Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

магістра

на тему

Методичне забезпечення курсу "Шкільний курс математики з практикумом розв'язування математичних задач" на фізико-технологічному факультеті

Виконав: студент 2 курсу магістратури,
групи МІ-61
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Снітко Дмитро Миколайович

Керівник: к.п.н., доц., кафедри математики з МВ
Белешко Дмитро Тимофійович

____

Рецензенти: докт. технік. наук, проф.
Турбал Юрій Васильович

____

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри вищої математики
Петрівський Борис Петрович

____

Рівне – 2018 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Аналіз сучасного стану освіти говорить про актуальність та необхідність створення єдиного простору для методичного забезпечення освітян всім необхідним для проведення занять з використанням ілюстративного і наочного матеріалу.

Методичне забезпечення шкільного курсу базується на використанні принципу наочно-модельного навчання. Використання наочності в процесі навчання шкільному курсу сприяє розумовому розвитку студентів, допомагає виявити зв`язок між науковими знаннями та життєвою практикою, полегшує процес засвоєння і сприяє розвитку інтересу до знань, стимулює розвиток мотиваційної сфери студентів.

Актуальність дослідження важливим завданням навчання є розвиток особистості, здатної до оволодіння знаннями та способами діяльності. А це вимагає переносу акцентів із пасивного накопичення інформації на формування умінь творчо використовувати інформацію в процесі розв`язування різнопланових задач. Процес дослідження використання наочно-модельного навчання, зокрема мультимедійного забезпечення здатен покращити засвоєння знань. Проблема використання різного роду задач у навчанні математики приділялася особлива увага. Про це свідчать роботи Е.Ю.Міганової', Я.І.Груденова, Ф.Ф.Нагібіна, Г.І.Саранцева, В.А.Жарова, М.П.Маланюка, О.Ф.Семеновича, С.Б.Суворової', П.М.Єрднієва, Л.М.Фрідмана та ін.

Використання слайдів на окремому етапі або етапах уроку залежить від змісту цього уроку і мети, яку ставить викладач. Слайди можуть застосовуватися на різних етапах уроку: на етапі актуалізації знань, при викладі нового матеріалу, закріпленні, контролі, перевірці та заданні домашнього завдання.

Використання мультимедійного забезпечення ефективне на уроках шкільного курсу: при вивченні нового матеріалу (ілюстрація різноманітними наочними засобами; мотивація введення нового поняття; моделювання); при перевірці самостійних робіт (швидкий контроль результатів) та інших.

Використання слайдів на уроках шкільного курсу дозволяють значно спростити розв'язування складних задач, здійснювати експериментальні дослідження, необхідні для ефективної організації процесу пізнання, створювати проблемні ситуації, формувати творчу особистість студентів, що в свою чергу неодмінно приводить до помітного покращення результатів навчальної діяльності.

Мета дослідження - розробити методичне забезпечення шкільного курсу, яке допоможе розкрити зміст і обсяг нових понять, закріплювати матеріал, що вивчається, забезпечити активну пізнавальну діяльність студентів на уроках.

Об'єктом дослідження є процес навчання студентів математиці.

Предметом дослідження є методичне забезпечення курсу "Шкільний курс математики з практикумом розв'язування математичних задач" на фізико-технологічному факультеті.

Для досягнення мети даної магістерської роботи були поставлені такі ***завдання***:

- проаналізувати літературу по даній темі;
- систематизувати відомості про концепцію наочно-модельного навчання в школі;
- систематизувати відомості про навчальне обладнання шкільного курсу та методику його використання;
- подати приклади застосування слайдів на уроках шкільного курсу в класах;
- розробити методичний посібник;
- зробити висновки.

Гіпотеза дослідження: використання мультимедійного забезпечення на уроках ШКПРМЗ гарантує більш свідоме оволодіння системою знань, вмінь та навичок, розвиток математичного мислення, творчої активності та пізнавальної самостійності.

Для досягнення мети та розв’язання поставлених завдань були використані **теоретичні** (аналіз, порівняння, синтез, систематизація, класифікація та узагальнення теоретичних даних, представлених у педагогічній, психологічній та методичній літературі) та **емпіричні** (вивчення вітчизняного та зарубіжного педагогічного досвіду, аналіз уроків, спостереження) методи досліджень.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблений зміст і методика можуть бути використані вчителями школи при організації навчання математиці на уроках, на факультативних заняттях, для підвищення якості знань студентів, активізації їх пізнавальної діяльності.

Апробація: основні положення магістерської роботи були викладені при доповіді на конференції магістрів та спеціалістів Рівненського державного гуманітарного університету.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Прикладна спрямованість у шкільному курсі математики.

Роль математики в системі шкільної освіти. істотно зростає в добу реформування системи шкільної освіти, що характеризується новим розумінням цілей навчання та новими підходами до розробки і використання освітніх технологій. Щоб бути успішним у сучасному складному мінливому суспільному житті, кожній людині необхідно бути мобільною, адаптивною; вміти бачити проблему, чітко формулювати та всебічно підходити до її розв’язування; здобувати необхідну інформацію тощо.

Державний стандарт базової та повної середньої освіти основними цілями освітньої галузі «Математика» визначає:

- опанування студентами системи математичних знань, умінь та навичок, необхідних у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння на сучасному рівні предметів природничо-наукового та гуманітарного циклів, забезпечення неперервної освіти протягом життя;
- формування в студентів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, про її роль у пізнанні дійсності;
- інтелектуальний розвиток студентів.

Реалізувати поставлені завдання можна за умови посилення **практичної, прикладної та політехнічної спрямованості шкільного курсу математики**.

Практичне спрямування передбачає формування в студентів умінь та навичок безпосередньо застосовувати здобуті знання під час вивчення теоретичного курсу математики.

Прикладне спрямування забезпечує вміння студентів використовувати здобуті під час вивчення математики знання в практичній діяльності (дослідженні реальних явищ, складанні математичних моделей задач та зіставленні отриманих результатів з реальними) та при вивченні природничих наук (фізики, біології, географії, астрономії, хімії).

Політехнічна направленість навчання передбачає використання математичних знань і вмінь у розв’язуванні задач, зміст яких пов'язаний із описом виробничих циклів, процесів обслуговування та керування (фізики, хімії, креслення, трудового навчання тощо).

Одним із дієвих та ефективних засобів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є використання в навчальному процесі ***прикладних задач***, які виникли в інших галузях, але потребують математичного розв’язання.

Прикладна задача повинна відповідати таким вимогам:

- питання задачі формулюється так, як воно зазвичай формулюється у житті;
- розв’язок задачі демонструє практичне застосування математичних ідей у різних галузях;
- зміст задачі повинен викликати в студентів пізнавальний інтерес;
- дані та шукані величини задачі мають бути реальними, узятими з життя.

Розв’язування прикладних задач у шкільному курсі математики сприяє ознайомленню студентів із роботою підприємств і галузей народного господарства, викликає інтерес до різних професій. У 5-8 класах можна застосовувати дидактичні ігри з розподіленням ролей, які відповідають різним професіям, і завданнями, які імітують вирішення певних виробничих чи побутових проблем. Використання прикладних задач дає можливість вдало створювати проблемні ситуації на уроці («Білка сховала в дуплі 24 горіхи. Прибігли білченята, деякі з них принесли по 6 горіхів, а деякі взяли з дупла по 3 горіхи кожне. Чи могло після цього в дуплі залишитись 35 горіхів?», «Що вигідніше: будувати одноповерхові будинки з квадратною основою чи з основою у вигляді прямокутника з таким самим периметром?»тощо).

Такі задачі забезпечують посилення мотивації навчання математики, спонукають студентів до здобуття нових знань, оволодіння новими вміннями, збагачують їх знаннями з інших дисциплін.

Відомо, що математика є мовою багатьох природничих наук. Зв'язок математики з іншими науками демонструють ***інтегровані уроки.*** Вони допомагають зробити знання студентів більш цілісними й системними. Такі уроки сприяють встановленню логічних зв’язків між предметами, мають яскраво виражену прикладну спрямованість, викликають пізнавальний інтерес студентів.

Уроки математики можна інтегрувати з уроками трудового навчання («Використання математичних формул при побудові креслень одягу», «Одиниці маси. Приготування страв»), української літератури («Про Т.Г.Шевченка на уроках математики»), української мови («Розв’язування рівнянь і задач за допомогою рівнянь. Практичне застосування знань, отриманих на уроках української мови»), історії («Піраміда – геометрична фігура. Мистецтво Стародавнього Єгипту», «Подорож у минуле геометрії», «Сім чудес світу»), географії («Масштаб. Побудова плану шкільної присадибної ділянки»), природознавства («Симетрія. Симетрія в природі»), фізики («Швидкість. Одиниці вимірювання швидкості»), образотворчого мистецтва («Золотий переріз») тощо.

Ще одним засобом побудови цілісної системи навчання на основі спільності змісту знань і методів наукового пізнання є ***міжпредметні зв'язки***. Вони активізують пізнавальну діяльність студентів, сприяють підвищенню рівня науковості та доступності, підвищенню якості знань та вмінь, створюють умови для всебічного розвитку особистості. Для успішної реалізації міжпредметних зв'язків на уроках і позакласних заходах учитель повинен орієнтуватися, для вивчення якого навчального предмета може стати у нагоді той чи інший математичний матеріал і чітко усвідомлювати, з якою метою і в якій формі встановлюється зв'язок.

Значущість прикладної спрямованості засвідчують і результати міжнародного порівняльного моніторингового дослідження якості природничо-математичної освіти TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). У рамках TIMSS досліджуються тенденції в досягненнях студентів четвертого і восьмого класів із математики та природничих наук, а також здійснюється моніторинг реалізації навчальних програм, визначаються найбільш перспективні методології викладання в усьому світі.

Оцінювання TIMSS проводиться з 1995 року з інтервалом у чотири роки (1999, 2003, 2007, 2011 рр.). Для забезпечення можливості порівнювати досягнення студентів у контексті різних навчальних систем, методів шкільної організації та навчальних практик проект TIMSS передбачає опрацювання великих обсягів супровідної інформації. Оскільки навчальні програми в початковій та основній ланках в різних країнах світу відрізняються, при формуванні програмових засад міжнародним комітетом виокремлено спільні теми, на основі яких розроблено завдання для дослідження.

Україна вперше повноцінно приєдналася до міжнародного порівняльного дослідження рівня якості природничо-математичної освіти в 2007 році. TIMSS 2011 – п'ятий цикл дослідження, яким було охоплено 148 загальноосвітніх навчальних закладів України (близько 4000 студентів 8-их класів). Співорганізаторами TIMSS 2011 є Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України та Український центр оцінювання якості освіти України.

Особливістю завдань TIMSS 2007 є те, що крім традиційних тестів з вибором однієї правильної відповіді, велика увага приділялась питанням, що потребують уміння конструювати власні відповіді, що дозволяє краще оцінити аналітичні та дослідницькі здібності студентів, їхні вміння застосовувати знання в нових ситуаціях. Завдання розроблені таким чином, що можна простежити наступність у навчанні, розвиток розуміння понятійного апарату основ наук, уміння логічно мислити та пояснювати явища навколишнього середовища з наукових позицій.

Засади оцінювання TIMSS 2007 з математики обмежено двома доменами:

- змістовий домен, який визначає змістові лінії вимірювань у рамках предмета (для математики у 8-му класі: числа, алгебра, геометрія, дані та ймовірність);
- когнітивний домен, який визначає особливості розумової діяльності (знання, застосування, обґрунтування) [1,с. 81-110].

Перший когнітивний домен спирається на **базові знання** опорних фактів, понять процедур. Знання ідей дає можливість установлювати зв'язки між елементами знань, виходити за межі знань, які мають студенти. Точні та широкі знання дозволяють студентам успішно займатися складнішими видами пізнавальної діяльності.

Другий когнітивний домен передбачає завдання, розроблені таким чином, щоб можна було у простих ситуаціях безпосередньо **застосувати знання і розуміння певних понять**. Студенти повинні вміти скористатися знанням математичних фактів, розуміти математичні процедури для розв'язування стандартних задач, що вимагають застосування вивчених процедур. Задачі можуть бути побудовані на основі ситуацій із повсякденного життя або суто математичні.

Третій когнітивний домен – обґрунтування. Перевіряється здатність до логічного і систематичного мислення; уміння спостерігати й робити припущення; обґрунтування; застосовувати математичні знання і методи міркування в незнайомих життєвих ситуаціях або для нестандартного формулювання умови задачі; розв'язувати складні контексти та багатокрокові задачі; оцінювати хибність і правильність висловлювань, узагальнювати отримані результати; робити висновки та прогнози за результатами аналізу і шляхом порівняння отриманих даних тощо.

Розглянемо деякі приклади завдань TIMSS 2007 та результати виконання завдань українськими восьмикласниками.

Найкращі результати студенти продемонстрували, виконуючи завдання, розв'язання яких потребує вміння порівнювати натуральні числа, читати й записувати десяткові дроби, додавати дроби з різною кількістю знаків після коми, ділити і множити десяткові дроби на числа, обчислювати відсотки від числа.

Наприклад: «Садівник змішав 4,45 кілограмів насіння трави і 2,735 кілограмів насіння квітів, щоб засадити галявину. Скільки всього кілограмів насіння він отримав?». Задачу з розділу «Числа» на тему «Дроби» за когнітивними доменами віднесено до категорії «Застосування». 71,3% студентів правильно відповіли на запитання. Дівчата виконали завдання краще, ніж хлопці (76,7% проти 67,2%). Міжнародний процент виконання цього завдання 55,8 %. Найбільший відсоток виконання завдання в студентів Республіки Корея (92%).

Найменшу кількість правильних відповідей (10-25%) студенти дали, виконуючи завдання на порівняння найменованих величин; перехід між одиницями виміру і їх округлення; перетворення мішаного числа в десятковий дріб.

Завдання на обчислення значення виразу типу $\frac{2}{5}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}$ правильно виконали 32,5% студентів. 53,2 % студентів обрали відповідь $\frac{2+5+9}{5+4+8}=\frac{16}{17}$.

Розв'язання стандартних задач на один-два кроки («Під час шкільного походу один учитель відповідає за групу з 12 студентів. Якщо в похід вирушило 108 студентів, то скільки вчителів мають їх супроводжувати?») виконали 85% студентів. Аналогічну задачу на один логічний крок, де потрібно було визначити загальну кількість учасників, якщо задано наповнення однієї групи і межі, у яких міститься шукане число, виконали тільки 32% студентів.

Завдання на обчислення середнього арифметичного за наведеними в таблиці даними правильно виконали 41,1% студентів, із завданням на використання поняття середнього арифметичного в життєвій ситуації впоралися лише 27,8% (обчислення середнього бала оцінки із запитанням «Чи можна, щоб…?). Завдання на пряме обчислення середньої кількості виконали 63%, а на запитання, як зміниться це значення, якщо в одній з відповідних установ кількість працівників збільшиться на задане число, правильну відповідь дали тільки 1,6% восьмикласників.

Задачу на обчислення відсотка від числа успішно виконали 70,6% студентів, завдання «Якому дробу відповідає певний відсоток у ціні?» – 47%, а із задачею, у якій треба було знайти, на скільки відсотків знижено ціну (за порівнянням старої й нової ціни товару), впоралися лише 27,1% студентів.

Пропоновані проектом задачі на рух відрізняє від традиційних задач нашої школи життєва спрямованість. Так, традиційне завдання на обчислення часу, затраченого на подолання шляху, правильно виконали 69,7% студентів, а завдання на три дії, але не звичне за формулюванням (рух двох типів) – 8 %, просте завдання на формування таблиці з використанням результатів подолання дистанції – 26% студентів.

Таким чином, наша школа традиційно орієнтується на запам'ятовування студентами певних абстрактних дій, а не на формування пошукової активності. Як наслідок – найгірші показники маємо саме з найпростіших життєвих задач, що потребують використання знань із математики.

Аналогічна ситуація простежується при розгляданні результатів за змістовими доменами «Алгебра», «Геометрія», «Дані та ймовірність».

Найкращий результат (близько 60-75% правильних відповідей) отримано за виконання завдань, що передбачають застосування вміння пояснювати алгебраїчні вирази (із цілими коефіцієнтами); зводити подібні доданки з цілими числовими коефіцієнтами; розкривати дужки, якщо перед дужкою стоїть знак «+»; позначати точки на координатній площині за її координатами; порівнювати значення ординат двох точок за їх розміщенням відносно осі абсцис (без масштабних поділок на координатних осях); виконувати завдання на просторову уяву (пов'язаних із тривимірними об'єктами); зчитувати дані з таблиць і діаграм, а саме зі стовпчикових діаграм.

За отриманими результатами можна зробити висновок, що в більшості восьмикласників не сформовані навички виконання рівносильних перетворень алгебраїчних виразів (лише 26,5% правильно спростили вираз $2(x+y)-(2x-y)$ і лише 21,4% – вираз, аналогічний $\frac{5x}{27}+\frac{x}{9}+\frac{3}{2}$); студенти не змогли скористатися алгебраїчною символікою для опису математичних ситуацій (завдання «продовжити певну послідовність і записати її, наприклад, 100-й член», правильно виконали 45,4%студентів, а от записати n-й член цієї послідовності змогли лише 16,8%).

При розв'язуванні задач, де використовувались алгебраїчні моделі, результати були низькими, якщо умова формулювалася дещо незвично, або якщо розв'язування вимагало більше, ніж два кроки (вираз для обчислення периметра трикутника за малюнком, на якому вказано довжини всіх його сторін не в числах, а через певний параметр, правильно записали лише 37,7% студентів; лише 11% школярів знайшли правильний розв'язок такої задачі: «Іван знає, що вартість ручки на 1 зед вища за вартість олівця. Його товариш придбав 2 ручки та 3 олівці за 17 зедів. Скільки заплатить Іван за 1 ручку та 2 олівці? Запишіть рівняння).

Завдання на обчислення кута трикутника за двома відомими кутами виконали 31,7% студентів, а 60,4% – не змогли скористатися знанням того, що сума кутів трикутника дорівнює 180º. Це говорить про те, що значна частина студентів не знає, що сума кутів трикутника дорівнює 180º, або не вміє використати цей факт.

У більшості восьмикласників не сформовані вміння виконувати елементарне моделювання. Завдання на визначення площі прямокутника за розмірами його сторін, якщо їх задано не числовими значеннями, а через буквені вирази, виконали 48,8% студентів, а периметр квадрата за значенням його площі визначили тільки 28,6%.

Проблемними для школярів стають завдання, де вимагається застосувати вміння виділити в малюнку певні частини фігури. Правильно визначити площу частини прямокутника із заданими сторонами, що утворилася в результаті відтинання від нього прямокутного трикутника (усі розміри вказано на малюнку), змогли лише 25,2% студентів. Задачу на два логічні кроки, що полягає в обчисленні площі трикутника із застосуванням теореми Піфагора, розв'язали 18,9% студентів. Вибрати серед поданих фігур ту, яка має вісь симетрії, змогли лише 27,9% студентів. Завдання на обчислення площі ділянки, що складається з двох простих фігур заданих розмірів, виконали лише 31,4% студентів.

У розв'язуванні, яке передбачає інтерпретацію даних – складання висновків, прогнозів, оцінювання значень величин між точками тощо, результати українських восьмикласників найнижчі (завдання, в умові якого містилася таблиця з інформацією про кількісний розподіл даних двох типів за класами і потрібно було вказати (обравши варіант відповіді) два класи, у яких співвідношення хлопчиків і дівчаток однакове, правильно розв'язали лише 43,8% студентів).

Завдання логічного характеру, в якому за заданим значенням середнього арифметичного (середня ціна товару) потрібно встановити, котре з чотирьох наведених тверджень, що в них використано словосполучення «хоча б один», «більшість» тощо, є правильним, виконали лише 12%. Із завданням, у якому необхідно було з'ясувати правильність трьох тверджень відповідно до таблиці (рейтингу), упоралися 11,8% студентів.

Завдання на обчислення медіанного значення даних правильно виконали лише 2,2%; на розуміння поняття ймовірності, коли потрібно було оцінити, яка подія імовірніша, або як зміниться ймовірність події, якщо зміниться множина значень випадкової величини (заберуть одну із цукерок), правильно відповіли близько 40% студентів, хоча поняття медіани і ймовірності не вивчається восьмикласниками.

З цього робимо висновок, що алгоритмічне вивчення геометрії не сприяє розвитку геометричної уяви школярів, а, навпаки, призводить до її згасання – дитина не намагається уявляти, а пригадує готові алгоритми. В нашій школі не вистачає завдань на застосування набутих знань на практиці.

За результатами виконання завдань TIMSS 2007 за змістовими доменами можна зробити висновок, що більшість українських студентів (приблизно 70%) виконують завдання традиційного для нашої школи формулювання, але не спроможні розв'язати елементарні математичні завдання в контексті повсякденного життя, використовувати здобуті знання в розв'язанні нестандартних завдань, вибудовувати міркування.

Увагу вчителів математики та авторів навчально-методичної літератури необхідно звернути на те, що період розвитку абстрактного мислення починається в 7-8 класі. Під час навчання необхідно спиратися на життєвий досвід студента та його практичну діяльність і, відштовхуючись від того, переходити до абстрагування.

Необхідно звернути увагу на елементарні геометричні задачі, у яких описуються життєві ситуації. Елементи стохастики краще засвоюються студентами під час виконання практичних завдань, в умовах яких описуються життєві ситуації. Саме в такому разі будуть формуватися математичні методи міркування, уміння використовувати знання з математики, а сама математика сприйматиметься студентами як частина культури.

Треба змістити акценти в навчанні зі знання фактів і використання навичок у знайомих ситуаціях на розвиток в студентів інтелектуальних умінь, пов’язаних із розв’язуванням творчих завдань, їх застосуванням до життєвих ситуацій. У навчальному процесі, спираючись на приклади завдань TIMSS, треба ширше застосовувати практично орієнтовані завдання, для розвитку здатності використовувати природничо-математичні знання в повсякденній практичній діяльності, підкреслювати єдність термінології в різних сферах науки, взаємозв’язки між поняттями та методами досліджень, використовуючи для цього можливості інтегрованих зв’язків [1,с. 81-110].

1.2. Історія розвитку принципу наочності в навчанні

Наочність з'явилася одночасно з виникненням у людини потреби передачі інформації про відсутній на даний момент предмет або явище. Про це говорять наскельні малюнки що дійшли до нас. Наочне навчання виникло, по всій видимості, ще до винайдення писемності. А в школах Стародавнього Єгипту, Стародавнього Риму, Стародавньої Греції воно знайшло широке застосування.

Розвиток усної та писемної мови, а з ними і розвиток абстрактного мислення, призвели до поширення методів наочного навчання, але на інтуїтивних, чисто зорових представленнях.

Основоположником принципу наочності, що дав його обґрунтування, вважають чеського педагога Я.А.Коменського (1592-1670), який розробив визначення наочності, яке називають «золоте правило дидактики».

Я.А.Коменський розумів наочність як чуттєвий компонент, який дозволяє за допомогою різних органів чуття отримати більш повну, достовірну інформацію про той об'єкт чи явище, які сприймаються людиною:« ... все, що тільки можна уявити для сприйняття почуттями, а саме : видиме - для сприйняття зором, чуте - слухом, запахи - нюхом, що можна вкусить - смаком, доступне дотику - шляхом дотику. Якщо будь-які предмети можна сприймати кількома відчуттями, нехай вони відразу схоплюються декількома почуттями»[9,с.56].

Чеський педагог рекомендував починати вчення з безпосереднього сприйняття предмета (явища) в натурі, а якщо такого предмета (явища) не було, то його слід було замінити картиною або копією його зображення.Я.А.Коменський вчив, що людина повинна отримувати знання шляхом власних спостережень, а не з чужих слів.

Головне місце в питанні наочності Я.А.Коменський відводив зору. Його підручник «Світ чуттєвих речей в картинках»[10] був першим, написаним з урахуванням принципу наочності (їм довго користувалися при викладанні мови).

Таким чином, Я.А. Коменський пов'язував наочність з чуттєвим пізнанням, а спостереження вважав основою отримання всякого знання.

І.Г. Песталоцці (1746-1827) вважав спостереження лише першим кроком для розвитку абстрактного мислення. Він дав більш глибоке обґрунтування наочності, встановив вищий основний принцип наочності абсолютною основою всякого пізнання.

І.Г.Песталоцці вважав, що наочність це засіб розвитку розумових здібностей дітей, засіб розвитку мовлення. На його думку, спостереження включає в себе три основних етапи: скільки предметів знаходиться перед дитиною,різних предметів; яка їхня форма; як називаються ці предмети[20,с.38].

На думку І.Г.Песталоцці, значення наочного навчання в тому, що воно допомагає розвивати мислення і мову, дозволяє поступово перейти від частини до цілого, а це і є суть навчання.

Німецькі педагоги І.Ф.Гербарт (1776-1841), А.Дистервег (1790 - 1886), розвиваючи вчення Я.А.Коменського, розробили методику наочного навчання, вимоги до використання вчителем наочного матеріалу на уроці:

1. не слід занадто довго демонструвати предмет;
2. демонстрація одного і того ж предмета стомлює студента, тому, на уроці повинні застосовуватися різні види наочності;
3. несвоєчасні паузи, сторонні предмети порушують вільне протікання апперцептивного механізму і розривають ряди уявлень, тобто вчитель, використовуючи наочний матеріал, повинен пам'ятати про механізм сприйняття, про цілісність, доцільності та методиці застосування наочних засобів;
4. йти поступово від простого до складного, підходити до наочного навчання творчо, не застосовувати формально «золоте правило дидактики».

І.Ф.Гербарт вважав, що перед безпосереднім вивченням якого-небудь об'єкта чи явища, перед безпосереднім спостереженням за ним, студентів слід ознайомити з предметом спостереження, показати, що слід виявити, тобто вдаватися до апперцепції, тобто І.Ф.Гербарт підійшов впритул до питання цільової установки, до створення визначеного фону, на якому будується наочне навчання .

Німецький педагог Ф.Фребель (1782-1852) розглядав наочність як споглядання і активність. Через споглядання за допомогою наглядних засобів формуються представлення і поняття, які потім повинні найти своє вираження через активність, через визначений вид діяльності:«Що дитина споглядає, нехай вона сама і робить своїми руками»[31,с.176]. Заслуга Ф.Фребеля заклечається в тому що він виділив активний компонент, компонент творчості в наочному навчанні. Говорячи про наочне навчання, всі педагоги того часу мали на увазі безпосереднє сприйняття органами чуття оточуючого світу, розробляли методику наочного навчання, але прямо, відкрито питання взаємозв’язку визначення наочності, категорії цілі і діяльності не ставилися.

Великий російський педагог К.Д.Ушинський (1824-1870) вважав, що наочність не можна зв'язувати тільки з зоровими відчуттями: «Дитина мислить формами, фарбами, звуками, відчуттями»[29,с.345]. К.Д.Ушинський визначав наочне навчання як навчання, побудоване на конкретних образах, безпосередньо сприйнятих дитиною, не дивлячись на те, чи сприймаються вони в процесі навчання під керівництвом вчителя чи в результаті самостійних споглядань. Одним з особливих і найважливіших видів наочності він вважав живу і образну мову. В процесі навчання вчитель може оживити свою розповідь,по-перше, наочністю, показуючи дітям сам предмет з тим, щоб вони, дивлячись на нього, могли не тільки згадати прочитане, але і доповнити його із безпосереднього споглядання;по-друге,різноманітністю і жвавістю питань.

Для К.Д.Ушинського наочність – найважливіший дидактичний принцип, на якому базується навчання, який обов'язково присутній в методах і прийомах навчання [30,с.167].

К.Д.Ушинський вважав, що наочність є засобом виховання мислення, вважав, що вправляти дитину в логічному матеріалі можна тільки на наочному конкретному предметі. Предмет повинен спочатку безпосередньо відображатися в душі дитини, а потім під керівництвом вчителя отримані відчуття формують поняття, а воно, в свою чергу, народжує думку, яка виражається за допомогою слова. Наочне навчання розвиває спостережливість, що сприяє розвитку розуму.

Особливе значення в наочному навчанні К.Д.Ушинський надавав зовнішньому опору:«Навчайте дитину яким-небудь п'яти незнайомих слів, і вона буде довго і марно мучитися над ними; але зв'яжіть з картинками 20 таких слів і дитина засвоїть їх на льоту. Ви пояснюєте дитині дуже просту думку, і він вас не розуміє;ви пояснюєте тій же дитині складну картину, і він вас розуміє швидко»[30,с.234].

У підході до наочного навчання К.Д.Ушинський ввів діяльнісний елемент:«Хто не помічав за собою, що в пам'яті нашій зберігаються з особливою точністю ті образи, які ми сприйняли самі за допомогою споглядання, і що до такої, що врізалася в нас картині ми легко і міцно прив'язуємо навіть абстрактні ідеї, які без того згладилися б швидко» [29,с.231], тобто в результаті внутрішніх дій з предметом відбувається засвоєння понять.

Отже, К.Д.Ушинський закликає йти від конкретного до абстрактного, від дії (практики) до теоретичного узагальнення. Він глибоко розумів значення наочного навчання:воно сприяє розвитку розумових здібностей, доступності викладу матеріалу, активності і самостійності в навчальній діяльності, систематизації отриманих знань, емоційного сприйняття матеріалу.

Російський педагог Н.Ф.Бунаков (1837-1904) розробляв методику наочного навчання в молодших класах: проводив спеціальні уроки наочного навчання, пов'язуючи їх з вивченням рідної мови, при чому не тільки в стінах школи, а й за її межами - під час екскурсій і прогулянок в ліс, у полі, місті. Н.Ф.Бунаков розробив цікаву тематику наочних бесід для початкової школи, де здійснювався принцип наступності. Пізніше він відмовився від спеціальних уроків наочного навчання, дійшовши висновку, що наочність повинна бути присутнім на кожному уроці. Велике значення він придбав виготовленню наочних посібників самими студентами; на його думку робота в саду і на городі складають необхідні умови накопичення наочного матеріалу для бесід і вправ.

Наочність Н.Ф.Бунаков вважав засобом зв'язку навчання з реальним життям, засобом придбання життєво необхідних знань, пов'язував поняття наочності з елементами діяльності.

Російський педагог і психолог П.Ф.Каптерев (1849-1922) писав:«Якщо навчання має ґрунтуватися на природному ході розвитку людини, то воно повинно починатися з того ж, з чого починає і природа - пробуджувати чуттєвий розум людини і поступово приводити його до відокремлення. Наочне навчання є єдино правильний і природній метод навчання,цілком відповідаючим розвитку окремих особистостей» [8,с.124]. Підтримуючи погляд К.Д.Ушинського, П.Ф.Каптерев вважав, що наочне навчання йде від конкретного до відокремленого, абстрактному наочність не притаманна. Він першим поставив питання: що вважати наочним навчання?. Наочне навчання П.Ф.Каптерев пов'язував з елементарним і діяльністним. Досліджуваний матеріал розкладається на елементи, які при послідовному вивченні складаються в поєднання, потім у складні сукупності. Як і Ф.Фребель, П.Ф.Каптерев вважав, що навчання наочне тоді, коли воно включає в себе дію, тобто наглядне таке навчання, при якому учень може уявити засвоюваний матеріал у вигляді моделі , малюнка, аплікації і т.д. Він розглядав навчання як взаємопов'язану діяльність учителя й студента: з одного боку, діяльність вчителя, з іншого - внутрішня діяльність студента.

Російський педагог В.П.Вахтеров (1853-1924) також вважав наглядним таке навчання, яке включає в себе елемент моторної діяльності людини, саме тому він багато часу приділяв малюванню, ліпленню, аплікації, але це спричинило за собою скорочення обсягу досліджуваного матеріалу і зіграло негативну роль в навчанні. Термін «наочне навчання» пропонував замінити на «предметне навчання»,яке було розраховане на опору, на всі зовнішні почуття. Діти ніколи не задовольняються одним зором. Їм потрібно обмацати предмет, треба постукати, щоб дізнатися, як він звучить, треба підняти його, щоб дізнатися, чи він важкий , треба підкинути його, щоб дізнатися, розіб'ється він чи ні. Тому слова «наочне навчання» не вірно виражають те, що так звичайно називають. Вірніше буде сказати «предметний метод навчання» [2, с.226].

Таким чином, вчені-педагоги минулого пов'язували наочне навчання з конкретно сприйманим об'єктом або явищем,що діяв на органи чуття; вони поставили проблему наочного навчання; обґрунтували значення наочного навчання (К.Д.Ушинський); розробляли методику його застосування в школі, поставили питання про зв'язок діяльності з наочним навчанням (включення дії в навчання).

Однак вони вважали, що властивість наочності притаманне тільки конкретному, а абстрактні поняття не можна пов'язувати з поняттям наочності. Розробляюча методика застосування принципу наочності стосувалася в основному початкової школи, уроків рідної мови, читання, не був виявлений компонентний склад наочного навчання .

Класичного розуміння наочності як опори на чуттєвий компонент сприйняття, актуальної різноманітності її видів недостатньо для реалізації процесу навчання математики. Специфіка внутрішньої структури самих математичних об'єктів і знаково-символічної навчальної діяльності з їх засвоєнню, що підсилюється математизація наук вимагають нового погляду на принцип наочності, більш пильного та ефективного використання в його реалізації досягнень психології та фізіології людини.

1.3. Сучасні підходи до поняття наочного навчання

В даний час в психолого-педагогічної і методичної літератури відзначається різноманітність трактувань наочного навчання, наочності, видів наочності, класифікацій засобів наочності.

У науковій літературі і шкільній практиці слово «наочність» вживається в трьох значеннях. По-перше,воно означає деякий об'єкт (засіб наочності), по-друге, деяка властивість (наочність реальних предметів, явищ, мислення);по-третє, певну діяльність людини (сприйняття засобів наочності, використання їх). У зв'язку з багатозначністю терміна існують різні його визначення.

У Педагогічному словнику дається таке визначення:«Наочність - дидактичний принцип, згідно з яким навчання будується на конкретних образах, безпосередньо сприймаючими навчаючими»[3,с.230].

Е.Г.Мінгазов зазначає, що наочність не є вузько дидактичною категорією, має загально гносеологічне значення, і пропонує розглядати два ступені наочності: конкретну і абстрактну. Під конкретною наочністю він розуміє наочність на рівні явища; вона полягає в живому спогляданні реальних об'єктів, їх опосередкованому прояві і в вираженні сутності явища, загального в окремому, абстрактного в конкретному. Абстрактна наочність - це наочність на рівні сутності, загального ; коли мова йдеться про неї, то вже немає звернення до конкретного, окремого. Вона властива не реальному об'єкту, а логічному знанню, характеризує його форму вираження і виражається в такому значенні при якому легко схоплюються головні його особливості. Головне зараз - пізнання двох форм наочності: споглядальної і практичної. Суть практичної форми наочності - в спостережливості, сприйнятті ходу і результатів практичних дій. Говорячи про діалектичний шлях пізнання істини і про наочність, Е.Г.Мінгазов робить висновок, що наочність властива всім трьом ступеням, рівням пізнання.[11,с.28]

Наочність, розглянута на рівні абстрактного, дає можливість говорити про наочне навчання не тільки в молодших класах, а й у викладанні математик , фізики, хімії в старших класах школи, у вузі. Однак автор не дав чіткої характеристики наочного навчання, як і компонентів, що визначають його суть.

У ряді інших психологічних досліджень (Н.А.Менчинскої, П.Я.Гальперина, Т.В.Кудрявцева, Л.В.Занкова та ін) наочність розглядається на рівні абстрактного і в процесі практичної діяльності.

З.І.Калмикова стверджує, що вища форма наочності - практична дія з предметом. Практична форма наочності пов'язана, на її думку, не тільки з натуральними об'єктами(природними, побутовими, виробничими), діями з ними, але й передбачає виконання студентами дій з предметами, що їх замінюють (кресленнями, схемами, графіками, малюнками). До практичної форми наочності З.І.Калмикова відносить дії з цими засобами наочності, доступні спостереженню, а також розумовий експеримент, оскільки він передбачає оперування наочними образами.

Отже, наочність включає в себе діяльнісний компонент, тобто поняття наочного навчання тісно пов'язане з поняттям діяльності як практичної, безпосередньо з об'єктом або замінює його предметом, так і розумової.

Інша група вчених пов'язує поняття наочності з поняттям образу. Наочність у навчанні трактується як використання чуттєво-наочних образів об'єктивної реальності, і утворюваних при безпосередньому сприйнятті,і створених раніше для досягнення результату пізнання - знання.

Л.Н. Нуридинов розрізняє два види образу. У першу групу входять образи чуттєво - наочні, які безпосередньо відбивають реальні об'єкти. До другої групи він відніс раціональні образи, що відображають в абстрактній формі найбільш загальні, істотні зв'язки і сторони об'єктивного світу, недоступні безпосередньому чуттєвому сприйняттю. Оскільки поняття образ і наочність нерозривно пов'язані, він виділяє два ступені наочності: чуттєву і раціональну. Раціональна наочність - дидактичний засіб, що представляє в чуттєво-конкретній формі теоретичне поняття; за допомогою цього засобу студенти розвивають творчу активність, логічне мислення, набувають навички пізнавальної самостійності , формують творчі поняття.[12,с.36]

Л.Н.Нуридинов не дає чіткого визначення наочності в навчанні, поняття наочного навчання, але виділяє лінію створення чуттєвих уявлень про досліджуване явище.

Л. М.Фрідман вважає, що наочність - особлива властивість психологічних образів, створюваних у процесах сприйняття, пам'яті, мислення та уяви при пізнанні об'єктів навколишнього світу[34,с.87]. Але не всякий образ наочний. Ступінь наочності психічного образу залежить від того, наскільки зрозумілий і знайомий об'єкт, від індивідуальних особливостей людини. Зовнішньою умовою створення наочного образу є активна пізнавальна діяльність, направлена на створення наочного образу об'єкта. Пасивне спостереження за об'єктом (споглядання) не призводить до створення його наочного образу. Л.М.Фрідман дає таке формулювання: наочність - це розуміння і активність. В основу свого підходу до наочності він кладе цілеспрямовану діяльність в перцептивному плані, однак у визначенні наочності це не знайшло відображення. Термін «наочне навчання » він не вживає[33,с.66].

В.Г.Болтянський висуває свою формулу наочності: ізоморфізм плюс простота. Поняття наочності у нього нерозривно зв’язане з поняттям моделі.

Про наочність можна говорити тільки при застосуванні до другої моделі, якщо вона ізоморфна першої моделі і має простоту сприйняття. Ізоморфізм розуміється ним як ідентичність структур. Дві моделі ізоморфні якщо, відволікаючись від усіх властивостей цих моделей, не пов'язаних з переглянутих в них предикатів, ми можемо сказати , що ці моделі влаштовані абсолютно однаково. Поняття простоти не є постійним і не змінним,а залежить від індивідуальних і вікових особливостей людини, від її рівня знань і умінь, від її життєвого досвіду і постійно змінюється. Зі зміною поняття простоти змінюється і поняття наочності, тобто поняття наочності не є константою. Для однієї людини дана модель може бути наочною, а для іншої немає, це залежить від її простоти. Ми вважаємо, що наочність моделі тісно пов'язана з тією метою, яку виконує модель на даному етапі, в даному курсі.

В.Г.Болтянський спробував висловити математичною формулою поняття наочності, яке він тісно пов'язував з поняттям моделі. Він дав детальну характеристику засобів навчання, відзначаючи, що надзвичайно важливо, щоб використовувані в школі предмети навчального обладнання не лише допускали, а й стимулювали потрібну активність. В його роботах не простежуються чіткого зв'язку наочності, діяльності, мети, чуттєвого компонента, немає відповіді на питання, яке навчання математики являється наочним [1,с.125].

В.Е.Євдокимов характеризує наочність через максимальну вираженість чуттєвого моменту, а принцип наочності в навчанні розглядає як систематичну опору на наочні образи, що виникають в результаті використання моделей. Але чуттєві та наочні образи не збігаються повністю: в наочному образі фіксуються і закріплюються ті сторони досліджуваного об'єкта, на які спрямована пізнавальна діяльність і які мають для цієї діяльності певне значення. Ізоморфізм і простота - невід'ємні ознаки наочності навчального обладнання. Євдокимов пов'язує поняття наочного образу з пізнавальною діяльністю.

А.Н.Леонтьєв вважав, що наочність повинна служити зовнішньою опорою внутрішніх дій, скоєних студентами.

Отже, поняття наочності значно змінилося порівнянні з початковою. Зараз наочність розглядається не тільки на конкретному, але й на абстрактному рівні і в процесі діяльності. Однак єдиного підходу до поняття наочності не вироблено , визначення наочного навчання не дається , немає характеристики зі складових його компонентів, недостатньо досліджена специфіка наочного навчання математики .

Відзначимо три важливі моменти.

По-перше, наше дослідження з проблеми наочності в навчанні математики охоплює першу і необхідну ланку знання - формування уявлень, що виникають на основі відчуттів і сприймань. Як правило, подання відображає лише зовнішні ознаки і сторони предметів і явищ матеріального світу, не завжди розкриваючи їх справжню сутність.

Процес сприйняття (особливо при значних обсягах інформації, великій мірі її формалізації) припускає наявність вузлових, опорних, характерних, специфічних властивостей і якостей об'єкта сприйняття: прийомів діяльності , що відбивають окреме математичне знання , або організованого набору знань

(доказ теорем, розділ курсу математики у всьому різноманітті логічних взаємозв'язків , матеріал окремого уроку або лекції тощо). Тому актуальною є проблема такої організації процесу навчання математики, коли уявлення, що виникають мисленні студентів, відображають основні, суттєві, ключові сторони предметів і явищ, процесів, в тому числі за допомогою розумного моделювання математичного знання.

По-друге, процес моделювання, пошук стійких асоціацій, перевірка адекватності сприйняття припускають серйозне знання нейрофізіологічних механізмів сприйняття, вивчення етапів обробки стимулу: сенсорного аналізу, звірення з репертуаром пам’яті, прийняття рішення, використання законів психології сприйняття , серйозного вивчення особистості студентів. Тому не менш актуальна проблема психолого-педагогічного обґрунтування концепції наочного навчання математики, розширення психологічних компонентів сприйняття на основі діагностичних методик.

По-третє, відсутність одноманітності трактування принципу наочності в навчанні, слабке віддзеркалення специфіки математичної діяльності, відірваність від практики не дозволяють повною мірою , використовувати досягнення психолого-педагогічної науки. Діяльність вчителя в процесі викладання математики абстрактного характеру, складності та високого рівня побудови вивченого матеріалу передбачає конкретизацію принципів навчання у направлення їх системного використання. Таким чином, необхідно дати єдину трактовку наочного навчання і наочності в навчанні математики, розробити прийоми діяльності вчителя в процесі наочного навчання, дослідити специфіку наочності у викладанні математики, використовуючи позитивний досвід передових вчителів і вчених.

Оскільки завданням педагогічного процесу навчання математики є засвоєння результатів знаково-символічної діяльності студентами, представлених у вигляді моделей, схем, кодів, знаків, символів, заступників математичних об'єктів, то великого значення набувають:

1. організація змісту і форми, структури та обсягу знаково-символічних засобів, пов'язаних з урахуванням психологічних знаків сприйняття їх побудови, можливостей і закономірностей нейрофізіологічних механізмів пам'яті і мислення з метою посилення продуктивності сприйняття (обсяг, точність, повнота, швидкість, емоційна забарвленість) і пам'яті (обсяг, точність запам'ятовування і відтворення, міцність і точність запам'ятовування);
2. оперування пізнавальною діяльністю та її організація зі знаково-символічними засобами , пояснення з метою розуміння і свідомого оперування математичними об'єктами .

Ці завдання орієнтують розгляд наочності в процесі навчання математики в тісному зв'язку зі знаково-символічної діяльності в направленні оптимального врахування психологічних і нейрофізіологічних закономірностей сприйняття, мислення і пам’яті.

1.4. Основи сприйняття математичних об'єктів

В основі навчання завжди лежить сприйняття спостережуваних об'єктів. Чому б не навчати, яким би способом не навчати, ми перш за все звертаємося до органів почуттів студента, які є її «вікнами в світ». Слухає чи учень, читає, спостерігає- насамперед у роботу включаються його відчуття і сприйняття і тільки потім – запам'ятовування, встановлення асоціацій, осмислення, творча переробка інформації і т.д. Якщо педагог хоче впливати на пізнавальну діяльність студента, він звертається спочатку до його органів почуттів, особливо зору і слуху , так як за допомогою цих аналізаторів людина отримує більшу частину інформації.

Сприйняття включає в себе усвідомлення предметів, засноване на залучення знову одержуваної інформації в систему вже наявних знань. Об'єктивною основою сприйняття, результатом якого є цілісний образ, виступає єдність різних сторін властивостей об'єкта, що впливає як комплексний подразник. Термін «сприйняття» має два значення:1)образ предмета, який виникає в результаті процесу сприйняття;2)сам цей процес, який є активним відображенням дійсності в чуттєвому образі. Чуттєві образи прийнято ділити на первинні (образи сприйняття), що виникають в результаті безпосередньої взаємодії суб'єкта з об'єктом, і вторинні (образи представлення), що з'являються на основі слідів в пам'яті суб'єкта і способу уяви.

У психології встановлено загальні властивості образу сприйняття (константність, цілісність, структурність, предметність) і властивості образу представлення (узагальненість, фрагментарність, виборність, схематичність та ін.).

Саме на основі сприйняття можлива діяльність інших психічних процесів - пам'яті, мислення,уяви. Сприйняття як процес формування та функціонування чуттєвого способу дійсності є складне поєднання різних характеристик - функціональних, операційних та мотиваційних. Сприйняття являє собою відображення предметів і явищ в сукупності їх властивостей і частин при безпосередньому впливі на органи чуття. Хоча інформація, яку ми отримуємо від наших органів чуття, розглядається, аналізується, піддається експериментальній перевірці і, більше того, підкріплюється такими потужними допоміжними засобами, як оптичні прибори, персональні комп'ютери, найтонші вимірювальні прилади, отримані з їх допомогою знання можуть вважатися достовірним лише в певних межах [22,с.56].

Дія технічних аналогів органів чуття засноване на моделюванні операцій, виконуваних органами почуттів живих організмів, в тому числі людини. Так, в технічній системі перцептивного розпізнавання вхідним елементів є датчик, який перетворює фізичну величину, що характеризує спостерігаючий об'єкт реального світу, в іншу величину, призначену для сприйняття її обробної системи. З цієї точки зору датчик можна розглядати як узгоджений фільтр, тобто його характеристика повинна бути узгоджена з фізичною величиною, отримуючий на його вхід. На наступному етапі розпізнавання образу здійснюється процедура, що дозволяє розбивати безліч об'єктів на класи.

Для характеристики елементів множини можуть бути використані різні способи: кількісний, імовірнісний, двійковий. Процедура класифікації полягає в тому, щоб приписати кожен представлений об'єкт того чи іншого класу. Заключний етап - ідентифікація об'єкта.

Питання розпізнавання образів нас цікавлять з точки зору організації навчальної діяльності та оптимального сприйняття, скільки проблема адекватності сприйняття виникає в процесі навчання. Зауважимо, що всюди, де ступінь абстрагування досить висока, звернення до чуттєвого сприйняття дає, як правило, неглибокий поверхневий погляд на об'єкт сприйняття, мало власного розуміння сутності явища.

1.5. Інформаційний підхід в теорії наочного навчання

У процесі сприйняття відбувається взаємодія інформації, зберігаюча в пам'яті, і свіжих слідів, отриманих в процесі відокремлення від того ж сприйманого об'єкта. Індивідуальний досвід зафіксований в пам'яті, робить величезний вплив на процес і результат сприйняття.

Для теорій навчання та наукової організації навчального процесу істотним є оптимізація обсягу сприйняття і руху інформації.

У навчальному процесі велике значення має вираз утримуючої інформації через певну знакову систему. Ступінь сприйняття навчальної інформації пропорційна ступеню автоматизованого застосування її кодуючих засобів. Навчальна інформація передається за допомогою умовних сигналів, розташованих у певній послідовності. Всі параметри цих сигналів знаходяться в ізоморфічній відповідності до змісту і ступенем абстрагування інформації. Порядок і форма встановлення такого відповідно являють собою кодування.

Оптимальне кодування інформації досягається при чіткому вираженні змісту досить високою інформативною ємності повідомлення.

Інформація, що повідомляється студенту, або перетворюється в знання, або ні. Залежить це насамперед від того, наскільки підготовлені дидактичні умови такого перетворення .

Уявімо деякі умови оптимальної передачі навчальної інформації. Необхідно чітко визначити мету повідомлення нового матеріалу; обґрунтувати форму і засоби її повідомлення; оцінити можливість сприйняття інформації за її обсягом, доступності сприймання; дидактично і психологічно підготувати студентів сприйняттю інформації для переробки її на знання. Крім того повідомлення інформації без належного мотивування, збуджений інтересу до неї навіть при високій якості її утримання не забезпечить бажаної ефективності навчання: учень може бути неготовим до сприйняття потрібного матеріалу [25,с.78].

Навчальний процес пов'язаний не тільки з кодуванням, а й перекодуванням, тобто з опосередкованою переоцінкою змісту, значення, цінності інформації; можна сказати, що перекодування є засобом переходу до більш високого рівня пізнання.

Головне в навчальної інформації - її змістовна, семантична сторона, оцінка конкретних цілей і завдань даного конкретного розділу предмета вивчення. Ця сторона інформації в процесі навчання завжди вимагає встановлення зв'язку і відносин між формою кодування, думками, діями. За кожним символом інформації має стояти його реальне значення, сенс пізнання.

З.І.Калмикова зазначає, що закріплення в довготривалої пам'яті відносно невеликого обсягу інформації , включають в себе найбільш загальне і значиме для подальшого оперування вмістом знову засвоюваних знань, сприяє «накладень» цієї інформації на наочному представлені «опори» - умовні знаки, символи, що відображають не тільки окремі елементи цих знань, а й взаємозв'язок між ними.

Математичні уявлення в студентів виникають в навчальному процесі не як формальні копії вихідного носія інформації, а як якість моделі, що трансформуються в певні психічні образи. Спираючись на загальний опис поняття «образ» в психології, можна трактувати психічний образ, виникає у свідомості студента математики, як суб'єктивний феномен, що формується в процесі предметно-практичної, чуттєвої і розумової активності і представляє собою результат цілісної, інтегрального відображення математичних знань. У процесі навчання психічні образи виконують різні функції: уточнення, систематизації, узагальнення сприймання інформації, створення цілісної багаторівневої системи уявлень про предмет вивчення.[26,с.228]

З урахуванням домінування зорового аналізатора в сприйнятті людиною навчальної інформації можна стверджувати, що образи , засновані на наочності, можуть досить ефективно сприяти формуванню уявлень тих, кого навчають про різних математичних об'єктах, у тому числі про досить абстрактних , далеких від звичних і буденних .

1.6. Педагогічний процес наочно-модельного навчання математики

У процесі формування математичних уявлень істотну роль грає специфіка математичних знань , умінь , навичок і методів. Математика оперує об'єктами , вже абстрагованих від дійсного світу і, як правило, узагальнюючим різноманітним реальним та ідеальних ситуацій: інтеграл, як узагальнення і абстрагування понять довжини, площі, обсягу, але в той же час абсолютно неперервна функція ; похідна як узагальнення і абстрагування понять дотичної , швидкості, щільності, але в той же час змінна площа, яка знаходиться під безперервною кривої.

Підвищення ефективності застосування наочності в навчанні: математики в школі досягається на шляху відшукання й практичного застосування активних методів формування та органів навчальної пізнавальної діяльності. При цьому слід виявити основні характерні риси досліджуваного об'єкта, виходячи з якого дати визначення наочно-модельного навчання математики, вказати засоби їх реалізації в процесі навчальної діяльності.

У процесі навчання математиці важливо до представлення об'єктів вивчення попередньо провести підготовку студента до сприйняття, чітко поставити мету, потім не тільки представити обсяг по вивченню, а й організувати діяльність якого навчають при роботі з об'єктом адекватно знаково-символічним засобам представлення математичних знань.

Наочно-модельне навчання математики - це процес формування адекватної категорії мети стійкого результату внутрішніх дій студентів при безпосередньому сприйнятті прийомів знаково-символічної діяльності з окремих математичних знань.

Необхідним моментом організації процесу і компонентом концепції наочно-модельного навчання математики є постановка дидактичної задачі (схеми). Реалізація дидактичної схеми здійснюється в процесі навчання, в процесі безпосереднього взаємозв'язку навчально - діяльністно- навчаючого , причому діяльність (в даному випадку процес навчання) розуміється , згідно А.Н.Леонтьєву, як система, що має свою будову , свої внутрішні переходи і перетворення, свій розвиток.

Істотну роль у побудові концепції наочно-модельного навчання відіграє принцип єдності діяльності і психіки. Дослідження П.Жане , П.П.Блонского , Л.С.Виготського, Л.С.Рубінштейна , А.Н.Леонтьева та ін привели до розуміння пам'яті як предмета дослідження, а діяльність - як пояснювального принципу її розвитку та функціонування. Простежимо генезис зв'язків процесів пам'яті з мисленням, сприйняттям, вольовими і емоційно - мотиваційними станами особистості.

А.А.Смирнов вказував, що роль - розуміння при запам'ятовуванні відома, і підкреслював зв'язок запам'ятовування і процесів мислення, які в цьому випадку виступають як засіб більш глибокого і виразного розуміння матеріалу. Про важливість ролі думки розумової активності для ефективності запам'ятовування писали у своїх роботах П.І.ЗІнченко, А.Н.Шличкова.

Поняття розуміння тісно пов'язане з поняттям пояснення в навчальній діяльності. За думки М.А.Даниловим, пояснення нового навчального матеріалу - це розкриття вчителем суспільних властивостей досліджуваного об'єкта , його внутрішньої структури та зв'язків з іншими об'єктами, причому пояснення досягає мети , якщо студенти ясно усвідомлюють пізнавальні завдання, що викликають їх активне ставлення до нового знання, так що ціле покладання і знаково-символічна діяльність виступають не тільки як компоненти концепції наочно-модельного навчання, але і як необхідні елементи пояснення нового навчального матеріалу [16,с.171].

Неважко зрозуміти глибокий генетичний зв'язок між концепціями пояснення і наочно-модельного навчання математики. Але є ще тотожні поняття: категорія «пояснення» більш широка ніж наочно - модельного навчання, хоча і те, і інше представляє собою діяльність в рамках навчального процесу (стосовно навчання математики). У категорії «пояснення» не обговорюється, не береться як системна якість такий компонентів процесу наочно-модельного навчання математики, як стійкість перцептивних образів і формованих слідів засвоєних знань. Цей аспект швидше конкретизує категорію пояснення посиленням методологічних складових процесу.

Процес пояснення так само, як і процес наочно - модельного навчання математики, повинен завершуватися розумінням (або адекватністю) результатів внутрішніх дій студентів апріорної моделі(схеми). Розуміти пояснення - це бачити сутність об'єкта в нероздільній єдності з конкретизацією цієї сутності.

У чому сутність розумових операцій, що призводять до розуміння? У коло факторів, що роблять вплив на цей феномен входять як фізіологічні, психологічні, так і педагогічні умови, що забезпечують розуміння сутності досліджуваних математичних об'єктів. Основу розуміння становить зіставлення структури засвоєних знань з формованим перцептивним образом. Нам здається, що стосовно до навчання математики можна застосувати таке визначення.

Розуміння - психічний процес в мисленні студента, характеризується адекватністю суті досліджуваного математичного об'єкта і перцептивного образу , який формується у процесі навчання за допомогою стійких засвоєних знань і актуалізації пізнавальної діяльності .

Це зіставлення може бути миттєвим актом (інтуїтивне розуміння) або розумовим процесом, триваючим на різних проміжках часу (від декількох хвилин до декількох років), причому миттєвим актом завершується як розгорнуте розуміння, так і інтуїтивне розуміння цілісного математичного об'єкта [16,с.221].

Наступний компонент концепції наочно-модельного навчання–знаково-символічна діяльність, в тому числі модельність, побудова моделі і її засвоєння. Наочно-модельне навчання - це процес створення добре засвоюваних моделей, схем , кодів , зміщень з опорою на нейрофізіологічні і психологічні механізми сприйняття. Моделювання є одним з складу - компонентів наочно-модельного навчання. У процесі навчання ми формулюємо модель істотних ознак об'єкта вивчений адекватних поставленої мети. Таким чином, наочно - модельне навчання включає в себе як побудова моделі (схеми, коду, заступник), так і формування адекватного результату внутрішніх дій студентів у процесі навчальної діяльності. Перевага віддається «наочній» моделі як опорі на асоціації, прості геометричні форми, психологічні закони сприйняття і нейрофізіологічні механізми пам'яті. Модель повинна відображати суть поняття, форми або методу дослідження.

У підсумку можна дати наступний компонентний склад концепції наглядно-модельного навчання математики як педагогічного процесу формування нових математичних знань:

1. ціле покладання (теоретичний, практичний, методичний модуль);
2. представлення моделі цілісного математичного об'єкта;
3. оперування знаково-символічними засобами (матеріальні і матеріалізовані, перцептивними і ідеальними);
4. знаково-символічна діяльність (моделювання, схема кодування, заміщення) та управління;
5. створення умов стійкості перцептивного образу і представлення.
6. адекватність апріорної моделі (коду, схеми, заступника) результату внутрішніх дій студента (перцептивному образу).

Таким чином, визначена специфіка і основні утримувальні компоненти концепції наглядно-модельного навчання математики як фактора цілісного педагогічного процесу професійно-предметної підготовки вчителя математики в педагогічному вузі.

Навчальне обладнання математики доцільно групувати на такі а) креслярські та вимірювальні прилади; б) демонстраційні прилади і моделі; в) друковані засоби навчання; г) набори для самостійних робіт; д) екранні і екранно-звукові засоби навчання.

Переважна більшість такого обладнання, зосередженого в кабінетах математики, це саморобні зразки, бо промисловість майже не випускає зараз навчально-наочних посібників з математики. Схарактеризуємо окремі види навчально-наочних посібників, які використовуються в навчанні стереометрії.

1.7. Лекційно-практична система навчання математики в навчальних закладах

Проблема підвищення ефективності уроку, вдосконалення різних форм його проведення постійно в центрі уваги викладачів математики навчальних закладів.

Найбільш ефективною формою навчання елементарної математики в навчальних закладах є використання лекційно-практичної системи навчання з використанням опорних конспектів на поєднання її з рейтинговою системою контролю. Застосування лекційно-практичної системи дає змогу за рахунок укрупнення дидактичних одиниць під час вивчення теорії та вдосконалення форм і методів перевірки знань студентів вивільнити час на навчання розв’язуванню задач. Використання даної системи навчання дозволяє підвищувати роль самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів на заняттях, зменшити кількість домашніх завдань, забезпечити диференційований підхід до студентів в процесі навчання, покращити контроль знань, умінь і навичок. Навчання за цією системою виробляє в студентів уміння слухати й конспектувати лекції, виділити головне, працювати з додатковою літературою, самостійно розв’язувати задачі в процесі підготовки до семінарів та заліків. Застосування цієї системи завдяки більш раціональному використанню навчального часу, дозволяє забезпечувати професійну направленість при вивченні елементарної математики.

Як відомо, застосування лекційно-практичної системи навчання передбачає подачу матеріалу “великими порціями” і досить високий темп навчання через спеціалізацію уроків, що до неї входить та використання опорних конспектів.

При вивченні тем курсу елементарної математики ми використовуємо наступні типи уроків:

1) підготовчі уроки;
2) уроки засвоєння нових знань (уроки-лекції);
3) уроки застосування знань, формування вмінь та навичок (уроки-практикуми);
4) уроки – узагальнення і систематизації знань (уроки - семінари);
5) уроки консультації і корекції знань;
6) контрольно-залікові уроки.

Мета підготовчих уроків – не просто відтворити в пам’яті раніше набуті знання (активізувати знання), що є опорними для вивчення нового матеріалу, а допомогти по-новому осмислити їх. На цих уроках ми розкриваємо перед студентами мету вивчення наступної теми, вказавши її місце в шкільному курсі елементарної математики та порядок розгляду навчального матеріалу, звернувши увагу на важливість даного матеріалу для математичного розвитку та майбутньої професійної діяльності. На таких уроках формуються відповідні навички і вміння. Такій роботі часом достатньо приділити 20-25 хвилин уроку перед вивченням нового матеріалу, а часом цілий урок.

Підготовчим уроком може передувати самостійна робота студентів по повторенню необхідних відомостей, а можливо повторення з допомогою “активного пригадування” (повторення без попередньої самостійної роботи).

Таким чином під час підготовчого уроку настановчої лекції викладач ставить перед собою наступні завдання:

а) викликати у студентів інтерес до даної теми чи розділу;

б) дати загальний, але повний зміст теми чи розділу;

в) показати взаємозв’язок даної теми з іншими, які вже вивчались чи ще будуть вивчатись;

г) показати як в житті і практичній роботі можна застосувати ті знання, які будуть отримані в результаті вивчення даної теми;

д) намітити головні завдання, які стоять перед студентами, тобто пояснити, якими навичками, знаннями і уміннями їм слід оволодіти;

ж) дати методичні рекомендації для самостійного вивчення тем з обов’язковим переліком різних літературних джерел (назва і автор підручника, посібника, рік видання).

Одразу зазначимо, що тривалість настановчої лекції визначає сам викладач, залежно від змісту теми, її об’єму, важливості. Під час настановчої лекції студенти не ведуть конспектів. Складають їх самостійно на наступних заняттях, вникаючи в зміст прочитаного.

Самостійна робота студентів планується в години, що залишились із загальної кількості годин, відведених для даної теми навчальним планом. Роль викладача під час самостійного вивчення студентами матеріалу зводиться до ролі консультанта. Перевірка знань студентів проходить кілька етапів:

1. Ознайомлення викладача з конспектом студента з метою вивчення характеру мислення, особливостей його роботи.

2. Виставлення атестації до самостійного вивчення теми студент повинен зробити для себе вибір: чи зробити менший об’єм роботи і отримати бажану “3”, чи докласти більше зусиль, щоб отримати високий бал.

Отже, після оглядово-наставчої лекції розпочинається блочне вивчення теми. І закінчується вивчення теми контрольно-заліковими уроками. Для цього широко практикується самооцінювання знань, яким він оволодів під час вивчення теми.

Таким чином на настановчій лекції був визначений обсяг роботи. Кожен з студентів знає з якими знаннями йому потрібно прийти до контрольно-залікових уроків.

Як правило, запитання до заліку ми подаємо по кожній темі елементарної математики. Проводячи уроки вивчення нового матеріалу (уроки-лекції) виклад матеріалу необхідно проводити з використанням проблемно-пошукових методів. Як відомо, в сучасних умовах при роботі над темою недостатньо надати студентам лише певний запис знань, а й необхідно досягти високого рівня розвитку їх мислення, активного пошуку розв’язування математичних та життєвих проблем. Тому необхідно не зразу формулювати теорему, або яке-небудь інше твердження, а створювати проблемну ситуацію, яка викликає з одного боку зацікавленість, а з другого, - затруднення, в результаті чого в студентів виникає потреба в знаннях.

Взагалі при проблемному методі викладки згідно виділяємо такі етапи:

1) створення проблемної ситуації;
2) висунення гіпотез (догадки студентів);
3) обговорення гіпотез;
4) розв’язування проблеми;
5) висновки.

Створення проблемних ситуацій і формулювання проблем, що з них випливають, є як правило, перехідним моментом від першого етапу роботи актуалізації знань до наступного вивчення нового матеріалу або розв’язування вправ і задач.

Використання опорних конспектів дозволяє значно швидше і ефективніше викласти студентам навчальний матеріал (студенти не пишуть, а тільки слухають, тому що у кожного з них перед очима наочно систематизована уява цього матеріалу); як наочна системно-структурована схема вона проста для запам’ятовування;

Здійснити систематичний ефективний контроль засвоєння навчального матеріалу як всього опорного конспекту, так і окремих його фрагментів;

Комплексність опорного конспекту, таблиці , їх наочність дозволяє викладачу досить просто організувати на протязі заняття повернення до окремих фрагментів навчального матеріалу, тобто, на практиці реалізувати принцип багатоваріантного повторення як на етапі викладення інформації, так і під час контролю.

При цьому хочемо наголосити, що ми використовуємо саме опорні конспекти, а не опорні сигнали. Ми притримуємось думки Л.М.Фрідмана [43, 44, 45, 46], що використання конспектів було саме тим позитивним моментом, який дозволяє будувати уявлення про найбільш суттєві елементи змісту тієї чи іншої теми.

Ефективну роботу студентів під час уроку-лекції забезпечує передусім чітка його побудова. Представляємо структуру заняття:

1) організаційна частина, відтворення та корекція опорних знань, виклад нового матеріалу;

2) повторення, узагальнення та систематизація знань, заключна частина.

Така структура дає змогу зорієнтувати студентів на навчально-пізнавальну діяльність, сприяє встановленню зв'язків з попереднім матеріалом, якісному засвоєнню та осмисленню нового.

Організаційний етап допомагає зосередити увагу студентів. Ознайомлюємо їх з темою лекції, її метою, основними питаннями. План заздалегідь пишеться на дошці, плакаті або за допомогою мультимедійної дошки. Звичайно він повинен включати не більше 3-5 питань, бо, як показує практика, надмірне деталізування перешкоджає виявленню та усвідомленню головних думок лекції. Орієнтації класу на наступну роботу великою мірою сприяє епіграф чи девіз.

На етапі відтворення і корекції опорних знань поновлюються та уточнюються знання, необхідні для засвоєння нової інформації. Залежно від теми лекції іноді проводиться письмове опитування (5-7 хв.) за допомогою карток тестового контролю.

Лекційний виклад матеріалу – складна двостороння діяльність студентів та викладача. При цьому не тільки повідомляється нова інформація, але й діти працюють над проблемою, вчаться осмислювати основні положення, глибоко й усвідомлено засвоюють почуте.

Особливо цікаво проходять уроки-лекції, в яких використовується проблемний підхід до викладання. Спочатку робиться короткий огляд основних питань теми, потім детально розглядається зміст матеріалу і, нарешті, повторюється головне. Широко залучаються засоби наочності, особливо ті, в яких краще, сильніше підкреслені важливі моменти нового матеріалу.

Залежно від підготовки групи та характеру матеріалу застосовується дедуктивний або індуктивний підхід до побудови окремих частин лекції. Індуктивний – тоді, коли матеріал важкий або студенти погано підготовлені до його сприймання, а також на перших заняттях. Якщо група добре підготовлена, віддається перевага дедуктивному підходу, спираючись на вже відомий матеріал.

Повторення, узагальнення і систематизація знань проводиться різними способами. Наприклад, під час узагальнення студенти, слухаючи викладача, коротко занотовують головне у вигляді тез або конспектів, схем, таблиць.

В заключній частині уроку-лекції підсумовується зміст викладеного, студенти відповідають на запитання, іноді проводиться самостійна робота, пояснюється домашнє завдання. Останнє повинно диференціюватись, щоб студенти могли підготуватися до обговорення конкретних питань (у міру своїх здібностей, інтересу до предмета тощо).

Складовою частиною лекційно – практичної форми є проведення уроків семінарів. На підготовку до семінару необхідно виділити не менш двох тижнів. Студентам повідомляють тему семінару, основні питання теорії, за якими буде проведено опитування; вказують номери задач з підручника, методи розв’язування якими повинні оволодіти всі студенти; дають набір нестандартних вправ, у процесі розв’язування яких студенти повинні проявити елементи творчості. Студентам пропонують самим підібрати такі вправи і розповісти на семінарі про раціональні способи їх розв'язування. При підготовці до семінару викладач рекомендує студентам використовувати додаткову літературу, довідники, науково-популярні журнали, книжки.

Найбільшу віддачу дають семінари, присвячені узагальненню й систематизації знань, умінь і навичок студентів з великої за обсягом теми. План підготовки до семінару повідомляється на початку вивчення теми і студенти мають достатньо часу, щоб підготуватися до нього. У планах підготовки більшості семінарів доцільно передбачити такі завдання: знати (означення, алгоритми), вміти (розв'язувати конкретні вправи), підготувати реферати, виготовити прилади, таблиці, навести приклади задач практичного характеру. Обов'язковими для всіх є два перших завдання. З решти обирається одне – за бажанням самого студента або рекомендацією викладача.

При підготовці до семінарів створюються групи з 3-4 студентів, які опрацьовують одне питання, після чого визначають доповідача та співдоповідача. Іноді окремі студенти опрацьовують додаткові складні питання і виступають з короткими повідомленнями.

Найдоцільнішою є така структура уроку – семінару:

1) розминка, під час якої розв'язуються усні вправи, що вимагають глибокого розуміння теорії (ця частина заняття містить елементи змагання, гри);
2) невеликі реферати (історичний екскурс);
3) серйозне математичне повідомлення (теоретичного характеру або цікава складна задача);
4) обговорення виготовлених до семінару приладів.

У семінарі повинні брати активну участь студенти всієї групи. Тому їх слід заохочувати до постановки запитань доповідачеві, висловлення зауважень, доповнень, пропозицій, уточнень, залучати до оцінювання роботи товаришів.

Зупинимось на деяких особливостях уроків контролю і корекції знань. Перш за все відзначимо, що на контрольно-залікових уроках здійснюється їх систематизація, рівень засвоєння математичних понять, а також уміння і навички, яких набули студенти в процесі навчання. Заліки (модулі) проводяться як в усній, так і в письмовій формі. На заліку кожна група студентів отримує своє індивідуальне завдання розраховане на їхні можливості. Список питань до заліку подається на вступній лекції при вивченні кожного модуля.

Своєчасні консультації по виконанню домашнього завдання попереджують помилки студентів, позбавляють їх некваліфікаційної допомоги і сприяють формуванню позитивного відношення до навчання та виконання домашніх завдань.

Ефективною умовою навчання є диференційований підхід до знань конкретного студента. Перед кожним студентом, крім загальної мети, має стояти конкретна, доступна мета, але така, що “кличе вперед”. Цьому сприяє модульно-рейтингова система контролю. Використання даної системи контролю на різних етапах навчального процесу дозволяє перевірити знання, уміння і навички студентів.

Перевірка знань навиків та вмінь в кінці вивченої теми допомагає виявити оволодіння системою знань, готовність студентів до успішного застосування цих знань в життєвих ситуаціях. Ця перевірка здійснюється на окремих уроках, залікових заняттях, екзаменах.

Таким чином, лекційно-практична система навчання з використанням опорних конспектів з рейтинговим контролем знань, як показує практика роботи при елементарної математики в навчальних закладах виступають як єдина технологія навчання, що сприяє підвищенню якості знань і умінь майбутніх фахівців з обраної спеціальності.

1.8. Використання комп’ютерно - інформаційних технологій під час вивчення курсу елементарної математики у навчальних закладах

Майбутнє математичної освіти закладається сьогодні, насамперед впровадженням нових освітніх технологій у навчання математики з метою підвищення ефективності математичної діяльності засобами інформаційних технологій. Певною мірою ці сподівання пов'язуються з можливостями реалізовувати ідеї конструктивізму у навчанні математики. Формалізація ходу розв'язування задачі та передача його комп'ютеру для автоматичного виконання – провідна ідея цього процесу. Рівень сучасних інформаційних технологій спрощує цю складну задачу, дозволяючи зосереджуватися на змістовних сторонах цього процесу [34, с. 9-11].

Інформаційні технології відкривають нові можливості в навчанні математики, вони стають для студентів засобом пізнавальної діяльності: експериментування з метою перевірки своїх гіпотез, розв'язування задач, порівняння результатів з передбаченнями теорії [22] . Це відповідає головним напрямам оновлення загальноосвітньої підготовки – діяльнісному підходу, педагогіки співробітництва, які змінюють як роль і місце викладача в аудиторії, так і характер пізнавальної діяльності студентів.

Комп'ютерні технології впевненою ходою ввійшли в сучасне життя, незважаючи на неоднозначне відношення до себе.

І прихильники, і противники комп'ютерних інформаційних технологій мають спільне переконання у тому, що, здобувши якісні знання про комп'ютери та відпрацювавши навички роботи на них, студенти будуть краще підготовленні до навчання, до життя і здобуття різноманітних благ у сучасному суспільстві.

Досвід роботи викладачів ВНЗ, які використовують комп'ютерні технології у навчанні математики, показує, що комп'ютер у ВНЗ може надати суттєву підтримку викладачеві в організації навчального процесу, підвищити якість та ефективність навчальних методик, реалізувати індивідуальний підхід до кожного студента, зокрема при тестуванні.

Комп'ютерні тестові програми ASSIST-II (Асистент-II), SunRavTestOfficePro 4, СПЗ Test забезпечують спрощення процесу виконання завдань, підрахунок оцінок і вивід інформації; зменшують час перевірки знань; збільшують можливість одержання точних відомостей про знання певного студента впродовж певного навчального періоду та з конкретного міні-модуля, проведення тренування в процесі усвідомленого засвоєння навчального матеріалу і самопідготовки тощо.

Саме ці програми ліквідують можливість підказок і списувань, підвищують об’єктивність оцінювання знань, змінюється роль викладача, який звільняється від функції «покарання», тобто перестає бути джерелом негативних емоцій, пов’язаних з оцінюванням, значно скорочується час очікування студентами оцінки, що є суттєвим фактором як психологічним, так і виховним.

Варто наголосити на перевагах тестової програми SunRavTestOfficePro 4, яка порівняно з програмою ASSIST-II (Асистент-II), що дозволяє виконувати тести лише з наданими відповідями, дозволяє складати відкриті завдання (завдання з вільним складанням відповіді), а саме на доповнення, з множинним вибором (багатовибіркові), на відновлення послідовності, на відповідність.

СПЗ Test – це програма, яка є простою у створенні та використанні, тому викладачі математики її часто застосовують при перевірці знань по темах модуля. Запитання для тестів друкуються в текстовому редакторі Блокнот, а завантаження здійснюється безпосередньо через програму Builder.

Представлення навчальної дисципліни у вигляді комп’ютерних навчальних програм, які доповнюються електронними посібниками або мультимедійними комп’ютерними посібниками та підручниками, забезпечить підвищення якості засвоєння матеріалу і розвитку у студентів навичок самостійної роботи [21, с. 73].

Серед електронних навчальних видань чільне місце займають електронні посібники, які сприяють активізації самостійної роботи майбутніх спеціалістів, значному підвищенню якості і ефективності процесу отримання теоретичних знань та набуттю практичних навиків.

Електронні посібники – педагогічні програмні засоби, які охоплюють значні за обсягом навчального матеріалу розділи навчальних курсів або повністю навчальні курси, характерною рисою яких є гіпертекстова структура навчального матеріалу, наявність систем управління із елементами штучного інтелекту, модулів самоконтролю, розвинених мультимедійних складових [29, с. 290].

Необхідність створення електронних посібників зумовлена індивідуалізацією навчання, що пов'язана зі скороченням годин аудиторних занять та відповідно збільшенням часу для самостійної роботи студентів, забезпечення студентів методичними рекомендаціями щодо підготовки до навчальних занять в умовах модульно-рейтингової системи навчання.

Для створення електронних посібників та презентацій викладачі математики використовують програми SunRavBookEditer та PowerPoint.

Невід'ємною складовою проведення відкритих занять з математики є використання інтерактивної дошки, на яку проектується через мультимедійний пристрій будь-яка комп'ютерна програма.

Такі засоби навчання є популярними і можуть застосовуватися для: проблемного навчання, діалогу, дискусії, постановки проблемних питань, конференції, ділових ігор, тренінгових технологій шляхом демонстрації відеозаписів з методикою проведення професійної етики, інтегрованих бінарних занять, самостійної роботи студентів тощо. Для полегшення підготовки до занять та підвищення рівня сприйняття матеріалу викладачами використовуються: кодоплівки, за допомогою яких можна зобразити на екрані опорні конспекти, нові терміни, графіки, таблиці, малюнки; електронні носії інформації з накопиченим матеріалом, що дозволяє швидко й ефективно використовувати найновіше у процесі навчання та багато подібного, що створюється з використанням комп'ютерних програм. Ефективність застосування таких засобів навчання неоцінима.

Велику роль у підготовці кваліфікованих спеціалістів відіграє Internet, як комунікаційні засоби навчання, де можна знайти будь-яку інформацію. Це відкриває нові можливості для викладачів та студентів. Стрімкий розвиток комп'ютерної техніки не завжди дає змогу студентам знайти у підручниках відповіді на запитання, тому викладачі використовують Інтернет-бібліотеку, щоб одержувати потрібну інформацію, виробляти необхідні навики й уміння для успішного рішення завдань у своїй області.

Сучасний ринок праці очікує особливих працівників, високого рівня професіоналів, здатних розвиватись і вдосконалюватись, постійно вчитися і пристосовуватись до нових умов. Застосування комп'ютерних технологій вирішує цю проблему. Хочеться вірити, що незабаром всі навчальні заклади будуть мати електронні мережі, будуть накопичені прикладні програми з різних дисциплін, авторські електронні посібники, відеофільми, методичні інформації, що і сприятиме інтенсифікації навчального процесу.

1.9.Контроль знань, умінь та навичок при вивченні курсу елементарної математики

Ефективна організація навчального процесу – це не лише добре організоване засвоєння навчального матеріалу, але й оптимальний систематичний контроль знань студентів.

Беручи до уваги те, що навчальний процес являє собою єдину цілісну систему, зміст, функції та організація контролю знань, вмінь та навичок можуть бути ефективними тільки за умов забезпечення взаємозв'язку всіх елементів дидактичної системи.

Тому здійснення контролю знань в навчальному процесі вимагає науково обґрунтованого підходу. Ця проблема вивчалась багатьма вітчизняними методистами: Бурда М. І., Дубінчук О. С., Слєпкань З. І., Тесленко І. Ф.

Узагальнюючи результати їх досліджень, можна стверджувати, що контроль знань стимулює діяльність студентів, забезпечує міцність знань, дозволяє робити висновки про рівень засвоєння ними навчального матеріалу. А звідси і функції контролю: виховна, розвиваюча, навчальна, контролююча, організуюча і стимулююча.

Знання всіх названих функцій допомагає викладачеві знайти оптимальний варіант контролю знань, який би комплексно вирішував проблеми навчання.

Ці функції визначають і головні педагогічні вимоги до організації і вибору методів перевірки та оцінки знань, а саме:

- систематичність і регулярність здійснення контролю знань;
- застосування контролю з метою розвитку студентів;
- об’єктивність контролю, яка забезпечується однаковими вимогами і умовами;
- оптимальність контролю (за мінімальний час перевірити знання значної групи студентів)

Як відомо, в навчальних закладах при викладанні математики застосовуються наступні методи контролю: усні, письмові, програмовані і самоконтроль.

Однак практика показала, що контрольні роботи здебільшого ставляться під кінець навчального курсу. Студент часто не знає як готуватись до такого контролю. Контрольні завдання у переважній більшості покликані з’ясувати бальну оцінку, а не здійснити повноцінний зворотній зв’язок, тобто встановити рівень засвоєння матеріалу.

Враховуючи те, що у молоді значно знизився інтерес до навчання, часто відсутні вольові зусилля і наполегливість, ми прийшли до висновку, що традиційна система контролю знань потребує значної модернізації або навіть заміни. Звідси стає очевидним, що необхідно створити таку атмосферу, щоб студент обов’язково працював систематично, щоб рівень його знань контролювався регулярно на всіх етапах навчання.

За останні роки проблема контролю знань, умінь і навичок студентів набула значного поширення. Передова педагогічна наука постійно удосконалює методику виявлення, оцінювання і обліку знань, умінь і практичних навичок студентів.

Важливість цього питання полягає в тому, що успішність з якою пов’язана система контролю і оцінки діяльності студентів виступає показником роботи і самих студентів, і викладачів. Протиріччя і недоліки існуючої практики контролю здебільшого зводяться до наступного:

- контроль найчастіше проводиться у формі усного опитування і має значні недоліки (вибірковий, випадковий характер, одночасно опитується тільки кілька студентів);
- епізодичний характер опитування не дає можливості об’єктивно визначити рівень і повноту засвоєння знань;
- оцінка, отримана студентом в результаті усного опитування не дає реального уявлення про справжні знання і уміння.

Але найбільшим недоліком є те, що окремі студенти починають вчитись лише для оцінки, їх не турбує якість освіти, ґрунтовність знань, рівень фахової підготовки, що істотно знижує ефективність всього навчального процесу.

Завдання кожного викладача учбового закладу так організувати навчально-виховний процес, щоб студенти стали в ньому активними учасниками і отримували задоволення від власних успіхів у навчанні.

Одним із шляхів спонукання студентів до активного навчання є об’єктивна оцінка їх роботи, усвідомлення того, що лише міцні знання і високий рівень практичної підготовки дозволить студенту стати висококваліфікованим, компетентним спеціалістом.

Аналізуючи вітчизняний і зарубіжний досвід роботи навчальних закладів, різні форми організації і контролю в педагогічному процесі, ми прийшли до висновку, що метод рейтингово-тестової системи контролю знань сприяє більш об’єктивному оцінюванні знань і умінь. Варто врахувати також, що у проекті Концепції загальної середньої освіти вимагається зорієнтувати навчальний процес на сконцентроване засвоєння матеріалу, самостійне здобуття студентами знань. Здійснити розвантаження навчальної програми з математики від другорядного матеріалу, розширити діапазон самостійних форм занять у студентів у поєднанні з наданням їм необхідних консультацій та при обов’язковому контролі самостійного засвоєння матеріалу. Тому технологія лекційно-практичного навчання логічно поєднується з рейтинговою системою оцінки знань студентів.

Зумовлюється це означеними обставинами:

- за умов лекційно-практичної форми навчання студентам не лише визначаються завдання, а пояснюються критерії оцінювання глибини їх досягнення;
- контрольні завдання покликані поліпшити рівень особистого засвоєння знань кожним студентом, закріпити здобуте, діагнозувати труднощі.

Розглянемо особливості рейтингової системи оцінювання знань студентів при вивченні математики в навчальних закладах.

Рейтингова оцінка відрізняється від традиційної 5-бальної системи оцінок більш широким інтервалом балів, які диференційовані рішенням педагогічної ради відповідно до обсягу навчального матеріалу, що контролюється, рівня самостійності освоєння тощо.

На початку навчального року (семестру) викладач повинен ознайомити студентів з особливостями лекційно-практичної системи навчання і її поєднання з рейтинговим контролем знань. У кабінеті математики вивішуємо для детального ознайомлення накопичувальну відомість (по групах), в якій зазначені всі етапи контролю і їх рейтинг по кожному блоку, що дуже добре для самоконтролю студентів.

Вивчення програмного матеріалу в обсязі циклу здійснюється у звичайному порядку на заняттях згідно з розкладом і під час самостійної роботи студентів.

Після вивчення модуля кожному студенту виставляється оцінка за знання цього блока. Модульна оцінка виставляється в 4-ри бальній системі: “5”- відмінно; “4”- добре; “3”- задовільно, “2”- незадовільно (по рейтингу).

Кількість балів по рейтингу виставляється в 60-ти бальній системі: “50-60”- відмінно, “40-49”-добре, “34-39”-задовільно, “1-33”-незадовільно. Рейтинг – це середня арифметична оцінка за самостійні, практичні, домашні роботи та усні відповіді по кожній темі (модулі).

Найважливішим обов’язком викладача є створення рівних можливостей всім студентам для отримання рейтингової оцінки на всіх етапах контролю. Кількість етапів, їх рейтинг, середній рейтинг по циклу і предмету в цілому визначається викладачем і після затвердження предметною комісією та заступником директора по навчальній частині доводиться до відома студентів.

Етапи контролю з курсу математики навчального закладу і її складника алгебри і початків аналізу, які обов’язково оцінюються рейтингом, можуть бути:

1. Практичні роботи, диспути, семінари, уроки-спектаклі і т.д.
2. Класні контрольні роботи, письмові чи усні заліки, самостійні роботи.
3. Додаткова робота: науково-дослідницька робота, пошуково-аналітична робота;
4. Історичні повідомлення: біографії вчених, історія тих чи інших математичних відкриттів;
5. Гурткова робота, випуск стінгазет, підготовка КВК, математичних вечорів, календаря знаменних математичних дат і т.д. Залік по циклу (диференційований).

Етапи контролю, що визначені планом, повинні бути відпрацьовані всіма студентами і оцінені викладачем обов’язково, винятки не допускаються. Рейтингова оцінка знань, умінь і навичок з предмета проводиться після виконання студентом всіх практичних, контрольних, самостійних і т.п. робіт, що входять до даного циклу.

Рейтинг з предмета складається з середнього арифметичного всіх модулів (рейтингів). Облік результатів навчання фіксується в таблиці визначення рейтингу оцінки знань, умінь та навичок .

На наш погляд, застосування лекційно-практичної системи навчання і рейтингової оцінки знань дало можливість створити таку атмосферу при вивченні елементарної математики, коли студент обов’язково працює систематично, адже рівень його знань контролюється регулярно на всіх етапах навчання. Створюються умови для взаємної вимогливості між студентом і викладачем, підвищується відповідальність за навчання, якість і міцність знань. Студенти привчаються до систематичної роботи з підручниками, довідниками, самостійної роботи з підручниками, довідниками, самостійної роботи над навчальним матеріалом.

Перездача знань по циклу дозволяється студентові протягом всього семестру, але не більше двох разів за кожен цикл. Студент, що має незадовільні оцінки або незарахування, вважається невстигаючим. Якщо таких оцінок не більше двох – йому призначається термін ліквідації заборгованості.

Таким чином, визначається рейтинг. Рейтингова система математичних знань, норм і цінностей студентів є також одним із видів диференціації, в основі якої лежить змагальна суть навчання, обумовлена різними здібностями студентів та їх індивідуально-психологічними особливостями. Цей ефект настільки очевидний, що не потребує доведення.

Ми розділяємо переконаність О. Я. Савченко, Є. П. Верещака, О. М. Лозової в тому, що головним і єдиним критерієм оцінювання навчальної діяльності студентів є динамічні параметри їх успішності за відносно короткий час – навчальний семестр [27] .

Цілком очевидно, що на користь обраної нами системи вказує і фактор швидкої зворотної реакції викладача на навчальні зусилля студентів, що в свою чергу стимулює їх самостійність і відповідальність. Виникає можливість також належним чином оцінити активність тих студентів, які приймають участь у додаткових заходах, позаурочній роботі з математики.

1.10. Використання мультимедійних засобів навчання в навчальному процесі .

Мультимедіа – це спеціальна інтерактивна технологія, що забезпечує за допомогою технічних і програмних засобів роботу з анімованою комп'ютерною графікою і текстом, мовою, високоякісним звуком, нерухомими зображеннями і рухомим відео.

Найдоцільніше використовувати мультимедійні засоби навчання при виконанні таких педагогічних завдань: формування світогляду стеднтів, їх ідейних і моральних переконань; формування вмінь і навичок студентів, зокрема: виділяти головне, аналізувати, узагальнювати, порівнювати, класифікувати, конкретизувати, абстрагувати, систематизувати; формування спеціальних вмінь і навичок стедентів в залежності від навчальних дисциплін; взаємозв’язок теорії і практики; засвоєння студентами складних тем.

Використання мультимедія дозволяє зробити свої заняття емоційними та ефективними. Це дає можливість забезпечити заняття динамічною наочністю, збільшити кількість тренувальних завдань, збільшити темп виконання робіт студентами, диференціації їхньої діяльності, наявність зворотнього зв’язку, об’єктивність контролю, підвищення мотивації навчання.

Комп’ютер – це знаряддя, яке полегшує працю вчителя. Вчителеві необхідно творчо переглянути матеріали до лекцій та методику їх викладу з точки зору насичення цих лекцій мультимедійною інформацією, для того щоб зробити навчання не тільки динамічним, інформаційно - насиченим, а й індивідуальним.

Найбільш ефективне використання комп'ютера на заняттях математики: при вивченні нового матеріалу (ілюстрація різноманітними наочними засобами; мотивація введення нового поняття; моделювання); при перевірці фронтальних самостійних робіт (швидкий контроль результатів); при розв’язуванні задач повчального характеру (виконання малюнків, складання плану роботи; відробіток певних навиків і умінь); при організації дослідницької діяльності студентів; при інтеграції предметів природно-математичного циклу.

Вигідні особливості роботи з комп'ютерною підтримкою : студент стає суб'єктом навчання, бо програма вимагає від нього активного управління; легко досягається рівнева диференціація навчання; досягається оптимальний темп роботи студента, оскільки кожний студент виконує індивідуальне завдання, працюючи в своєму темпі; скорочується час при виробленні технічних навиків студентів; збільшується кількість тренувальних завдань; відстежуються помилки, допущені студентом, і повторно відпрацьовується недостатньо засвоєний матеріал; робота студента оцінюється відразу; при роботі з комп'ютером присутній елемент гри, у більшості підвищується мотивація навчальної діяльності. .

Заняття із застосуванням мультимедійних засобів навчання викликають у студентів інтерес, примушують працювати всіх. Використовування мультимедіа на практичних заняттях перетворює їх на творчий процес, дозволяє здійснити принципи розвиваючого навчання, допомагає створювати умови успішності кожного студента на уроці, дає можливість забезпечити заняття динамічною наочністю, збільшити кількість тренувальних завдань, збільшити темп виконання робіт студентами, диференціації їхньої діяльності, наявність зворотнього зв’язку, об’єктивність контролю, підвищення мотивації навчання. Практика роботи показує, що найбільш ефективне використання комп'ютера на заняттях:

1. при проведенні усного рахунку (можливість оперативно пред'являти завдання і коректувати результати їх виконання);
2. при вивченні нового матеріалу (ілюстрація різноманітними наочними засобами; мотивація введення нового поняття; моделювання);
3. при перевірці фронтальних самостійних робіт (швидкий контроль результатів);
4. при вирішенні завдань повчального характеру (виконання малюнків, складання плану роботи; відробіток певних навиків і умінь);
5. при організації дослідницької діяльності студентів;
6. при інтеграції предметів природно-математичного циклу.

Відзначу вигідні особливості роботи з комп'ютерною підтримкою:

1. студент стає суб'єктом навчання, бо програма вимагає від нього активного управління;
2. легко досягається рівнева диференціація навчання;
3. досягається оптимальний темп роботи студента, оскільки кожен студент виконує індивідуальне завдання, працюючи в своєму темпі;
4. скорочується час при виробленні технічних навиків студентів;
5. збільшується кількість тренувальних завдань;
6. відстежуються помилки, допущені студентом, і повторно відпрацьовується недостатньо засвоєний матеріал;

7. робота студента оцінюється відразу;

8. вчитель менше витрачає часу на перевірку робіт;

9. навчання можна забезпечити матеріалами з видалених баз даних, користуючись засобами телекомунікації;

10. при роботі з комп'ютером присутній елемент гри, так іноді бракуючий на заняттях; і у більшості дітей підвищується мотивація навчальної діяльності.

Використання на заняттях математики інноваційно-комунікаційних технологій дозволяє розв′язати ряд завдань, одна з яких - активізація пізнавальної діяльності студентів. Ця проблема не нова. Але і сьогодні вона залишається вкрай актуальною. Працювати над активізацією пізнавальної діяльності – це означає формувати позитивне відношення школярів до навчальної діяльності, розвивати їх прагнення до більш глибшого пізнання предметів, що вивчаються. Допомогти вчителеві в розв′язанні цієї непростої задачі може поєднання традиційних методів навчання і сучасних інформаційних технологій, у тому числі і комп'ютерних. Проте слід розуміти, що комп'ютер - один з інструментів наший педагогічній діяльності, і як кожен інструмент, він вимагає відповідного йому застосування.

Цілі використання інноваційно-комунікаційних технологій в нашій діяльності наступні:

1. розвиток творчих здібностей студентів, навичок дослідницької діяльності, уміння ухвалювати оптимальні рішення;

2. розширення можливостей використання інформації;

3. формування уміння працювати з інформацією, розвиток комунікативних здібностей;

4. посилення мотивації навчання;

5. активне залучення студентів в навчальний процес;

6. можливість дати студентам найбільш сприятливий для них об'єм навчального матеріалу;

7. якісна зміна контролю за діяльністю студентів, можливість гнучкішого управління навчальним процесом;

8. сприяння формуванню в студентів рефлексії своєї діяльності.

Практика роботи показує, що заняття, на яких використовуються інноваційно-комунікаційних технологій можна розділити на чотири групи:

Демонстраційні заняття: На такому уроці інформація демонструється на великому екрані і може бути використана на будь-якому його етапі. Як програмне забезпечення можна використовувати матеріали готових програмних продуктів, що містять великий об'єм фото, відео, аудіо інформації по різних темах, а також презентації, створені самим викладачем або студентом.

Комп'ютерне тестування: Тестові програми дозволяють швидко оцінювати результат роботи, точно визначити теми, в яких є пропуски в знаннях. На таких заняттях що кожен студент працює тільки індивідуально. Програмним забезпеченням служать тестові програми.

Моделювання*:* Як правило, це тренажер для розв′язання завдань певного типу або середовище для розв′язання конструктивних завдань, на побудову в курсі геометрії .

Інтегровані заняття: Інтегровані заняття проводяться, як правило, в комп'ютерній аудиторії, де студенти мають доступ до комп'ютерів.

При підготовці до заняття з використанням ІКТ викладач традиційно складає план уроку виходячи з його цілей, при відборі навчального матеріалу він повинен дотримувати основні дидактичні принципи: систематичності і послідовності, доступності, диференційованого підходу, науковості і ін. При цьому ІКТ не замінюють викладача, а тільки доповнює його.

Застосовувати ІКТ на заняттях математики можна на всіх етапах процесу навчання:

При вивченні нового матеріалу: При вивченні нової теми доцільно проводити лекцію із застосуванням комп'ютерних презентацій, що дозволяють акцентувати увагу студентів на значущих моментах висловлюваної інформації. Пояснення теми супроводжувати демонстрацією слайду, на якому дана тема у, план вивчення теми, завдання по новій темі.

При розв′язанні усних вправ: Дають можливість оперативно подавати завдання і коректувати результати їх виконання.

При перевірці самостійних і домашніх робіт: Забезпечує разом з усним і візуальний контроль результатів. Студенти при цьому освоюють роботу з комп'ютером, вчаться вибирати головне, контролювати свою думку. Замість доповідей і рефератів – презентації. Презентації можна включити в заняття, створюючи тим самим банк інформації по предмету (процес досить трудомісткий).

Перераховані лише деякі з варіантів застосування комп'ютерних технологій при підготовці і проведенні занять з елементарної математики. Комп'ютерна письменність учасників навчального процесу росте, розвиваються інформаційні технології, а значить, розширюються можливості їх застосування в процесі навчання предмету. Включення в заняття інформаційно-комп'ютерних технологій робить процес навчання математики цікавим, полегшує подолання труднощів. Але важливо розуміти, що використання ІКТ не вирішить всіх проблем вмить.

РОЗДІЛ II РОЗРОБКА МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ З ПРАКТИКУМОМ РОЗВЯЗУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ НА ФІЗИКО-ТЕХНОЛОГІЧНОМУ ФАКУЛЬТЕТІ

2.1. Алгебраїчний метод

Розв'язування геометричних задач за допомогою алгебри, математичного аналізу, тригонометрії дозволяє не тільки показати єдність геометрії, алгебри, аналізу, але і озброїти студентів, що вчаться ефективним прийомам пошуку рішення завдань.

Розглянемо суть цього методу в залежності від типу задач, які дані в таблиці

№	Задачі	Суть методу
1.	На обчислення	За умовою задачі складається рівняння(система), з якого обчислюється шукана величина.
2.	На доведення	За умовою задачі складається рівняння(система),розв'язавши його переконуємось в справедливості твердження задачі.
3.	На побудову	а) За умовою задачі складається рівняння; б) виконується розв'язання задачі; в) досліджуються отримані формули; г) проводиться побудова шуканих величин за отриманими формулами.

Для складання рівняннь (систем) на початковому етапі навчання зручно користуватися таблицями, в яких відображені залежності між елементами геометричної фігури. Ці таблиці можуть служити орієнтовною основою для навчання розв'язання задач.Для складання таких таблиць вибирають опорні елементи, через які будуть визначати необхідні елементи з вказівкою тих теорем (формул),які дають можливість визначити ці елементи.

Наведемо приклад такої таблиці.

Орієнтовна таблиця для находження елементів трикутника.

Опорні елементи трикутника.	**№**	**Обчислювальні елементи**	**Теореми (задачі, формули) використання яких, необхідно для обчислення елемента.**
а, в, с - сторони	1.	m_a, $m_в$, m_c	1)Властивостідіагоналейпаралелограма.
	2.	h_a, $h_в$, h_c	1)Теорема Стюарта. 2)Теорема Піфагора.
	3.	l_a, $l_в$, l_c	1)Властивість бісектриси кута трикутника. 2) Теорема косинусів. 3) Теорема Стюарта.
	4.	R	1) Формула Герона. 2) Теорема косинусів.
	5.	r	S=pr, де p – півпериметр.
	6.	A, B, C- кути	1) Теорема косинусів. 2) Використовувати теореми п.4
	7.	m'_a, $m'_в$, m'_c	1) Використовувати теореми п.1 2) Властивість медіани трикутника.
	8.	m''_a, $m''_в$, m''_c	1) Властивість медіани трикутника.
	9.	l'_a, $l'_в$, l'_c	1) Теорема Ван – Обеля.
	10.	l''_a, $l''_в$, l''_c	1) Теорема Ван – Обеля.
	11.	h'_a, $h'_в$, h'_c	1) Теорема Ван – Обеля.
	12.	h''_a, $h''_в$, h''_c	1) Теорема Ван – Обеля.

Завдання для самостійної роботи

1.Розділити трикутник на дві рівновеликі (сторони) частини прямої, яка проходить через дану точку його сторони.

2.Побудувати трикутник за двома його сторонамиі бісектрисою кута між ними.

3.Розділити трикутник на три рівновеликі частини прямими, якіпроходятьпаралельно до основи.

4.Розділити данурівнобедренутрапецію на двірівновеликічастини прямою, яка проходить паралельно до основи [56,с. 3-65].

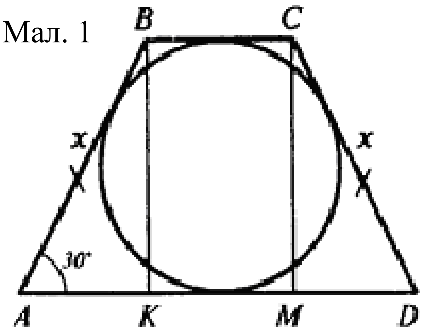
2.1.1. Спосіб введення допоміжного відрізка

При розв’язуванні задач за допомогою алгебраїчного методу широко використовується спосіб введення допоміжної змінної.

Суть способу полягає в тому що допоміжні змінні вибирають таким чином, щоб величини, дані в умові задачі, однозначно визначали геометричну фігуру.

Задача 1. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює $32 см^2$, гострі кути при більшій основі трапеції дорівнюють 30^0. Знайти сторони трапеції.

Мал. 1



Розв'язання. Оскільки умовою задачі не задано жодного відрізка, то для розв'язування цієї задачі виберемо допоміжний відрізок. Якщо ABCD – задана рівнобічна трапеція, то позначимо AB=CD=x.

Щоб скласти рівняння для визначення x, виразимо задану площу через невідомий відрізок. Проведемо $BK \perp AD$, тоді $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BK.$

Але чотирикутник ABCDописано навколо кола, тому дістаємо рівність AD+BC=AB+CD=2x. З Δ ABK: $BK = \frac{1}{2}AB = \frac{x}{2}.$

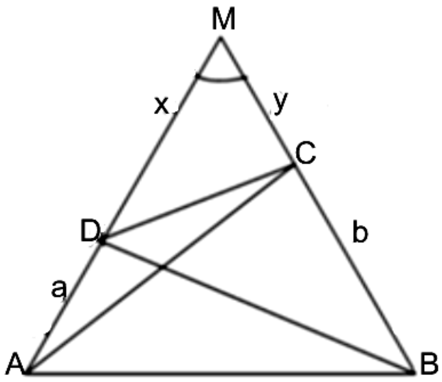
Підставляючи знайдені значення у формулу, дістаємо рівняння: $32 = \frac{2x}{2} \cdot \frac{x}{2}.$

Звідси $x^2=64$, тоді x=8 (очевидно, що x=-8 не задовольняє умову задачі, оскільки x – довжина сторони трапеції). Отже, AB=CD=x=8 (см).

Щоб знайти сторони BC та AD, ще раз скористаємось невідомим відрізком. Нехай BC=y. Проведемо $CM \perp AD$. Тоді KM=BC=y і AK=MD.

З Δ ABK: AK=AB$\cdot \cos 30^0 = 4\sqrt{3}.$Тоді AD=2AK+KM=$8\sqrt{3}$+y. Підставляючи ці значення у рівність (2.9.), дістаємо рівняння: $8\sqrt{3} + y + y = 8 + 8.$ Звідси $y = 8 - 4\sqrt{3}$. Отже, BC=$(8 - 4\sqrt{3})$ (см). Тоді AD=$8\sqrt{3}$+y=$(8 + 4\sqrt{3})$ (см).

<u>Відповідь</u>. AB=CD=8 см, BC=$(8-4\sqrt{3})$ см, AB=$(8+4\sqrt{3})$ см.



Мал. 2

<u>**Задача 2.**</u>В довільному чотирикутнику *ABCD:* $|AB|^2+|CD|^2=|AC|^2+|BD|^2$. Знайти кут між прямими, які містять *AD* і *BC*.

<u>Розв'язання.</u> Для знаходженнч кута *DMC* довизначимо трикутник *DMC*. Нехай *DM = x,MC = y*.

Скористаємося теоремою косинусів і визначимо з трикутників:

ABM – ABCDM – CDACM – AC; BDM – BD, і скористаємося рівністю $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$ *(*)*.

1. *Із ΔABM:* $|AB|^2=(a+x)^2+(b+y)^2-2(a+x)(b+y)\cos\alpha$.
2. *Із ΔCDM:* $|CD|^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$.
3. *Із ΔACM:* $|AC|^2=(a+x)^2+y^2-2(a+x)y\cos\alpha$.
4. *Із ΔBDM:* $|BD|^2=x^2+(b+y)^2-2x(b+y)\cos\alpha$.

*Із(*)*і *1 – 4* $ab\cos\alpha=0\ \cos\alpha=0\ \alpha=\frac{\pi}{2}$.

<u>Відповідь.</u>$\alpha=\frac{\pi}{2}$.

<u>**Задача 3.**</u>Дано рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайти відношення радіусів вписаного і описаного кола.

<u>Розв'язання.</u> Так як в даній умові відсутні величини, що мають розмірність довжини, тому в якості допоміжної візьмемо катети. Нехай катети трикутника дорівнюють – a. Запишемо формули , з яких визначається радіус вписаного і описаного кола:$R=\frac{c}{2}$; $r=\frac{S}{p}$.

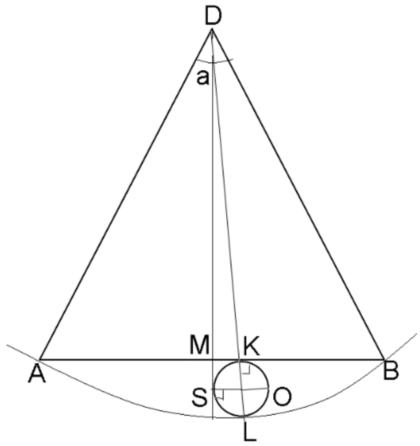
Для знаходженнявідношенняобчислимо*c, S* і *p*. $C=a\sqrt{2}$- за теоремою Піфагора. $S=\frac{1}{2}a^2$, $p=\frac{2a+a\sqrt{2}}{2}$; $r=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$.

Знаходимо відношення

$\frac{r}{R}=\frac{a}{(2+\sqrt{2})a\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Відповідь. $\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Задача 4. *AOB* – сектор кола радіуса *r*. Величина кута *AOB* дорівнює $\alpha(\alpha<\pi)$. Знайти радіус кола, що лежить всередині цього сектора і дотикається хорди *AB,* дуги *AB* і бісектриси кута *AOB*.



Мал. 3

Розв'язання. Нехай *OM* – бісектриса кута *AOB,* O_1- центр шуканого кола, *S* – точка дотикання шуканого кола і бісектриси *OM, K* – точка дотикання шуканого кола і хорди *AB*. Відрізок *OM* є бісектрисою кута *AOB*, і так як трикутник *AOB* рівнобедрений, то *OM* є також і висотою трикутника *AOB*. Чотирикутник $SMKO_1$ - квадрат, так як $SO_1=KO_1$, а кути O_1SM, *SMK* і MKO_1 прямі. За теоремою про пряму що проходить через центри двох кіл що дотикаються, центри кіл *O,* O_1 і точка дотикання *L* цих кіл лежать на одній прямій *OL.*

Позначимо радіус шуканого кола $O_1K=x.$ Діагональ MO_1 квадрата MSO_1K дорівнює $\sqrt{2}\tilde{o}$. З трикутника OMB знайдемо відповідно до умови задачі $OM=\mathrm{r}*\cos\frac{\alpha}{2}$. В трикутнику OMO_1 маємо: $MO_1=\sqrt{2}x$, $OM=\mathrm{r}*\cos\frac{\alpha}{2}$, $OO_1=r-x$,

$\angle OMO_1=135^0$. Теорема косинусів для трикутника OMO_1 дає рівняння для невідомого *x:*

$$(r-x)^2=2x^2+r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2x\sqrt{2}r\cos\frac{\alpha}{2}\cos135^0,$$

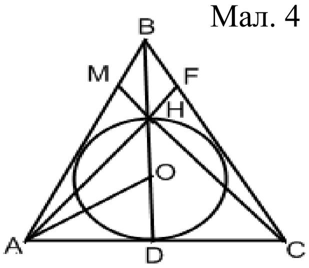
$$\left(r-x\right)^2 = 2x^2 + r^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2rx\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x^2 + 2r\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)x + r^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -2r\cos^2\frac{\alpha}{4} \pm 2r\cos\frac{\alpha}{4} \Rightarrow x_{1,2} = 2r\cos\frac{\alpha}{4}\left(-\cos\frac{\alpha}{4} \pm 1\right).$$

Так як величина x повина бути додатньою, а з двох знайдених коренів додатній тільки перший $x_1 = 2r\cos\frac{\alpha}{4}\left(1-\cos\frac{\alpha}{4}\right) = 4\text{r}\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$, то він і дає величину радіуса шуканого кола.

<u>Відповідь:</u> $4\text{r}\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$.

<u>Задача 5.</u>Визначити кути рівнобедреного трикутника, знаючи, що його ортоцентр лежить у вписаному в трикутник колі.



Мал. 4

<u>Розв’язання:</u> Введемо допоміжний елемент, який однозначно визначає трикутник *ABC*. Нехай *AC*=*BC*, *AB* = *a*, $\angle \text{ÂÀÑ} = \alpha$. O – центр вписаного кола,

H - точка претину висот (ортоцентр). $\angle \text{ÍÀÑ} = \angle \text{ÍÑÀ} = 90^0 - \alpha$ (розглядаємо чотирикутник *MHFB,* у якого: $\angle \text{ÍÌÂ} = \angle \text{Í}FB = 90^0, \angle ABC = 180^0 - 2\alpha, \angle MHF = 2\alpha$). $\angle AND = 90^0 - \angle HAC = \alpha$. З трикутників *AHD*і*AOD* отримаємо: $OD = AD \cdot tg\frac{\alpha}{2}, HD = AD \cdot ctg\alpha,$ але $HD = 2OD$. Отримаємо: $2tg\frac{\alpha}{2} = ctg\alpha$, розв’язавши це рівняння, матимемо, що $\alpha = 2arctg\frac{\sqrt{5}}{5}$. Отже, $\angle BAC = \angle ACB = 2arctg\frac{\sqrt{5}}{5}.\angle ABC = 180^0 - 4arctg\frac{\sqrt{5}}{5}$.

<u>Відповідь.</u> $\angle BAC = \angle ACB = 2arctg\frac{\sqrt{5}}{5}.\angle ABC = 180^0 - 4arctg\frac{\sqrt{5}}{5}$

Задачі для самостійного виконання

1.Дано рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайти відношення радіусів вписаного і описаного навколо трикутника кіл.

2.Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює *a*. В якому відношені бісектриса прямого кута ділить площу цього трикутника.

3.Сторони трикутника відносяться, як *7:8:9*. Знайти відношення радіуса описаного навколо трикутника кола до радіуса вписаного внього кола.

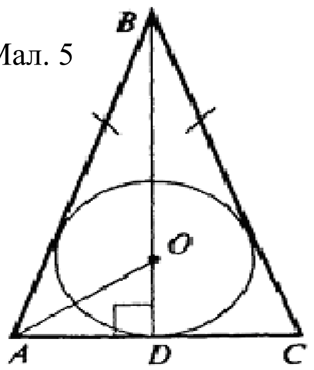
4.Навколо круга, площа якого рівна *Q,* описаний ромб з гострим кутом, що дорівнює *a*.Знайти площу ромба [56,с. 3-65].

2.1.2. Метод введення допоміжного кута

Суть способу полягає в тому що допоміжні змінні вибирають таким чином, щоб величини, дані в умові задачі, однозначно визначали геометричну фігуру.

Задача 1.У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного та описаного кіл відповідно дорівнюють 12см та 25см. Обчислити периметр трикутника.

Мал. 5



Розв'язання. Нехай у Δ ABCAB=BC, $R_{опис.}$=25 см, $r_{впис.}$=12 см. Позначимо через x кути A і C: $\angle$A=$\angle$C=x (0°<x<90°). Тоді $\angle$ABC=180°-2x.

З формули $R_{опис.} = \frac{AC}{2\sin\beta}$маємо AC=2$R\sin$(180°-2x)=50$\sin$2x.

Центр вписаного в трикутник кола лежить у точці перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника. Проведемо бісектрису BD(вона ж є висотою та медіаною в рівнобедреному трикутнику ABC) та бісектрису AO. Тоді O – центр вписаного у трикутник ABC кола, а OD – радіус цього кола (оскільки AC – дотична до вписаного кола, а OD$\perp$AC як частина висоти BD).

Враховуючи, що D – середина AC (BD – медіана), дістаємо: $AD = \frac{1}{2}AC = 25\sin 2x$. Окрім того, $\angle$OAD=$\frac{1}{2}\angle$A=$\frac{x}{2}$ (AO – бісектриса). Для складання рівняння визначимо заданий радіус вписаного кола (OD) з прямокутного трикутника AODчерез x: $OD = AD \cdot tg\angle OAD = 25\sin 2x tg\frac{x}{2}$. Дістаємо тригонометричне рівняння: $12 = 25\sin 2x tg\frac{x}{2}$. Застосовуючи формули $tg\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ і $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, маємо: $6 = 25\cos x(1-\cos x)$. Нехай $\cos x = t$, тоді $25t^2 - 25t + 6 = 0$. Звідси $t_1 = \frac{2}{5}$, $t_2 = \frac{3}{5}$. Виконуючи обернену заміну, дістаємо, що $\cos x = \frac{2}{5}$ або $\cos x = \frac{3}{5}$. Зазначимо, що обидва значення задовольняють умову 0°<x<90°, тому задача має два розв'язки. А саме:

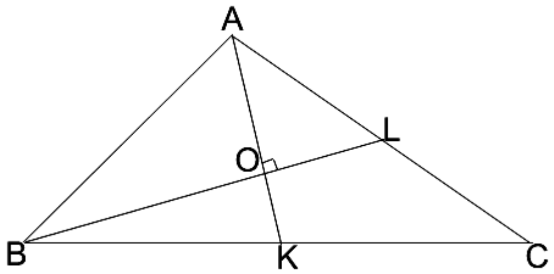
1) якщо $\cos x = \frac{2}{5}$, де 0°<x<90°, то $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Тоді, ще раз скориставшись формулою для радіуса описаного кола $R = \frac{AB}{2\sin C}$, дістаємо: $AB = 2R\sin x = 2\cdot 25\cdot\frac{\sqrt{21}}{5} = 10\sqrt{21}$. Оскільки $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{25}$, то $AC = 50\sin 2x = 8\sqrt{21}$. Отже, $P_{\Delta ABC}$=AB+BC+AC=2AB+AC=$28\sqrt{21}$ (см);

2)якщо $\cos x = \frac{3}{5}$, де 0°<x<90°, то $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{4}{5}$. Тоді $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$ і тому $BC = AB = 2R\sin x = 40$ (см), $AC = 50\sin 2x = 48$ (см). Отже, в цьому випадку $P_{\Delta ABC}$=40+40+48=128 (см).

Таким чином, умову задачі задовольняють два трикутники (причому обидва вони – гострокутні) з різними сторонами і різними периметрами, тому відповідь до цієї задачі не можна записати однозначно.

Відповідь. Периметр заданого трикутника може дорівнювати 128 см або $28\sqrt{21}$ см.



Мал. 6

Задача 2. Знайти площу трикутника ABC, якщо $AC = 3$, $BC = 4$, а медіани AK і BL взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Введемо в якості невідомої величини кут $\alpha = \angle \hat{A}\tilde{N}\grave{A}$. Трійка даних (довжини сторін AC і BC і кут α) задає трикутник ABC, і всі інші параметри цього трикутника можуть бути виражені через них. Крім того якщо б значення кута α було відомо, площу трикутника *ABC* можна було б знайти за формулою $S = \frac{1}{2} BC * AC \sin\alpha$. Тригонометричне рівняння для знаходження кута α складемо, використовуючи умову для взаємної перпендикулярності медіан *AK* і *BL*. За теоремою косинусів для трикутника *ABC* знайдемо BA:

$$BA^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC * CA * \cos\alpha, \quad BA^2 = 4^2 + 3^2 - 2*4*3\cos\alpha,$$

$$BA^2 = 25 - 24\cos\alpha.$$

За теоремою косинусів для трикутника *BCL* знайдемо довжину медіани *BL* (так як *BL* – медіана, то $CL = LA = \frac{3}{2}$):

$$BL^2 = BC^2 + CL^2 - 2BC * CL * \cos\alpha, \qquad BL^2 = 4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2*4*\frac{3}{2}\cos\alpha,$$

$$BL^2 = \frac{73}{4} - 12\cos\alpha.$$

Аналогічно за теоремою косинусів для трикутника *КСА*: $KA^2 = 13 - 12\cos\alpha.$

За властивостями медіан

$$BO = \frac{2}{3} BL = \sqrt{\frac{73}{9} - \frac{16}{3}\cos\alpha}, \; AO = \frac{2}{3} KA = \sqrt{\frac{52}{9} - \frac{16}{3}\cos\alpha}.$$

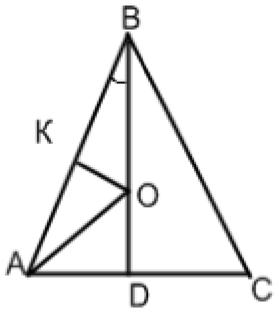
За умовою задачі трикутник *BOA* прямокутний і відповідно, $BA^2 = BO^2 + OA^2 \Rightarrow 25 - 24\cos\alpha = \frac{73}{9} - \frac{16}{3}\cos\alpha + \frac{52}{9} - \frac{16}{3}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{6}$.

Тепер, знаючи косинус кута α, знайдемо площу трикутника *ABC:* $S_\Delta = \frac{1}{2} BC * AC \sin\alpha = \frac{1}{2} BC * AC\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{2} * 4 * 3 * \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{11}.$

<u>Відповідь:</u> $\sqrt{11}$.

<u>Задача 3.</u> Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобедренний трикутник з основою *a* і бічною стороною *b*.

Розвя’зання:



Мал. 7

Якщо BD – висота трикутника ABC, то точка O лежить на BD, бо вона точкою перетину бісектрис (рис. 19). Введемо допоміжний елемент $\angle ABC = x$. З прямокутного трикутника OBK:

$$OK = OB \cdot \sin x = \left(BD - OD\right) \cdot \sin x = \left(BD - OK\right) \cdot \sin x;$$

звідси: $OK = \dfrac{BD \cdot \sin x}{1 + \sin x}$. З прямокутного трикутника ABD:

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$. Крім того, $\sin x = \dfrac{a}{2b}$, тому:

$$OK = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2 \cdot 2b\left(1 + \dfrac{a}{2b}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b - a}{2b + a}}.$$

OK – шуканий радіус.

Відповідь. $\text{ОК} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$.

Задачі для самостійного виконання

1. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, у 7 раз менший від гіпотенузи. Знайдіть гострі кути трикутника.

2. В трикутнику ABC величини кутів A, B і C складають арифметичну прогресію. Найменша сторона в *4* рази менша за найбільшу сторону. Знайти тангес найменшого кута.

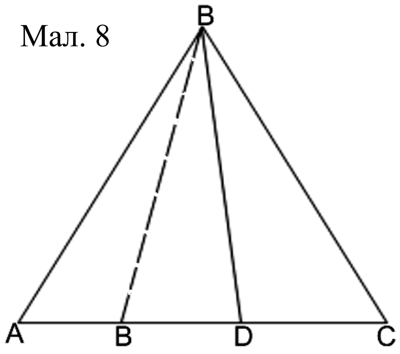
3.На катеті AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC вибрана точка P так, що півколо,побудоване на відрізкуPC як на діаметрі, дотикаєтьсягіпотенузиAB. В якомувідношеніцепівколоділитьвідрізокPB?

2.1.3. Метод допоміжної площі

Суть способу: для складання рівнянь (систем) в якості опорного елемента використовується площа.

Перш ніж приступити до розв’язання задач за допомогою способу площ, нагадаємодеякіїхвластивості, якідуже часто використовуються при розв'язанні.

Мал. 8



Мал. 8

Задача 1. Якщо одну з сторінтрикутника, прилеглу до даногойого кута, збільшити в *m* раз, то йогоплощатежзбільшиться в *m* раз.

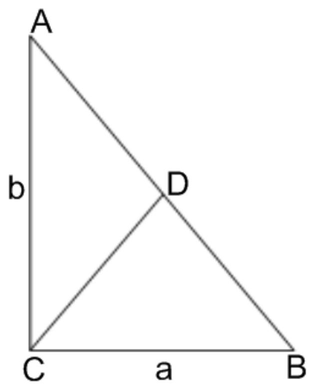
Розв’язання. Так як трикутник*ABC* і *ABD*маютьспільнувисоту, то відношенняїхплощиндорівнюєвідношенню основ.

SABC=SABD=AC:AD=m.

Наслідок з задачі 1.

a) медіана ділить трикутник на дві рівні частини;
b) бісектриса кута трикутника, яка знаходиться між сторонами *a* і *b*, ділить його на два трикутника, площі яких відносяться як *a:b;*
c) якщо два трикутника мають спільний кут, то їх площі відносяться як відношення сторін, що утворюють цей кут;
d) частинний випадок пункту с).

Якщо два трикутники подібні і сторони одного із них в *m* раз більше від відповідних сторін другого, то його площа в *m2*більша площі другого трикутника.

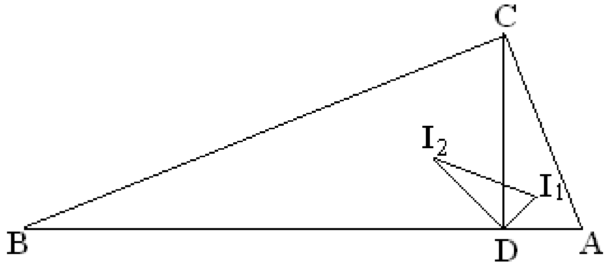


Мал. 9

Введення площі як допоміжного елемента аналогічне введенню лінійного елемента – відрізка. Порівнюючи площі фігур, можна дістати рівняння відносно невідомих задачі або необхідне співвідношення у вигляді формули.

Краще знаходити чи порівнювати ті площі, сума (різниця) яких дає площу заданої фігури або відношення площ тих фігур, у яких лінійні елементи – шукані, або є компонентами співвідношення у вигляді формули [26].

Задача 1. В прямокутному трикутнику $ABC(<C=90^0)$ проведено висоту CD до гіпотенузи. Відстань між центрами кіл, вписаних в трикутники CAD і CBD дорівнює l. Знайти радіус r кола, вписаного в трикутник ABC.



Мал. 10

Розв'язання:

Нехай I_1, I_2 – інцентри (точка перетину бісектрис) трикутників ACD і BCD (мал.4), позначимочерез r_1 і r_2– радіуси кіл, вписаних в ці трикутники.

Позначимо через r радіус кола вписаного в трикутник ABC. Доведемо, що $r_1^2+r_2^2=r^2$. Розглянемо трикутники ACB, CDB, CDA. Ці трикутники прямокутні і подібні. Тоді $\frac{r_1^2}{r^2}=\frac{S_1}{S};\frac{r_2^2}{r^2}=\frac{S_2}{S}$.

Зробивши перетворення отримаємо $\frac{r_1^2+r_2^2}{r^2}=\frac{S_1+S_2}{S}=1$

Звідси $r_1^2+r_2^2=r^2$ (1)

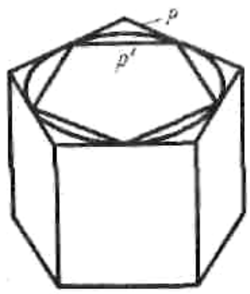
Розглянемо трикутник I_2DI_1 – прямокутний і $I_1D=r_1\sqrt{2}$, $I_2D=r_2\sqrt{2}$ то $I_1I_2^2=2(r_1^2+r_2^2)$. За співвідношенням (1) $I_1I_2^2=2r^2$, або $l^2=2r^2$, $l=r\sqrt{2}$

Відповідь: $r\sqrt{2}$

2.1.4. Спосіб об’ємів в стереометрії

Об'єм циліндра

Якщо тіло просте, тобто допускає розбиття на скінченну кількість трикутних пірамід, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих пірамід. Для довільного тіла об'єм означають таким чином.



Мал. 11

Дане тіло має об єм V, якщо існують прості тіла, які містять його, і прості тіла, які містяться в ньому, з об'ємами, що як завгодно мало відрізняються від V.

Застосуємо це означення для знаходження об'єму циліндра з радіусом основи *P* і висотою *H.*

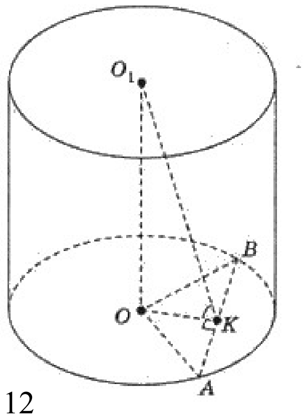
У процесі виведення формули для площі круга було побудовано такі два «-кутники (один, який містить круг, а другий— міститься у крузі), що їх площі при необмеженому збільшенні *п* необмежено наближалися до площі круга. Побудуємо такі многокутники для круга в основі циліндра. Нехай *P* — многокутник, якиймістить круг, а P' — многокутник, який міститься у крузі (мал. 178). Побудуємо дві прямі призми з основами *P* і *P'* і висотою *H,* яка дорівнює висоті циліндра. Перша призма містить циліндр, а друга призма міститься у циліндрі. Оскільки при необмеженому збільшенні *п* площі основ призм необмежено прямують до площі основи циліндра 5, то їх об'єми необмежено прямують до *8H.* Відповідно до означення об'єм циліндра

$$V=SH=лR^2H.$$

Отже, ***об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту.***

Приклад. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом 120º. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди дорівнює 4 см і утворює кут 60° із площиною нижньої основи. Знайти об’єм циліндра.

Розв’язання. 1) На малюнку 488 зображено заданий в умові циліндр, $\angle$ BOA = 120°, К - середина АВ, O_1K = 4 см, $\angle O_1KO$ = 60°.



2) В ΔO_1KO ($\angle O = 90°$):

$OO_1 = O_1K \sin\angle O_1KO = 4\sin 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см),

$O_1O = h$.

3) В ΔO_1KO: $OK = O_1K\cos\angle O_1KO = 4\cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ (см).

Мал. 12

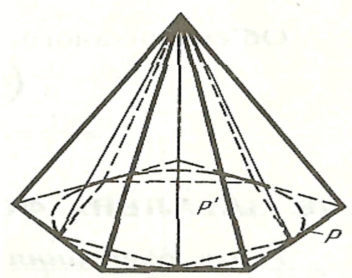
4) Оскільки К - середина АВ і ΔАОВ - рівнобедрений (ОА = ОВ), то ОК - медіана, бісектриса, висота ΔAOB, $\angle OKA = 90°$, $\angle AOK = \frac{120°}{2} = 60°$.

5) В ΔOKA: $OA = \frac{OK}{\cos\angle AOK} = \frac{2}{\cos 60°} = 4$ (см). Отже, $r = 4$ см.

6) Об’єм циліндра $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{3} = 32\sqrt{3}\pi$ (см³).

Об'єм конуса

Побудуємо два многокутники у площині основи конуса: многокутник *P,* який містить основу конуса, і многокутник *P',* який міститься в основі конуса (мал. 179). Побудуємо дві піраміди з основами *P* і *P'* і з вершинами у вершині конуса. Перша піраміда містить конус, а друга міститься у конусі.



Мал. 13

Як відомо, існують такі многокутники *P* і *P',* площі яких при необмеженому збільшенні числа їх сторін *n* необмежено прямують до площі круга в основі конуса. Для таких многокутників об'єм побудованих пірамід необмежено прямує до *—5H,* де 5 — площа основи конуса, а R— його висота. Відповідно до означення, звідси випливає, що об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Отже, об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі основи на висоту.

Приклад. Знайти об'єм конуса, якщо його осьовим перерізом правильні трикутник зі стороною 12 см.

Розв'язання.

1) (мал. 490) Нехай ΔQAB - осьовий переріз конуса, *QA = QB = AB = 12* см.

2) Тому радіус основи $r = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см).

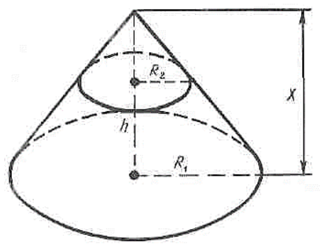
3) В ΔQOA висота $h = QO = \sqrt{AQ^2 - AO^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ (см).

4) Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi$ (см³).

Об'єм зрізаного конуса

Задача (15). Знайдіть об'єм зрізаного конуса, у якого радіуси основ R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$), а висота *h.*

Розв'язання. Доповнимо даний зрізаний конус до повного (мал. 180). Нехай *x* – його висота. Об'єм зрізаного конуса дорівнює різниці об'ємів двох повних конусів: одного — з радіусом основи R_1 і висотою *x,* другого — з радіусом основи R_2 і висотою $x - h$. З подібності конусів знаходимо *x:*



Мал. 14

$$\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2},\ x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}$$

Об'єм зрізаного конуса дорівнює:

$$V = \frac{1}{3}\left(\pi R_1 \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h\right)\right) = \frac{1}{3}\pi h\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right)$$

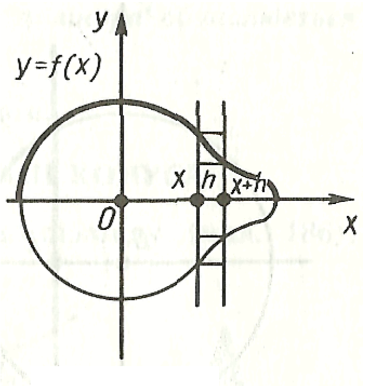
Загальна формула для об'ємів тіл обертання

Тілом обертання у найпростішому випадку називається таке тіло, яке площинами, перпендикулярними до деякої прямої (осі обертання), перетинається по кругах з центрами на цій прямій. Круговий циліндр, конус, куля — приклади тіл обертання. Знайдемо формулу для обчислення об'єму тіла обертання.

Проведемо площину через вісь тіла і введемо у цій площині декартові координати *x, y,* прийнявши вісь тіла за вісь *x* (мал. 181). Площина *xy* перетинає поверхню тіла по лінії, для якої вісь *x* є віссю симетрії. Нехай *y = f(x)—* рівняння тієї частини лінії, яка знаходиться над віссю *x.*

Проведемо через точку *(x;* 0) площину, перпендикулярну до осі *x,* і позначимо через *V(x)* об'єм частини тіла, яка лежить зліва від цієї площини. Тоді *V(x)* є функцією від *x.* Різниця *V{x+-h)— V(x)* становить об'єм шару тіла товщиною *h* між двома площинами, перпендикулярними до осі *x,* які проходять через точки з абсцисами *x* і *x+hi.* Нехай *M* — найбільше, *m—* найменше значення функції *f(x)* на відрізку *[x; x+h].* Тоді шар тіла, що розглядається, містить циліндр з радіусом *m,* висотою *h* і вміщується у циліндрі з радіусом *M* і тією самою висотою h (див. мал. 181). Тому

$$\pi m^2 h \le V(x+h) - V(x) \le \pi M^2 h,\ \pi m^2 \le \frac{V(x+h)-V(x)}{h} \le \pi M^2$$



Мал. 15

При наближенні висоти *h* до 0 ліва і права частини останньої нерівності прямують до однієї і тієї самої величини *⁵f²(x)* Середня ж частина цієї нерівності при наближенні до 0 прямує до похідної *V'{x)* функції *V{x).* Отже:

V'(x) = πf²(x)

За відомою формулою аналізу

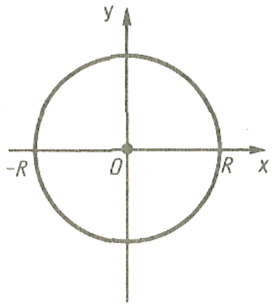
$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(x)dx = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Ця формула і виражає об'єм частини тіла, що знаходиться між паралельними площинами x=a і x=b.

Об'єм кулі

Застосуємо виведену формулу для об'єму тіл обертання до обчислення об'єму кулі.

Введемо декартові координати, взявши за центр кулі початок координат (мал. 182). Площина *xy* перетинає поверхню кулі радіуса R по колу, яке, як відомо, задається формулою



Мал. 16

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Півколо, розміщене над віссю *x,* задається рівнянням

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x}, -R \le x \le R.$$

Тому об'єм кулі знаходимо за формулою

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg| = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Отже, ***об'єм кулі дорівнює*** $\frac{4}{3}\pi R^3$. [56,с. 3-60].

Приклад. Необхідно переплавити в одну кулю дві чавунні кулі радіусами 5 см і 6 см. Знайти (з точністю до десятих сантиметра) радіус нової кулі.

Розв’язання.

1) Об’єм початкових куль: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$ і $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3$.

2) Об’єм отриманої кулі $V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 341$.

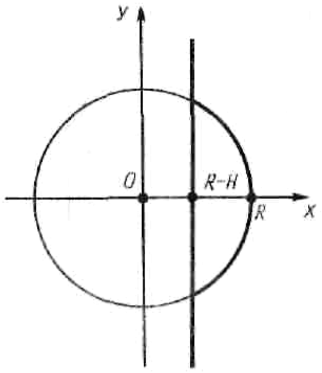
3) З іншого боку за відомою формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Маємо $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 341$,

Об'єм кульового сегмента і сектора

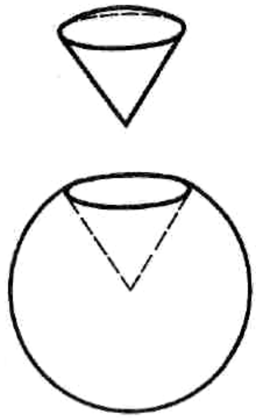
Кульовим сегментом називається частина кулі, яку відтинає від неї січна площина. Формулу для об'єму кульового сегмента дістаємо аналогічно до формули об'єму кулі (мал. 183):

$$V = \pi \int_{R-H}^{R} \left(R^2 - x\right) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \int_{R-H}^{R} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$$

де R — радіус кулі, а H — висота кульового сегмента.



Мал. 17



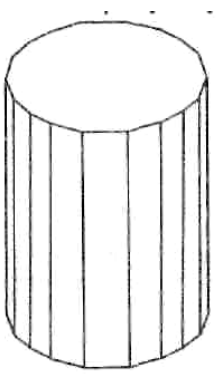
Мал. 18

Кульовим сектором називається тіло, яке дістають з кульового сегмента і конуса таким чином. Якщо кульовий сегмент менший за півкулю, то кульовий сегмент доповнюють конусом, у якого вершина знаходиться в центрі кулі, а основою є основа сегмента. Якщо ж сегмент більший від півкулі, то згаданий конус із нього вилучається (мал. 184). Об'єм кульового сектора дістаємо додаванням або відніманням об'ємів відповідних сегментів і конуса. Для об'єму кульового сектора маємо таку формулу:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

де R – радіус кулі, H – висота відповідного кульового сегмента.

Площа бічної поверхні циліндра



Мал. 19

Впишемо у циліндр правильну n-кутну призму (мал. 185).

Площа бічної поверхні цієї призми $S_n = P_n H$, де P_n – периметр основи призми, а H — її висота.

Як відомо, при необмеженому збільшенні *n* периметр P_n необмежено прямує до довжини *C* кола основи циліндра. Отже, площа бічної поверхні призми необмежено прямує до *CH*. Тому величину *CH* приймають за площу бічної поверхні циліндра. Таким чином, *площа бічної поверхні циліндра обчислюється за формулою* $S = CH = 2\pi RH$,

де R — радіус циліндра, а H — його висота.

Приклад. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 4 см і утворює кут 60° із площиною основи. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

Розв’язання. 1) На малюнку 484 зображено осьовий переріз циліндра - прямокутник ABB_1A_1, діагональ якого $A_1B = 4$ см, $\angle A_1BA = 60°$.

2) В ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AA_1 = A_1B\sin\angle A_1BA = 4\sin 60° = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см);

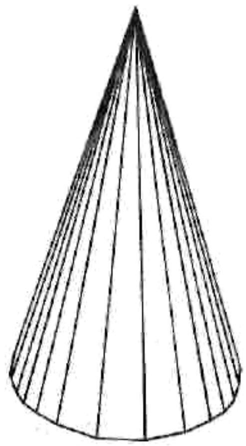
$AB = A_1B\cos\angle A_1BA = 4\cos 60° = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ (см).

3) Отже, $h = 2\sqrt{3}$ (см), $r = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (см).

Тоді $S_{біч} = 2\pi rh = 2\pi\cdot 1\cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi$ (см²).

Площа бічної поверхні конуса

Впишемо у конус правильну n-кутну піраміду (мал. 186). Площа її бічної поверхні $S_n = \frac{1}{2}P_n l_n$



Мал. 20

де P_n – периметр основи піраміди, а l_n – апофема.

При необмеженому збільшенні n периметр основи P_n необмежено прямує до довжини C кола основи конуса, а апофема l_n – до довжини твірної. Відповідно бічна поверхня піраміди необмежено

прямує до $C\frac{l}{2}$. У зв'язку з цим величину

$C\frac{l}{2}$. приймають за площу бічної поверхні

конуса.

Отже***, площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою***:

$S = C\cdot\frac{l}{2} = \pi Rl$,

Де R — радіус основи конуса, а l — довжина твірної.

Аналогічно для площі бічної поверхні зрізаного конуса з радіусами основ R_1 і R_2 і твірною l дістають формулу [56,с. 3-65].

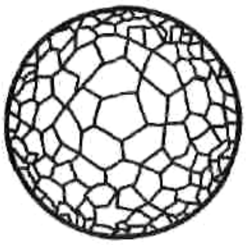
$$S=\pi(R_1+R_2)l$$

Площа сфери

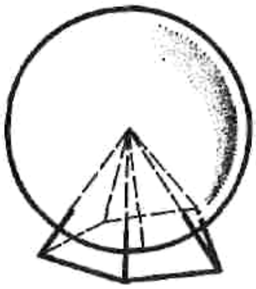
Опишемо навколо сфери опуклий многогранник з малими гранями (мал. 187). Нехай S' — площа поверхні многогранника, тобто сума площ його граней.

Знайдемо наближене значення площі поверхні многогранника, припускаючи, що лінійні розміри граней, тобто відстань між будь-якими двома точками будь-якої грані, менша за ε.

Об'єм многогранника дорівнює сумі об'ємів пірамід, основами яких є грані многогранника, а вершиною — центр сфери (мал. 188). Оскільки всі піраміди мають одну і ту саму висоту, що дорівнює радіусу R сфери, то об'єм многогранника: $V = \frac{1}{3}S'R$



Мал. 21



Мал. 22

Об'єм многогранника більший, ніж об'єм кулі, обмеженої сферою, але менший, ніж об'єм кулі з тим самим центром, а радіусом $R+\varepsilon$. Таким чином,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'R < \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3$$

Звідси

$$4\pi R^2 < S' < 4\pi(R+\varepsilon)^2\left(1+\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

Ми бачимо, що площа поверхні описаного многогранника при необмеженому зменшенні розмірів його граней, тобто при необмеженому зменшенні є, прямує до $4\pi R^2$. У зв'язку з цим величину $4\pi R^2$ приймають за площу сфери.

Отже, ***площа сфери радіуса R обчислюється за формулою***

$$S = \pi R l$$

Аналогічно знаходять площу сферичної частини поверхні кульового сектора, тобто площу сферичного сегмента. Для неї дістають формулу

$S=2\pi RH$,

де H – висота сегмента.

2.2. Метод координат

Координатний метод – спосіб визначення положення точки (на прямій, на площині, в просторі) за допомогою чисел (для декартової системи координат). За допомогою координатного методу алгебраїчні рівняння можна трактувати в вигляді геометричних образів (графіків) і, навпаки, шукати розв'язання геометричних задач за допомогою аналітичних формул (рівнянь і їх систем).

Суть методу кординат полягає в тому, що розміщення геометричних фігур виражають числами у вибраній системі координат. У шкільному курсі геометрії метод координат переважно зводиться до використання законів векторної алгебри для запису геометричних фактів, виражених відповідними твердженнями. У ході розв'язування задач знайдені результати інтерпретують у геометричній формі, що дає змогу одержати шукану відповідь.

Геометричні задачі в координатній геометрії можна умовно поділити на дві групи. До першої групи відносяться задачі, в яких умову сформульовано в термінах координатної геометрії.

Задача 1. Довести, що трикутник з вершинами A(1;1), B(1;5), C(5;4) - рівнобедрений.

Розв'язання таких вправ зводжиться до використання відомих учням формул. Так, в нашому прикладі, знаходимо довжини сторін трикутника: AB= $\sqrt{(4.-1)^2}+(5-1)^2=5$; AC=$\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$; BC=$\sqrt{(4-5)^2+(5-4)^2}=\sqrt{2}$. Таким чином, AB=AC і, означає, трикутник ABC - рівнобедрений (але не рівносторонній). До другої групи відносяться задачі, у формулюванні яких немає вказівок на зв’язок їх з координатним методом. Як правило, такі задачі можна розв’язувати різними методами, координатний метод є одним із них. Ці задачі, звичайно, даються учням складніше, ніж задачі першої групи, тому ми приділяємо їм більше уваги.

Загальна схема розв’язування задач другої групи полягає в слідуючому:

1.На основі попереднього аналізу умови задачі приходимо до висновку, що її краще розв’язувати координатним методом.

2.Вибираємо систему координат на площині з таким розрахунком, щоб подальші алгебраїчні викладки були найбільш простими.

3.Знаходимо в цій системі координати потрібних для розв’язування елементів, використовуючи умову задачі і відомі із теорії формули.

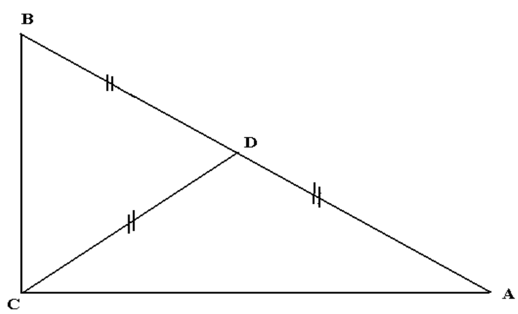
4.Записуємо алгебрїчні вирази, що випливають з умови задачі, і перетворюємо їх потрібним нам чином.

5. Отриманий результат переводим з координатної мови на мову, в якій сформульована задача.

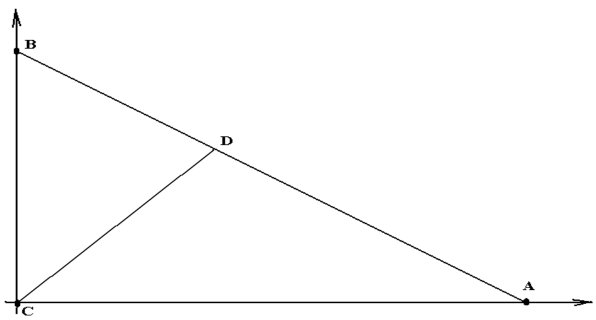
Вперше з цією схемою учні 7 класу зустрічаються в кінці теми “Декартові координати на площині ” - чотири останні уроки відводяться тут на розв’язування задач. Розглянемо деякі із вправ, які доцільно розглянути на цих уроках.

Задача 2. Довести, що середина прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершини.

Розв’язування.Нам даний прямокутний трикутник ABC ($\angle C=90^0$),



Мал. 23



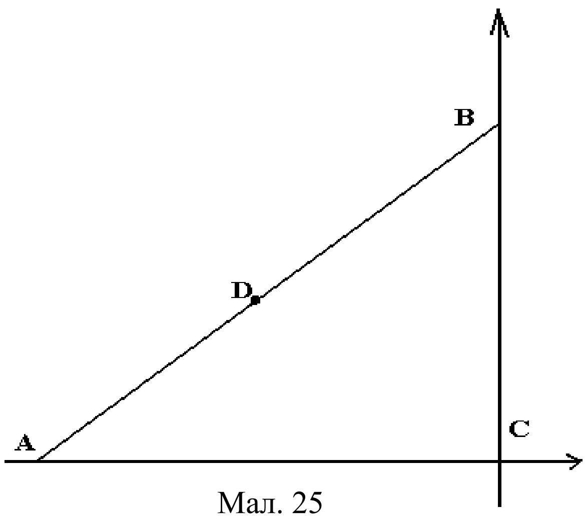
Мал. 24

D - середина гіпотенузи. Потрібно довести, що DA=DB=DC. Аналізуючи задачу, бачимо, що її можна розв’язати координатним методом, тобто потрібно знайти довжину відрізків, для цього ми скористаємось простою формулою. Тепер нам слід вибрати систему координат так, щоб координати всіх чотирьох потрібних нам точок A,B,C, легко можна було знайти. Це можна зробити по-різному. Ось один із способів (див. рис.). Тут точка C має координати (0;0). Точки A і B лежать на протилежних координатних півосях, тому їх координати мають вигляд: A(a;0), B(0;b), де a, b - довжини катетів нашого трикутника. Тепер легко знайти координати точки D - середини відрізка AB: D($\frac{\grave{a}}{2}$;$\frac{}{2}$). Залишається порахувати і порівняти між собою довжини відрізків DA, DB, DC.

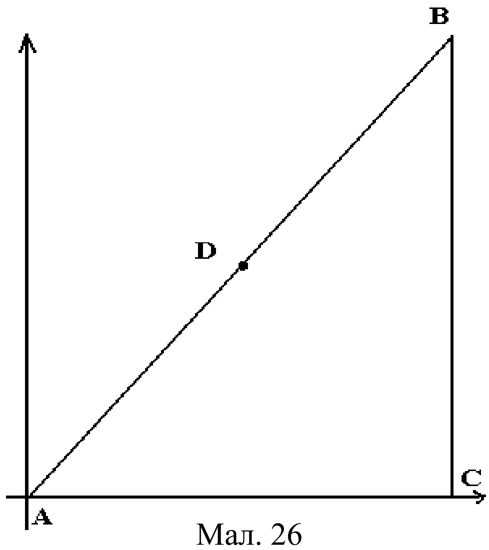
$$DC=\sqrt{\left(\frac{\grave{a}}{2}\right)^2+\left(\frac{}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\hat{o}^2+}\quad;$$

$$DB=\frac{1}{2}\sqrt{\grave{a}^2+}\quad;\ DA=\frac{1}{2}\sqrt{\grave{a}^2+}\quad.$$

Отже, DA=DC=DB, що і потрібно було довести. В цій задачі систуму координат можна було вибрати і іншим чином. Ось дві прості схеми:

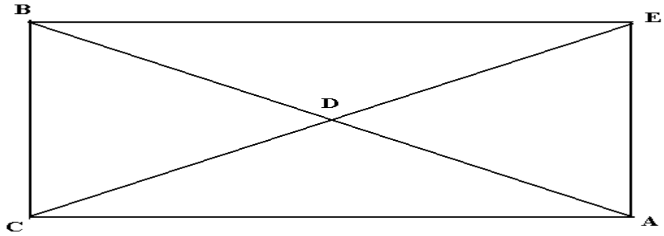


Мал. 25



Мал. 26

Звичайно, цю задачу можна було б розв’язати і без використання координатного методу. Розглянимо одне із таких доведень. Дано прямокутний трикутник ABC. Через кінці гіпотенузи AB проведемо прямі, паралельні катетам (див. рис.), до перетину в точці E. Отримаємо чотирикутник ACBE,

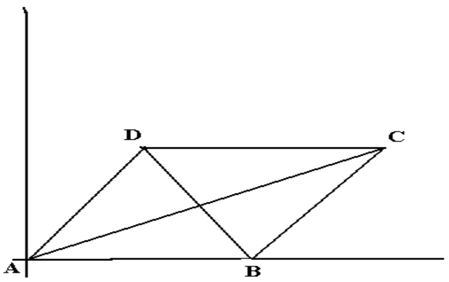


Мал. 27

який, очевидно, є прямокутником. Але тоді його діагоналі AB і CE рівні і в точці перетину діляться пополам, отже, CD=BD=AD, а це означає, що в трикутнику ACB середина гіпотенузи D однаково віддалена від вершин A,B,C.

Задача 3. Довести, що якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм - прямокутник.

Розв'язування. Будемо розв'язувати задачу координатним методом (хоч можливий і не координатний розв'язок).

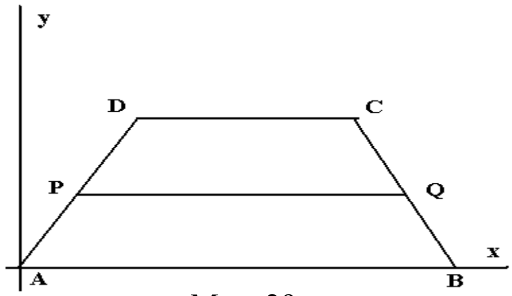


Мал. 28

Виберемо систему координат так, щоб вершина A паралелогорама знаходилась на початку координат, вершина B належала протилежній півосі X, а вершини C і D - першій чверті. Координати точки A (0;0). Тобто ні розмірів, ні форми паралелограма в задачі не вказано, ми позначимо координати вершини B і D довільно: B(a;0), D(b;c). Координати вершини C тепер визначаються однозначно: C(a+b;c). За умовою AC=BD. В координатах це запишеться так: $\sqrt{(\grave{a}+\hat{o})^2+\hat{o}^2}=\sqrt{(\grave{a}-\hat{o})^2+(-\hat{o})^2}$, або

$(a+b)^2+c^2=(a-b)^2+c^2$, або $(a+b)^2-(a-b)^2=0$, 4ab=0. Тобто за умовою $a\rangle 0$, то звідси слідує, що b=0. Це означає, що вершина D має координати: D(0;c), тобто належить осі Y. Але тоді $\angle BAD=90^0$, і , відповідно паралелограм ABCD - прямокутник.

Задача 4. Довести, що середня лінія трапеції паралельна основам і рівна їх півсумі.



Мал. 29

Розв’язування. Цей результат вже відомий учням (теорема 6.9), отримаємо зараз координатне доведення. Виберем систему координат так, як показано на рисунку. Нехай P і Q - відповідно середини бокових сторін AD і BC, тоді P($\frac{}{2}$;$\frac{}{2}$), Q($\frac{}{2}$;$\frac{}{2}$). Як бачимо, точки P і Q мають одну і ту ж координату. Це означає, що пряма PQ паралельна осі X тобто основам трапеції AB і CD. Перша частина твердження доведена. Щоб переконатися в тому, що PQ=$\frac{1}{2}$(AB+CD), скористаємось формулою відстані між точками: PQ= $\sqrt{\left(\frac{}{2}-\frac{\grave{a}+}{2}\right)^2+\left(\frac{}{2}-\frac{}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\hat{o}-\grave{a}-}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$|b-a-c|=-$\frac{1}{2}$ (b-a-c)=$\frac{\grave{a}+\hat{o}-\hat{o}}{2}$ (тут b-a-c〈 0, тобто за змістом задачі c〉 b). Аналогічно AB=a, CD=$\sqrt{(\hat{o}-\hat{o})^2+(1-1)^2}$=|b-c|=c-b. Тепер маємо: $\frac{1}{2}\left(\hat{A}\grave{E}-ÇÐ\right)=\frac{1}{2}$(a+c-b)=PQ, що й потрібно було довести.

2.3. Векторний метод

Ідея вектора є однією з фундаментальних ідей сучасної математичної науки та її застосувань. На векторній основі нині розвиваються лінійна алгебра, аналітична і диференціальна геометрія, теорія багатовимірних просторів. Вектори широко застосовуються в сучасній фізиці, технічних науках. Тому природно, що в 50-х роках XX ст. на початку всесвітнього руху за реформу шкільної математичної освіти у всіх розвинених країнах було висловлено одностайну думку впровадити ідею вектора в шкільну математику.

Геометричні задачі, що розв'язуються за допомого ювекторів, можна умовно розділити на двігрупи.

До першоїгрупивідносятьсязадачі, в якихумовавжесформульована на мовівекторів. До другоїгрупивідносятьсязадачі, в формулюванніяких не вказано на зв’язокїх з векторним методом. Як правило, такізадачіможнарозв’язуватирізними способами, - векторнийспосіб є одним з них. Цізадачідаютьсяучнямважче, ніжзадачіпершоїгрупи, тому ми приділимоїмосновнуувагу.

В своючергузадачіпершої і другоїгрупиділяться на два вида:

1 афіннізадачі, 2. метричнізадачі.

Успіх у вирішені задач за допомогоювекторноїалгебрилежитьвосновінаступних (умовах) уміннях:

1. вмінняпереводити текст задачі з геометричноїмови на векторну і навпаки;

2. вміннявиконуватиоперації над векторами;

3. вмінняпредставляти вектор у виглядісуми (різниці) векторів, у виглядіперетворення вектора на число;

4. вміннявиконуватиперетвореннявекторнихвиразів;

5. вмінняпереходитивідспіввідношень між векторами до довжин і навпаки;

6. вміннязастосовуватиосновнівекторнірівняння (формули) до розв’язуваноїзадачі.

Зауваження 1: Основнівекторнірівняння (формули) ми називаємобазисними задачами.

При розв’язуванні задач зводимодо обгрунтуванняколінеарності векторів, а саме:

1. паралельності прямих (відрізків);
2. належності трьох точок одній прямій;
3. доведення того, щоданийчотирикутник є паралелограмом;
4. три данихпрямих (відрізків) перетинаються в однійточці,

зручнодотримуватисянаступноїсхеми:

1.Аналіз змістузадачі, якийвключає:

a) виділенняумови і вимогизадачі;
b) виконаннямалюнку до задачі;
c) записи умови і вимог через загальноприйнятіпозначення.

2.Визначення можливостірозв'язаннязадачі за допомогоюапаратавекторноїалгебри, щовлючає з'ясування питання, що означає вирішити задачу на мові векторів. При цьому зручно використовувати таблиці переводу з геометричної мови на векторну.

1. Доведення колінеарностівекторіввключає:

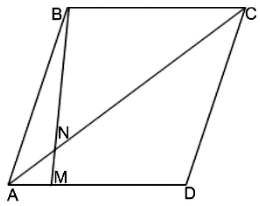
a) вибірдвохнеколінеарнихвекторів (по можливості тих, що виходять з однієї точки);

b) розкладання шуканихіданихвекторів по вибраних базисних векторах;

c) перетворенняотриманихвекторнихрівнянь до встоновленняколінеарності (неколінеарності) векторів.

Для ілюстрації застосування схеми розглянемо задачу:

Приклад 1.На стороні *AD* і діагоналі *AC* паралелограма взяті відповідно точки *M*і *N* так, що$AM = AD$, $AN= AC$. Довести, що *B, M,* і *N* лежать на одній прямій.



Мал. 30

I.	Аналіз змісту задачі	
Дано	На геометричній мові.	На мові векторів.
	ABCD-паралелограм $AM = 1/5AD$, $AN= 1/6AC$	$AB=DC$; AB і AD- не колінеарні. $\overline{AM}=1/5AD$, $AN= 1/6AC$
II.	Визначенняможливостірозв'язаннязадачі на мові векторів.	
Доведення	*B, M, N* - лежать на одній прямій. Доказ $\overline{BM} = d\,BN$	

Як бачимо, в п. II ми вияснили можливість розв'язання задачі за допомогою векторів належність трьох точок прямій припускає на мові векторів доведення колінеарності векторів $\overline{BM}$ і $\overline{BN}$.

III. ***Доведення:*** $\overline{BM}=\overline{AM}-\overline{AB}=1/5\overline{AD}-\overline{AB}$, $\overline{BN}-\overline{AB}=1/6\overline{AC}-\overline{AB}$.

Звідси випливає, що $5\overline{BM}=\overline{AD}-5\overline{AB}$; $6\overline{BN}=\overline{AC}-6\overline{AB}$

Віднімемо відпершого рівняння друге: $5\overline{BM}-6\overline{BN}=\overline{AD}-\overline{AC}+\overline{AB}=\overline{CD}+\overline{AB}=\overline{0}$, $\overline{BM}=6/5\overline{BN}$.

Т. О. вектори $\overline{BM}$ і$\overline{BN}$ колінеарні і тоді т. *B, M* і *N* лежать на одній прямій.

Завдання для самостійної роботи

1. Діагоналі паралелограма *ABCD*перетинаються в точці *O*.Знайтиплощу паралелограма, якщо *AB = a, BC b* і $\angle AOD = \alpha$.(В-дь: $\frac{a^2 - b^2}{2} tg\alpha$).

2. На стороні *AB* трикутника *ABC* узята точка *M*, така, що $\frac{AM}{MB} = 2$. Знайти довжину *CM*, якщо $AC = 3,\ BC = 4$ і $\angle ACB=120°$.(В-дь: $\frac{7}{3}$).

3. Знайдіть довжину медіани *CD*трикутника *ABC*, знаючи, що $BC = a,\ AC = b$ і $\angle C = \gamma$.(В-дь: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$).

4. Визначити, при якому значенні *x* вірна векторна рівність $\vec{CM}$ = $= \frac{3}{2}\vec{AB} + x\,\vec{AK}$ якщо *AK*і *CM* – медіани трикутника *ABC*. (В-дь: *x* = -2).

5. Знайти *x*, при якому виконується векторна рівність $\vec{AM_3} = \frac{2}{3}\vec{AM_4} + x\,\vec{AM_1}$ де точки M_1, M_2, M_3, M_4 розташовані на одній прямій так, що $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$ а точка *A* нележить на цій прямій. (В-дь:$x=\frac{1}{3}$).

6. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ якщо відомо, що вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. (В-дь: 60°).

2.4. Векторно-координатний метод

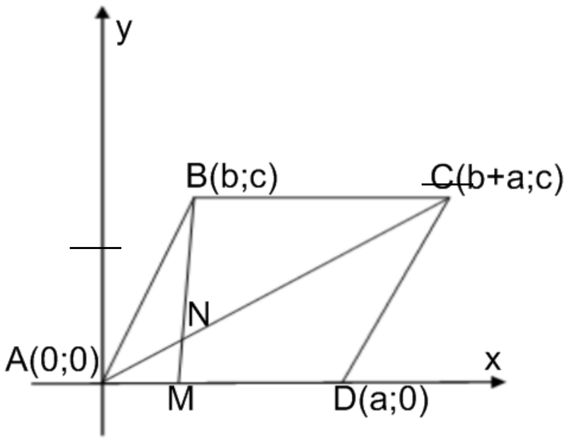
Векторно-координатний метод – один із важливих методів розв’язування задач, який має широкі можливості використання і проводить зв’язки не тільки між розділами математики, а і міжпредметні. Даний метод має велике практичне значення, так як застосовується у фізиці, картографії, інженерній практиці, геодезії тощо.

При розв'язуванні задач векторним методом широко застосовується координатний метод. Сумісне використання двох вище вказаних методів до розв'язання задач отримаємо назву Векторно-координатного методу.

Розглядання розв'язання задач, вирішуваних векторно-координатним методом, необхідне тому, що учні розглядають в курсі геометрії 8 класу тему: «Вектори на координамній площині» і отримують значний запас знань про вектори на координатній площині.

В якості прикладу розглянемо тільки, що розв'язану задачу.

Задача. На стороні *AD* і діагоналі *AC* паралелограма взяті відповідно точки *M* і *N* так, що *AM* = *AD*, *AN*= *AC*. Довести, що *B, M,* і *N* лежать на одній прямій.



Мал. 31

Розв'язання. Систему координат виберемо так, як показано на рис.2. Координати т. *M* очевидно*: M(I/5a;0).* Знайдемо координати т. *N* : *AN* =

= *1/6 AC=(b+a; c),*

Тому $AN = (\frac{B\cdot A}{6};\frac{C}{6})$ *Т.к.* $\frac{\frac{1}{5}(a-5B)}{\frac{1}{6}(a-53)} = \frac{6}{5} u \frac{-C}{-\frac{5}{6}C} = \frac{6}{5}$, то векори $\overline{\mathrm{BM}}$ і BN колінеарні, тробто точки B,M,N лежать на одній прямій.

Розглянемо тепер вектори *i ,* покажемо, що вони колінеарні.

Метричні задачі, що розв'язуються за допомогою векторів чи векторно – координатного методу, діляться на наступні основні види:

1) на обчислення довжини відрізка;

2) на обчислення кута між прямими (відрізками);

3) на використання необхідної і достатньої умови перпендикулярності двох векторів.

При навчанні розв’язання задач вказаних видів доцільно використовувати наступну схему:

Загальна схема розв’язування метричних задач.

I. Загальні вказівки.

1. Провести аналіз змісту задачі (виділити умову і вимогу; виконати малюнок; записати умову і вимогу в загальноприйнятих позначеннях).

2. Визначити можливість розв’язання задачі за допомогою векторів чи векторно – координатного методу (перевести з геометричної мови на мову векторів чи векторно – координатну мову).

3. Розкласти вектори по двох базисних неколіанерних векторах. Конкретно по видах:

а) Обчислення довжини відрізка.

1). В якості базисних вибрати два неколінеарні вектори, у яких відомі довжини і кут між ними;

2). Розкласти шуканий вектор по базисним векторам;

3). Знайти скалярний квадрат вектора.

б) Обчислення кута між прямими.

1). В якості базисних вибрати два неколінеарні вектори, у яких відомі відношення довжин і кут між ними;

2). Розкласти вектори, що визначають шуканий кут, по базисним векторам;

3). Знайти косинус кута між ними.

в) Використання необхідної і достатньої умови перпендикулярності двох векторів.

1). Доведення перпендикулярності двох прямих, відрізків;

2). В якості базисних вибрати два неколінеарні вектори, у яких відомі довжини (чи відношення довжин) і кут між ними;

3). Розкласти по базисних векторах вектори, перпендикулярність яких необхідно довести;

г) Використання перпендикулярності двох прямих (відрізків).

1). В якості базисних векторів вибрати вектори, які перпендикулярні;

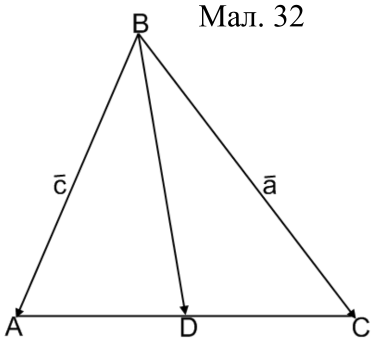
2). Розкласти по базисних векторах необхідні елементи умови задачі;

3). Знайти (довести) потрібне співвідношення, використовуючи скалярне перетворення вектором з урахуванням перпендикулярності базисних векторів.

Розглянемо задачі, що ілюструють застосування даних вище схем.

Приклад 2. Знайти косинус кута, утвореного бісектрисою кута трикутника з протилежною стороною, якщо відношення довжин двох інших сторін трикутника дорівнює 3, а величина кута між цими сторонами рівна.

Розв'язання. Позначимо базисні вектори: $\overline{BA}=\overline{C}$; $\overline{BC}=\overline{a}$; $(\overline{BA}$^$\overline{BC})=d$



Мал. 32

Шуканий кут $(\overline{BD}$^$\overline{AC})=\psi$.

Виходячи з властивостей бісектриси внутрішнього кута трикутника, маємо:

AD : DC = AB : BC; AD : DC = 1 : 3 звідки

$\overline{DC}=3\overline{AD}=3\overline{m}.\ \overline{BC}-\overline{BD}=3(\overline{BD}-\overline{BA})$

Звідки = $\overline{DC}=3\overline{AD}=3\overline{m}.\ \overline{BC}-\overline{BD}=3(\overline{BD}-\overline{BA})$.

Звідки $\overline{BD}=1/4(\overline{BC}+3\overline{BA})=1/4(\overline{a}=3\overline{c}).\ \overline{AC}=\overline{BC}-\overline{BA}=(\overline{a}-\overline{c})$.

Обчислити косинус кута між векторами *BD* і *AC*, враховуючи те, що

тобто $3|\overline{\mathrm{BA}}| = \overline{|\mathrm{BC}|}\ \text{т. е.}\ 3|\pi| = |\overline{\mathrm{C}}|$

$$cos\,4 = \frac{-\frac{1}{4}(\bar{a}+3\bar{c})(\bar{a}-\bar{c})}{\sqrt{\frac{1}{10}(\pi+3\bar{c})^2}\sqrt{(\bar{a}-\bar{c})^2}} = \frac{\sum_{\bar{a}+2\overline{a_C}-3\bar{C}} 2}{\sqrt{a^2+6ac+c^2}\sqrt{a^2-2a_C+c^2}}$$

$$= \frac{|\bar{c}|^2+2|\bar{c}|\mathrm{COSd}-|\bar{c}|^2}{\sqrt{9|\bar{c}|^2+18|\bar{c}|^2\cos d+9|\bar{c}|^2}\sqrt{9|\bar{c}|^2+6|\bar{c}|^2\cos d+9|\bar{c}|^2}} =$$

$$= \frac{\mathbf{6(1+\cos\alpha)}}{\sqrt{\mathbf{6(1+\cos\alpha)(5-3}\boldsymbol{COs})}} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}\ \boldsymbol{cos\ d}}{\mathbf{5-3\cos\alpha}}}$$

Завдання для самостійної роботи

1. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з довжиною ребра, рівною $\sqrt{6}$ м. через діагональ куба AC_1 паралельно діагоналі підстави *BD* проведена площина. Знайти тангенс кута нахилу ребра *AD* до цієї площини і відстань ребра A_1B_1 до цієї площини. (В-дь: $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 1,5).

2. Підставою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник *ABCD*із сторонами $AB = 1м, BC = 8м$. Бічні ребра мають довжину 2м. На відрізку BC_1 вибрана точка *P* так, що кут між векторами AB_1 і *AP* рівний $arctg3$. Знайти відношення $BP : PC_1$.(В-дь: 1).

3. Висота прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ рівна $\sqrt{39}$ м. кут *З* підстави *ABC* рівний 90°, *BC* = 4м, *AC* = 3м. Знайти градусну міру кута прямими *KM* і *BC*, якщо точки *K* і *M* – середини ребер AA_1 і *AB*. (В-дь: 60°).

4. Даний куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 1м. Знайти градусну міру кута прямими AC_1 і CB_1.(В-дь: 90°).

5. Площа повної поверхні правильної трикутної призми в два рази більше її бічної поверхні. Знайти кут прямими AC_1 і BA_1.(В-дь: $\varphi = \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)$).

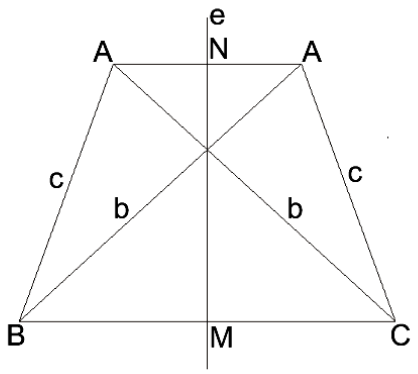
6. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайти кут FE де *F* – середина *DC*, а *E* – середина B_1C_1 і площиною A_1BD.(В-дь: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$) [56,с. 42-43].

2.5. Метод геометричних перетворень

2.5.1. Метод осьової симетрії

Осьовою симетрією називається таке перетворення, при якому кожній точці *M* даної фігури *F* ставиться у відповідність точка M', яка симетрична їй відносно прямої *l* – вісі симетрії. Зазвичай осьову симетрію фігури F відносно прямої *l* позначають $S_l(F)$

Приклад 1. Побудувати трикутник за двома сторонами і різниці його кутів, B і C, які лежать проти його сторін.



Мал. 33

I. ***Аналіз.*** Нехай трикутник *ABC* побудований. $AC = B$; $AB = c$, $\angle B - \angle C = d$.

Проведемо через середину основи *BC* перпендикуляр *MN* і приймаємо його за вісь симетрії для побудови симетричного трикутника *A1BC*.

Розглянемо трикутник A_1AC: $A_1C = c$, $A_1B = B$; $\angle ACA_1 = \angle B - \angle C = d$, оскілки $\angle BCA_1 = \angle B$.

Так як в трикутнику A_1BC відомі дві сторони і кут між ними , то його можна побудувати.

II. ***Побудова.***

1. Будуємо трикутник A_1BC (за двома сторонами і кутом між ними).
2. Ділимо відрізок AA_1 – навпіл.
3. Будуємо пряму *l,* перпендикулярну AA_1 і що проходить через його середину.
4. Через точку *C* проведемо пряму, паралельну прямій AA_1.
5. Відкладаємо відточки перетину прямих C і CB рівний відрізок MC. Отримаємо точку B.
6. Трикутник ABC побудований.

III. ***Доведення.*** Трикутник АВС задовільняє умову задачі за побудовою.

IV. ***Дослідження.*** Задача завжди має єдиний розв’язок**.**

Завдання для самостійної роботи

1. У трикутнику *ABC* проведена бісектриса *AK*. Знайдіть сторону *AC*, кути *B* і *З*, якщо $\angle З$ – $\angle B$ = 45°, *CK*= 1 і *BK* = $\sqrt{2}$.(В-дь: $\angle У$ = 45°, $\angle З$ = 90 °, $AC = 1 + \sqrt{2}$).

2. У трикутнику *ABC* проведена бісектриса *CD*. Знайдіть сторони *AC* і *BC*, якщо $BD = 1,\ AD = \sqrt{3}$ і $\angle D = 120^\circ$.(В-дь: $BC = 1 + \sqrt{3},\ AC = 3 + \sqrt{3}$).

3. Даний чотирикутник *ABCD*, діагональ *AC* якого ділить кут *A* навпіл. Відомо, що $AB = 3,\ BC = \sqrt{3},\ CD = 2$ і *AD* = 4. Знайдіть кут *A* чотирикутника і діагональ *AC*. (В-дь: $\angle A=60°$; $AC = 2\sqrt{3}$).

4. Знайдіть висоту *CH* трикутника *ABC*, якщо *BC* = *a, AC* = *b* і різниця кутів *A* і *B* рівна 90. (В-дь: $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).

5. Даний прямокутник *ABCD*. На його сторонах *AB, BC, CD* і *DA* узяті точки *A1 B1 C1* і *D1*. Яке найменше значення може мати периметр чотирикутника *A1B1C1D1*, якщо діагональ прямокутника рівна *d*? (В-дь: 2d).

2.5.2. Метод центральної симетрії

Центральна симетрія-це перетворення площини, при якому для будь-якої точки X знайдеться точка X' цієї площини, яка лежить на прямії ОX на відстані ОX', що дорівнює ОX.

<u>Підготовчі задачі.</u>

1. Доведіть, що будь-які два рівних і паралельних відрізка (або розміщені на одній прямій) симетричні відносно деякої точки О.

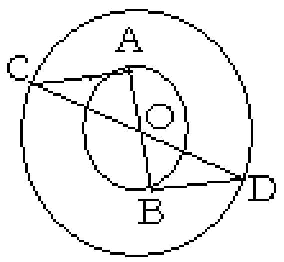
2. Доведіть, що будь-які два рівних кола симетричні відносно середини відрізка, який з´єднує центри цих кіл.

3. Доведіть, що два рівних кола, які дотикаються зовні, симетричні відносно точки дотику.

4. Доведіть, що дві паралельні прямі симетричні відносно будь-якої точки, яка рівновіддалена від цих прямих.

Приклад 1. Нехай АВ і СД –діаметрально протилежні точки двох концентричних кіл. Доведіть, що АС=ВД.

Мал. 34



$$\left.\begin{array}{l} Z_0(A)=B \\ Z_0(B)=D \end{array}\right| \Rightarrow Z_0(AC)=BD \Rightarrow AC=BД.$$ Разом з тим доведено, що AC паралельне $BД$.

Приклад 2.

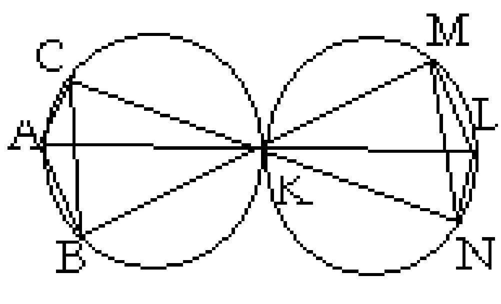
Два рівних кола w і w_1 дотикаються в точці K. Три прямі, які проходять через точку К, перетинають ці кола ще раз в точках А, В, С і L, M, N. Доведіть, що трикутник АВС рівний трикутнику LMN.

Розв´язання.

$$Z_k(A)=Z_k((KA)\cap w)=Z_k(KA)\cap Z_k(w)=KL\cap w_1=L.$$

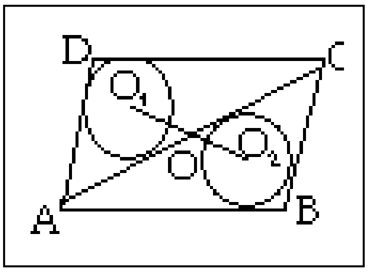
Аналогічно: $Z_k(B)=M,\ Z_k(C)=N$,а тому

$$Z_k(\triangleleft ABC)=\triangleleft LMN \Rightarrow \triangleleft ABC=\triangleleft LMN$$



Мал. 35

Приклад 3.Чотирикутник АВСД-паралелограм. O_1 і O_2-центри кіл вписаних в трикутник АВС і АДС.Доведіть, що відрізки АС, ВД і O_1O_2 перетинаютьсяв одній точці.



Мал. 36

Розв΄язання.

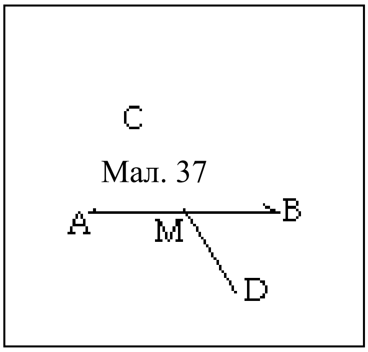
Розглянемо симетрію з центром в точці O.

$Z_0(ABC) = CDA.$

$Z_0(w \in ABC) = w_1 \in CDA \Rightarrow Z_0(O_1) =$

$= O_2 \Rightarrow AC \cap BD \cap O_1O_2 = O$

Приклад 4. Побудувати трикутник, якщо дані дві його сторони і медіана, проведена до третьої сторони.



Мал. 37

Розв΄язок

1. Аналіз. Припустимо, що шуканий трикутник побудований. $AC = b, CB = a, CM = m_c$

Побудуємо трикутник АМД, симетричний ВМС відносно точки М.

$\left. \begin{array}{l} Z_M(MC) = MD \\ Z_M(BC) = DA \end{array} \right| \Rightarrow$ Звідки слідує, що всі сторони $\triangleleft$ АВС відомі.

Побудова.

Будємо трикутник АДС по трьом сторонам (СД=2m_c)

Ділимо ДС пополам.

Будуємо $Z_M(A)=B$

ТрикутникАВС побудовано

3.Доведення АС=b за побудовою $Z_M(AD) = CB = a$ (за побудовою)

МД=МС=m_c за побудовою

4.Дослідження. Задача має єдиний розв΄язок, якщо можливо побудувати трикутник по сторонам а, в і подвоєній медіані m_c [56,с. 52-53].

2.5.3. Метод повороту навколо точки

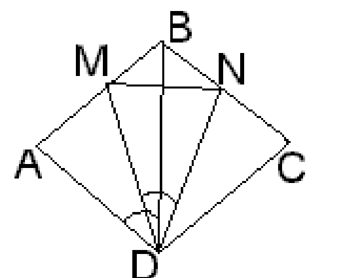
Підготовчі задачі

1. На площині дана пряма а, центр повороту О і кут повороту α. Визначити положення прямої а після повороту.

2. Даний відрізок АВ повернути на кут α навколо даного центра О і в новому його положенні відшукати точку C_1, яка б відповідала точці С на відрізку АВ.

3. Дане коло повернути навколо центра повороту O_1 на кут α.

4. Дано відрізок АВ і кінці повернутого на кут α відрізка A_1B_1.Знайти центр повороту.



Мал. 38

Приклад 5. На сторонах АВ і ВС ромба АВСД, у якого кут ВАД=60^0 взяті відповідно точки M і N так, що AM=BN. Доведіть, що трикутник МДN правильний.

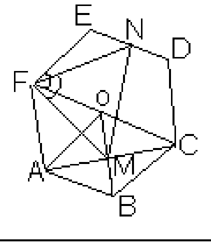
Розв´язання Розглянемо рисунок. Легко бачити, що ДА=ДВ=ДС і ‹АДС=‹ВДС=60^0. А тому

$$\left.\begin{matrix} R^{-60^0}(A)=B \\ R^{-60^0}(B)=C \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} R_D^{-60^0}(AB)=(BC) \\ M\in AB, N\in BC \\ AM=BN \end{matrix}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow R_D^{-60^0}(M)=N \rightarrow \left\{\begin{matrix} DM=DN \\ \angle MDN=60^0 \end{matrix}\right| \rightarrow \Delta MDN\text{-рівносторонній.}$$

Приклад 6. В правильному шестикутнику ABCDEF , точка M –середина діагоналі AC, N-середина сторони DE. Доведіть, що трикутник MNF правильний.

Розв´язання. Розглянемо малюнок.Нехай О-центр даного шестикутника, тоді АВСД-ромб і тому М-середина ОВ. Розглянемо поворот R^{-60} знайдемо образ точки N.Маємо:

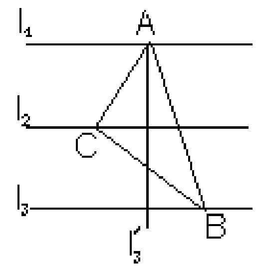


Мал. 39

$$R_F^{-60^0}(E)=O, R_F^{-60^0}(D)=B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_F^{-60^0}(ED)=(OB) \Rightarrow R_F^{-60^0}(N)=M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} FN=FM \\ \angle MDN=60^0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \Delta MNF - \text{правильний}$$

Приклад 7. Побудувати рвнобедрений трикутник вершини якого належать трьом даним паралельним прямим l_1 і l_2 ,l_3 причому l_2 лежить міжl_1 іl_3 , і їй належить т.С.

Мал. 40



Розв´язання. Дано $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, С-вершина прямого кута.

1. Аналіз. Припустимо, що трикутник *ABC* побудований.

Розглянемо поворот $R_C^{90^0}$ і знайдемо образ точки А.

Тоді А=$R_C^{90^0}(B)$.Побудуємо образ прямої l_3 при повороті $R_C^{90^0}$. $R_C^{90^0}(l_3)=l_3'$.Так як точка $B\in l_3$, то точка А належить $l_3' \rightarrow A=l_1\cap l_3'$.

Маючи точку А, знаходимо $B=R_C^{-90^0}(A)$

2. Побудова.

1.Вибираємо довільну точку С прямої l_2.

2.Будуємо $l_3' = R_C^{90^0}(l_3), l_3' \cap l_1 = A$

3.Будуємо $B=R_C^{90^0}(A)$.

Шуканий трикутник АВС побудований.

3.Доведення. $\left.\begin{array}{l} C=R_C^{-90^0}(C) \\ B=R_C^{-90^0}(A) \end{array}\right| \begin{array}{l} \rightarrow CB=R_C^{-90^0}(CA) \\ CB=CA, \angle ACB=90^0 \end{array}$

1. Дослідження. Задача завжди має розв’язок тому, що при повороті $R_C^{90^0}$ пряма l_3´ завжди пертинає пряму l_1 . Якщо взяти поворот $R_C^{-90^0}$,то отримаємо трикутник, який симетричний і рівний отриманому трикутнику. Як бачимо, задачамає єдиний розв’язок.

Підготовчі задачі

1. Доведіть, що діагоналі ромба являються його осями симетрії.

2. Доведіть, що в тому і лише в тому випадку має вісь симетрії , якщо вона рівнобічна.

3. На рівних сторонах рівнобедреного трикутника АВС відкладені рівні відрізки АМ і СN. Доведіть, що:

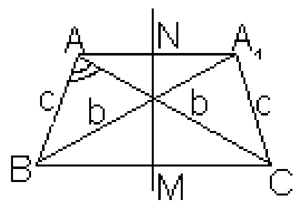
а) відрізки СМ і АN рівні;

б) точка перетину прямих СМ і АN належить бісектрисі ВД трикутника.

4. Доведіть, що пряма, проведена через середину основи рівнобічної трапеції, ділить пополам і другу основу трапеції.

5. На рівних сторонах рівнобічної трапеції АВСД поза нею побудовані рівносторонні трикутники АДМ і ВСN. Доведіть, що:

а) MB=NA;MC=ND;



Мал. 41

б) MN║AB(або MN і AB належать одній прямій).

<u>Приклад 8.</u> Побудувати трикутник по двом сторонам b і c і різниці його кутів B і C, які лежать проти цих сторін.

1.Аналіз. Нехай трикутник ABC побудований. AC=b, AB=c, ‹B-‹C=d.

Проведемо через середину основи BC перпендикуляр MN і приймемо його за вісь симетрії для побудови симетричного трикутника A_1BC.

Розглянемо трикутник A_1AC: A_1C=c;A_1B=b; ‹ACA_1=‹B-‹C=α; так як ‹BCA_1=‹B.

Так як в трикутнику A_1AC відомі дві сторони і кут між ними, то його можна побудувати.

2. Побудова.

1.Будуємо трикутник A_1AC (по двом сторонам і куту між ними).

2.Ділимо відрізок AA_1 пополам.

3.Будуємо пряму l, перпендикулярну AA_1 і яка проходить через його середину.

4.Через точку С проведемо пряму, яка паралельну прямій AA_1.

5.Відкладаємо від точки перетину прямих С і СВ рівний відрізок МС. Отримаємо точку В.

6.Трикутник АВС побудований.

3. Доведення. Трикутник АВС задовільняє умову задачі за побудовою.
4. Дослідження. Задача завжди має єдиний розв'язок [56,с. 54-55].

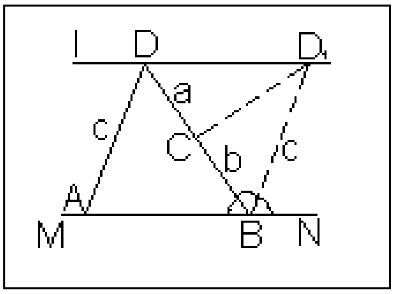
2.5.4. Метод паралельного переносу

Підготовчі задачі.

1. Побудуйте трапецію знаючи чотири відрізки, які рівні сторонам трапеції.
2. Доведіть, що із всіх трапецій з даною основою і висотою, найменший периметр має рівнобічна трапеція.
3. Побудуйте трапецію знаючи чотири відрізки, які рівні основам і діагоналям трапеції.
4. Побудувати трикутник по трьом його медіанам.

Приклад 9. Побудувати чотирикутник за трьома сторонами і двома кутами, прилеглими до невідомої сторони.

Мал. 42



Розв'язання.

1. Аналіз. Нехай наш чотирикутник побудований і задовільняє даній умові задачі: СД=a, СВ=b, АД=c; ‹ДАВ=‹А; ‹СВА=‹В.

Зробимо паралельний перенос відрізка АД в точку В. Тоді ‹$Д_1$BN=‹ДАВ=‹А. Так як ‹СВА=‹В, то кут СВ$Д_1$=180^0-(‹А+‹В).

Розглянемо трикутник СВД$_1$:СВ=b; ВД$_1$=с;‹СВД$_1$=180^0-(‹А+‹В).

Так як відомі дві сторони і кут між ними, то трикутник СВД$_1$- можна побудувати.

2. Побудова.
1. Будуємо MN.
2. Будуємо ‹СВД$_1$=180^0-(‹А+‹В).
3. Будуємо трикутник СВД$_1$(за двома сторонами і кутом між ними).
4. Для побудови тоочки Д будуємо пряму l ,паралельну MN і яка проходить через точку Д.
5. Знаходимо точку Д(радіусом рівним с центром в т. С проводимо дугу до перетину з прямою l ,яка проходить через точку Д$_1$, паралельну MN).
6. Знаходимо точку А(можна двома способами: 1) провести пряму, паралельну Д$_1$В і яка проходить через Д; 2) радіусом рівним с з центром в точці Д описує дугу до перетину з прямою MN)/
3. Доведення.Чотирикутник АВСД задовільняє умові задачі за побудовою.
4. Дослідження. Задача має:

а) два розв'язки, якщо дуга,проведена із т. С радіусом рівним а, перетне пряму l в двох точках;

б) єдиний розв'язок, якщо дуга дотикається прямої l;

в) не має розв'язку, якщо дуга не перетинає пряму l [56,с. 56].

2.5.5. Метод подібності і гомотетії при розв′язуванні планіметричних задач

Істотну допомогу в навчанні учнів розв′язувати задачі з допомогою методу подібності може принести систематизація задач, які розв′язуються вказаним (способом) методом. В роботі Кузнецова Л. І. ,Скопеца З. А. ″Метод подібності при розв′язуванні планіметричних задач″.-М ; Математика в школі.1977, №6, виділені наступні типи задач:

1. Композиція повороту і гомотетії.
2. Кут променя і його образу при подібності.
3. Подібність першого роду і два кола, що перетинаються.
4. Дві подібності, що перетинаються.
5. Композиція подібності.

Крім того, задачі, які дані у вказаній роботі, можуть бути використані в якості зразка для навчання розв′язувати задачі даним методом.

Гомотетія — перетворення, за якого кожній точці площини (простору) ставиться відповідно інша точка (образ даної), що лежить на прямій, яка з'єднує дану точку з якоюсь фіксованою точкою (центром).

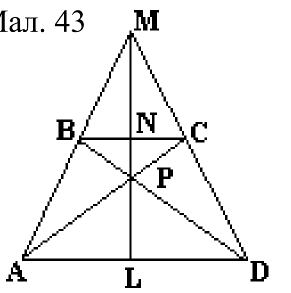
Підготовчі задачі.

1. Побудувати точку M′, гомотетичну даній точці M, якщо відомо центр гомотетії M_0 і коефіцієнт к. Розглянути розв′язки при різних коефіцієнтах.

2. Побудувати точку B′, гомотетичну даній точці B, якщо відомо центр гомотетії M_0 і пара гомотетичних точок. $\left(H_{M_0}(A) = A'\right)$.

3. По даному коефіцієнту побудувати зовнішній центр гомотетії, яка дану точку A в дану точку A′.

Мал. 43



4. Якщо через вершини трикутника ABC провести прямі, паралельні його сторонам, то отриманий трикутник $A_1B_1C_1$ буде образом даного трикутника ABC при гомотетії з центром в точці M(точці перетину його медіан). Коефіцієнт к=-2.

<u>Приклад 10.</u> Довести, що в довільній трапеції середини основ, точка перетину бокових сторін і перетину діагоналей, лежить на одній прямій.

Розв′язання. Нехай АВСД- довільна трапеція.

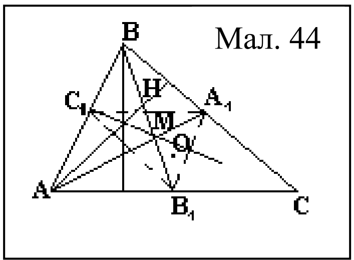
M,N,P,L-вказані точки. Із того, що СВ паралельне АД, слідує існування гомотетії з центром в точці М і коефіцієнтом $к_1$=|ВС|:|АД|. Тоді $H_M^{k_1}(BC)=(AD)$, причому:

$H_M^{k_1}(B)=A; H_M^{k_1}(C)=D; H_M^{k_1}(N)=L$ (як середини гомотетичних відрізків). Точки{M,N,L} належать одній прямій.

Аналогічно з того, що ВС паралельна ДА слідує існування гомотетії з центром в точці Р і коефіцієнтом $к_2$=│РВ│:│РД│. Тоді, $H_P^{k_2}(BC)=(DA)$, причому $H_P^{k_2}(B)=D; H_P^{k_2}(C)=A; H_P^{k_2}(N)=L$ (як середини гомотетичних відрізків). Точки M,N,P належать одній прямій. Із вище сказаного слідує, що M,N,P,L лежать на одній прямій.

Приклад 11. Чудові точки трикутника.У будь-якому трикутнику точка перетину медіан і точка перетину висот лежать на одній прямій з центром описаного кола (теорема про пряму Ейлера).

Розв′язання.



Мал. 44

A_1,B_1,C_1-основи медіан трикутника, М-точка перетину медіан , Н-точка перетину висот, О-центр описаного кола. Розглянемо трикутники АВС і $A_1B_1C_1$. Вони подібні з коефіцієнтом подібності 1/2. Крім того, вони і гомотетичні з центром гомотетії в точці М і коефіцієнтом к=-1/2(медіани діляться в точці перетину у відношенні2:1, взятому від вершини)

Гомотетія з центром в точці М і коефіцієнтом к=-1/2перетворить висоти трикутника АВС у висоти трикутника $A_1B_1C_1$(перпендикулярності при гомотетії зберігаються).

Але так як точка перетину висот серединного трикутника являється центром описаного кола, то мамо: точка перетинувисот трикутника АВС при гомотетії з центром в т.М і коефіцієнтом к=-1/2 співпадає з точкою О, яка являється центром описаного кола.

Так як точки Н і О гомотетичні з центром в т. М, то вони належать одній прямій (прямій Ейлера) . Крім того, НМ=2МО [56,с. 57-58].

2.6. Спосіб доведення від супротивного

Ідея цього методу дуже проста. Якщо потрібно довести деяку теорему Т, ми можемо замість неї сформулювати заперечення *і* спростувати це. З огляду на те, що з двох тверджень Т і *, одне (і тільки одне)* є істинним, спростування пропозиції Т є одночасно доказом теореми Т.

Як же будувати заперечення? Розглянемо два правила побудови заперечення.

ПРАВИЛО 1.

Твердження	**Заперечення**
Всі дані об’єкти володіють однією і тією ж властивістю *P*.	Хоч би один з даних об’ктів не володіє властивістю *P* (або:існує хоча б один об’єкт, не володіючий властивістю *P*).
Окремий випадок: Об’єкти *A* і *B* обидва володіють властивістю Р.	Хоч би один з об’ктів не володіє властивістю *P*.

ПРАВИЛО 2.

Твердження	**Його заперечення**
Деякі з даних об’єктів володіють властивістю *P* (або існує хоча б один об’єк, володіючий властивістю *P*).	Всі дані об’єкти не володіють властивістю *P*.
Окремий випадок: Хоч би один із об’єктів *A* або *B* володіє властивістю *P*.	Обидва об’єкти *A* і *B* володіють властивістю *P*.

Приклад

1. При будь-якому натуральному значенні *n* дріб нескоротний.

2. В прямокутному трикутнику завжди куб гіпотенузи більше суми кубів його катетів.

3. Існує трикутник, у якого всі сторони менші 1 см. А площа не менше 100 см2.

1. Існує хоча б одне натуральне число *n,* при якому *скоротний.*

2. Знайдеться хоча б один прямокутний трикутник, у якого куб гіпотенузи не більше суми кубів катетів.

3. Будь-який трикутник, у якого всі висоти менші 1 см., має площу менше ніж 100см2.

Дуже важливим для учнів є вміння будувати заперечення для затвердження виду « Якщо А, то Б ».

Робиться це на основі простих міркувань. Кожний вислів виду « Якщо А, то Б », затверджує, що в усіх випадках , коли виконується умова А, обов’язково повинно виконатися і висновок В. Тому заперечення може бути сформульовано так: « Існує хоча б один випадок, при якому умова А виконується, а висновок В – ні ».

Суть способу доведення від супротивного полягає в наступному:

1. Виділяється твердженя, яке потрібно довести.

2. Робиться припущення, суперечливе тому, що потрібно довести.

3. З’ясовується, що слідує із зробленого припущення на підставі аксіом, попередніх теорем і визначень.

4. Встановлюється логічна несумісність між тим, що вийшло, і тим, що відомо з умови даної теореми, з аксіом, або раніше доведених теорем.

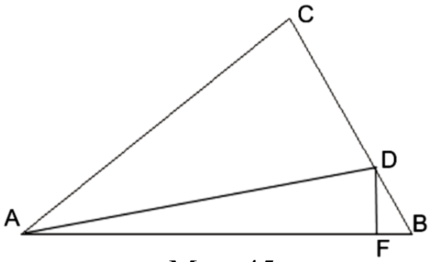
5. Робиться висновок: припущення невірне, а вірно те, що потрібно довести.

Приклад 3. Довести, що в прямокутному трикутнику медіана і бісектриса, проведені з вершини гострого кута, не співпадають.

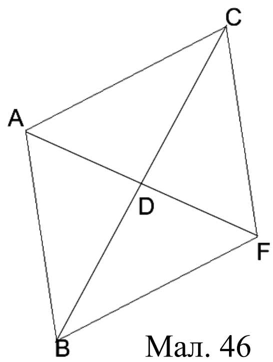
Доведення. Розглянемо 4 варіантаміркуваннь від супротивного.

Спосіб 1. Припустимо від супротивного: медіана і бісектриса гострого кута співпадають. Тоді трикутник буде рівнобедреним, тому гіпотенуза дорівнює одному із катетів. Протиріччя.

Спосіб 2.



Мал. 45



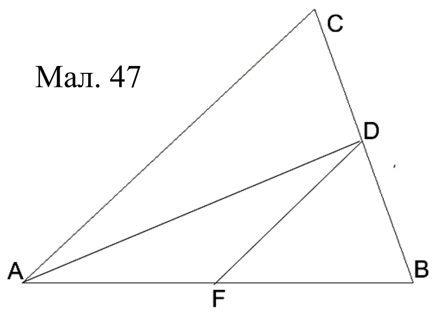
Мал. 46

Нехай *AD* – одночасно бісектриса і медіана. Проведемо $DF \perp AB$, тоді *ΔACD = ΔAFD* і отже *CD = CF*, але *CD = BDDF = DB* – перпендикуляр і похила опинилися рівними. Протиріччя [56,с. 3-65].

Спосіб 3.

Нехай *AD* - бісектриса і медіана. Відкладемо *DF = AD* і точку F з’єднаємо з *B* і *C*, тоді $ABFC$ – ромб (це легко довести). Але тоді $\angle ACF = 2\angle ACB = 180°$. Чого бути не може.

Спосіб 4.



Мал. 47

Припустимо, що *AD* – одночасно бісектриса і медіана. Проведемо середню лінію *DF,* тоді *ΔADF* – рівнобедрений (чому?) і значить *AF =FD.* Але тоді

FD= FB;Δ FDB – теж рівнобедрений і значить $\angle FBD = \angle FDB$. Отримали, що гострий кут дорівнює прямому. Протиріччя.

В заключені слід відповісти на питання: Чи будь-яку теорему можна довести методом від супротивного?

Відповідь:Так. Будь-яку. Зокрема, кожне пряме доведення теореми можна перетворити в доведення методом від супротивного. Робиться це дуже просто: припустимо « супротивне», а потім буквально повторюємо «пряме» доведення. В результаті отримуємо суперечність, яка і доводить теорему.

Інша справа, чи доцільно будь-яку теорему доводити методом від супротивного? Звичайно, ні.

Завдання для самостійної роботи

1.Довести, що діагоналі рівнобедреної трапеції не діляться пополам.

2.Довести, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

3.Довести, що якщо два прямокутні трикутники маютьрівні гіпотенузи, а катети не рівні, то протибільшого катета лежить і більший кут, і навпаки.

4.Довести теорему про середнюлініютрикутника.

5.Довести, що в крузідвіхорди, щоперетинаються, крімдіаметрів, не ділять один одного пополам [56,с. 3-65].

ВИСНОВКИ

Дане дослідження направлене на розробку методичного забезпечення курсу "Шкільний курс математики з практикумом розв'язування математичних задач" на фізико-технологічному факультеті, що сприятиме розширенню та поглибленню знань студентів, формуватиме стійкий інтерес до дисципліни, розвиватиме відповідні здібності та пізнавальну активність студентів у процесі навчання.

У даній роботі виконано поставлені завдання, а зокрема:

- проаналізовано особливості змісту навчального матеріалу шкільного курсу математики з практикумом розв'язування математичних задач;
- надано приклади застосування слайдів на заняттях з шкільного курсу математики з практикумом розв'язування математичних задач;

розроблено методмчне забезпечення шкільного курсу математики з практикумом розв'язування математичних задач, що сприятиме поглибленню знань і вмінь студентів та їх перевірці;

- підтверджена гіпотеза дослідження, бо використання мультимедійного забезпечення на уроках ШКПРМЗ гарантує більш свідоме оволодіння системою знань, вмінь та навичок, та сприяє розвитоку математичного мислення, творчої активності та пізнавальної самостійності.

Перший розділ присвячено науковому дослідженню проблеми. В ньому викладені теоретичні основи дослідження, а саме: розвиток пізнавальної активності студентів в процесі навчання; психологічний і дидактичний аналіз діяльності студентів у процесі навчання; роль курсу «Шкільного курс математики з практикумом розв'язування математичних задач»; теоретико-методичні основи системи організації навчання.

У другому розділі розглядаються методична система навчання шкільному курсу математики з практикумом розв'язування математичних задач.

Дана робота містить методичні рекомендації для вдосконалення навчального процесу, перевірки рівня засвоєння матеріалу та розвитку пізнавальної активності студентів у процесі навчання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексюк А.М., Загальні методи навчання в школі/ А. М. Алексюк – К.: Радянська школа, 1981. – 206 с.
2. Бевз Г.П., Методика викладання математики/ Г. П. Бевз – К.: Радянська школа, 1989. – 200 с.
3. Бевз Г.П., Математика, 10. Пробний підручник для 10 класу середньої школи/ Г. П. Бевз – К.: Освіта, 1995. – 303 с.
4. Бевз Г.П., Математика: Проб. підручник для 11 кл. серед шк./ Г. П. Бевз – К.: Освіта, 1995. – 312 с.
5. Белешко Д.Т., Гнедко Н.М., Алгебра і початки аналізу: Навчальний посібник/ Д. Т. Белешко, Н. М. Гнедко – Рівне. РІСКСУ, 2007. – 67 с.
6. Белешко Д.Т., Юхимчук Ю.П., Методичне забезпечення курсу «Алгебра і початки аналізу» старшої школи та навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації/ Д. Т. Белешко, Ю. П. Юхимчук – Рівне. РДГУ, 2010. – 175с.
7. Біла Т.О., Підготовка інтелектуальної еліти в Україні і використання мультимедіа-технології / Т. О. Біла– Миколаїв: Вид-во МФ НаУКМА, 2000. – Т.7. – С. 73-76.
8. Бродский Я.С., Павлов О.Л., О математическомобразовании в среднейспециальнойшколе/ Я. С. Бродский, О. Л. Павлов. – 19. С. 11 – 14.
9. Выготский Л.С., Избранныепсихологическиеисследования/ Л.С. Выготский – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 519 с.
10. Вергасов В.М., Активизация мыслительнойдеятельностистудентов в высшейшколе/ В.М. Вергасов - К.: Высшая школа, 1979. - 216 с.
11. Гальперин П.Я., Формирование знаний и умений на основетеориипоэтапногоусвоенияумственныхдействий/ П.Я. Гальперин - М.: Изд-во МГУ,1968.-135 с.
12. Гальперин П.Я., Введение в психологию/ П.Я. Гальперин - М.: Изд-во МГУ, 1976. - 150 с.
13. Груденов Я.И., Психолого-дидактические основы методики обученияматематике/ Я.И.Груденов - М.: Просвещение, 1987. - 160 с.

14. Гольдберг А.А., Карасева Л.А. Элементытворчества на лекции// Весник высшейшколы: - 1984. - №2. - С. 24 - 25.

15. Давыдов В.В., Проблемыразвивающегообучения/ В.В Давыдов - М.: Педагогика, 1986. - 240 с.

16. Занков Л.В., Обучение и развитие / Л.В. Занкова. - М.: Педагогика, 1973. - 176 с.

17. Ильина Т.А., Структурно-системный подход в организацииобучения/ Т.А. Ильина - М.: Педагогика, 1971. - 72 с.

18. Ительсон Л.Б., Психологические теории научения и модели процесса обучения/ Л.Б. Ительсон - Советская педагогика, 1973 №3 С.83-95.

19. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід, метод: Посібник/ Авт.-уклад. О. Пометун, Л. Пироженко. – К.: АПН, 2002. – 186 с.

20. Калмыкова З.И., Психологические принципыразвивающегообучения/ З.И. Калмыкова - М.: Знание, 1979. - 48 с.

21. Калмыкова З.М., Психологические принципыразвивающегосяобучения/ З.М. Калмыкова - М.: Знание, 1979. - 48 с.

22. Кирилецька Г.М., Методи зведення й обробки результатів досліджень / Г.М. Кирилецька – Р.: РДГУ , 2008. – 64 с.

23. Коваленко В.Г. Дидактическиеигры на уроках математики: Книга для учителя/ В.Г. Коваленко - М.: Просвещение, 1990. - 96 с.

24. Коношевський Л.Л., Мамонов П.Д., Кондратюк В.Д., Підвищення ефективності самостійної роботи студентів засобами інформаційних технологій/ Л.Л. Коношевський, П.Д. Мамонов, В.Д. Кондратюк – Київ-Вінниця, 2000. – С. 289-295.

25. Кулюткин Ю.Н., Психологияобучениявзрослых/ Ю.Н. Кулюткин - М.: Просвещение, 1985. - 128 с.

26. Леонтьев А.Н., Деятельность, сознание, личность/ А.Н. Леонтьев - 2-е изд. - М.: Политиздат, 1975. - 204 с.

27. Лозова В.І., Пізнавальна активність школярів: (спецкурс із дидактики): (Навчальний посібник для пед. ін-тів)/ В.І. Лозова - Х.: Основа, 1990. - 89 с.

28. Матюшкін І.М., Проблемні ситуації в мисленні і навчанні/ І.М. Матюшкін - Педагогіка, 1990. – 216 с.

29. Яковлева Г.Н., Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа/ Г.Н. Яковлева. - М.: Наука, 1987. – 464 с.

30. Яковлева Г.Н., Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа/ Г.Н. Яковлева. - М.: Наука, 1988. – 416 с.

31. Черкасов Р.С., Столяр А.А., Методика преподавания математики. Общая методика/ Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. - М.: Просвещение, 1985. - 336 с.

32. Нелін Є.П., Алгебра в таблицях (з Додатком): Навч. посібник для студентів 7 - 11 класів/ Є.П. Нелін - Х.: Світ дитинства, 1998. - 116 с.

33. Осинская В.Н., Активизацияпознавательнойдеятельностиучащихся на уроках математики в 9 - 10 классах/ В.Н. Осинская - К.: Радянська школа, 1980. - 143 с.

34. Рубинштейн С.Л., Основыобщейпсихологии/ С.Л. Рубинштейн – М.:1946. - 704 с.

35. Савченко Ю.С., Опорные конспекты по математике: Школьнику, учителю, абитуриенту: Справочник по теории и методам решения задач алгебры и начал анализа/ Ю.С. Савченко - Л.: Финансы и статистика, 1991. - 64 с.

36. Скаткин М.Н., Дидактика высшейшколы/ М.Н. Скаткин - М: Просвещение, 1982. - 319 с.

37. Слепкань З.И., Психолого-педагогические основыобученияматематике: Метод. Пособие/ З.И. Слепкань - К.: Радянська школа, 1983. - 192 с.

38. Слєпкань З.І., Методика викладання алгебри і початків аналізу/ З.І. Слєпкань- К.: Радянська школа, 1978. - 220 с.

39. Слєпкань З.І., Методика викладання алгебри і початків аналізу. Підручник для студентів математичних спеціальностей пед. навч. закладів/ З.І. Слєпкань - К.: Зодіак - ЕКО, 2000. - 512 с.

40. Смирнов А.А., Проблемыпсихологиипамяти/ А.А. Смирнов - М.: Педагогика, 1966.-104 с.

41. Талызина Н.Ф., Управление процесом усвоения знаний/ Н.Ф. Талызина -

М.: Изд-во МГУ, 1975. - 343 с.

42. Федорчук І.І., Федорчук І.П., Проблеми і перспективи розвитку дистанційної освіти і нових інформаційних технологій навчання/ І.І. Федорчук, І.П. Федорчук – Київ-Вінниця, 2003. – 82с.

43. Фридман Л.М., Психолого-педагогические основыобученияматематике в школе/ Л.М. Фридман - М.: Просвещение, 1983. - 160 с.

44. Фридман Л.М., Педагогическийопыт глазами психолога: Кн. для учителя/ Л.М. Фридман - М.: Просвещение, 1987. - 224 с.

45. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н., Как научиться решатьзадачи: Пособие для учащихся/ Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий - М.: Просвещение, 1984. - 175 с.

46. Фридман Л.М., Логико-психологическийанализшкольных учебных задач/ Л.М. Фридман - М.: Педагогика, 1977. - 208 с.

47. Фридман Л.М., Кулагина И.Ю., Психологическийсправочник учителя/ Л.М. Фридман, И.Ю. Кулагина - М.: Просвещение, 1991. - 288 с.

48. Фридман Л.М., Волков В.Н., Педагогическая наука учителя/ Л.М. Фридман, В.Н. Волков - М.: Просвещение, 1985. – 224 с.

49. Хабіб Р.А., Активізація пізнавальної діяльності студентів на уроках математики/ Р.А. Хабіб - К.: Радянська школа, 1985. - 152 с.

50. Шаталов В.Ф., Навчати всіх, навчати кожного/ Педагогічний пошук/ В.Ф. Шалатов - К.: Радянська школа, 1988. - С. 127 - 189.

51. Шеварев П.А., Обобщенные ассоциации. Вопросыпсихологии/ П.А. Шеварев - 1968. -№ 1 - С. 16-23.

52. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С., Алгебра і початки аналізу: Пробний підручник для 10 - 11 класу середньої школи/ М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук - К.: 1995. - 608 с.

53. Шкіль М., Колесник Т., Вступ до алгебри та початків аналізу. Математика в школі/ М. Шкіль, Т. Колесник - 2000. - №5. – С. 9 - 21.

54. Щукина Г.И., Проблема познавательногоинтереса в педагогике/ Г.И. Щукина - М.: Педагогика, 1971. - 352 с.

55. Якиманская И.С., Развивающееобучение/ И.С. Якиманская - М.:

Педагогика, 1979. - 144 с.

56. Белешко Д.Т., Практикум по решению геометрических задач часть I Ровно обл. стат. 1986р. 64 ст.

ДОДАТКИ

МУЛЬТИМЕДІЙНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КУРСУ «ШКІЛЬНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ З ПРАКТИКУМОМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ" НА ФІЗИКО-ТЕХНОЛОГІЧНОМУ ФАКУЛЬТЕТІ

ДОДАТОК А