого $\angle$C=90°, *AC*=5 см. Через сторону *BC* і вершину A_1 проведена площина. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо $\angle BA_1C$=30°, BA_1=10см.

а) $50\left(\sqrt{2}+1\right)$ см^2; б) $50\sqrt{2}$ см^2; в) визначити не можна; г) 50 см^2; д) $50\sqrt{3}$ см^2.

7. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ сторона основи дорівнює $4\sqrt{3}$ см, точки E і F – середини ребер A_1B_1 AC відповідно. Знайдіть відстань між прямими AA_1 і EF.

а) 4 см; б) не можна визначити; в) 3 см; г) $4\sqrt{3}$ см; д) 6 см.

8. У правильній чотирикутній призмі бічне ребро дорівнює 3 см, а відстань від вершини верхньої основи до середини протилежної сторони нижньої основи дорівнює 6 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

а) Не можна визначити; б) 43,2 см^2; в) $14{,}4\sqrt{15}$ см^2; г) $36\sqrt{15}$ см^2; д) $\left(14{,}4\sqrt{15}+43{,}2\right)$ см^2.

Основою похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служить прямокутник $ABCD$. Площина грані AA_1D_1D перпендикулярна до площини основи, тоді CC_1D_1D:

а) паралелограм; б) прямокутник; в) ромб; г) трапеція; д) довільний чотирикутник.

10. У трикутній призмі, похилої, з бічним ребром, рівним 5 см, площі двох граней рівні 15 см^2 і 25 см^2, кут між ними дорівнює 120°. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

а) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ см^2; б) визначити не можна; в) 30 см^2; г) 15 см^2; д) 75 см^2.

Тест № 11

Піраміда

І варіант

1. Скільки ребер у шестикутної піраміди?

а) 6; б) 12; в) 18; г) 24; д) 8.

2. Яке найменше число граней може мати піраміда?

а) 5; б) 12; в) 10; г) 6; д) 4.

3. Виберіть вірне твердження.

а) Многогранник, складений з n трикутників, називається пірамідою;

б) всі бічні ребра зрізаної піраміди рівні;

в) піраміда називається правильною, якщо її основа – правильний багатокутник;

г) висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається апофемою;

д) площею бічної поверхні зрізаної піраміди називається сума площ її граней.

4. Бічні ребра трикутної піраміди 7 см, 12 см, 5 см. Одне з них перпендикулярне до площини основи. Чому дорівнює висота піраміди?

а) не можна визначити; б) 12 см; в) 5 см; г) 7 см; д) 8 см.

5. Основою піраміди *MABC* служить прямокутний трикутник *ABC,* у якого $\angle C=90°$, $\angle A=30°$, $BC=6$ см. Бічні ребра нахилені до основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

а) $6\sqrt{3}$ см; б) $6\sqrt{2}$ см; в) 6 см; г) $3\sqrt{2}$ см; д) 3 см.

6. У піраміді *MABC* бічне ребро *MA* перпендикулярне до площини основи *ABC,* а грань *MBC* складає з ним кут 60°, $AB=AC=10$ см, $BC=16$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

а) $\left(60\sqrt{3}+144\right)$ см^2; б) $\left(120\sqrt{3}+48\right)$ см^2; в) $\left(60\sqrt{3}+96\right)$ см^2; г) $\left(120\sqrt{3}+144\right)$ см^2;

д) $\left(30\sqrt{3}+24\right)$ см^2.

7. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює 2 см, а висота – 4 см. Знайдіть кут нахилу бічних ребер до площини основи.

а) $arctg\sqrt{2}$; б) $arctg\sqrt{3}$; в) $arctg2\sqrt{2}$; г) $arctg2\sqrt{3}$; д) 45°.

8. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює 4 см, а довжина діагоналі основи $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

а) 96 см^2; б) 156 см^2; в) 36 см^2; г) 60 см^2; д) 150 см^2.

9. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди рівні 4 дм і 2 дм, а бічне ребро рівне 2 дм. Знайдіть висоту зрізаної піраміди.

а) $\sqrt{6}$ дм; б) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ дм; в) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ дм; г) $\sqrt{3}$ дм; д) $\sqrt{2}$ дм.

10. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторони основ рівні 6 см і 3 см. Висота зрізаної піраміди дорівнює $\frac{\sqrt{13}}{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

а) 18 см^2; б) 9 см^2; в) 36 см^2; г) 72 см^2; д) 27 см^2.

ІІ варіант

1. Скільки граней у шестикутної піраміди?

а) 6; б) 7; в) 8; г) 10; д) 12.

2. Яке найменше число ребер може мати піраміда?

а) 6; б) 5 в) 4; г) 7; д) 8.

3. Виберіть вірне твердження.

а) Висота піраміди називається апофемою;

б) бічні грані зрізаної піраміди – прямокутники;

в) площа бічної поверхні піраміди дорівнює добутку периметра основи на висоту;

г) піраміда називається правильною, якщо її основа – правильний багатокутник;

д) зрізана піраміда називається правильною, якщо вона одержана перерізом правильної піраміди площиною, паралельною основі.

4. Бічні ребра трикутної піраміди рівні 3см, 4 см, 7 см. Одне з них перпендикулярне до площини основи. Чому дорівнює висота піраміди?

а) 7 см; б) 5 см; в) 4 см; г) 3 см; д) не можна визначити.

5. У основі піраміди *MABC* лежить трикутник *ABC,* у якого $\angle ACB=150°$, $BA=6$ см. Бічні ребра нахилені до основи під кутом 45°. Знайдіть висоту піраміди.

а) 6 см; б) 12 см; в) $2\sqrt{3}$ см; г) $4\sqrt{3}$ см; д) $3\sqrt{2}$ см.

6. Основою піраміди *PEFM* служить рівнобедрений трикутник *EFM,* у якого $EF=EM$, $FM=20\sqrt{6}$ см. Бічне ребро *PE,* рівне 10 см, перпендикулярне до площини основи. Кут між *PE* і площина *MPF* дорівнює 60°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

а) $\left(100\sqrt{6}+150\right)$ см^2; б) $\left(200\sqrt{6}+300\right)$см^2; в) $\left(100\sqrt{6}+300\right)$см^2; г) $\left(400\sqrt{6}+300\right)$см^2;

д) $\left(200\sqrt{6}+150\right)$см^2.

7. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 2 см, а висота – 6 см. Знайдіть кут нахилу бічних ребер до площини основи.

а) $arctg6$; б) $arctg2$; в) $arctg\sqrt{2}$; г) 45°; д) $arctg3\sqrt{2}$.

8. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, висота основи – 15 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

а) $75\sqrt{3}$ см^2; б) $195\sqrt{3}$ см^2; в) $270\sqrt{3}$ см^2; г) 810 см2; д) $120\sqrt{3}$ см^2.

9. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 дм і 2 дм, а бічне ребро дорівнює 2 дм. Знайдіть висоту бічної грані зрізаної піраміди.

а) $\sqrt{3}$ дм; б) 2дм; в) $\sqrt{2}$ дм; г) 1 дм; д) 4дм.

10. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ рівні 8 см і 10 см. Висота зрізаної піраміди дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

а) 72 см^2; б) 36 см^2; в) 24 см^2; г) 108 см^2; д)18см^2.

Тест № 12

Правильні многогранники

І варіант

1. Яке з перерахованих геометричних тіл не є правильним многогранником?

а) Правильний тетраедр; б) правильний гексаедр; в) правильна призма; г) правильний додекаедр; д) правильний октаедр.

2. Виберіть вірне твердження.

а) Опуклий многогранник називається правильним, якщо його грані – рівні багатокутники, і в кожній його вершині сходиться одне число ребер;

б) не існує правильного многогранника, гранями якого є правильні шестикутники;

в) правильна трикутна піраміда і правильний тетраедр – це одне і те ж;

г) зі всіх правильних многогранників тільки правильний тетраедр має центр симетрії;

д) розгорткою бічної поверхні куба є правильний трикутник.

3. У правильному тетраедрі висота основи дорівнює 6 см. Знайдіть площу його повною поверхні.

а) $4\sqrt{3}$ см^2; б) $72\sqrt{3}$ см^2; в) $12\sqrt{3}$ см^2; г) $24\sqrt{3}$ см^2; д) $36\sqrt{3}$ см^2.

4. Знайдіть кут між бічним ребром і площиною основи правильного тетраедра.

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 30^0; г) 60^0; д)45^0.

5. Знайдіть кут між діагоналями куба.

а) $2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{3}$; г) $2\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо відстань від вершини верхньої основи до центру нижньої основи дорівнює 6 см.

а) 24 см^2; б) $12\sqrt{6}$ см^2; в) 96 см^2; г) 12 см^2; д) 144 см^2.

7. Знайдіть площу повної поверхні правильного октаедра, якщо його ребро дорівнює 6 см.

а) $36\sqrt{3}$ см^2; б) $72\sqrt{3}$ см^2; в) $12\sqrt{3}$ см^2; г) $24\sqrt{3}$ см^2; д) $144\sqrt{3}$ см^2.

8. Ребро правильного октаедра дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між двома його протилежними вершинами.

а) 6 см; б) $6\sqrt{2}$ см; в) $6\sqrt{3}$ см; г) 12 см; д) $12\sqrt{2}$ см.

9. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Сума двогранних кутів правильного тетраедра і правильного октаедра дорівнює 180°;

б) центри граней куба є вершинами правильного октаедра;

в) правильний додекаедр складається з 12 правильних п'ятикутників;

г) сума плоских кутів при кожній вершині правильного ікосаедра дорівнює 270°;

д) куб і правильний гексаедр – це одне і те ж.

10. Правильний тетраедр і правильний ікосаедр мають рівну площу повної поверхні. Визначте ребро правильного ікосаедра, якщо ребро правильного тетраедра дорівнює 6 см.

а) визначити не можна; б) $6\sqrt{5}$ см; в) $1{,}2\sqrt{5}$ см; г) 6 см; д) $3\sqrt{5}$ см.

II варіант

1. Яке з перерахованих геометричних тіл не є правильним многогранником?

а) Правильний тетраедр;

б) правильний додекаедр;

в) правильний гексаедр;

г) правильна піраміда;

д) правильний октаедр.

2. Виберіть вірне твердження.

а) Правильний многогранник, у якого грані є правильними шестикутниками, називається правильним гексаедром;

б) сума плоских кутів при вершині правильного додекаедра дорівнює 324°;

в) куб має два центри симетрії – по одному в кожній основі;

г) правильний тетраедр складається з 8 правильних трикутників;

д) всього існує 6 видів правильних багатогранників.

3. У правильному тетраедрі висота основи дорівнює 3 см. Знайдіть площу його повною поверхні.

а) $4\sqrt{3}$ см^2; б) $8\sqrt{3}$ см^2; в) $6\sqrt{3}$ см^2; г) $24\sqrt{3}$ см^2; д) $36\sqrt{3}$ см^2.

4. Знайдіть кут між бічною гранню і площиною основи правильного тетраедра.

а) $\arcsin\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{3}$; в) 30°; г) 60°; д) 45°.

5. Знайдіть кут між діагоналлю куба і площиною його основи.

а) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{3}$; г) $2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо відстань від вершини верхньої основи до центру нижньої основи дорівнює 3 см.

а) 24 см^2; б) $12\sqrt{6}$ см^2; в) 36 см^2; г) 12 см^2; д) 144 см^2.

7. Знайдіть площу повної поверхні правильного октаедра, якщо його ребро дорівнює 3 см.

а) $36\sqrt{3}$ см^2; б) $72\sqrt{3}$ см^2; в) $12\sqrt{3}$ см^2; г) $18\sqrt{3}$ см^2; д) $144\sqrt{3}$ см^2.

8. Ребро правильного октаедра дорівнює 4 см. Знайдіть відстань між двома його протилежними вершинами.

а) $4\sqrt{2}$ см; б) 4 см; в) $4\sqrt{3}$ см; г) 8 см; д) $8\sqrt{2}$ см.

9. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Правильний тетраедр не має центру симетрії;

б} центри граней куба є вершинами правильного тетраедра;

в) центри граней правильного октаедра є вершинами куба

г) сума плоских кутів при кожній вершині куба дорівнює 270°;

д) правильна трикутна піраміда не є правильною тетраедром.

10. Правильний тетраедр і правильний октаедр мають рівну площу повної поверхні. Визначте ребро правильного тетраедра, якщо ребро правильного октаедра дорівнює 3 см.

а) визначити не можна; б) $6\sqrt{2}$ см; в) $0{,}4\sqrt{2}$ см; г) 3 см; д) $3\sqrt{2}$ см.

Тест № 13

Вектори в просторі

І варіант

1. Яке з наступних тверджень невірно?

а) Довжиною ненульового вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB;

б) нульовий вектор вважається співнапрямленим будь-якому вектору;

в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$

г) різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$;

д) вектори називаються рівними, якщо рівні їх довжини.

2. Спростіть вираз:

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{DC}$, якщо *ABCDA₁B₁C,₁D₁* – паралелепіпед.

а) $\overrightarrow{AC}$*;* б) 0; в) $\overrightarrow{BB_1}$*;* г) $\overrightarrow{DC}$*;* д) $\overrightarrow{BA}$.

3. Дана правильна трикутна піраміда *DABC,* сторона основи якої дорівнює $\sqrt{3}$. Бічні ребра нахилені до основи під кутом 60°. Знайдіть $\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\right|$

а) 1; б) 2; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{5}$; д) $\sqrt{6}$.

4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1. Знайдіть $\left|\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{DA_1}\right|$.

а) 1; 6)2; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}$*;* д) $0{,}5\sqrt{2}$.

5. Вкажіть вектор $\vec{x}$ в тетраедрі *ABCD,* якщо $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\vec{x}-\overrightarrow{CD}$.

а) $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{AB}$*;* в) $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{DB}$, д) $\overrightarrow{CD}$.

6. Діагоналі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці *O*. При якому значенні *k* справедливе співвідношення $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{CO}=k\overrightarrow{C_1A}$?

а) -0,5; 6) 0,5; в) 1; г) -1; д) ні при якому.

7. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ A_1C_1 перетинає B_1D_1 у точці *M* $\overrightarrow{B_1D_1}=x\overrightarrow{D_1M}$. Знайдіть *x.*

а) 0,5; б) -0,5; в) 1; г) -1; д) -2.

8. У правильній трикутній піраміді *DABC* відрізок *DO* – висота. $\overrightarrow{DO}=x\overrightarrow{DA}+y\overrightarrow{DB}+z\overrightarrow{DC}$. Знайдіть *x, y, z.*

а) *x*=0,5, *y*=*z*=0,25; б) *x*=0,5, *y*=*z*=-0,25; в) *x*=*y*=*z*=0,5; г) *x*=0,25, *y*=*z*=0,5; д) *x*=*y*=*z*=0,25.

9. Вектори $-\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{KF}$ та $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{EC}$ є:

а) рівними; б) протилежними; в) співнапрямленими; г) нульовими; д) колінеарними.

10. Яке з наступних тверджень вірне?

а) Сума декількох векторів залежить від того, в якому порядку вони додаються;

б) протилежні вектори рівні;

в) для знаходження різниці векторів необхідно, щоб вони виходили з однієї точки;

г) добутком вектора на число є число;

д) для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не виконується рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

II варіант

1. Яке з наступних тверджень невірно?

а) Довжиною нульового вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка *AB;*

б) будь-яка точка простору розглядається як нульовий вектор;

в) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$;

г) для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}-\vec{b}$;

д) вектори називаються рівними, якщо вони співнапрямлені і рівні їх довжини.

2. Спростіть вираз: $\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{A_1D_1}$, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед.

а) $\overrightarrow{B_1A_1}$; б) $\vec{0}$; в) $\overrightarrow{CC_1}$; г) $\overrightarrow{CA}$; д) $\overrightarrow{B_1C}$.

3. Основою піраміди $MABC$ служить прямокутний трикутник ABC ($\angle C$=90°); AC=6; BC=8. Бічні ребра нахилені до основи під кутом 60°. Знайдіть $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CB}\right|$.

а) 6; б) 10; в) 8; г) $5\sqrt{3}$; д) 5.

4. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ сторона основи дорівнює 1, точка E – середина A_1C_1. Знайдіть $\left|\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}\right|$.

а) 1; б) 2; в) $\sqrt{3}$; г) 3; д) $0{,}5\sqrt{3}$.

5. Вкажіть вектор $\vec{x}$ в тетраедрі $ABCD$, якщо $\overrightarrow{CD}=\vec{x}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC}$.

а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{BA}$; г) $\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{BD}$.

6. Діагоналі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O. При якому значенні k справедливе співвідношення $k\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AO}\right)=\overrightarrow{A_1C}$?

а) 2; б) -2; в) 1; г) -1; д) ні при якому.

7. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ A_1C перетинає B_1D у точці M, $\overrightarrow{A_1C}=x\overrightarrow{CM}$. Знайдіть x.

а) 0,5; б) -0,5; в) 1; г) -1; д) -2.

8. У тетраедрі $DABC$ медіани DE і CF грані DBC перетинаються в точці O. $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AO}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AB}$. Знайдіть x, y, z.

а) x=y=-1, z=3; б) x=z=-1, y – 3; в) x=y=z=3; г) x=3, y=z=-1; д) x=y=z=-1.

9. Вектори $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{A_1A_1}$ та $\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ є:

а) протилежними; б) колінеарними; в) співнапрямленими; г) нульовими; д) рівними.

10. Яке з наступних тверджень вірне?

а) Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор, різниця якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює століття тору $\vec{a}$.

б) якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні і $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число *k,* що $\vec{b} = k\vec{a}$;

в) вектори називаються рівними, якщо вони співнапрямлені;

г) два вектори, колінеарні ненульовому вектору, співнапрямлені;

д) для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a}\left(\vec{c} + \vec{b}\right) = \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}$.

Тест № 14

Компланарні вектори

І варіант

1. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Вектори називаються компланарними, якщо при відкладанні їх від однієї і тієї ж точки вони лежатимуть в одній площині;

б) якщо вектор $\vec{c}$ можна розкласти на вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто представити у вигляді $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, де *x*, *y* – деякі числа, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні;

в) для додавання трьох некомпланарних векторів використовують правило паралелепіпеда;

г) будь-які два вектори компланарні;

д) будь-які три вектори некомпланарні.

2. Відомо, що $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$. Тоді прямі *AC* і *BD:*

а) паралельні; б) перетинаються; в) мимобіжні; г) співпадають; д) виконуються всі умови пунктів а—г.

3. Дані вектори $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $2\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{p} = \overrightarrow{3a} - 4\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$. Вкажіть трійку компланарних векторів.

а) $\vec{m}, \vec{n}, \vec{k}$*;* б) $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$*;* в) $\vec{p}, \vec{n}, \vec{k}$*;* г) таких трійок немає; д) визначити не можна.

4. Дана піраміда *PABCD,* в основі якої лежить паралелограм *ABCD.* Розкладіть вектор $\overrightarrow{PD}$ по векторах $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$.

а) $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$*;* б) $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$*;* в) $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$; г) $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$; д) $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Яким із запропонованих векторів буде компланарний з векторами $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{AC}$ *?*

а) $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{C_1B_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$*;* г) $\overrightarrow{CB_1}$*;* д) $\overrightarrow{CC_1}$.

6. Вектори $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$ некомпланарні якщо:

а) при відкладанні з однієї точки вони не лежать в одній площині;

б) два з даних векторів колінеарні;

в) один з даних векторів нульовий;

г) $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$*;* д) $\vec{p} = \vec{a}$.

7. У тетраедрі *ABCD* медіани основи *BCD* перетинаються в точці *O*, тоді вектор $\overrightarrow{AO}$ дорівнює:

а) $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$; б) $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$; в) $-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$; г) $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$; д) $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$.

8. Дані вектори $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{p}=2\vec{c}-3\vec{d}$. Знайдіть коефіцієнти *x, y* розкладання вектора $\vec{p}$ на вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

а) $x = 13, y = 0$; б) $x=-5, y = -12$; в) $x=5, y=-12$; г) $x=-5, y= 0$; д) $x=5, y=12$.

9. Відомо, що $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ тоді вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ є:

а) некомпланарними; б) співнапрямленими; в) колінеарними; г) нульовими; д) компланарними.

10 Дані паралелограми *ABCD* і $AB_1C_1D_1$. Тоді вектори $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$:

а) нульові; б) рівні; в) протилежні; г) компланарні; д) некомпланарні.

ІІ варіант

1. Яке з наступних тверджень невірне?

а) Три вектори будуть компланарними, якщо один з них нульовий;

б) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то вектор $\vec{c}$ можна розкласти по векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто представити у вигляді $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, де *x, y* – деякі числа;

в) для додавання трьох компланарних векторів не використовують правило паралелепіпеда;

г) будь-які два вектори некомпланарні;

д) три нульові вектори компланарні.

2. Відомо, що $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$, тоді прямі *AB* і *CD:*

а) паралельні; б) співпадають;

в) перетинаються; г) мимобіжні;

д) виконуються всі умови пунктів а-г.

3. Дані вектори $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{p} = \overrightarrow{3a} - 4\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = \vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. Вкажіть трійку компланарних векторів.

а) Визначити не можна; б) таких трійок немає; в) $\vec{m}, \vec{n}, \vec{k}$; г) $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$; д) $\vec{p}, \vec{n}, \vec{k}$.

4. Дана піраміда *EABCD,* в основі якої лежить паралелограм *ABCD.* Розкладіть вектор $\overrightarrow{EA}$ на вектори $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{ED}$.

а) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$ б) $\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED}$; в) $\overrightarrow{-EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$; г) $\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$; д) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED}$.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Яким із запропонованих векторів буде компланарний з векторами $\overrightarrow{CB_1}$ та $\overrightarrow{AA_1}$?

а) $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{A_1B_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ г) $\overrightarrow{CD_1}$; д) $\overrightarrow{CB}$.

6. Вектори $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарні, якщо:

а) при відкладанні з однієї точки вони не лежать в одній площині;

б) два з даних векторів рівні;

в) якщо будь-який вектор можна розкласти по даних векторах;

г) якщо їх суму можна знайти за допомогою правила паралелепіпеда;

д) якщо їх довжини є вимірами паралелепіпеда.

7. У тетраедрі *ABCD* медіани основи *BCD* перетинаються в точці *O*. Тоді вектор $\overrightarrow{OA}$ дорівнює:

а) $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$; б) $-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$; в) $-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$; г) $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$; д) $-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

8. Дані вектори $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{p}=-2\vec{c}+3\vec{d}$. Знайдіть коефіцієнти *x, y* розкладання вектора $\vec{p}$ на вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

а) x=13, y=0; б) x=-5, y=-12; в) x=5, y=-12; г) x=-5, y=0; д) x=5, y=12.

9. Відомо, що $2\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ тоді вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$:

а) компланарні б) некомпланарні; в) колінеарні; г) співнапрямлені; д) нульові.

10. Дані паралелограми *ABCD* і $AB_1C_1D_1$. Тоді вектори $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{C_1C}$, $\overrightarrow{D_1D}$:

а) нульові; б) рівні; в) компланарні; г) некомпланарні; д) протилежні.

Тест № 15

Підсумковий

I варіант

1. Площина α, паралельна стороні *AB* трикутника *ABC,* перетинає його в точках A_1 і B_1, що лежать на сторонах *AC* і *BC* відповідно. Знайдіть A_1C, якщо AC=15 см, A_1B_1=4 см, AB=20 см.

а) 3 см; б) 4 см; в) 10 см; г) 12 см; д) 7,5 см.

2. Знайдіть відстань від деякої точки до площини квадрата, якщо відстань від цієї точки до всіх його сторін дорівнює 4 см, а сторона квадрата дорівнює 2 см.

а) $\sqrt{13}$ см; 6 $\sqrt{3}$ см; в) $\sqrt{15}$см; г) $\sqrt{17}$ см; д) $3\sqrt{2}$ см.

3. Виберіть вірне твердження.

а) Якщо площина перетинає одну з паралельних площин, то вона не перетинає іншу;

б) протилежні ребра тетраедра лежать на прямих, що перетинаються;

в) якщо прямі мимобіжні, то відстань між ними не визначити;

г) всі грані правильної зрізаної піраміди – прямокутні трапеції;

д) проекцією точки на площину називається основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини, якщо точка не лежить в площині, і сама точка, якщо вона лежить в площині.

4. Основою піраміди є паралелограм із сторонами 3 і 7 і однієї з діагоналей, рівної 6. Висота піраміди дорівнює 4, її основою є точка перетину діагоналей паралелограма, що лежить в основі. Знайдіть бічні ребра піраміди.

а) 5, 5, 5, 6; б) 5, 5, 6, 6; в) 5, 6, 6, 6; г) 5, 5, 5, 5; д) 6, 6, 6, 6.

5. Основою піраміди *DABC* є трикутник із сторонами AC=13, AB=15, CB=14. Бічне ребро DA, дорівнює 9, перпендикулярне до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

а) 273; 6)630; в) 231; г) 315; д) 357.

6. Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо AB=2 см, AA_1=1 см.

а) $\left(\sqrt{3}+6\right)$ см²; б) $\left(2\sqrt{3}+3\right)$ см²; в) $\left(\sqrt{3}+3\right)$ см²; г) $\left(2\sqrt{3}+6\right)$ см²; д) $\left(4\sqrt{3}+6\right)$см².

7. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ AB=2 см, AA_1=1 см. Знайдіть кут, який складає пряма AB_1 з площиною ABC.

а) $arctg0{,}5$; б) $arctg2$; в) $arctg\sqrt{2}$; г) $arctg0{,}5\sqrt{2}$; д) 45°.

8. Знайдіть площу перерізу правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною ACB_1 за умови, що AB=2 см, AA_1=1 см.

а) 4 см²; б) 1 см²; в) 6 см²; г) 8 см²; д) 2 см².

9. Дана правильна трикутна призма $ABCA_1B_1C_1$, у якої AB=2 см, AA_1=1 см. Знайдіть кут між площинами AB_1C і ABC.

а) 60°; б) 45°; в) 30°; г) 120°; д) 90°.

10. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ AB=2 см, AA_1=1 см. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{B_1B}-\overrightarrow{BC}$.

а) 1 см; б) 2 см; в) 3 см; г) 4 см; д) 5 см.

II варіант

1. Площина α, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає його в точках A_1 і B_1, що лежать на сторонах AC і BC відповідно. Знайдіть A_1A, якщо A_1C=5 см, A_1B_1=7см, AB=21 см.

а) 12 см; б) 10 см; в) 15 см; г) 21 см; д) 5 см.

2. Відстань від деякої точки до площини квадрата дорівнює 3 см. Сторона квадрата дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від цієї точки до всіх його вершин, якщо вершини рівновіддалені від неї.

а) $4\sqrt{3}$ см; б) $\sqrt{15}$ см; в) $\sqrt{17}$ см; г) $\sqrt{24}$ см; д) $3\sqrt{2}$ см.

3. Виберіть вірне твердження.

а) Якщо площина перетинає одну із паралельних прямих, то вона не перетинає іншу;

б) протилежні ребра тетраедра лежать на паралельних прямих;

в) похила завжди менше перпендикуляра, якщо вони проведені з однієї точки;

г) всі грані правильної трикутної призми – правильні трикутники;

д) пряма, проведена в площині через основу похилої перпендикулярно до неї, перпендикулярна і до її проекції.

4. Площа перерізу правильної трикутної призми, проведеного через бічне ребро і середину протилежної сторони нижньої основи, дорівнює $2\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть довжину ребра цієї призми за умови, що всі її ребра рівні.

а) 2 см; б) 1 см; в) 4 см; г) 3 см; д) визначити не можна.

5. У прямому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=2$, $AD=3\sqrt{2}$, $\angle BAD = 45°$, $B_1D=\sqrt{19}$. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

а) $18\sqrt{2}+12$; б) $3\sqrt{2}+2$; в) $3\sqrt{2}+24$; г) $18\sqrt{2}+24$; д) $24\sqrt{2}+18$.

6. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди *EABCD,* якщо $AE=2\sqrt{2}$ см, $AB=2$ см.

а) $\left(\sqrt{7}+1\right)$см^2; б) $\left(4\sqrt{7}+1\right)$см^2; в) $\left(\sqrt{7}+4\right)$ см^2; г) $\left(4\sqrt{7}+4\right)$см^2; д) $4\sqrt{7}$ см^2.

7. У правильній чотирикутній піраміді *EABCD* $AE=2\sqrt{2}$ см, $AB=2$ см. Знайдіть кут, який складає пряма *EC* з площиною *ABC.*

а) 45°; б) 60°; в) 30°; г) 120°; д) 90°.

8. Знайдіть площу перерізу правильної чотирикутної піраміди *EABCD* площиною *AEC* за умови, що $AE = 2\sqrt{2}$ см, *AB*=2 см.

а) 1 см^2; б) 2 см^2; в) $2\sqrt{2}$ см^2; г) $\sqrt{3}$ см^2; д) $2\sqrt{3}$ см^2.

9. Дана правильна чотирикутна піраміда *EABCD,* у якої $AE = 2\sqrt{2}$ см, *AB*=2 см. Знайдіть кут між площинами *EBC* і *ABC.*

а) $arcctg\sqrt{7}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{7}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{7}}{7}$; г) $arctg\sqrt{7}$; д) 45°.

10. У правильній чотирикутній піраміді *EABCD* $AE = 2\sqrt{2}$ см *AB*=2 см. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$.

а) $2\sqrt{2}$ см; б) 2 см; в) 1 см; г) $\sqrt{2}$ см; д) 3 см.

Відповіді

№ теста	Варіант	Завдання 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	I	д	д	в	в	б	г	а	б	д	в
	II	г	д	а	а	б	г	а	г	в	в
2	I	г	в	б	а	б	д	б	в	г	г
	II	г	д	б	в	а	г	б	в	в	г
3	I	в	б	а	д	б	б	а	г	а	б
	II	в	б	а	д	д	а	б	в	г	б
4	I	б	в	а	б	б	д	в	а	а	г
	II	а	г	а	б	г	г	д	а	а	а
5	I	б	в	в	в	б	д	г	г	в	б
	II	г	а	б	а	б	г	д	а	д	в
6	I	б	а	г	д	а	в	б	д	д	г
	II	г	а	г	д	в	а	в	б	д	г
7	I	а	в	д	б	г	а	д	г	в	в
	II	б	а	г	д	г	д	в	а	б	а
8	I	а	а	д	б	а	б	в	в	г	д
	II	а	а	б	в	д	а	в	д	в	д
9	I	б	в	а	г	д	г	а	в	б	а

	II	в	в	д	а	б	г	б	в	а	б
10	I	а	в	в	г	г	а	г	а	д	б
	II	б	а	г	г	в	а	в	д	б	д
11	I	б	д	г	в	а	в	г	а	б	д
	II	б	а	д	г	а	б	д	в	в	а
12	I	в	б	г	а	а	д	б	б	в	д
	II	г	б	в	а	д	в	г	а	б	д
13	I	д	а	б	в	г	а	д	а	б	в
	II	а	д	б	д	г	б	д	г	б	б
14	I	д	б	а	в	г	а	а	б	д	г
	II	г	в	д	г	д	б	д	в	в	в
15	I	а	в	д	б	г	г	а	д	в	б
	II	б	в	д	а	г	г	б	д	в	а

Додаток В

Контрольна робота №1

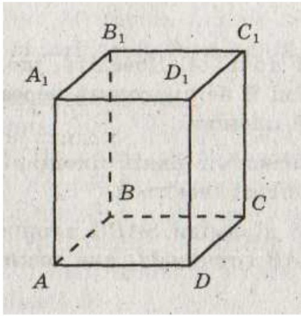
Варіант 1.

Початковий і середній рівні

Виберіть правильний варіант відповіді в завданнях 1-5.

1. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Укажіть пряму, по якій перетинаються площини (ACD_1) і (ACB_1)



А) AB

Б) B_1D_1

В) AC

Г) A_1C_1

Д) BD.

2. Дано точки M,N,L. Скільки площин можна провести через них, якщо MN=12 дм, NL=5дм, ML= 13дм?.

А) Нескінченну множину;

Б) тільки три;

В) тільки одну;

Г) жодної;

Д) інша відповідь.

3. Скільки різних площин можна провести через пряму b і точку B, якщо точка B не належить прямій b?

А) Тільки дві;

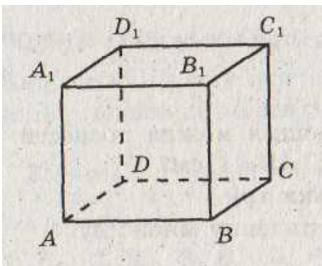
Б) жодної;

В) тільки одну;

Г) нескінченну множину;

Д) інша відповідь.

4. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яка точка належить площині (ABB_1)?



А) D_1;

Б) D;

В) C_1;

Г) A_1;

Д) С.

5. Чотири точки A, B, C, D не лежать в одній площині.

Площини (ABC) і (ABD) перетинаються по прямій:

А) AB; Б) BC; В) CD; Г) AD; Д) BD.

6. Заповніть пропуски в реченні.

Якщо дві … прямі належать … , то вся пряма належить цієї… .

Достатній рівень

7. Прямі AC і BD не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AB і CD не лежать в одній площині.

8. Дано пряму *a* і точку A поза нею. Доведіть, що пряма *c*, яка проходить через точку A і перетинає пряму *a*, лежить із ними в одній площині.

Високий рівень

9. Доведіть, що в просторі існують чотири точки, які не лежать в одній площині.

Варіант 2.

Виберіть правильний варіант відповіді в завданнях 1-5.

Початковий і середній рівні

1. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Укажіть пряму, по якій перетинаються площини (BDC_1) і (BDA)

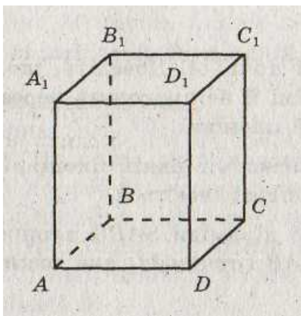
А) C_1A_1

Б) BD.

В) B_1D_1

Г) AC

Д) AB



2. Дано точки A, B, C. Скільки площин можна провести через них, якщо AC=7 см, BC=3см, AB= 4см?.

А) Тільки дві;

Б) жодної;

В) тільки три;

Г) нескінченну множину;

Д) інша відповідь.

3. Скільки різних площин можна провести через пряму *b* і точку В, якщо точка В не належить прямій *b*?

А) Тільки три;

Б) нескінченну множину;

В) тільки одну;

Г) жодної;

Д) інша відповідь.

4. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яка точка належить площині (ABB_1)?

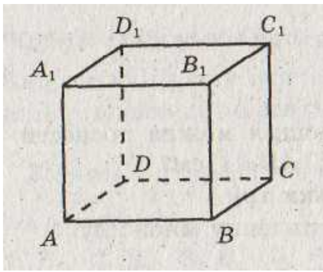
А) D;

Б) D_1;

В) B_1;

Г) С;

Д) A_1.



5. Чотири точки A, B, C, D не лежать в одній площині.

Площини (ABD) і (BCD) перетинаються по прямій:

А) BC; Б) BD; В) AB; Г) AD; Д) CD/

6. Заповніть пропуски в реченні.

Якщо дві різні прямі мають спільну … , то через них можна провести …, і до того ж тільки … .

Достатній рівень

7. Точки A, B і пряма CD не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AB і CD не перетинаються.

8. Діагоналі чотирикутника ABCD перетинаються. Доведіть, що всі сторони даного чотирикутника лежать в одній площині.

Високий рівень

9. Доведіть, що в просторі існують дві прямі, які не лежать в одній площині.

Контрольна робота №2

Початковий і середній рівні

1. Дано: проектуюча площина AA_1BB_1 і пряма CD (C_1D_1). Побудувати точку зустрічі даної прямої з даною площиною.

2. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудувати точку O перетину прямої A_1M (M – довільна точка ребра CC_1) з діагональною площиною DBB_1D_1 куба.

Достатній рівень

3. Дано зображення похилої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точки M, K, P, F, E, H – по одній на кожній грані: $M \in ABC_1; K \in ABB_1; P \in A_1B_1C_1; F \in CDD_1; E \in BCC_1; H \in ADD_1$. Побудувати лінію перетину площин MKE і PFH (рис.1).

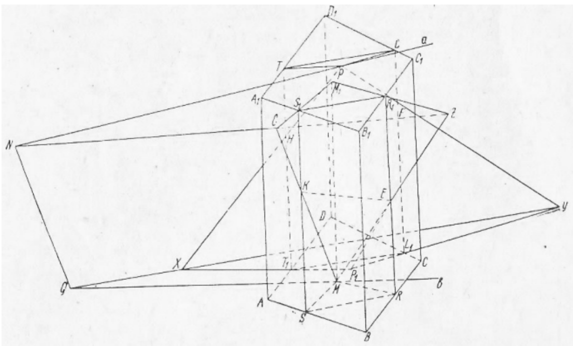


Рис. 1

Високий рівень

4. Побудувати переріз п’ятикутної піраміди площиною, заданою трьома точками, дві з яких лежать на бічних ребрах, а одна – на грані піраміди.