РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота
магістра
на тему

Методика розв'язування задач з параметрами з використанням новітніх інформаційних технологій

Виконала: студентка 2-го курсу магістратури,
групи МІ-61
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Куруц Яна Володимирівна

Керівник: к. п. н., доц. кафедри математики з методикою викладання
Генсіцька-Антонюк Наталія Олександрівна

Рецензент: д-р техн. наук, професор
Турбал Юрій Васильович

Рецензент: к. ф-т. н., доцент кафедри вищої математики
Присяжнюк Ігор Михайлович

Рівне − 2018 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Зміни, які відбуваються у суспільстві вимагають від освіти кардинальних реформувань. Характер праці висуває нові умови та вимоги до рівня знань, вмінь та кваліфікації людини. Таким чином, виникають нові види діяльності на ринку праці. Ці зміни вимагають професійної та інтелектуальної мобільності, безперервної освіти та професійного вдосконалення. Виклики сьогодення потребують фахівців високого рівня інтелекту, всебічно розвинених з творчими здібностями. Підготовка молоді не можлива без впровадження в навчально-виховний процес нових методик та технологій навчання. Вміння творчо мислити на ранніх етапах є фундаментом формування кваліфікований фахівців.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури засвідчив важливість питань створення дидактичних умов формування в учнів інтересу до навчально-дослідницької діяльності, організації дослідницького підходу в навчанні, організації формування дослідницьких умінь у процесі розв’язування математичних задач, організації навчальної дослідницької діяльності на основі новітніх інформаційних технологій навчання. Таким чином, проблема впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес досліджувалась у працях Ю. Горошка, М. Жалдака, Т. Зайцевої, В. Клочка, Н. Кульчицької, Н. Морзе, А.Олійника та інших учених. Від негативних наслідків необґрунтованого ігнорування методів, організаційних форм і засобів навчання в рамках традиційної методики викладання математики та надмірної, методично невиправданої, комп’ютеризації навчального процесу застерігає З. Слєпкань: «Запровадження нових інформаційних технологій навчання не повинно бути самоціллю. Воно має бути педагогічно виправданим, розглядатись передусім з погляду педагогічних переваг, які воно може забезпечити порівняно з традиційною методикою навчання» [38].

Але на наш погляд не до кінця розглянуто зміст математичного матеріалу, на основі якого доцільно формувати такі вміння.

Реалізація цієї мети можлива у збагаченні шкільного курсу математики таким навчальним матеріалом, який міг би забезпечити учню можливість активно долучатися до діяльності, у процесі якої в нього відбувалося б формування дослідницьких умінь. Таким матеріалом можуть стати системи задач із параметрами, тобто задачі, в яких умова, хід розв’язку і форма результату залежать від величин, чисельні значення яких не задані конкретно, але повинні вважатися відомими [2].

Залучення до навчального процесу задач із параметрами дозволяє природно й педагогічно доцільно імітувати повний процес прикладного математичного дослідження або окремих його етапів, що сприяє розвитку в учнів глибокого стійкого інтересу до дослідження та творчого мислення. В процесі розв’язування задач із параметрами учні знайомляться з великою кількістю евристичних прийомів загального і спеціального характеру [43].

У методичній літературі зустрічається ряд робіт, пов'язаних із задачами з параметрами, автори яких Г. Апостолова, В. Ясінський В. Голубєв, О. Гольдман, В. Крамор, В. Лейфура, Г. Ястребинецький, Г. Олійник, Н. Тарасенкова, О. Пліско, П. Горнштейн та ін., але анкетування учнів 10х - 11х класів й їх учителів показало, що задачам з параметрами, навіть у класах із поглибленим вивченням математики, не надається належної уваги. Причина цього - відсутність у пояснювальних записках до програм з математики орієнтації на актуальність і важливість використання задач із параметрами, незважаючи на те, що теми, пов'язані з розв'язуванням цих задач, представлені, хоч і нешироко, в програмах загальноосвітніх шкіл, ліцеїв фізико-математичного профілю з поглибленим вивченням математики, у завданнях державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання.

Таким чином, проблема формування й розвитку дослідницьких умінь учнів у процесі розв’язування математичних задач з параметрами є актуальною з точки зору розвитку творчої особистості школярів в умовах впровадження нової парадигми освіти.

Враховуючи важливість та актуальність проблеми, її недостатньої розробленості і потреб шкільної практики обумовило вибір теми дослідження «***Методика розв'язування задач з параметрами з використанням новітніх інформаційних технологій***».

Об'єкт дослідження – процес навчання алгебри учнів загальноосвітніх шкіл.

Предмет дослідження – задачі з параметрами та методи їх розв'язування.

Мета дослідження – розробити систему задач із параметрами та методику їх розв'язування з використанням пакету програм GRAN1 задля активізації пізнавальних інтересів та розвитку дослідницький вмінь.

Відповідно до мети дослідження нами були поставлені такі **завдання**:

1) проаналізувати науково-методичну, психолого-педагогічну літературу з проблеми дослідження;

2) визначити місце задач із параметрами у навчальному процесі;

3) провести систематизацію задач із параметрами;

4) проаналізувати аналітичні та графічні прийоми розв'язування задач з параметрами;

5) дослідити вміння учнів розв'язувати задачі з параметрами;

6) розробити систему задач з параметрами та впровадити методику застосування пакету програм GRAN1 до їх розв'язування в навчальний процес.

Для реалізації визначених задач були використані такі **методи дослідження**:

– *загальнонаукові (аналіз, синтез, узагальнення),* що дали змогу узагальнити та систематизувати погляди вітчизняних і зарубіжних педагогів на проблему дослідження;

– *історико-педагогічні (ретроспективний, логіко-системний, хронологічно-структурний, порівняльний)* для виявлення особливостей розвитку вітчизняної педагогічної думки в досліджуваний період;

– *пошуково-бібліографічний* (вивчення джерел, архівних документів, матеріалів періодичних видань з проблеми дослідження), що дав підстави для наукових узагальнень;

– *метод термінологічного аналізу* уможливив за допомогою виявлення та уточнення значень і смислів основоположних понять актуалізувати категорійно-поняттєвий апарат дослідження;

– *історіографічний* допоміг критично проаналізувати опубліковану з порушеної проблеми педагогічну літературу;

– *педагогічний експеримент* (анкетування)

Джерельна база дослідження охоплює *п’ять* основних груп:

– *джерела нормативно-правового характеру*;

– *періодичні видання*, на сторінках яких представлена ґенеза досліджуваної проблеми;

– *навчальні плани, навчальні програми, шкільні підручники та методична література для вчителів* з математичних дисциплін;

– *інтерпретаційні джерела* – монографії, брошури, статті, присвячені досліджуваній темі або дотичні до неї;

– *довідкова література, сучасні підручники й посібники* для вищої школи.

Гіпотеза дослідження. Якщо в процесі навчання математики використовувати систему задач із параметрами та методику їх розв’язування за допомогою НІТН, яка містить їх як моделі реальних систем і процесів, їх дослідження, а також узагальнення математичних задач і тверджень, реалізуючи при цьому дидактичні і психологічні принципи розвиваючого навчання, то це буде сприяти інтелектуальному розвитку учнів, підвищенню їх інтересу до математики як навчального предмета, розвитку дослідницьких умінь і загального рівня математичної підготовки.

Теоретичне значення дослідження полягає в тому, що:

1) запропонована система задач з параметрами у шкільному курсі математики;

2) запропоновані методи та способи розв’язування задач з параметрами;

3) запропонована методика розв'язування задач з параметрами з використанням пакету програм GRAN1W, встановлена ефективність використання новітніх інформаційних технологій при вивченні математики.

Практичне значення результатів дослідження визначається тим, що його основні положення та висновки, система задач та подана методика можуть бути використані вчителями шкіл під час підготовки й проведення уроків математики, факультативних занять та студентами і викладачами ВУЗів.

Результати дослідження ***упроваджено*** в навчально-виховний процес Березниківської загальноосвітньої школи I-III ступенів Свалявської районної ради Закарпатської області.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та висновки дослідження були представлені на *міжнародній конференції* «Наука, освіта, суспільство очима молодих» (Рівне, 2018) та звітній науково-практичній конференції РДГУ (2018).

Структура і обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, висновків, списку використаних джерел та 4 додатків. Загальний обсяг дисертаційної роботи – 76 сторінок друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1.
ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Категорійно-поняттєвий апарат дослідження

Завдання з параметрами відіграють важливу роль у формуванні логічного мислення й математичної культури школярів і студентів. Кожна задача з параметрами являє собою цілий клас звичайних завдань, для кожного з яких є свій розв'язок.

Завдання з параметрами – це спеціальні компетентнісно-орієнтовані завдання, тобто ці завдання є засобами формування математичної компетентності. При розв'язуванні таких завдань основна увага повинна приділятися формуванню здібностей учнів використовувати математичні знання в різноманітних ситуаціях, при розв'язуванні вимагають різних підходів, роздумів і інтуїції. Такі завдання використовуються на уроках закріплення знань, комплексного застосування знань, узагальнення і систематизації знань та позакласних уроках.

Зважаючи на вище сказане, зрозумілим є те, що такі задачі пропонуються у завданнях незалежного зовнішнього оцінювання.

Розглянемо деякі *основні поняття*.

Якщо в рівнянні (нерівності) деякі коефіцієнти задані не конкретними числовими значеннями, а позначені буквами, то вони називаються *параметрами*, а *рівняння (нерівність) параметричним* [8].

Параметр (від грец. Παραμετρωο – той, що відміряє) – величина, значення якої слугують для встановлення відмінності між елементами деякої множини.

Розв'язати рівняння (нерівність) з параметрами означає знайти всі його розв'язки для кожної системи допустимих значень параметрів.

В параметричних рівняннях (нерівностях), крім букв, що позначають невідоме (x, y, z), містяться і інші букви, так звані параметри $(a, b, c, p, t\ \ldots)$. Тоді ми маємо справу не з одним, а з нескінченною множиною рівнянь (нерівностей) [8].

Зробимо одне зауваження. Остаточним етапом розв'язування рівнянь (нерівностей) із параметрами є запис відповіді. Особливо це стосується тих завдань, де розв'язок розгалуджується залежно від значень параметра. У подібних випадках запис відповіді - це збір раніше отриманих результатів. І тут дуже важливо не забути вказати у відповіді всі етапи розв'язування.

Таким чином, відповідь до завдань з параметрами має вигляд: при «таких-то» значеннях параметра розв'язок є «таким-то» або «якщо …, то …».

Методи і способи розв'язування рівнянь з параметрами різноманітні, пов'язані із видами самих рівнянь. Разом з тим, виділяють такі основні методи розв'язування: аналітичний та графічний.

Аналітичний метод – універсальний, але найбільш складний, і потребує високої математичної грамотності.

Графічний – виключно красивий і наочний, але не завжди доречний і потребує мистецтва роботи з графіками.

Суть графічного методу полягає в тому, що задачу зводять до з'ясування взаємного розташування графіків рівнянь, що містять параметри по відношенню до графіків рівнянь, які у своєму складі не містять параметрів [1].

Одним із *способів* розв'язування рівнянь та нерівностей з параметрами, який ґрунтується на графічному методі, є розв'язування за допомогою педагогічних програмних засобів.

Класифікація рівнянь з параметрами аналогічна як і для звичайних:

- ✓ Лінійні рівняння – $ax + b = 0$, де x – змінна, a, b – числа.
- ✓ Квадратні – $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b, c – числа, причому $a \neq 0$
- ✓ Дробово-раціональні рівняння
- ✓ Ірраціональні рівняння
- ✓ Показникові рівняння
- ✓ Логарифмічні рівняння
- ✓ Тригонометричні рівняння.

Аналогічна класифікація і для нерівностей з параметрами [8].

Таким чином, *задачі з параметрами* - це задачі, в яких умова, хід розв'язку і форма результату залежать від величин, чисельні значення яких не задані конкретно, але повинні вважатися відомими.

1.2. Аналіз діючих програм та підручників з теми дослідження

В шкільному курсі математики знайомство з параметрами відбувається у 7 класі при розв'язуванні лінійних рівнянь. Наприклад, завдання такого типу (Мерзляк 7 кл., 2015):

Завдання 61. При якому значенні a рівняння не має коренів:

3) $(a-2)x = a+2$

Завдання 62. При якому значенні a коренем рівняння є будь-яке число:

3) $a(a+5)x = a+5$

Завдання 63. При якому значенні a рівняння має єдиний корінь:

2) $(a+7)x = a+7$

Завдання 64. Розв'язати рівняння:

2) $(b^2+1)x = -4$ [25].

Згодом у 8-9 класах розв'язуванню задач з параметрами виділяються години лише у класах з поглибленим вивченням математики. Але при вивченні тем, що стосуються розв'язування рівнянь і нерівностей, в підручниках для загальноосвітніх шкіл присутні завдання з параметрами. Наприклад:

Завдання 221. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9} = 0$ має один корінь? (Мерзляк 8 кл., 2016)

Завдання 624. При якому значенні параметра a рівняння $(a-2)x^2 - (2a-1)x + a^2 - 4 = 0$ є:

а) лінійним; б) зведеним квадратним; в) неповним незведеним квадратним; г) неповним зведеним квадратним [26].

Завдання 1077 (Істер 9 кл., 2017). Скільки розвязків має система рівнянь залежно від значень a ?

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = a \end{cases}$ [12].

У старших класах задачі з параметрами зустрічаються ще рідше: у деяких видах рівнянь та нерівностей, при обчислені площ деяких фігур, тощо.

Таким чином, учні з академічним рівнем, а тим паче з рівнем стандарту, обираючи математику при складанні ЗНО, зустрічаються з проблемою розв’язування задач з параметрами.

Якщо у класах з академічним рівнем навчання задачі з параметрами носять епізодичний характер, то у класах з поглибленим вивченням приділено значне місце. Значущість таких задач висвітлено в програмі, де вказано, що у ході розв’язування задач з параметрами до арсеналу прийомів і методів мислення школярів природно включаються аналіз, індукція та дедукція, узагальнення та конкретизація, класифікація та систематизація, аналогія. Ці задачі дозволяють перевірити рівень знання основних розділів шкільного курсу математики, рівень логічного мислення учнів, початкові навички дослідницької діяльності. Тому завдання з параметрами мають діагностичну та прогностичну цінність [30].

Аналіз програми з математики з поглибленим вивченням дав змогу стверджувати, що при вивчені всіх функцій у вимогах до рівня знань, вмінь та навичок учнів чітко зазначено вміння розв’язувати рівняння та нерівності з параметрами.

Дослідження діючих підручників, завдань ДПА та ЗНО дало змогу виділити такі типи завдань:

1. розв’язати рівняння, нерівність або їх системи для всіх можливих значень параметра;
2. завдання, в яких пропонується знайти лише ті розв’язки, які задовольняють певним умовам;

3. завдання, на знаходження кількості коренів рівняння, які доцільно розв'язувати графічним методом;
4. завдання, пов'язані з властивостями функцій.

1.3. Методи розв'язування задач з параметрами

Універсального методу розв'язування задач з параметрами не існує. Часто користуються аналітичним (із використанням формул, властивостей функцій) та графічними методами.

Аналітичний метод – універсальний, але найбільш складний, і потребує високої математичної грамотності.

Приклад. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система нерівностей $\begin{cases} ax^2+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a\geq 0 \\ ax\geq a^2-2 \end{cases}$ не має розв'язків.

Розв'язання. $\begin{cases} ax^2+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a\geq 0 \\ ax\geq a^2-2. \end{cases}$

Розглянемо випадок, коли $a>0$, тоді система нерівностей набуває вигляду:

$$\begin{cases} a^2x^2+a(a-3)x-2a^2+2\geq 0 & (1) \\ x\geq \dfrac{a^2-2}{a} & (2) \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність (1) системи.

$$a^2x^2+a(a-3)x-2a^2+2\geq 0,$$

$$a^2x^2+a(a-3)x-2a^2+2=0.$$

$$D=a^2(a-3)^2-4a^2(-2a^2+2)=$$
$$=(a(3a-1))^2\geq 0$$

при будь-яких $a>0$.

$$x_1=\frac{-a(a-3)+a(3a-1)}{2a^2}=\frac{a+1}{a},$$

$$x_2 = \frac{-a(a-3)-a(3a-1)}{2a^2} = \frac{2-2a}{a}.$$

Під час «накладання» на множину розв’язків нерівності (1) розв’язків нерівності (2), стає зрозумілим, що при будь-яких додатних значеннях параметра система має розв’язки, що не задовольняє умову задачі.

Розглянемо випадок, коли $a < 0$, тоді система нерівностей набуває вигляду:

$$\begin{cases} a^2x^2 + a(a-3)x - 2a^2 + 2 \le 0 \\ x \le \dfrac{a^2-2}{a} \end{cases}.$$

З’ясуємо розташування $x_1, x_2, \frac{a^2-2}{a}$

1) $\frac{a^2-2}{a} < \frac{a+1}{a} \le \frac{2-2a}{a}$

$$\begin{cases} \frac{a^2-2}{a} < \frac{a+1}{a}, \\ \frac{a+1}{a} \le \frac{2-2a}{a}; \end{cases} \begin{cases} \frac{a^2-a-3}{a} < 0, \\ \frac{3a-1}{a} \le 0. \end{cases}$$

Розв’язавши другу нерівність системи, бачимо, що при $a < 0$ вона не має розв’язків, а отже, і система нерівностей не має розв’язків, тобто випадок 1) неможливий.

$$2)\ \begin{cases} \frac{a^2-2}{a} < \frac{2-2a}{a} \\ \frac{2-2a}{a} \le \frac{a+1}{a} \\ a < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^2+2a-4}{a} < 0 \\ \frac{-3a+1}{a} \le 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -1-\sqrt{5}\right).$$

Відповідь: $\left(-\infty; -1-\sqrt{5}\right)$ [15].

Приклад. Розв’язати нерівність $|x+3| > -a^2$.

Розв’язання.

Розглянемо випадки:

1) якщо $a \ne 0$, то $x \in R$;

2) якщо $a = 0$, то $x \in R\backslash\{-3\}$.

Відповідь: якщо $a \ne 0$, то $x \in R$; якщо $a = 0$, то $x \in R\backslash\{-3\}$ [3].

<u>Графічний</u> – виключно красивий і наочний, але не завжди доречний і потребує мистецтва роботи з графіками.

Суть графічного методу полягає в тому, що задачу зводять до з'ясування взаємного розташування графіків рівнянь, що містять параметри по відношенню до графіків рівнянь, які у своєму складі не містять параметрів [14].

Найчастіше графічно розв'язують ті задачі, де потрібно знайти кількість розв'язків, коли в задачі є «впізнавана функція».

До того ж, в деяких випадках аналітичний метод розв'язування «тягне за собою» таку кількість систем і сукупностей, що в них дуже легко заплутатись. І тоді на допомогу приходить графік.

Алгоритм графічного методу:

1. Знайти область допустимих значень невідомого та параметрів, що входять до рівняння.
2. Виразити параметр як функцію від невідомого: $a = f(x)$.
3. В системі координат $x0y$ побудувати графік функції $y = f(x)$ для тих значень *x*, які входять в область визначення рівняння.
4. Знайти точки перетину прямої $y = a$ з графіком $y = f(x)$.

Можливі випадки:

1) пряма $y = a$ не перетинає графік функції $y = f(x)$. При цьому значення a рівняння розв'язків не має.

2) пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = f(x)$. Визначити абсциси точок перетину (для цього достатньо розв'язати рівняння $a = f(x)$відносно x).

5. Записати відповідь [8].

Приклад. При якому значенні m рівняння $\left|x^2 - 2x - 9\right| + m = 0$ має три розв'язки?

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді $\left|x^2 - 2x - 9\right| = -m$

ОДЗ: $x \in R$, $m \in (-\infty; 0]$

Побудуємо схематично графіки функцій $y = \left|x^2 - 2x - 9\right|$ та $y = -m$(*рис. 1*).

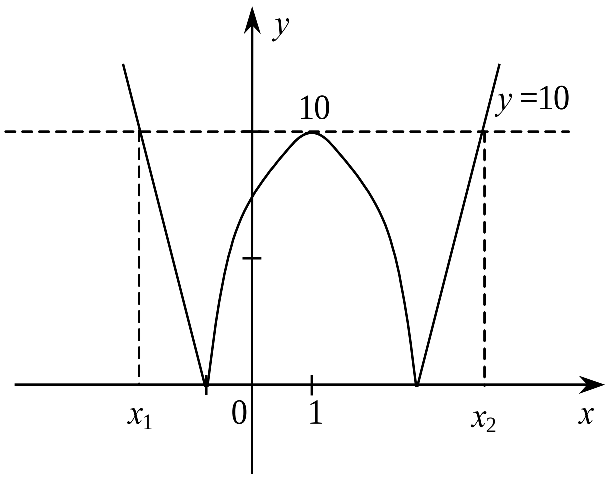


Рис. 1

Якщо $-m = 10$, то пряма $y = 10$ перетинає криву $y = \left|x^2 - 2x - 9\right|$ у трьох точках з абсцисами x_1; 1; x_2.

Відповідь: -10 [14].

Але не у всіх завданнях можна використати саме цей алгоритм графічного методу. Наприклад, розв'яжіть нерівність для всіх дійсних значень параметра *a*.

$$\sqrt{1 - x^2} < a - x$$

Розв'язання. Розглянемо дві функції $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ і $g(x) = a - x$.

Графік $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ – півколо в додатній площині з радіусом 1;

графік $g(x) = a - x$ – пряма: $k = -1$, що рухається вздовж осей координат. Розв'язками нерівності будуть абсциси тих точок півкола, які лежать нижче прямої.

Побудуємо графіки функцій (*рис. 4*).

Очевидно, що при $a \leq -1$ пряма не перетинає півколо, значить нерівність розв'язків не має.

Якщо $-1 < a \leq 1$, то пряма перетинає коло в одній точці, тож розв'язком нерівності буде один інтервал.

Якщо $-1 < a \leq x_1$, то пряма перетинає коло в двох точках, розв'язок нерівності – 2 інтервали.

Знайдемо координати точок перетину прямої з колом. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$\sqrt{1-x^2} = a - x$$

$$1 - x^2 = (a-x)^2$$

$$1 - x^2 = x^2 + a^2 - 2ax$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a+\sqrt{2-a^2}}{2} \\ x = \dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2} \end{array}\right.$$

Пряма приймає положення дотичної коли $2 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{2}$.

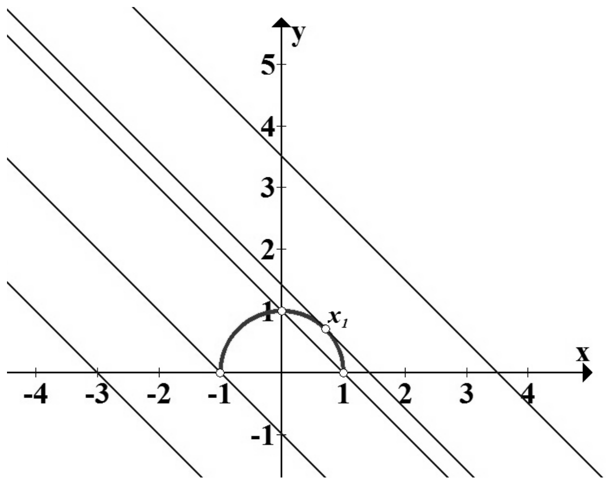


Рис. 4

Відповідь: якщо $a \leq -1$, то $x \in \emptyset$;

якщо $a \in (-1; 1]$, то $x \in [-1; \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2})$;

якщо $a \in (1;\sqrt{2})$, то $x \in \left[-1;\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}\right) \cup \left(\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2};1\right]$;

якщо $a = \sqrt{2}$, то $x \in \left[-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$;

якщо $a > \sqrt{2}$, то $x \in [-1;1]$ [40].

Таким чином, універсального графічного методу не існує.

Як зазначалося вище існує два загальноприйняті методи розв'язування задач з параметром: аналітичний, графічний. Але можна виокремити ще один із методів, а саме – відносно параметра, тобто параметр розглядається як рівноправна змінна.

У всіх розглянутих прикладах, параметр – фіксоване, невідоме число. Разом з тим параметр – це змінна, причому рівноправна з іншими. Розглянемо аналітичне і графічне розв'язування задач з параметрами даним методом.

Приклад. Знайти всі значення *a*, при яких рівняння $x^2 + x + 4a = 0$ і $a^2x^2 + ax + 4a = 0$ мають спільний дійсний корінь [42].

Розв'язання

Розглянемо систему двох рівнянь з двома змінними *x* і *a*:

$$\begin{cases} x^2 + x + 4a = 0 \\ a^2x^2 + ax + 4a = 0 \end{cases}.$$

Розв'язками цієї системи будуть пари виду (*x*; *a*), і очевидно саме значення а цих пар будуть розв'язками даної задачі. Маємо:

$$\begin{cases} x^2 + x - a^2x^2 - ax = 0 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (a-1)(x(1+a)+1)x = 0 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases}.$$

Остання система рівносильна сукупності трьох систем:

a) $\begin{cases} a = 1 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset.$

b) $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a = 0 \end{cases}.$

c) $\begin{cases} x + xa + 1 = 0 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases}$.

Очевидно при $a = -1$ ця система розв'язків не має. Тоді

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{1+a} \\ -\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^2 - \dfrac{1}{1+a} + 4a = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{1+a} \\ a(4a^2 + 8a + 3) = 0 \end{cases}.$$

Ця система має три розв'язки $(x; a)$: $(-1; 0), \left(-2; -\frac{1}{2}\right), \left(2; -\frac{3}{2}\right)$.

Відповідь: $-\mathbf{\frac{3}{2}}$; $-\mathbf{\frac{1}{2}}$; 0.

Приклад. Скільки розв'язків залежно від параметра *c* має система рівнянь $\begin{cases} y - x^2 = c \\ x - y^2 = c \end{cases}$ [8]?

Розв'язання

$\begin{cases} y - x^2 = c \\ x - y^2 = c \end{cases}$. Виразимо в першому рівнянні системи $y = c + x^2$ і здобутий вираз підставимо замість *y* у друге рівняння.

$x - (c + x^2)^2 = c \Rightarrow x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0$. Запишемо останнє рівняння у вигляді

$c^2 + c(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0$ і розв'яжемо це рівняння як квадратне відносно *c*. Дістанемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} c = -x^2 - x - 1 \\ c = -x^2 + x \end{array}\right.$$

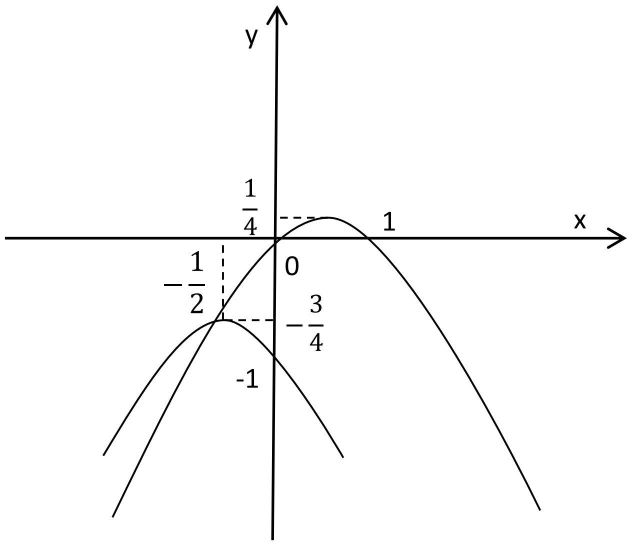


Рис. 5

На координатній площині *xOc* побудуємо графіки рівнянь

$c = -x^2 - x - 1$ і $c = -x^2 + x$.

Причому розв'язавши рівняння

$-x^2 - x - 1 = -x^2 + x$, переконаємось, що графіки мають одну спільну точку (*рис. 5*).

Отже, при $a > \frac{1}{4}$ система не має розв'язків; при $a = \frac{1}{4}$ – один розв'язок; при $a \epsilon \left[-\frac{3}{4};\ \frac{1}{4}\right)$ – два розв'язки; при $a \epsilon \left(-\infty;\ -\frac{3}{4}\right)$ – чотири розв'язки.

Відповідь: при $a > \frac{1}{4}$ система не має розв'язків;

при $a = \frac{1}{4}$ – один розв'язок;

при $a \epsilon \left[-\frac{3}{4};\ \frac{1}{4}\right)$ – два розв'язки;

при $a \epsilon \left(-\infty;\ -\frac{3}{4}\right)$ – чотири розв'язки [8].

1.4. Типи задач з параметрами та методика їх розв’язування

1.4.1. Рівняння, нерівності або їх системи для всіх можливих значень параметра

Приклад. Розв’язати рівняння $a^2x - 1 = x + a$ [34].

Розв’язання

Зведемо рівняння до загального вигляду

$a^2x - x = 1 + a,$

$(a^2 - 1)x = a + 1,$

$(a - 1)(a + 1)x = a + 1.$

Розглядаємо випадки:

1. якщо $a - 1 = 0, a = 1$ то $0 \cdot x = 2$ – рівняння не має розв’язку;
2. якщо $a + 1 = 0, a = -1$, то $0 \cdot x = 0$, x – будь-яке число;
3. якщо $a \neq \pm 1$, то рівняння має єдиний розв’язок $x = \frac{1}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то рівняння не має розв’язків, якщо $a = -1$, то x – будь-яке число, якщо $a = \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$.

Приклад. Знайти всі a, при яких нерівність $-5 + 5a + \sin^2 x + a(3 - \cos x)^3 > 0$ виконується при всіх x [39].

Розв’язання

При розв’язанні цього прикладу потрібно представити вихідну нерівність у вигляді $a > f(x)$ $(a < f(x))$, потім дослідити функцію f на найбільше (найменше) значення.

Перепишемо дану нерівність у вигляді $a((3 - \cos x)^3 + 5) > 5 - \sin^2 x$ оскільки $(3 - \cos x)^3 + 5 > 0$ для всіх x, то $a > \dfrac{5 - \sin^2 x}{(3 - \cos x)^3 + 5}$. Ця нерівність виконується для всіх x, якщо значення параметра a буде більше від найбільшого значення функції $f(x)=\dfrac{5-\sin^2 x}{(3+\cos x)^3+5}$. Визначимо, що в отриманому дробі при $\cos x=1$ чисельник набуває найбільшого значення, а знаменник – найменшого.

Тоді $f(x)\le\dfrac{5}{2^3+5}=\dfrac{5}{13}$.

Знак рівності досягається, якщо $x=2\pi n$, $n\in Z$. Отже шукані значення a визначаються нерівністю $a>\dfrac{5}{13}$.

Відповідь: $a>\dfrac{5}{13}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}=a$ [43].

Розв'язання

Оскільки $|x|\le 1$, то введемо заміну $x=cos\alpha$, де $\alpha\in[0;\pi]$. Виконуємо підстановку, враховуючи, що $sin\alpha\ge 0$. Маємо $cos\alpha\, cos2\alpha\, sin\alpha=a$. Звідси $sin4\alpha=4a$. Очевидно, що це рівняння має розв'язок при $|a|\le\frac{1}{4}$. Знайдемо його корені на відрізку $[0;\pi]$. Маємо $\alpha=(-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4}$. Розглянемо три випадки. Якщо $-\frac{1}{4}\le a\le 0$, то безпосередньо перебором встановлюємо, що $\alpha\in[0;\pi]$ лише при $k=1,2,3,4$. Якщо $a=0$, то $k=0,1,2,3,4$. Якщо $0<a\le\frac{1}{4}$, то $k=0,1,2,3$.

Відповідь:

якщо $-\frac{1}{4}\le a\le 0$, то $x=\cos((-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4})$, де $k=1,2,3,4$;

якщо $a=0$, то $x=\cos\frac{\pi k}{4}$ де $k=0,1,2,3,4$;

якщо $0<a\le\frac{1}{4}$, то $x=\cos((-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4})$, де $k=0,1,2,3$.

Приклад. Залежно від параметра *m* розв'яжіть нерівність

$(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3>0$

Розв'язання

1) Якщо *m*=1, то нерівність перетворюється на лінійну $-4x-2>0$, звідки $x<-\frac{1}{2}$.

2) При $m \neq 1$ розв'яжемо квадратну нерівність за стандартним алгоритмом.

Знайдемо дискримінант рівняння

$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$ (1)

$$D = 4(m+1)^2 - 4(m-1)(m-3) = 4(6m-2)$$

$x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{6m-2}}{m-1}$, $x_в = \frac{2(m+1)}{2(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}$.

Розглянемо випадки:

1. $\begin{cases} m-1>0 \\ D>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ 4(6m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m>\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m>1.$

При $m>1$ $x \epsilon \left(-\infty; \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right) \cup \left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; \infty\right)$.

2. $\begin{cases} m-1>0 \\ D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ 4(6m-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m \epsilon \emptyset.$

3. $\begin{cases} m-1>0 \\ D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ 4(6m-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m<\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m \epsilon \emptyset.$

4. $\begin{cases} m-1<0 \\ D>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 4(6m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m>\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m \in (\frac{1}{3}; 1).$

При $m \in (\frac{1}{3}; 1)$ $x \epsilon \left(\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}; \frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}\right)$.

5. $\begin{cases} m-1<0 \\ D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 4(6m-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m=\frac{1}{3}.$

При $m=\frac{1}{3}$ $x \epsilon \emptyset$.

6. $\begin{cases} m-1<0 \\ D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 4(6m-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m<\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty; \frac{1}{3}).$

При $m \in (-\infty; \frac{1}{3})$ $x \epsilon \emptyset$.

Відповідь: При $m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ розв'язків немає;

при $m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ $x \in (\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1})$; при m=1 $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$;

при $m \in (1; +\infty)$ $x \in \left(-\infty; \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right) \cup \left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; +\infty\right)$ [8].

Приклад. Розв'яжіть рівняння для всіх дійсних значень параметра *a*

$$\sqrt{a-x^2}=x+1 \text{ [8].}$$

Розв'язання.

Розглянемо дві функції *f(x)*= $\sqrt{a-x^2}$ і *g(x)*= $x+1$.

Побудуємо графік *f(x)* – півколо радіусом $\sqrt{a}$ для *f(x)* ≥ 0 .

Графік *g(x)*= $x+1$ – пряма (*рис. 2*)

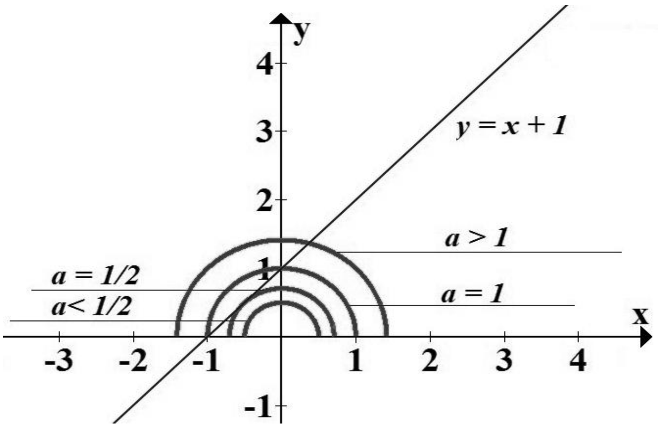


Рис. 2

1. Пряма дотикається до півкола:

З прямокутного ΔOAB (*рис. 3*)

$OH=\frac{1\cdot 1}{\sqrt{2}}$, тобто

$\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow a=\frac{1}{2}$

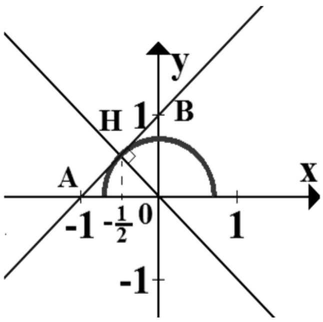


Рис. 3

2. Пряма не перетинає півколо при $a<\frac{1}{2}$

3. Пряма перетинає півколо в 2-х точках (розв'язках рівняння $\sqrt{a-x^2}=x-1$), якщо

$\frac{1}{2}<a\leq 1$, тобто:

$$a-x^2=(x+1)^2$$

$$a-x^2=x^2+2x+1$$

$$2x^2+2x+1-a=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{2\text{a}-1}}{2}$$

4. Пряма перетинає півколо в одній точці: це більший з двох розв'язків даного рівняння –

$$x = \frac{-1 + \sqrt{2a - 1}}{2}$$

Відповідь: якщо $a < \frac{1}{2}$, то $x \in \emptyset$;

якщо $a = \frac{1}{2}$, то $x = -\frac{1}{2}$;

якщо $\frac{1}{2} < a \leq 1$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{2a-1}}{2}$;

якщо $a > 1$, то $x = \frac{-1+\sqrt{2a-1}}{2}$ [8].

1.4.2. Задачі з параметрами, в яких розв'язки задовольняють певним умовам

Приклад. Визначте, при яких значеннях *a* рівняння $(x - 1)(a - 2) = 1$ матиме корінь, який належить проміжку (1;2) [34].

Розв'язання. Розкриємо дужки та запишемо рівняння у вигляді

$x(a - 2) = a - 1$.

Розглянемо випадки:

1) якщо $a - 2 = 0$, тобто $a = 2$, то рівняння набуває вигляду $x(2 - 2) = 2 - 1$,

$0 \cdot x = 1$ – рівняння коренів не має;

2) якщо $a - 2 \neq 0$, тобто $a \neq 2$, то $x = \frac{a-1}{a-2}$.

За умовою $1 < \frac{a-1}{a-2} < 2$.

Розв'яжемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 1 < \frac{a-1}{a-2} \\ \frac{a-1}{a-2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{a-1}{a-2} < 0 \\ \frac{a-1}{a-2} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-2-a+1}{a-2} < 0 \\ \frac{a-1-2a+4}{a-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-1}{a-2} < 0 \\ \frac{-a+3}{a-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a-2} > 0 \\ \frac{a-3}{a-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2 > 0 \\ (a-3)(a-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$a > 3$.

Відповідь: при $a > 3$.

У шкільному курсі математики велика кількість завдань з параметрами пов'язана з розташуванням коренів квадратного рівняння.

Розглянемо основні методи розв'язування цих задач.

Є два випадки найбільш поширених задач, пов'язаних з розташуванням коренів квадратного тричлена.

I тип задач – задачі, в яких досліджується розташування коренів відносно заданої точки *A*. Можливі три випадки, не враховуючи випадка відсутності коренів:

1) два корені більші за *A;*
2) один корінь менший, а другий більший за *A;*
3) два корені менші за *A*.

II тип задач – задачі, в яких досліджується розташування коренів відносно числового проміжку [1].

Розв'язування задач на розташування коренів квадратного рівняння можна узагальнити у вигляді таблиці [8].

Таблиця 1

№	***Розташування коренів рівняння*** $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ ***відносно α, β***	***Умови, накладені на параметри*** $\boldsymbol{a, b, c}$

1.	$\alpha < x_1 < x_2$ $\alpha < x_1 \le x_2$ $\alpha \le x_1 \le x_2$	$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0 \\ 2a\alpha + b < 0 \quad (x_в > \alpha) \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 - 4ac \ge 0 \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0 \\ 2a\alpha + b < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 - 4ac \ge 0 \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) \ge 0 \\ 2a\alpha + b \le 0 \end{cases}$
2.	$x_1 < x_2 < \alpha$ $x_1 \le x_2 < \alpha$ $x_1 \le x_2 \le \alpha$	$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0 \\ 2a\alpha + b > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 - 4ac \ge 0 \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0 \\ 2a\alpha + b > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 - 4ac \ge 0 \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) \ge 0 \\ 2a\alpha + b \ge 0 \end{cases}$
3.	$\alpha < x_1 < x_2 < \beta$	$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0 \\ a(a\beta^2 + b\beta + c) > 0 \\ 2a\alpha + b < 0 \\ 2a\beta + b > 0 \end{cases}$
4.	$\alpha < x_1 < \beta < x_2$	$\begin{cases} a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0 \\ a(a\beta^2 + b\beta + c) < 0 \end{cases}$
5.	$x_1 < \alpha < x_2 < \beta$	$\begin{cases} a(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0 \\ a(a\beta^2 + b\beta + c) > 0 \end{cases}$
6.	$x_1 < \alpha < x_2$ $x_1 \le \alpha \le x_2$	$a(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0$ $a(a\alpha^2 + b\alpha + c) \le 0$

7.	$x_1 < \alpha < \beta < x_2$	$\begin{cases} a(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0 \\ a(a\beta^2 + b\beta + c) < 0 \end{cases}$

Частковим випадком умов розташування коренів рівняння є умови, за яких обидва корені рівняння додатні, від'ємні, різних знаків (див. *Табл. 2*) [8]:

Таблиця 2

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$		
$x_1 > 0, x_2 > 0$	$x_1 > 0, x_2 < 0$	$x_1 < 0, x_2 < 0$
$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$

Корисними є також такі твердження:

1. Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ поміняти місцями коефіцієнти *a* і *c*, то дістанемо рівняння, корені якого є оберненими до коренів даного рівняння.
2. Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ поміняти знак другого коефіцієнта, то дістанемо рівняння, корені якого є протилежними до коренів даного рівняння.
3. Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ коефіцієнти *a* і *c* різних знаків, то рівняння має дійсні корені [16].

Приклад. Знайти всі значення параметра *a*, при яких корені рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ різні і знаходяться на проміжку $(-2;4)$.

Розв'язання. Згідно із системою 3 (див. Табл. 1) маємо:

$$\begin{cases} 4a^2 - 4(a^2 - 1) > 0 \\ 4 + 4a + a^2 - 1 > 0 \\ 16 - 8a + a^2 - 1 > 0 \\ \frac{2a}{2} > -2 \\ \frac{2a}{2} < 4 \end{cases}; \begin{cases} 4 > 0 \\ a^2 + 4a + 3 > 3 \\ a^2 - 8a + 15 > 0; \\ a > -2 \\ a < 4 \end{cases} \begin{cases} a \in R \\ a \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty) \\ a \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty) \\ a \in (-2; 4) \end{cases}$$

звідки $-1 < a < 3$.

Відповідь: $a \in (-1;3)$.

Приклад. При яких значеннях параметра a обидва різних корені рівняння $ax^2 - 3x + a - 5 = 0$ задовольняють умову $x_1 < -1 < 1 < x_2$ [42]?

Розв'язання. Згідно з умовою 7 (див. Табл. 1) маємо

$$\begin{cases} a(a+3+a-5) < 0 \\ a(a-3+a-5) < 0 \end{cases}, \begin{cases} a(2a-2) < 0 \\ a(2a-8) < 0 \end{cases}$$

звідки $0 < a < 1$.

Відповідь: при $a \in (0;1)$.

Приклад. Знайти найменше ціле значення параметра a, при якому рівняння $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = a \, (0 < x < \frac{\pi}{2})$ має розв'язок.

Розв'язання. За умовою $0 < sinx < 1$, $1 < \frac{1}{sinx} < +\infty$,

$0 < cosx < 1$, $1 < \frac{1}{cosx} < +\infty$,

Отже, $2 < a < +\infty$.

Зводячи обидві частини заданого рівняння у квадрат, маємо:

$$\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} = a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{2}{\sin x \cdot \cos x} = a^2 .$$

Уведемо змінну $z = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$. Тоді вихідне рівняння матиме вигляд:

$z^2 + 2z - a^2 = 0$. Воно має розв'язок при будь-якому *a,* оскільки його дискримінант

$D = 1 + a^2$ додатній при будь-якому a.

З огляду на те, що $2 < a < +\infty$, маємо, що найменше ціле значення параметра a, при якому задане рівняння має розв'язок дорівнює 3.

Відповідь: 3 [1].

1.4.3. Задачі з параметрами на знаходження кількості коренів

Приклад. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння

$a^3 + a^2|a + x| + |1 + a^2x|$=1 має не менше ніж чотири рівні корені, які є цілими числами [28].

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$|a^3 + a^2x| + |1 + a^2x| = a^2x + 1 - (a^3 + a^2x).$

Із властивості абсолютної величини випливає, що рівність $|A| + |B| = A + B$ справедлива тільки за умови $A \geq 0$ та $B \geq 0$. Тоді рівняння рівносильне системі нерівностей

$$\begin{cases} a^2x + 1 \geq 0 \\ a^3 + a^2x \leq 0 \end{cases}$$

1) Значення $a = 0$ задовольняє умову задачі, тому в цьому випадку система, а відповідно й рівняння має безліч коренів.
2) Нехай $a \neq 0$. Тоді система нерівностей рівносильна системі

$$\begin{cases} x \geq -a^2 \\ x \leq -a. \end{cases}$$

Отже, потрібно знайти всі такі значення a, при яких система має не менше ніж чотири різні розв'язки, які є цілими числами.

Порівняємо числа $-a$ та $-\frac{1}{a^2}$, для цього знайдемо їх різницю:

$-\frac{1}{a^2} - (-a) = -\frac{1}{a^2} + a = \frac{-1+a^3}{a^2} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2}.$

Оскільки $a^2 + a + 1 > 0$ при будь-якому a, то значення виразу $a^2 + a + 1$ на знак різниці не впливає. За методом інтервалів маємо:

a) Якщо $a > 1$, то система розв'язків не має, тому й рівняння не має коренів;
b) Якщо $a = 1$, то, розв'язуючи систему, маємо: $x = -1$, тобто дістали єдиний розв'язок і умову завдання не виконано;

c) Якщо $0 < a < 1$, то $-1 < -a < 0$. Тому відрізок $[-a^{-2}; -a]$ буде вміщувати не менше ніж чотири різні цілі розв'язки, якщо має місце нерівність $-a^{-2} \leq -4$.

Розв'яжемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ -\frac{1}{a^2} \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ \left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1+a}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} \geq a \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{2}$.

Тобто якщо $0 < a \leq \frac{1}{2}$, торівняння має не менше ніж чотири різні цілі корені;

d) Якщо $-1 < a < 0$, то $0 < -a < 1$ і відрізок $[-a^{-2}; -a]$ буде вміщувати принаймні чотири цілих числа, якщо має місце нерівність $-a^{-2} \leq -3$.

Розв'яжемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} -1 < a < 0 \\ -a^{-2} \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0 \\ -1 \leq -3a^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0 \\ 3a^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0 \\ 3(a - \frac{1}{\sqrt{3}})(a + \frac{1}{\sqrt{3}}) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0 \\ a + \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a < 0$.

Отже, якщо $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a < 0$, то рівняння має не менше ніж чотири цілі корені;

e) Якщо $a = -1$, то відрізку $[-1; 1]$ належать тільки три цілих корені, тобто умову задачі не виконано;

f) Якщо $a < -1$, то $-1 < -a^{-2} < 0$, для того щоб відрізку належало не менше ніж чотири цілі числа, необхідне виконання умови $-a \geq 3$, тобто нерівності $a \leq 3$.

Відповідь: $a \in (-\infty; -\mathbf{3}] \cup \left[-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]$.

Приклад. Знайдемо значення параметра n, при яких рівняння

$15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$ не має коренів [40]?

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$1;

$15 \cdot 10^{x} + n \cdot 10^{x+1} = n + 20;$

$10^{x}(15 + 10n) = n + 20;$

$10^{x} = \frac{n+20}{15+10n}.$

Рівняння не буде мати розв’язків при $\frac{n+20}{15+10n} \le 0$, оскільки 10^{x} завжди додатнє. Розвязуючи дану нерівність $\frac{n+20}{15+10n} \le 0$ методом інтервалів, маємо:

$(n + 20)(15 + 10n) \le 0;\ -20 \le n \le -1{,}5.$

Відповідь: $[-20; -1{,}5]$.

Приклад. Знайдемо всі значення параметра *a*, при яких рівняння

$\lg^2(1 + x^2) + (3a - 2) \cdot \lg(1 + x^2) + a^2 = 0$ не має розв’язків [43].

Розв’язання. Позначимо $\lg(1 + x^2) = z,\ z > 0$, тоді вихідне рівняння прийме вид: $z^2 + (3a - 2) \cdot z + a^2 = 0$. Це рівняння – квадратне з дискримінантом, рівним

$(3a - 2)^2 - 4a^2 = 5a^2 - 12a + 4$. При дискримінанті менше 0, тобто $5a^2 - 12a + 4 < 0$виконується при $0{,}4 < a < 2$.

Відповідь: (0,4; 2).

Приклад. Визначте, при яких значеннях параметра *a* система рівнянь

$$\begin{cases}(a-1)x + 3y = a \\ x + (a+1)y = 2\end{cases}$$

має:

a) єдиний розв’язок і знайдіть його;

b) безліч розв’язків;

c) не має розв’язків [8].

Розв’язання.

$$\begin{cases}(a-1)x + 3y = a, \\ x + (a+1)y = 2.\end{cases}$$

Система має єдиний розв’язок, якщо $\frac{a-1}{1} \ne \frac{3}{a+1} \Rightarrow a \ne \pm 2$.

Отже, при $a \ne \pm 2$ система рівнянь має єдиний розв’язок, знайдемо його. Систему розв’яжемо способом додавання, для цього обидві частини рівняння домножимо на $1-a$ $(a \neq 1)$ і здобуте рівняння додамо до першого.

Дістанемо рівняння $(2-a)(2+a)y = 2-a$. (1)

При $a = 2$ дане рівняння (1) має безліч коренів, а отже, й система має безліч розв'язків.

При $a = -2$ рівняння (1) не має коренів й система не має розв'язків.

При $a = 1$ система набуває вигляду $\begin{cases} 3y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ звідки маємо єдиний розв'язок системи $\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

При $a \neq \pm 2$ рівняння (1) має єдиний корінь $y = \frac{1}{2+a}$, система має єдиний розв'язок $\left(\frac{3+a}{2+a}; \frac{1}{2+a}\right)$.

Відповідь: при $a \neq \pm 2$ система має єдиний розв'язок $\left(\frac{3+a}{2+a}; \frac{1}{2+a}\right)$; при $a = 2$ система має безліч розв'язків; при $a = -2$ система не має розв'язків [8].

Приклад. При яких a і b система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax + by = 1 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок [41]?

Розв'язання. Так як $|x| \leq 1$ і $|y| \leq 1$, то можлива заміна

$x = sin\alpha,\ y = cos\alpha$, де $\alpha \in [0; 2\pi]$. Тепер достатньо з'ясувати, при яких a і b рівняння

$asin\alpha + bcos\alpha = 1$, де $\alpha \in [0; 2\pi]$, має єдиний розв'язок. Перетворимо ліву частину рівняння. Так як $a^2 + b^2 = 0$ нас не влаштовує, то маємо

$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} cos\alpha\right) = 1$. Звідси $\sin(\alpha + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, де $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Відмітимо, що функція

$f(\alpha) = \sin(\alpha + \varphi)$ на відрізку $[0; 2\pi]$ кожне своє значення приймає більше одного разу, крім 1 і -1. Тому умова єдиного розв'язку досягається при $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

Відповідь: $a^2 + b^2 = 1$.

Приклад. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система нерівностей $\begin{cases} ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a \geq 0 \\ ax \geq a^2 - 2 \end{cases}$ не має розв'язків.

Розв'язання. $\begin{cases} ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a \geq 0 \\ ax \geq a^2 - 2. \end{cases}$

Розглянемо випадок, коли $a > 0$, тоді система нерівностей набуває вигляду:

$$\begin{cases} a^2x^2 + a(a-3)x - 2a^2 + 2 \geq 0 & (1) \\ x \geq \dfrac{a^2 - 2}{a} & (2) \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність (1) системи.

$$a^2x^2 + a(a-3)x - 2a^2 + 2 \geq 0,$$

$a^2x^2 + a(a-3)x - 2a^2 + 2 = 0.$

$$D = a^2(a-3)^2 - 4a^2(-2a^2 + 2) =$$
$$= (a(3a-1))^2 \geq 0$$

при будь-яких $a > 0$.

$$x_1 = \frac{-a(a-3) + a(3a-1)}{2a^2} = \frac{a+1}{a},$$
$$x_2 = \frac{-a(a-3) - a(3a-1)}{2a^2} = \frac{2-2a}{a}.$$

Під час «накладання» на множину розв'язків нерівності (1) розв'язків нерівності (2), стає зрозумілим, що при будь-яких додатних значеннях параметра система має розв'язки, що не задовольняє умову задачі.

Розглянемо випадок, коли $a < 0$, тоді система нерівностей набуває вигляду:

$$\begin{cases} a^2x^2 + a(a-3)x - 2a^2 + 2 \le 0 \\ x \le \dfrac{a^2-2}{a} \end{cases}.$$

З'ясуємо розташування $x_1, x_2, \frac{a^2-2}{a}$

3) $\frac{a^2-2}{a} < \frac{a+1}{a} \le \frac{2-2a}{a}$

$\begin{cases} \frac{a^2-2}{a} < \frac{a+1}{a}, \\ \frac{a+1}{a} \le \frac{2-2a}{a}; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{a^2-a-3}{a} < 0, \\ \frac{3a-1}{a} \le 0. \end{cases}$

Розв'язавши другу нерівність системи, бачимо, що при $a < 0$ вона не має розв'язків, а отже, і система нерівностей не має розв'язків, тобто випадок 1) неможливий.

4) $\begin{cases} \frac{a^2-2}{a} < \frac{2-2a}{a} \\ \frac{2-2a}{a} \le \frac{a+1}{a} \\ a < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{a^2+2a-4}{a} < 0 \\ \frac{-3a+1}{a} \le 0 \\ a < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow a \in \left(-\infty; -1-\sqrt{5}\right).$

Відповідь: $\left(-\infty; -1-\sqrt{5}\right)$ [43].

Окрім аналітичного методу розв'язування завдань на знаходження кількості коренів часто користуються графічним методом (див. *Методи розв'язування задач з праметрами*).

Приклад. Знайдіть всі значення параметра при якому система має безліч розв'язків

$$\begin{cases} |y-x| = 2 \\ y = |x| + a \end{cases} [14].$$

Розв'язання. Побудуємо графіки обох рівнянь в одній системі координат.

Графік першого рівняння – дві паралельні прямі: $y = x + 2$ і $y = x - 2$;

графік другого рівняння – кут, що рухається вгору-вниз по осі *Oy* (*рис. 6*).

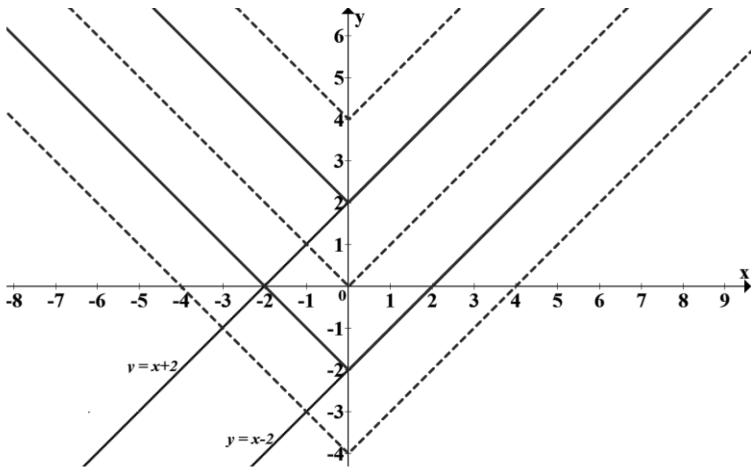


Рис. 6

Кутові коефіцієнти прямих і правої сторони кута однакові і дорівнюють 1. Очевидно, що система має безліч розв'язків при $a = \pm 2$.

Відповідь: -2; 2.

Приклад. Знайдіть усі значення параметра *а* при яких система має єдиний розв'язок.

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \le 0 \\ x^2 - 4x - 6a \le 0 \end{cases} [2].$$

Розв'язання. Перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} a \le -(x^2 + 2x) \\ a \ge \dfrac{x^2 - 4x}{6} \end{cases}$$

Розглянемо систему координат *хОа*. Побудуємо в цій системі графіки функцій $a_1(\mathrm{x}) = -(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x})$ та $a_2(\mathrm{x}) = \frac{x^2 - 4x}{6}$ (*рис. 7*).

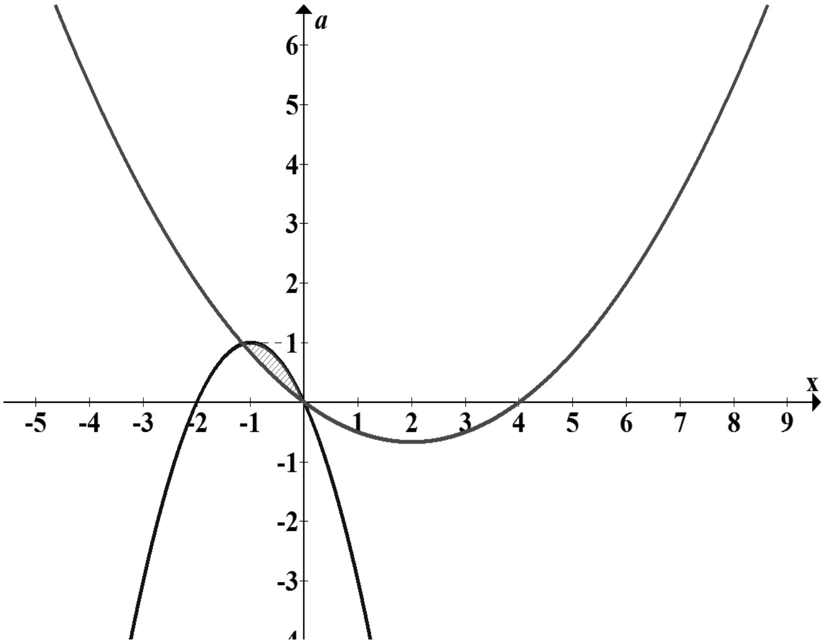


Рис.7

Розв'язком системи нерівностей є заштрихована частина графіку.

Система матиме один розв'язок лише при

$a = 0$ та $a = -1$.

Відповідь: 0; 1.

1.4.4 Задачі з параметрами, які пов'язані з властивостями функцій

Приклад. При якому значенні параметра b проміжок $(-\infty;2]$ є проміжком зростання функції $y = -4x^2 - bx + 5$ [17]?

Розв'язання. Оскільки функція зростає на проміжку $(-\infty;2]$, то 2 є абсцисою вершини параболи.

Скористаємося формулою для знаходження абсциси вершини параболи

$x_в = -\frac{b}{2a}$. Маємо $2 = -\frac{b}{2\cdot(-4)}$, $b = 16$.

Відповідь: при $b = 16$.

Приклад. Знайти всі значення параметра a, при яких множина значень функції $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x+a^2-3a}$ не перетинається із проміжком $[3;+\infty)$.

Розв'язання. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x+a^2-3a}=\left(\frac{1}{3}\right)^{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{a^2-3a-1}$.

Очевидно, що $0<\left(\frac{1}{3}\right)^{(x+1)^2}\le 1$, звідси $0<f(x)\le\left(\frac{1}{3}\right)^{a^2-3a-1}$. Отже область значень функції – проміжок $\left(0;\left(\frac{1}{3}\right)^{a^2-3a-1}\right]$. Отриманий проміжок не повинен мати спільних точок із променем $[3;+\infty)$.

Очевидно, що для цього достатньо вимагати $\left(\frac{1}{3}\right)^{a^2-3a-1}<3$; $a^2-3a-a>1$, тобто $a<0$ або $a>3$.

Відповідь: $a<0$ або $a>3$ [43].

Приклад. Знайти всі a, при яких нерівність $-5+5a+\sin^2 x+a(3-\cos x)^3>0$ виконується при всіх x [39].

Розв'язання. При розв'язанні цього прикладу потрібно представити вихідну нерівність у вигляді $a>f(x)$ $(a<f(x))$, потім дослідити функцію f на найбільше (найменше) значення.

Перепишемо дану нерівність у вигляді $a((3-\cos x)^3+5)>5-\sin^2 x$ оскільки $(3-\cos x)^3+5>0$ для всіх x, то $a>\frac{5-\sin^2 x}{(3-\cos x)^3+5}$. Ця нерівність виконується для всіх x, якщо значення параметра a буде більше від найбільшого значення функції $f(x)=\frac{5-\sin^2 x}{(3+\cos x)^3+5}$. Визначимо, що в отриманому дробі при $\cos x=1$ чисельник набуває найбільшого значення, а знаменник – найменшого.

Тоді $f(x)\le\frac{5}{2^3+5}=\frac{5}{13}$.

Знак рівності досягається, якщо $x = 2\pi n$, $n \in Z$. Отже шукані значення a визначаються нерівністю $a > \frac{5}{13}$.

Відповідь: $a > \frac{5}{13}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = a$ [43].

Розв'язання. Оскільки $|x| \leq 1$, то введемо заміну $x = cos\alpha$, де $\alpha \in [0;\pi]$. Виконуємо підстановку, враховуючи, що $sin\alpha \geq 0$. Маємо $cos\alpha\, cos2\alpha\, sin\alpha = a$. Звідси $sin4\alpha = 4a$. Очевидно, що це рівняння має розв'язок при $|a| \leq \frac{1}{4}$. Знайдемо його корені на відрізку $[0;\pi]$. Маємо $\alpha = (-1)^k \frac{1}{4} \arcsin 4a + \frac{\pi k}{4}$. Розглянемо три випадки. Якщо $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$, то безпосередньо перебором встановлюємо, що $\alpha \in [0;\pi]$ лише при $k = 1, 2, 3, 4$. Якщо $a = 0$, то $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Якщо $0 < a \leq \frac{1}{4}$, то $k = 0, 1, 2, 3$.

Відповідь: якщо $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$, то

$x = \cos((-1)^k \frac{1}{4} \arcsin 4a + \frac{\pi k}{4})$, де $k = 1, 2, 3, 4$;

якщо $a = 0$, то $x = \cos\frac{\pi k}{4}$ де $k = 0, 1, 2, 3, 4$;

якщо $0 < a \leq \frac{1}{4}$, то $x = \cos((-1)^k \frac{1}{4} \arcsin 4a + \frac{\pi k}{4})$, де $k = 0, 1, 2, 3$.

Приклад. При яких значеннях параметра a функція

$f(x) = \frac{a^2-1}{(a+3)^2} cos\frac{3x}{2} + (a^3 + a^2 - 4a - 4) \cdot \frac{x^2+a-5}{x^2-2a+1}$ періодична і має найменший додатній період $\frac{4\pi}{3}$ [43]?

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = \frac{a^2-1}{(a+3)^2} cos\frac{3x}{2}$. Якщо $a^2 = 1$, то ця функція періодична, але основного періоду не має. Разом з тим при $a = 1$ функція f є дробово-раціональною, але не сталою, звідси, не періодичною. Якщо ж

$a = -1$, то $f(x) = 0$, тобто функція *f* періодична.

Розглянемо випадок, коли $a^2 \neq 1$.

Повернемося до функції g. Вона періодична з основним періодом $\frac{4\pi}{3}$. Такий період повинна мати і функція *f*. Для цього необхідно, щоб функція $h(x) = (a+1)(a^2-4) \cdot \frac{x^2+a-5}{x^2-2a+1}$ була періодичною. Неважко помітити, що шукані значення *a* повинні задовольняти нерівність $a < \frac{1}{2}$. Інакше рівняння $x^2 - 2a + 1 = 0$ мало б розв'язки, а отже, функція h не була б періодичною. Якщо ж $a^2 - 4 \neq 0$, то h - дробово-раціональна функція, знову не є сталою. Залишається перевірити значення $a = -2$. Перевірка дає позитивний результат.

Відповідь: якщо $a = -1$, то функція *f* періодична, але основного періоду не має; якщо $a = -2$, то основним періодом функції f є $\frac{4\pi}{3}$; при $a \in R \backslash \{-1;\ -2\}$ функція *f* неперіодична.

Приклад. Знайти критичні точки функції $f(x) = (2x-1)\sqrt[4]{x-a}$.

Розв'язання. Нагадаємо визначення критичних точок: внутрішня точка області визначення функції, в якій похідна дорівнює нулю або не існує, називається критичною.

Маємо $f'(x) = 2\sqrt[4]{x-a} + \frac{2x-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}} = \frac{10x-8a-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}}$. Оскільки знайдена похідна існує у всіх внутрішніх точках області визначення функції *f*, то критичні точки слід шукати серед кореней рівняння $f'(x) = 0$. Звідси $x = \frac{4a}{5} + \frac{1}{10}$. Так як $\frac{4a}{5} + \frac{1}{10} > a$ отримаємо $a < \frac{1}{2}$.

Відповідь: якщо $a < \frac{1}{2}$, то $x = \frac{4a}{5} + \frac{1}{10}$ – критична точка;

якщо $a \geq \frac{1}{2}$, то критичних точок немає [19].

Приклад. При яких значеннях параметрів a і b значення функції $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$ не залежать від *x*?

Розв'язання. Умова «не залежать від *x*» стосується всіх значень аргументу з області визначення функції. Так, наприклад, значення функції $f(x) = \frac{x}{x}$ не залежать від x, тобто $f(x)$ зберігає своє значення 1 при всіх $x \in D(f)$.

Для розв'язання задачі достатньо знайти значення параметрів a і b, при яких $f'(x) = 0$ при всіх $x \in D(f)$.

Маємо $f'(x) = \frac{b(a-1)x^2+2(a^2-1)x+b(a-1)}{(x^2+bx+a)^2}$. Очевидно $f'(x) = 0$, якщо $\begin{cases} b(a-1) = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases}$. Звідси, якщо $a = 1$, то $b \in R$; якщо $a = -1$, то $b = 0$.

Відповідь: $a = 1$ і $b \in R$; $a = -1$ і $b = 0$.

Приклад. При яких значеннях a функція

$f(x) = 2ax^3 + 3(3-2a)x^2 - 36x + 4$ зростає на відрізку $\left[1; \frac{3}{2}\right]$?

Розв'язання. Маємо $f'(x) = 6ax^2 + 6(3-2a)x - 36 = 6(x-2)(ax+3)$. Знайдемо всі a, при яких похідна приймає невід'ємні значення на проміжку $\left[1; \frac{3}{2}\right]$. На проміжку $x - 2 < 0$ достатньо, щоб $ax + 3 \leq 0$ при всіх $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$, то

$\min y = y(1) = -3$. Звідси $a \leq -3$.

Відповідь: $a \leq -3$ [19].

Приклад. Знайти найбільше значення функції $f(x) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2$ на відрізку $[-2; 1]$ в залежності від значення параметра a.

*Розв'язання***.** Маємо $f'(x) = 4x^3 - 4ax = 4x(x^2 - a)$. Очевидно якщо $a \leq 0$, то вихідна функція має тільки одну критичну точку $x = 0$, яка, як легко перевірити, є точкою мінімума. Отже, при $a \leq 0$ функція f може приймати найбільше значення на проміжку $[-2; 1]$ лише в точках $x = -2$ або $x = 1$. Далі діємо так: знайдемо $f(-2)$ і $f(1)$ та порівняємо отримані значення. Однак, якщо функція f парна, то $f(-2) = f(2) > f(1)$ (функця f при $a \leq 0$ зростає на проміжку [0;∞)). Таким чином, на проміжку $[-2; 1]$ $\max f(x) = f(-2) = 16 - 8a + 3a^2$.

Якщо $a > 0$, то дана функція має три критичні точки: $x = -\sqrt{a}$; $x = 0$; $x = \sqrt{a}$. Легко встановити, що $x = 0$ – точка максимума, $x = -\sqrt{a}$ і $x = \sqrt{a}$ – точки мінімума, причому характерно монотонності функції f $f(0) > f(-\sqrt{a})$ і

$f(0) > f(\sqrt{a})$. Отже, точки $x = -\sqrt{a}$ і $x = \sqrt{a}$ в подальшому дослідженні участі не беруть, залишається порівняти значення $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$. Маємо, $f(0) = 3a^2$, $f(1) = 3a^2 - 2a + 1$.

Очевидно при $a \geq 0$ $f(0) \geq f(-2)$ і $f(0) > f(1)$. Легк перевірити, що при

$a < 2$ $f(-2) > f(0)$ і $f(-2) > f(1)$.

Отже, якщо $a < 2$, то $\max f(x) = f(-2) = 16 - 8a + 3a^2$; якщо $a \geq 0$, то $\max f(x) = f(0) = 3a^2$.

Відповідь: якщо $a < 2$, то $\max f(x) = f(-2) = 16 - 8a + 3a^2$;

якщо $a \geq 0$, то $\max f(x) = f(0) = 3a^2$ [43].

Висновки до першого розділу

У першому розділі з’ясовано, що задачі з параметрами – це спеціальні компетентнісно-орієнтовані завдання, тобто ці завдання є засобами формування математичної компетентності. При розв’язуванні таких завдань основна увага повинна приділятися формуванню здібностей учнів використовувати математичні знання в різноманітних ситуаціях, при розв’язуванні вимагають різних підходів, роздумів і інтуїції. Такі завдання використовуються на уроках закріплення знань, комплексного застосування знань, узагальнення і систематизації знань та позакласних уроках.

Таким чином, задачі з параметрами – це задачі, в яких умова, хід розв’язку і форма результату залежать від величин, чисельні значення яких не задані конкретно, але повинні вважатися відомими.

У розділі проаналізовані методи розв’язування задач з параметрами в основній школі та здійснено їх характеристику. А саме виокремлено аналітичний ти графічні методи та представлені приклади розв’язування задач з параметрами з використанням даних методів.

З’ясовано місце та роль задач з параметрами в шкільному курсі математики. Аналіз програм та діючих підручників дав змогу стверджувати, що учні з академічним рівнем, а тим паче з рівнем стандарту, обираючи математику при складанні ЗНО, зустрічаються з проблемою розв’язування задач з параметрами. Якщо у класах з академічним рівнем навчання задачі з параметрами носять епізодичний характер, то у класах з поглибленим вивченням приділено значне місце. Значущість таких задач висвітлено в програмі з математики з поглибленим вивченням.

Аналізуючи підручники, нами було виділено основні типи завдань та представлена методика їх розв’язування на основі конкретних прикладів, а саме:

1. розв’язати рівняння, нерівність або їх системи для всіх можливих значень параметра;

2. завдання, в яких пропонується знайти лише ті розв’язки, які задовольняють певним умовам;
3. завдання, на знаходження кількості коренів рівняння;
4. завдання, пов’язані з властивостями функцій.

РОЗДІЛ 2.
ВИКОРИСТАННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ GRAN1 ПРИ РОЗВЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Характеристика педагогічного програмного забезпечення GRAN1

Використання ППЗ GRAN чітко зазначено в програмі математики: «…підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання всесвітньої мережі Інтернет, різноманітних програмних засобів навчального призначення, бібліотек електронних наочностей, офісних і спеціалізованих пакетів (наприклад, MsOffice, AutoCAD, MathCAD, MAPLE, GeoGerbra, GRAN та інших). За їх допомогою більш наочним стає вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії: побудова графіків функцій, розв’язування систем рівнянь і нерівностей, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об’ємів тіл обертання тощо. Проте слід знайти виважену границю щодо оптимального обсягу застосування цих засобів. Слід усвідомлювати, що зазначені інформаційні технології слугують лише допоміжним елементом пошуку інформації, її наочного подання або урізноманітнення навчальних завдань. Не слід надто захоплюватись уміннями вільно оперувати зазначеними програмно-технічними засобами на шкоду основному завданню вивчення математики — відпрацюванню в учнів відповідних навичок мислення» [30]. Зважаючи на це, визначимо цілі використання пакету GRAN:

- ✓ розвиток міжпредметних зв'язків математики та інформатики;
- ✓ формування комп'ютерної грамотності, розвиток самостійної роботи учнів на уроці;
- ✓ реалізація індивідуального, особистісно зорієнтованого підходу, розвиток творчих та дослідницьких здібностей [35].

Виходячи з цього, можна сформулювати основні завдання вчителя математики:

- забезпечити фундаментальну математичну підготовку дітей;

- формувати інформаційну та методичну культуру, творчий дослідницький стиль діяльності учнів;

- підготувати учнів використовувати інформаційні технології та інші інформаційні структури [18].

Пакет GRAN, розроблений під керівництвом академіка М. І. Жалдака (Київський ДПУ) який набув широкого розповсюдження у навчальних закладах України.

GRAN1 - програма, основні задачі якої - графічний аналіз функцій: графіки, обчислення тощо; математична статистика; апроксимація. Звідки і походить її назва (GRaphic ANalysis). Графічне розв'язування рівнянь та їх систем, нерівностей та їх систем, відшукання найбільших та найменших значень функції на заданій множині точок, побудова січних та дотичних до графіків функцій, обчислення визначених інтегралів, обчислення площ довільних фігур та поверхонь обертань - ось перелік основних можливостей цього програмного засобу [9].

Програма проста в користуванні та не вимагає від користувача спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки чи програмування, а лише досить скромних знань в сфері роботи з персональним комп'ютером, що дозволяє з успіхом використовувати GRAN в школі. Вона оснащена досить зручним і «люб'язним» інтерфейсом, максимально наближеним до найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів, операційних оболонок тощо), та контекстною допомогою.

За бажанням користувача є можливість обирати декартову чи полярну систему координат, функцію можна задати явно, неявно, параметрично. Взагалі GRAN1 оперує такими об'єктами: функціональна залежність, табличне задання функції, статистична вибірка та коло [9].

Комплекс GRAN (1,2,3) - один з засобів візуалізації задачі та її розв'язання, який робить діалог учня зі вчителем більш доступним та евристичним. За допомогою цієї програми учні зможуть самостійно висувати гіпотези, робити припущення відносно закономірностей, які вони розглядають, експериментувати. Таким чином учень розуміє потребу доводити, знає з якою метою і навіщо він це робить. У зв'язку з цим, в нього формуються відповідні навчальні евристичні вміння [6].

Формуючи прийоми евристичної діяльності учнів в процесі навчання математики важливо не тільки правильно визначити обсяг навчального матеріалу, який після осмислення відповідає принципу рефлексії, а, в першу чергу, викликати в учнів високу мотивацію до створення власного навчального продукту діяльності. В цьому відношенні засобом формування такої діяльності може виступати програмний продукт GRAN [6].

Використання програм, подібних до GRAN дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул. Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, учень чітко і легко розв'язуватиме досить складні задачі, впевнено володітиме відповідною системою понять і правил. За допомогою GRAN окремі розділи і методи математики можна перетворити в «математику для всіх», що робить їх доступними зрозумілими, легкими і зручними для використання. Той, хто розв'язує задачу, стає користувачем математичних методів, можливо не володіючи їхньою будовою і обґрунтуванням, аналогічно до того, як він використовує різні комп'ютерні програми (текстові, графічні, музичні редактори, електроні таблиці, бази даних, електроні оболонки), не знаючи, як і за якими принципами вони побудовані, якими мовами програмування описані [5].

Такий підхід до вивчення математики дає наочні уявлення про поняття, розвиває образне мислення, просторову уяву. На передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі [5].

Щоб більш широко розкрити потенціал використання в навчальному процесі даного ППЗ, при його вивченні слід розглядати не тільки найпростіші задачі, але і більш складні, такі, як задачі з параметрами, розв’язування яких завжди було проблемою для школярів та студентів. Звернемо увагу на використання даного ППЗ до розв’язування математичних задач з параметрами графічними методами.

2.2. Екстраполяція досвіду використання НІТ до розв’язування задач з параметрами

Розвиток та вдосконалення новітніх інформаційних технологій (НІТ) та їх поступове проникнення в освітню сферу впливає на зміст, методи, засоби навчання. Останнім часом все частіше на уроках у середній школі використовують комп’ютер, зокрема на уроках математики використовують педагогічні програмні засоби (ППЗ): Gran1, Derive. Програми можна використовувати практично на всіх заняттях математики, зокрема під час вивчення таких тем як «Поняття функції», «Перетворення графіків тригонометричних функції», «Розв’язування рівнянь та нерівностей», «Матриці і визначники» та інші.

Зазначені програми дають змогу викладачеві зробити своє спілкування з учнями ще більш інтенсивним, більше уваги приділити логічному аналізу умов задач, перекласти на комп’ютер технічні операції.

Працюючи один на один з такою програмою, учень отримує зручні умови для відпрацювання самобутніх методів, навичок і стратегій розв’язування задач, тобто має змогу виховувати в себе оригінальність думки так потрібну для розвитку евристичних та креативних моментів у мисленні [37].

Зважаючи на це, визначимо цілі використання пакету GRAN:

- ✓ розвиток міжпредметних зв'язків математики та інформатики;

- ✓ формування комп'ютерної грамотності, розвиток самостійної роботи учнів на уроці;
- ✓ реалізація індивідуального, особистісно зорієнтованого підходу, розвиток творчих та дослідницьких здібностей [36].

Виходячи з цього, можна сформулювати основні завдання вчителя математики:

- забезпечити фундаментальну математичну підготовку дітей;

- формувати інформаційну та методичну культуру, творчий дослідницький стиль діяльності учнів;

- підготувати учнів використовувати інформаційні технології та інші інформаційні структури [35].

Аналізуючи досвід використання, вчителями математики, ППЗ GRAN1 можна виділити такі переваги даної програми:

1. вони не потребують від учня спеціальних знань, поглибленого вивчення комп’ютера, а досить лише найпростіших понять повністю доступних для учнів та учителя[4].
2. Використання даних програм дає можливість учневі розв’язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів, тощо. Наприклад, учень може розв’язувати рівняння й нерівності і їхні системи, не знаючи формул знаходження коренів, методу виключення змінних, досліджувати функції, не знаючи алгоритмів їхнього дослідження.
3. Завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, учень чітко й легко може розв’язати досить складні задачі, упевнено володіти відповідною системою понять і правил.
4. Використання програмних засобів відзначеного типу дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язання задачі настільки ж доступним, як простий розгляд малюнків або графічних зображень [5].

Таким чином, використання GRAN1 дає змогу значною мірою підсилити інтелектуальну діяльність, можливість автоматизувати виконання не тільки чисельних, а й аналітичних (символьних) обчислень та графічних побудов. З іншої сторони такий підхід дозволяє забезпечити урок значною кількістю наочності, розвиває образне мислення, просторову уяву, дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально розв’язувати задачу. При цьому на передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі, матеріальна інтерпретація отриманих за допомогою комп'ютера результатів. Всі технічні операції щодо розробки побудованої математичної моделі, реалізації методу відшукування розв’язування, оформлення й подання результатів розробки вхідних даних покладають на комп’ютер [5].

Але на шляху впровадження НІТ в навчальний процес виникає ряд проблем. Перш за все це забезпечення технічними засобами. Зрозуміло, що заняття з математики, орієнтовані на використання засобів навчання згаданих типів, повинні проводитися відповідним чином в оснащеному технічними й програмними засобами класі. В цьому випадку кожен учень сам візьме участь у виконанні завдання. У таких класах повинні вивчатися всі навчальні предмети, а не тільки основи інформатики й обчислювальної техніки. Це у свою чергу буде сприяти розширенню й поглибленню міжпредметних зв'язків, інтеграції окремих навчальних предметів, їхньому взаємопроникненню й взаємодії, що в остаточному підсумку дасть можливість в окремих навчальних закладах або класах оперувати елементами нових інформаційних технологій й інформаційної культури при вивченні різних навчальних дисциплін [5]. Другою проблемою є організація навчального процесу. Як свідчить досвід, при вивченні математики комп’ютер з усіма його можливостями є лише засобом навчання, використання його не самоціль. Тому ефективною буде така організація навчання, при якій до комп’ютерних програм учні звертатимуться саме тоді, коли це дійсно необхідно і корисно для покращення математичних знань. По-третє, відсутність системи задач, яку можна використати при вивченні конкретної теми із застосуванням педагогічних програмних засобів [6].

Таким чином, враховуючи цілі, переваги та проблеми використання НІТ, типи задач з параметрами та методи їх розв’язування, нами було розроблено систему задач з параметрами, розв’язання яких можна продемонструвати за допомогою програми GRAN1. В свою чергу дана система дозволить розширити дидактичні матеріали вчителів і усунути проблему на шляху впровадження НІТ в навчальний процес.

З наведених прикладів розв’язування задач з параметрами з використанням програми GRAN1 (див. п. 2.3) можна помітити, що більшість задач стосуються знаходження кількості розв’язків залежно від параметра. Тому нами була підібрана така система задач, яка враховувала цю вимогу до умови задачі.

Система задач з параметрами

1. Знайти при яких значеннях параметра a рівняння (система рівнянь, нерівностей) має єдиний розв’язок:

a) $(x+a)^2+2x^2+20x+50=0$;

b) $(2a+8)x^2-(a+4)x+3=0$;

c) $|x-a^2|+|x+1|=|a+1|$;

d) $\frac{x^2-ax+1}{x+3}=0$;

e) $\sqrt{2x-3}=a-3x$;

f) $|x^2-4x+a+4|=|x-2|$;

g) $\log_{(x-1)}(x+a)=\frac{1}{2}$;

h) $\log_{(a-4)(10-a)}(-x^2+4x-3)=\log_{(a-4)(10-a)}((x-0{,}25a-1)(x-0{,}5a-2))$

i) $\begin{cases}|y+x|=2,\\ y=|x|+a;\end{cases}$

j) $\begin{cases}|x|+|y|=4,\\ (x-3)^2+(y-3)^2=(a+1)^2;\end{cases}$

k) $\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geq 0$;

l) $cos^6x + sin^6x > a$;

m) $|3sin^2x + 2asinxcosx + cos^2x = a| \leq 3$;

n) $\begin{cases} x^2 - 2x \leq a - 1, \\ x^2 - 4x \leq 1 - 4a; \end{cases}$

2. Знайти при яких значеннях параметра *a* рівняння (система рівнянь, нерівностей) має безліч розв'язків:

a) $(a^2 + 2a)x = a^2 + 3a + 3x$;

b) $|x + 2| + |x - 3| = a$;

c) $\begin{cases} y - |x + 5| = 0, \\ y - x + a = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} |y - x| = 2, \\ y = |x| + a; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + ay = -2, \\ 5x - 2y = -5. \end{cases}$

3. Знайти кількість розв'язків залежно від параметра *a*:

a) $(x + 2)\sqrt{x^2 - 4x + 4} = a$;

b) $|x + 2| \cdot |x - 3| = a$;

c) $|x^2 - 6|x| + 8| = a$;

d) $|x^2 - 4x + a + 4| = |x - 2|$.

e) $\begin{cases} 3x - ay = 8, \\ 2x - 4y = 2; \end{cases}$

f) $\begin{cases} |x + y| + |x - y| = 2, \\ x^2 + y^2 = (a - 1)^2. \end{cases}$

4. Знайти всі значення параметра *a*, при кожному з яких точка *M*(*a*;-2) належить множині $D = \{(x; y): (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$.

5. При яких значеннях *a* система нерівностей (рівнянь) матиме розв'язки:

a) $\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + a \leq 0, \\ x^2 + 4x + 7 - 4a \leq 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ x + y = a^2 + 4. \end{cases}$

6. Скільки спільних точок мають графіки заданих функцій залежно від параметра *a*:

a) $y = |x^2 - 4x - 5|,\ y = a$;
b) $y = |x^2 - 4|x| + 3| + a,\ y = 2$;
c) $y = \big||x-1| - 2\big| + a, y = 2$;
d) $y = \big||x-2| - 2\big|, y = a - |x-2|$;
e) $y = |x+5| - |4-x| + a, y = 1$;
f) $y = \left|\frac{5-|x|}{|x|-3}\right|,\ y = a + 2$.

7. Скільки спільних точок має множина D з графіком даної функції залежно від параметра a:
   $D = \{(x;y): x, y \in R, |y| = \big||x| - 1\big|\}$ та $x = |y| + a$ [1, 4, 8, 42, 43].

2.3. Методика розв'язування задач з параметрами з використанням ППЗ GRAN1

Як вже зазначалося, в програмах з математики для загальноосвітніх шкіл задачам з параметрами відводиться незначне місце. Такі задачі вкраплені в різні теми шкільного курсу математики і, як правило окремою темою не вивчаються. Відносна складність задач з параметрами з одного боку і недостатній рівень підготовленості учнів – з другого, не дозволяють більшості вчителів відводити достатньо часу на уроках для оволодіння необхідними навичками розв'язування задач з параметрами.

Застосування ж на уроках алгебри та початках аналізу педагогічних програмних засобів (ППЗ) дозволяє інтенсифікувати процес навчання, організовувати вивчення матеріалу нетрадиційним, більш ефективним способом, що допоможе в вирішенні виниклого протиріччя. Практика показує, що доцільним є використання саме ППЗ GRAN1, який призначений для графічного аналізу функцій. Застосування цієї програми на уроках математики в класах з поглибленим вивченням математики при розв'язуванні задач з параметрами на наш погляд має супроводжувальний характер різноманітних аналітичних методів розв'язування вище згаданих задач у вигляді графічних інтерпретацій, і є засобом як перевірки так і унаочнення отриманих розв'язків. Хоча подекуди графічний спосіб є чи не єдиним способом відшукання розв'язків або значно легшим ніж аналітичний. В звичайних класах та класах з гуманітарними напрямками використання GRAN1 "дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів. Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язання задачі, учень чітко і легко розв'язуватиме досить складні задачі, впевнено володітиме системою понять і правил... При цьому на передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної моделі, матеріальна інтерпретація отриманих за допомогою комп'ютера розв'язків" [35]. Ефективним, зокрема, є використання програми GRAN1 в тих задачах, де параметр можна розглядати як "рівноправну" змінну, тобто якщо присутній один параметр (наприклад a) та одна змінна (наприклад x).

I. Координатна площина aOy (xOa).

Сюди можна віднести найбільшу кількість задач, які можна продемонструвати за допомогою програми GRAN1. Даний метод має назву «метод розв'язування відносно параметра». Сюди можна віднести задачі, в умові яких фігурують параметр a та одна змінна.

В такому випадку пропонуємо таку схему розв'язування задач з параметром:

1. Подати аналітичний вираз у неявному вигляді. Скориставшись послугою "Новий об'єкт" і вибравши тип функціональної залежності або «явне задання», або «тип G(x,y)=0» (вважаючи, що одна із змінних є параметром a) ввести до розгляду потрібний вираз, побудувати графік утвореної функції (послуга "Графік" – "Побудувати").
2. Побудувати серію графіків функцій виду a = c або y = c (де c : const) для одержання висновків (щоб вдало вибрати значення константи c для проведення прямої a = c або y = c доцільно скористатись опцією "Координати"; при необхідності уточнення значення варто або змінити масштаб побудови графіка за допомогою опції "Масштаб користувача", або

збільшити частину координатної площини, обравши опцію “Збільшити”): пряма виду a = с або y = с не перетинає графік функції – при вибраному значенні параметра a задача розв’язків немає; пряма перетинає графік функції – абсциси точок перетину є розв’язками задачі.

3. Записати відповідь [8].

Розглянемо більш докладно цей процес на прикладах.

Задача. Визначити, при яких значеннях параметра a рівняння $2^{0,5a+1}x^2 - x^4 = y^2 - 2y\sqrt{a} + 6$ має розв’язки [43].

Розв’язання. При наявності двох змінних може здатися, що в даному завданні неможливо скористатися цим методом. Але після нескладних перетворень можемо позбавитися однієї змінної.

Розв’яжемо це рівняння відносно y, для цього перенесемо все у ліву частину рівняння і запишемо його у вигляді:

$$y^2 - 2y\sqrt{a} + (2^{0,5a+1}x^2 - 6 - x^4) = 0.$$

Рівняння має розвязки якщо $D \geq 0$:

$\frac{D}{4} = a - (2^{0,5a+1}x^2 - 6 - x^4) \geq 0,\ x^4 - 2 \cdot 2^{0,5a}x^2 + 6 - a \leq 0;$

$$\frac{D_1}{4} = (2^{0,5a})^2 - 6 + a > 0;\ \frac{D_1}{4} = 2^a + a - 6 > 0$$

Будуємо графік $y(a) = 2^a + a - 6$ за допомогою GRAN1. Виберемо в головному меню Операції/Нерівності знак «>» і на екрані заштрихує червоним кольором розв’язок даної нерівності, тобто $a > 2$ (рис. 2.1).

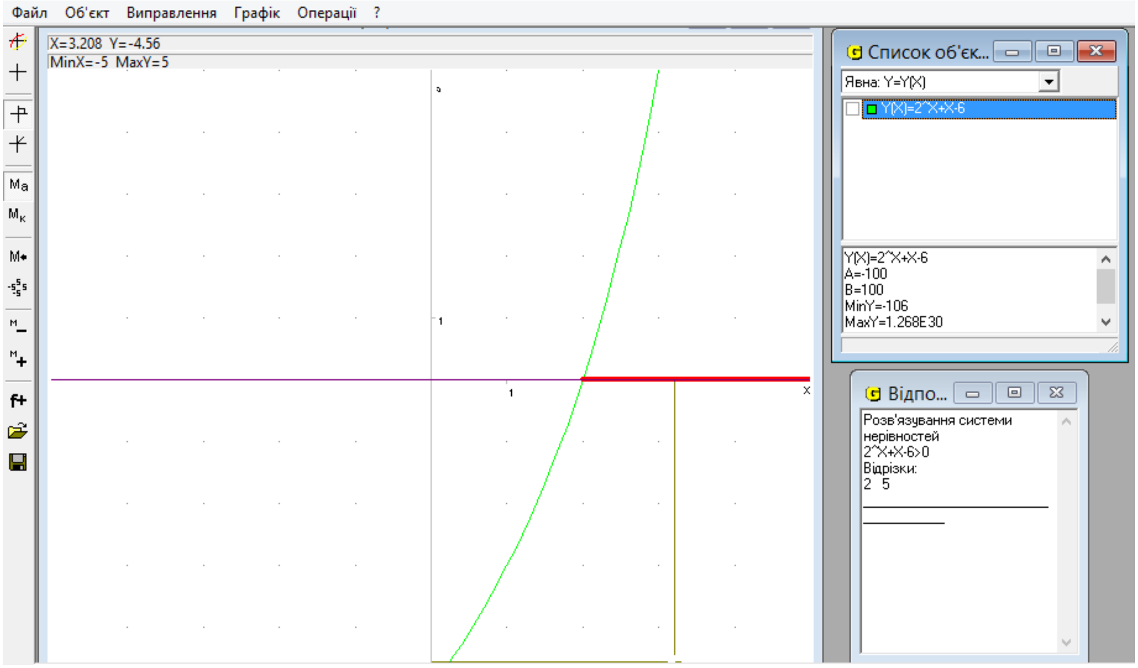


Рис. 2.1

Отже, рівняння матиме розв'язки при $a > 2$.

Задача. При яких значеннях параметра a рівняння $\sin\left(\frac{2\pi}{x^2+2x+a}\right) = 0$ має рівно шість коренів [41]?

Розв'язання. Побудуємо графік функції $\sin\left(\frac{2\pi}{x^2+2x+a}\right) = 0$ в системі координат xOa. Сконструйовану тригонометричну функцію побудуємо засобами GRAN1, вибравши неявний тип функціональної залежності G(x,y) (рис. 2.2).

Неважко помітити, що розв'язком даного рівняння будуть всі значення параметра a, що пробігають множину ординат між вершиною третьої та четвертої дуги графіка функції. Опція “Координати” дозволяє з достатньою точністю одержати розв'язок задачі.

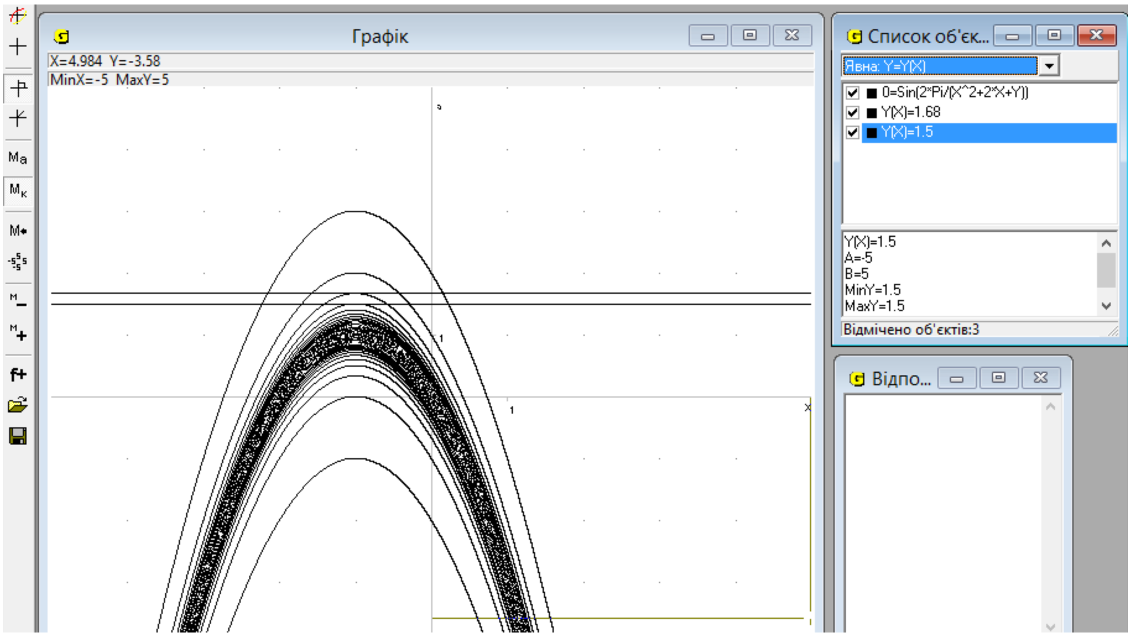


Рис. 2.2

Отже, при a є (1,5; 1,68) рівняння має рівно шість коренів.

Задача. Знайти значення параметра a, при якому рівняння $(a^2 - 1)x = a^2 + 2a - 3$ має безліч розв'язків [8].

Розв'язання. Здійснимо заміну параметра a на y, отримаємо $(y^2 - 1)x = y^2 + 2y - 3$ і побудуємо графік цієї функції, вибравши задання G(x,y) (рис. 2.3)

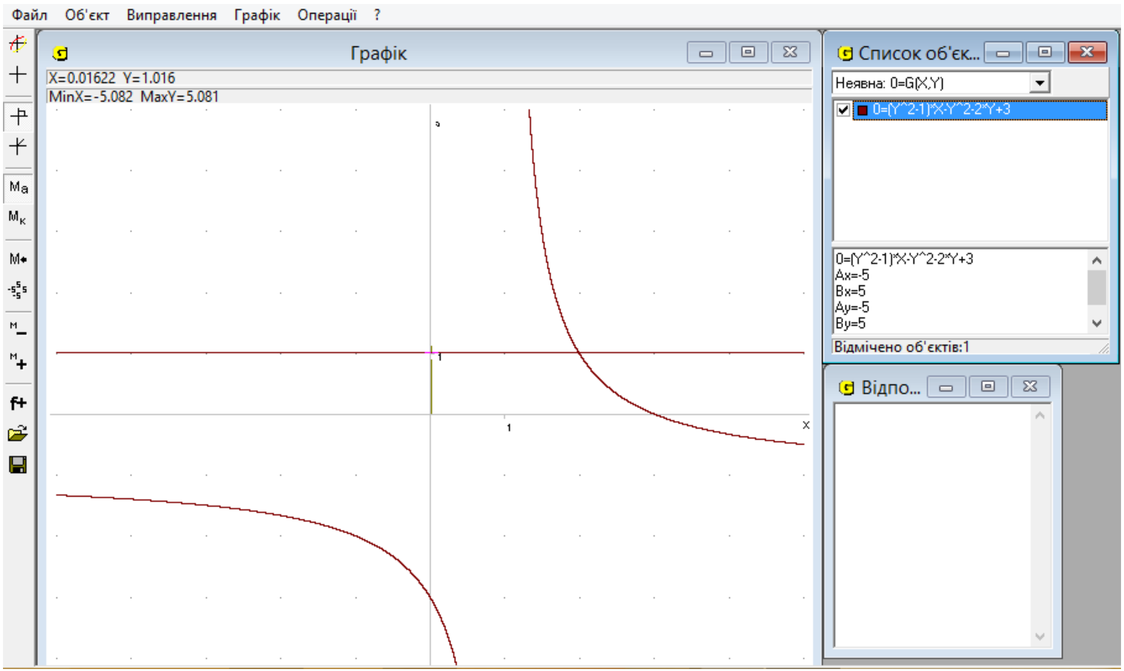


Рис. 2.3

З графіка функції видно, що при y=1 $x \epsilon R$, при y=-1 – рівняння розв'язків немає, при $y \neq \pm 1$ – рівняння має єдиний розвязок.

Так як параметр *а* ми позначали через *у*, то при *а*=1 рівняння матиме безліч розв'язків.

II. Координатна площина *xOy*.

Даний метод характерний побудовою графіків функцій *y =f(x,a)* на площині *xOy*. Дана функція задає сімейство кривих з певними властивостями. Розглянемо методи перетворення площини, які дозволять перейти від однієї кривої до будь-якої іншої кривої сімейства.

1) Паралельне перенесення

Задача. При якому значенні параметра *а* система рівнянь

$$\begin{cases} y = -x^2 - 4x + 6 \\ y = x^2 - x - 3 \\ y = -2{,}5x + a \end{cases}$$ має два розв'язки [42]?

Розв'язання. Будуємо графік $y = -x^2 - 4x + 6$, $y = x^2 - x - 3$, та сімейство прямих $y = -2{,}5x + a$ за допомогою GRAN1 (рис. 2.4)

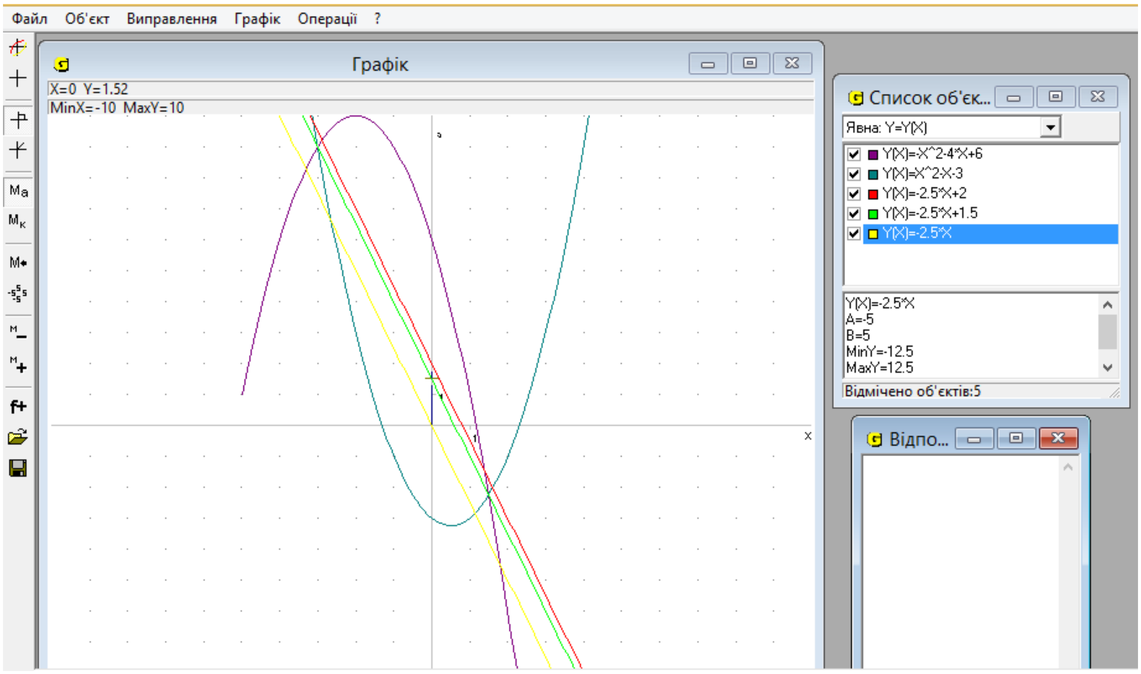


Рис. 2.4

Отже, з рис.2.4 видно, що три графіка перетнуться в двох точках при *а*=1,5 (графік зеленого кольору).

2) Поворот

Задача. При яких значеннях параметра *а* існує *k*, що рівняння

$||x-2|-2x+1|=kx+a$ має рівно три розв'язки [4]?

Розв'язання. Розглянемо функції $y_1=||x-2|-2x+1|$, $y_2=kx+a$. Графік першої функції легко побудувати, а графіком другої є сімейство прямих (здійснюємо поворот і паралельне переміщення прямої $y=x$) (рис.2.5).

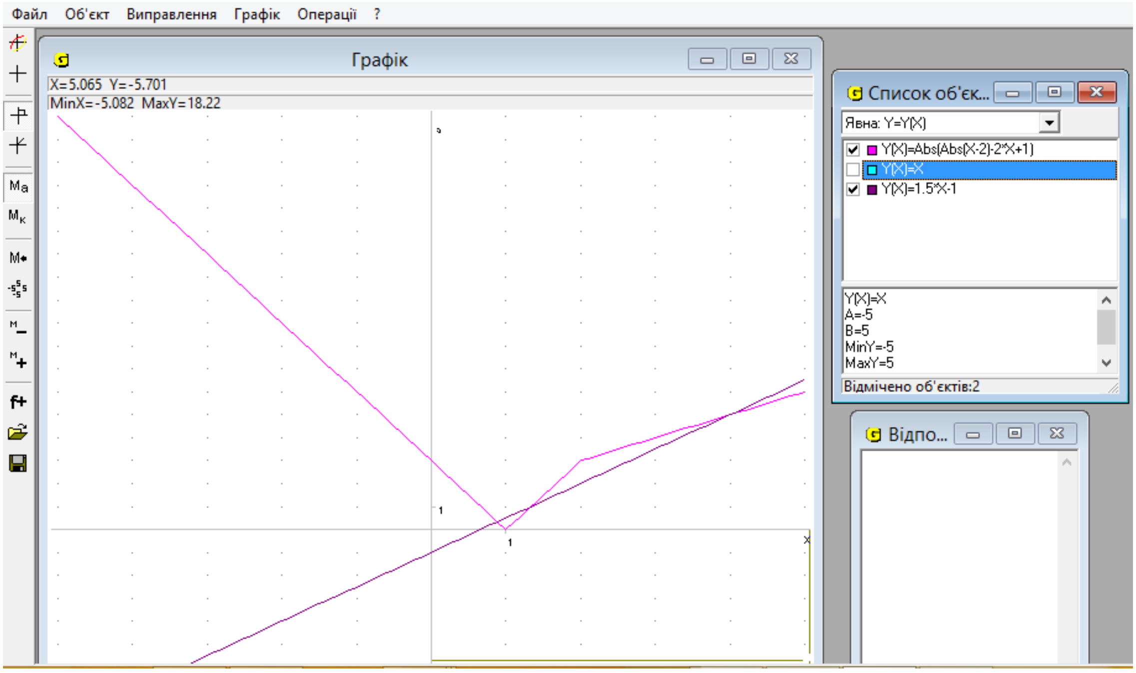


Рис. 2.5

З графіків видно, що k не може набувати від'ємних значень.

Отже, побудувавши сімейство прямих $y_2=kx+a$, знаходимо, що

$$1<k<3, \quad -3<a<1.$$

3) Гомотетія

Задача. При яких a система $\begin{cases} 2^x-2^{8y-3x+3}\geq 2^{4y+1} \\ x^2+y^2=a \end{cases}$, має хоча б один розв'язок [8]?

Розв'язання. За допомогою програми GRAN1 , будуємо графік функції $2^x-2^{8y-3x+3}-2^{4y+1}=0$ (неявне задання) та сімейство гомотетичних кіл $x^2+y^2=a$ з центром в початку координат та радіусом $\sqrt{a}$.

Вибравши полярні координати бачимо, що радіус кола має бути не меншим за $\frac{2}{5}$ (рис. 2.6). В головному меню виберемо *Операції/Нерівності* та знак «>» (оскільки нестрогої нерівності побудувати в даній програмі неможна) нам заштрихує область розв'язків (рис. 2.7).

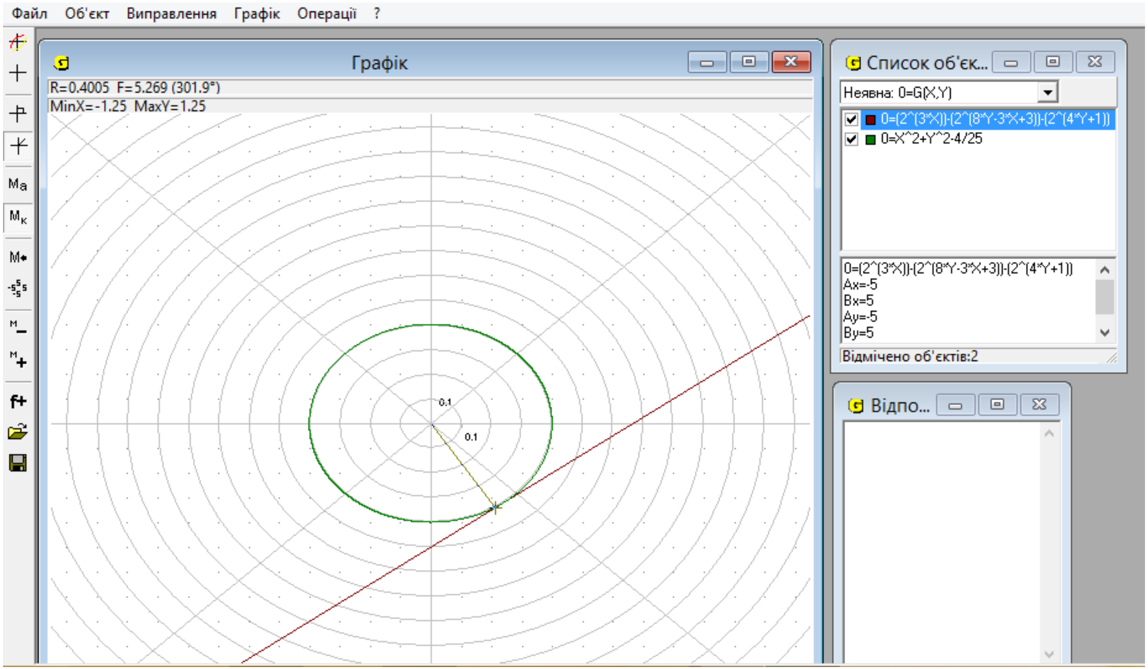


Рис. 2.6

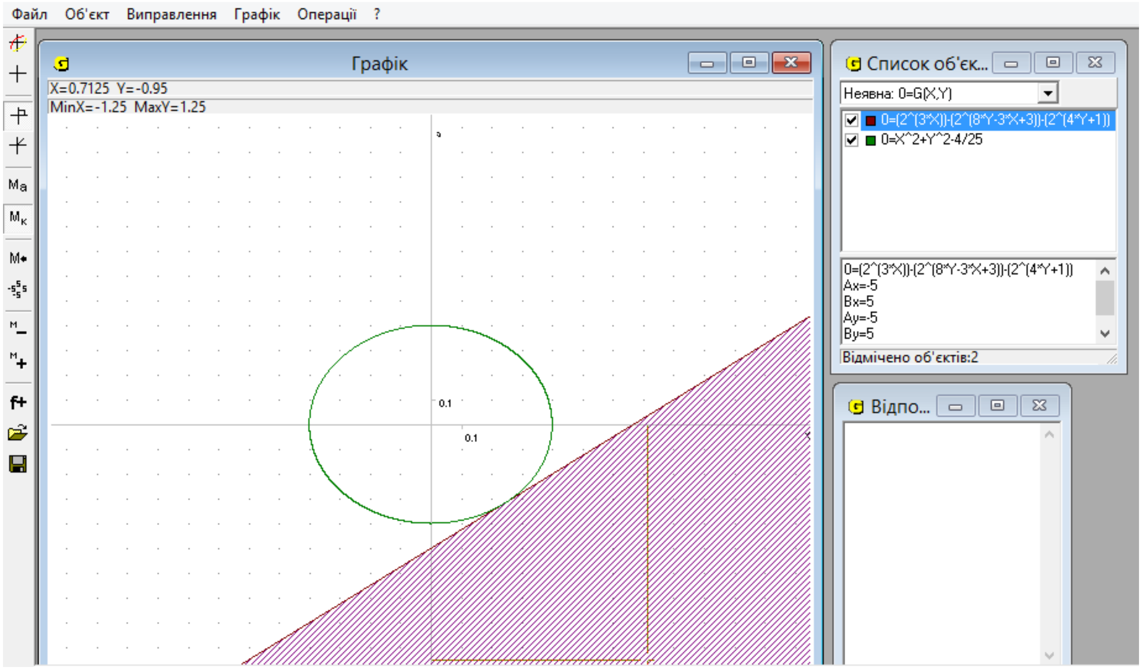


Рис. 2.7

Отже, при $a \geq \frac{4}{25}$ система має хоча б один розв’язок.

Розглянувши дані приклади задач, можна сказати, що завдання, які достатньо важко розв’язати аналітично і важко побудувати графічно більш складні функції, досить легко можна розв’язати за допомогою програми GRAN1.

2.4. Організація, проведення та результати експерименту

Предметом педагогічного експерименту було вивчення ефективності використання нових інформаційних технологій при розвязуванні задач на дослідження, а саме з параметрами в 11 класі.

Педагогічний експеримент проводився в Березниківській загальноосвітній школі І-ІІІ ступенів Свалявської районної ради Закарпатської області. Для експерименту був обраний 11 клас з академічним рівнем вивчення математики. Для учнів експериментального класу було проведено ряд занять з використанням програми GRAN1.Задуми та ідеї, які потрібно було відобразити під час занять були обговорені з вчителями математики та методистами.

Метою експерименту, з використанням НІТ, були наступні пункти:

1. розвинути пізнавальну активність школярів;
2. активізувати дослідницькі вміння;
3. залучення всіх учнів до розв'язування задач;
4. розв'язування деяких складних задач з параметрами стає доступним для більшості школярів.

Дослідно-експериментальна робота щодо перевірки ефективності даного дослідження проводилась у три етапи.

Мета першого етапу – полягала у визначені рівня вмінь учнів розв'язувати задачі з параметрами, а також у виявлені характеру залежності цього рівня від ступеню сформованості у школярів активної навчально-пізнавальної діяльності. На першому етапі була сформульована робоча гіпотеза, визначались конкретні задачі дослідження та розроблявся план роботи. Особлива увага приділялася розгляду літератури, аналізу психолого-педагогічних та методичних праць. На цьому етапі досліджувались типи рівнянь з параметрами та методи їх розв'язування. Проводились дискусії з вчителями та методистами, щодо методів навчання розв'язування задач з параметрами.

На другому етапі проводився пошуковий експеримент метою якого було поліпшення вмінь та навиків розв'язувати задачі з параметром графічним методом, використовуючи НІТ. У ході цього етапу здійснювалась цілеспрямована робота на активізацію пізнавальної діяльності та дослідницьких вмінь.

На цьому етапі експериментальної роботи уточнювалися та виявлялися можливості використання НІТ; визначалася технічна база, організаційні форми і методи навчання; розроблялися методичні рекомендації щодо використання ; розроблялися методичні рекомендації щодо використання НІТ при розв’язуванні задач з параметрами; можливості підвищення інтенсивності самостійної роботи; розробка більш ефективної методики контролю та управління навчально-пізнавальною діяльністю школярів з боку вчителя.

Для третього етапу експерименту – формуючого, характерним було те, що остаточно формувалися окремі компоненти комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання алгебри та перевірялася гіпотеза щодо сприяння інтелектуального розвитку учнів, підвищення їх інтересу до математики як навчального предмета, розвиток дослідницьких умінь і загального рівня математичної підготовки при розв’язуванні задач з параметрами з використанням НІТ.

На третьому етапі, за допомогою анкет (див. Додаток Г), здійснювалось опитування, метою якого було виявити вплив використання програмного засобу GRAN1 на розвиток пізнавального інтересу та вміння розв’язувати задачі з параметром графічним методом більшості учнів.

Таким чином, анкетування дало змогу зробити такі висновки. Розв’язуванню задач з параметрами вчителі приділяють мало часу, одиниці учнів можуть розв’язати задачі такого типу, використання педагогічних програмних засобів на уроках математики використовуються дуже вузько. Тоді як розв’язування задач з параметрами засобами НІТ викликало інтерес до таких задач і разом з тим більшість учнів, які навіть мали середній рівень знань, впорались із завданнями.

Висновки до другого розділу

Майбутнє математичної освіти закладається сьогодні, насамперед впровадженням нових освітніх технологій у навчання математики, з метою підвищення ефективності математичної діяльності засобами інформаційних технологій. У певній мірі ці сподівання пов'язуються з можливостями реалізувати ідеї конструктивізму у навчанні математики. Формалізація ходу розв'язування задачі (цілком або її фрагментів) та передача їх комп'ютеру для автоматичного виконання — провідна ідея цього процесу. Рівень сучасних інформаційних технологій спрощує цю складну задачу, дозволяючи зосереджуватись на змістовних сторонах цього процесу [37].

Інформаційні технології відкривають нові можливості в навчанні математики, насамперед це проявляється в тому, що вони стають для учнів засобом пізнавальної діяльності (експериментування з метою перевірки своїх гіпотез, розв'язання задач, порівняння з передбаченнями теорії). Це відповідає головним напрямам оновлення загальноосвітньої школи — діяльнісному підходу, педагогіки співробітництва, які змінюють як роль і місце вчителя в класі, так і характер пізнавальної діяльності учнів [44].

Існуючий педагогічний програмний засіб GRAN1, розроблений під керівництвом академіка М. І. Жалдака (Київський ДПУ) набув широкого розповсюдження у навчальних закладах України. Використання GRAN1 впливає на формування та розвиток в учнів нешаблонності та оригінальності мислення, математичної інтуїції, дозволяє значно підвищити рівень інформаційної культури учнів, що виявляється в чіткому розумінні меж використання комп’ютера при розв’язуванні задач, отриманні навичок, планування своєї діяльності, відповідальності у прийнятті рішень, вмінні оцінювати отримані результати [9].

Таким чином, визначені цілі використання комп'ютера на уроках математики, а саме: розвиток міжпредметних зв'язків математики та інформатики; формування комп'ютерної грамотності, розвиток самостійної роботи учнів на уроці; реалізація індивідуального, особистісно зорієнтованого підходу, розвиток творчих та дослідницьких здібностей. Виходячи з цього, сформульовані основні завдання вчителя математики:

- забезпечити фундаментальну математичну підготовку дітей;
- формувати інформаційну та методичну культуру, творчий дослідницький стиль діяльності учнів;
- підготувати учнів використовувати інформаційні технології та інші інформаційні структури.

Послідовне використання ППЗ GRAN1 передбачає розробку спеціальної методики та підручників, але це потребує часу, а роботу треба починати зараз тому, що тільки в такий спосіб може сформуватись відповідна методика та уявлення про відповідні підручники.

Таким чином, на основі досвіду роботи вчителів з педагогічними програмними засобами, нами була розроблена система задач з параметрами та представлена методика розв’язування задач з параметрами за допомогою GRAN1.

Досвід використання програми GRAN1 при розв’язуванні задач з параметрами у навчальний процес Березниківської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів Свалявської районної ради Закарпатської області дав змогу стверджувати, що розв’язування задач з параметрами засобами НІТ викликало інтерес до таких задач і разом з тим більшість учнів, які навіть мали середній рівень знань, впорались із завданнями.

ВИСНОВКИ

Протягом тривалого часу задачі з параметрами входять в екзаменаційні білети з математики для абітурієнтів вищих навчальних закладів, а в останні роки такі задачі пропонуються й при складанні ЗНО. Як правило, не всі абітурієнти можуть розв’язати подібні задачі, що приводить до зниження оцінки за письмову роботу, і часто саме через це не вистачає потрібної кількості балів при зарахуванні до вищого навчального закладу. Загальноосвітня школа з багатьох причин не може навчити своїх учнів розв’язувати задачі з параметрами. Це дуже важкий матеріал, що вимагає великої кількості часу; крім того, перш ніж приступати до розв’язання подібних задач учень повинен досконало оволодіти загальним курсом математики.

Аналіз програм з математики дав змогу стверджувати, що значущість задач з параметрами вказано лише у програмах з поглибленим вивченням. Однак такі завдання присутні в підручниках всіх рівнів вивчення математики.

В сучасних підручниках можна виділити чотири типи задач з параметрами:

1. розв’язати рівняння, нерівність або їх системи для всіх можливих значень параметра;
2. завдання, в яких пропонується знайти лише ті розв’язки, які задовольняють певним умовам;
3. завдання, на знаходження кількості коренів рівняння;
4. завдання, пов’язані з властивостями функцій.

Дослідження методичної літератури дало змогу виділити такі основні методи розв’язування задач з параметрами як аналітичний та графічний. Аналітичний метод більш складний і не всі учні можуть впоратись з завданням, використовуючи даний метод. Тоді як графічний є красивий і наочний, але не всі завдання можна розв’язати, використовуючи цей метод, і він потребує вмінь побудови графіків функцій.

Використання програми GRAN1 дозволяє учням розв’язувати задачі з параметрами графічним методом, не маючи великої вправності у побудові графіків функцій та залучати до розв’язування всіх учнів не залежно від їхньої математичної підготовки.

Результати експериментального навчання показали, що проведення уроків з математики з використанням педагогічного програмного засобу GRAN1 сприяє підвищенню комп’ютерної грамотності учнів, формуванню в них здатностей обґрунтовувати правильність розв’язування задач, висувати та емпірично перевіряти справедливість гіпотез, аналізувати раціональність (ефективність) розв’язування задач з параметрами графічним методом, будувати графіки рівнянь, нерівностей та їх систем за допомогою комп’ютера і проводити їх дослідження; критично мислити, систематизувати отримані результати, і, як наслідок, сприяє формуванню в учнів математичних та інформаційних компетентностей.

Основні положення та висновки, система задач та подана методика даного дослідження можуть бути використані вчителями шкіл під час підготовки й проведення уроків математики, факультативних занять та студентами і викладачами ВУЗів.

СПИСОК ВИКОРИСТАННИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амелькин В. В. Задачи с параметрами / В. В. Амелькин, В. Л. Рябцевич. – Минск : Асар, 2001. – 464 с.
2. Апостолова Г. Перші зустрічі з параметром / Г. Апостолова, В. Ясінський. – К. : Факт, 2006. – 324 с.
3. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова. – К. : Поліграф сервіс, 2001. – 252 с.
4. Апостолова Г. В. Я сам! / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 1997. – 202 с.
5. Ачкан В. В. Використання ППЗ "GRAN1" у процесі формування математичних компетентностей старшокласників (на прикладі змістової лінії рівнянь та нерівностей) / В. В. Ачкан // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, досвід, проблеми // Збірник наукових праць. Випуск 24. – Київ-Вінниця: ТОВ фірма "Планер", 2010. – С. 8 – 14.
6. Використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики [Електронний ресурс]. – 2015. – Режим доступу до ресурсу:http://teacherjournal.com.ua/attachments/18190_Використання%20 компютерних%20технологій%20%20на%20уроках%20математики.docx.
7. Вороний О. М. Рівняння зі змінною під знаком цілої частини / О. М. Вороний // Математика в школі. – 2003. - №2. – С. 49-51.
8. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн. – К. : РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992. – 290 с.
9. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К. : РННЦ "ДІНІТ". – 2004. – 255 с.
10. Збірник задач з математики для вступників до вищих навчальних закладів / за ред. М. І. Сканаві. – К. : Арій, 2011. – 608 с.
11. ЗНО з математики [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/191/

12.Істер О. С. Алгебра: підручн. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закладів / О. С. Істер. – К.: Генеза, 2017. – 264 с.

13.Клочко В. І. НІТ навчання математики в технічній вищій школі: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.02 / Клочко В.І. – Вінниця, 1998. – 396 с.

14.Крамаренко Т. Г. Графічні прийоми розв'язування задач з параметрами / Т. Г. Крамаренко // Математика в школі. – 2007. – № 6. – С. 41 – 48.

15.Кушнир И. Неравенства / И. Кушнир. – К. : Астрата, 1996. – 541 с.

16.Кушнир И. Уравнения / И. Кушнир. – К. : Астрата, 1996. – 604 с.

17.Кушнир И. Функции. Задачи и решения / И. Кушнир. – К. : Астрата, 1996. – 541 с.

18.Львов М. Алгебра з комп‘ютером / М. Львов, Н. Львова. – К.: Шк. світ, 2007. – 128 с.

19.Ляшенко М. Похідна та її застосування / М. Ляшенко. – К. : Рад. школа, 1985. – 152 с.

20. Марков В. К. Метод координат и задачи с параметрами / В. К. Марков. – М. : Изд.-во Моск. Ун-та, 1970. – 146 с.

21.Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітн. навч. закладів з поглибленим вивченням математики: підручн. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 416 с.: іл.

22.Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: підручн. для 10 кл. з погл. вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А Номіровський В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 415 с.: іл.

23.Мерзляк А. Г. Алгебра: підручн. для 11 кл. з погл. вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А Номіровський В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – Ч.1 – 256 с.: іл.

24.Мерзляк А. Г. Алгебра: підручн. для 11 кл. з погл. вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А Номіровський В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – Ч.2 – 272 с.: іл.

25.Мерзляк А. Г. Алгебра: підручн. для 7 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2015. – 256 с.: іл.

26.Мерзляк А. Г. Алгебра: підручн. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 384 с.: іл.

27.Мерзляк А. Г. Алгебра: підручн. для 8 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 240 с.: іл.

28. Михайленко Л. І. Параметри / Л. І. Михайленко, Т. Г. Платова // Математика в школах України. — Х. : Вид. група «Основа», 2008. – № 16–18 (208–210). — 127 с.

29.Навчальні програми для 5-9 класів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas

30.Навчальні програми для 10-11 класів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

31.Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підручн. для 10 кл. загальноосвітн. навч. закладів: академ. рівень / Є. П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.: іл.

32.Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас: підручн. загальноосвітн. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011. – 448 с.: іл.

33. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях (з Додатком): Навчальний посібник для учнів 7–11 класів / Є. П. Нелін. – Х. : Світ дитинства, 1998. – 116 с. (Додаток 56 с.)

34. Пліско О. В. Задачі з параметрами для 7–8 класів / О. В. Пліско // Математика в школах України. — Х. : Вид. група «Основа», 2012. – Вип. 1 (109). — 128 с.

35. Програма спеціального курсу “Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі алгебри і початків аналізу загальноосвітніх навчальних закладів” / [М. І. Жалдак, В. Ю. Биков, Ю. О. Жук та ін.] // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск VI: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2006. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – 397 с. (С. 12-21).
36. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія / С. А. Раков. – Х.:Факт, 2005. – 360 с.
37. Рамський Ю. С. Про роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві / Ю. С. Рамський, К. І. Рамська // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №2. Комп‘ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наукових праць / Редрада. - К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2008. – №6(13). – 182 с. (С.12-16).
38. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ.мат. спеціальностей пед.навч. закладів/ З. І. Слєпкань.– К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
39. Тригонометрія : Вчимося розв’язувати задачі / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – К. : Генеза, 2008. – 352 с. : іл.
40. Шарова Л. И. Уравнения и неравенств / Л. И. Шарова // Пособие для подготовительних отделений. – К. : Вища школа, 1981. – 280 с.
41. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В. А. Ясінський. – Вінниця : ВДПУ, 1998. – 266 с.
42. Ясінський В. А. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТТУ «КПІ» / В. А. Ясінський, за ред. чл.-кор. НАН України В. С. Мельника. – К. : НТТУ «КПІ», 2005. – 372 с. (Серія «На допомогу абітурієнту»)
43. Ястребинецкий Г. А. Задачи с параметрами / Г. А. Ястребинецкий. – М. : Просвещение, 1986. – 128 с.

44. Ola Royrvik O. Use of computer algebra systems in Norwegian engineering education / Ola Royrvik O., Hornaes H. P. // International Conference on Engineering Education. Oslo, Norway, August 6-10, 2001. – P. 6. – E 7-12.

Додаток А

Схеми розв’язування лінійних рівнянь та нерівностей

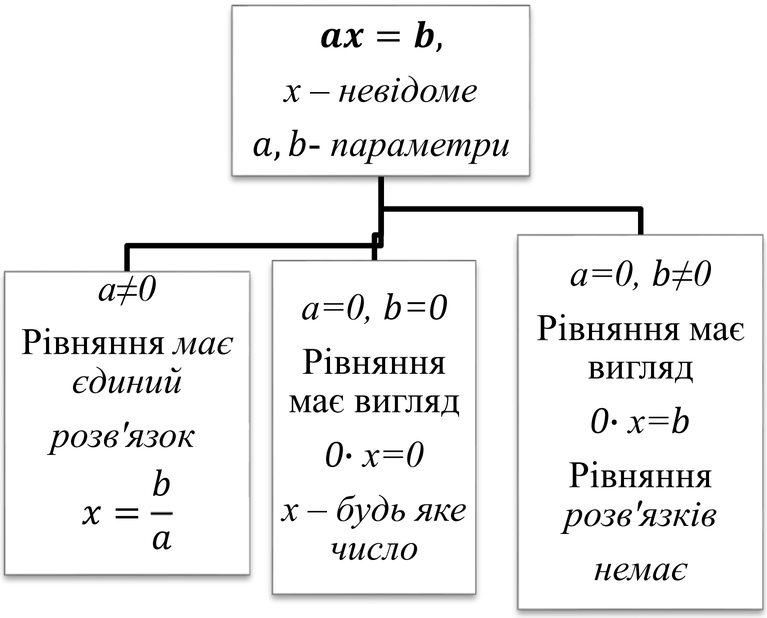


Схема 1

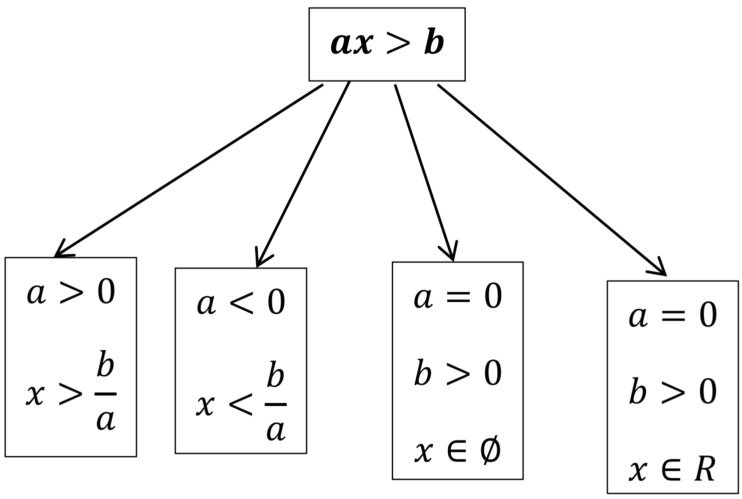


Схема 2 [8]

Додаток Б

Схема розв’язування квадратних рівнянь

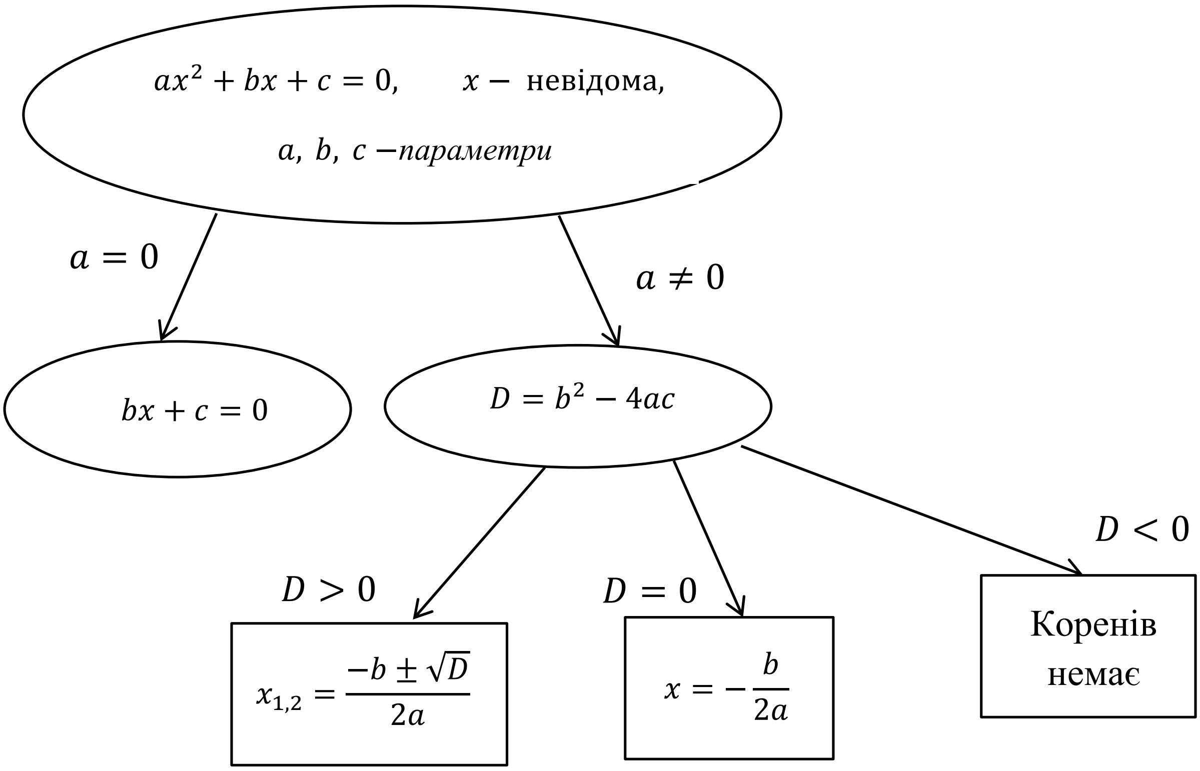
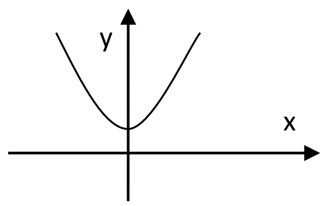
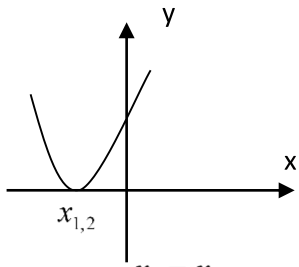
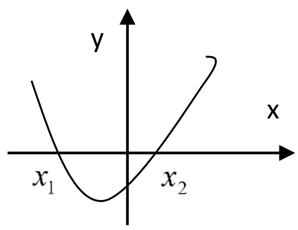


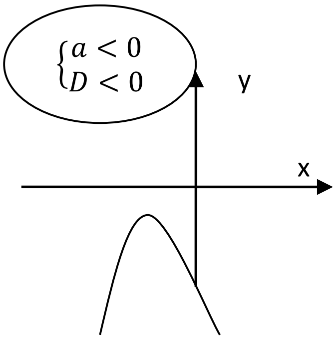
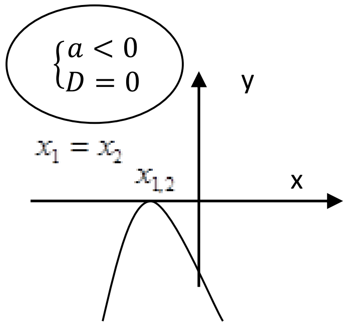
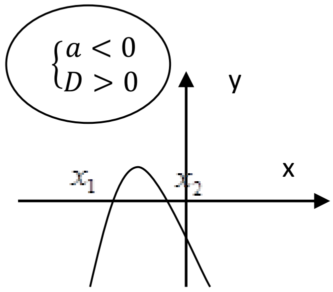
Схема 4 [8]

Додаток В

Розв’язування квадратних нерівностей

Таблиця 3

$\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$ 	$\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \end{cases}$  $x_1 = x_2$	$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \end{cases}$  $x_1 \neq x_2$
$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in R \setminus \{x_b\}$ $(x_в = x_{1,2} = \frac{-b}{2a})$	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in$ $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in$ $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in (x_1; x_2)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x_в = x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in [x_1; x_2]$

		
$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in R \setminus \{x_b\}$ $(x_в = x_{1,2} = \frac{-b}{2a})$	$ax^2 + bx + c < 0$ $x \in$ $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in R$	$ax^2 + bx + c \leq 0$ $x \in$ $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c > 0$ $x \in (x_1;\ x_2)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in \emptyset$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x_в = x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ $x \in [x_1; x_2]$

[8]

ДОДАТОК Г

АНКЕТА

Шановні учні, Ви приймаєте участь в опитуванні, метою якого є дослідження переваг і недоліків використання НІТ (ППЗ GRAN1) при вивченні курсу алгебри.

Просимо Вас відповісти на всі запитання анкети. Результати опитування будуть використані для аналізу перспектив розробки та впровадження методики вивчення курсу алгебри та початків аналізу інтерактивних технологій навчання.

П.І.П опитуваного

1. Чи часто на уроках алгебри вам доводиться розв'язувати задачі з параметрами?
2. Чи відчуваєте труднощі при розв'язуванні задач з параметрами? І Які?
3. Чи часто і в якій формі використовуються НІТ на уроках математики?
4. Чи сподобалися Вам уроки з використанням програми GRAN1? Якщо «так», то чому?

5. Чи викликали труднощі при роботі з ППЗ GRAN1? Якщо «так», то в чому?
6. Чи відчуваєте впевненість у розв’язуванні задач з параметрами з використанням ППЗ GRAN1?
7. Чи зрозуміли ви суть графічного методу розв’язування задач з параметрами?
8. Які нові форми організації Ви відкрили для себе при розв’язуванні задач з параметрами?
9. Чи доцільно, на Вашу думку, були використанні НІТ?
10. Чи варто систематично використовувати НІТ на уроках алгебри? Чому?
11. Виберіть, з яким рівнем вивчення краще використовувати інтерактивні технології, на Вашу думку?

А) у класах, де математика вивчається на рівні стандарту чи академічному; Б) у класах з поглибленим рівнем; В) у всіх класах з різним рівнем вивчення математики.
12. Чи сподобалися Вам уроки з використанням програми GRAN1? Якщо «так», то чому?
13. Ваші побажання щодо покращення якості уроку в сучасних умовах.